由具有两个简单对象的模范畴得到的链环与三维流形不变量

Korablev Ph. G.*
korablev@csu.ru

摘要

我们描述了具有两个简单对象的最简单的非平凡模范畴 $\mathfrak{C}$ 。随后，我们从该范畴中提取出三维球面中非定向链环的不变量，以及三维流形的两个不变量：复值的 Turaev–Reshetikhin 型不变量 tr_ε 和实值的 Turaev–Viro 型不变量tv_ε。这两个三维流形不变量之间满足等式 $|tr_\varepsilon|^2 \cdot(\varepsilon+2) = tv_\varepsilon$，其中 ε 是方程 $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$的一个根。最后，我们证明 tv_ε 与著名的三维流形不变量 ε 一致。

arXiv:2305.00733v3 [math.GT] 1 Oct 2023

目录

1. 引言.1 2. 范畴 $\mathfrak{C}$ .2 2.1 对象与态射.2 2.1.1 对象.2 2.1.2 态射.3 2.1.3 态射复合.3 2.1.4 恒等态射.3 2.2 幺半结构.4 2.2.1 对象的张量积.4 2.2.2 态射的张量积.5 2.2.3 结合子同构.6 2.2.4 单位对象.9 2.2.5 左、右单位同构.10 2.3 编织.10 2.4 扭结与对偶性.12 2.4.1 扭结.12 2.4.2 对偶性.14 3. 不变量 tr 或链环.17 3.2 三维流形不变量.19 4. tv_ε 与 ε 不变量之间的联系.21 4.1 不变量 tv_ε .21 4.1.1 重数模.22 4.1.2 配对.23 4.1.3 6j 符号.24 4.1.4 特殊脊与 tv_ε 的定义.25 4.2 ε-不变量.26

1. 引言

本文致力于实现一种构造三维球面中链环以及闭三维流形的量子不变量的方法。这种方法最初由 [16], 提出，更详尽的阐述见于著作 [17, 18] （另见 [1]）。该方法的核心是：对于每个模范畴 $\mathcal{V}$，都可以通过一种特殊技术提取两个不变量$\tau_\mathcal{V}$（M）和 $|M|_\mathcal{V}$，它们对应于一个闭定向三维流形 M。这两个不变量的取值满足关系式 $|M|_\mathcal{V} = \tau_\mathcal{V}$（$M$）$\cdot\, \tau_\mathcal{V}$（$-M$），其中 $-M$是定向相反的流形。

最初，N. Reshetikhin 和 V. Turaev 在其工作 [14] 中给出了不变量 $\tau_\mathcal{V}$ 的构造，所考虑的是量子群 U_q（sl_2）的不可约表示范畴。因此，自然可以将所有由模范畴得到的不变量称为 Reshetikhin–Turaev 型不变量。同样，不变量 $|M|_\mathcal{V}$ 的构造最早由 V. Turaev 和 O. Viro 在其工作 [19] 中提出，他们使用了量子群 U_q（sl_2）的 q-6j 符号。因此，自然可以将所有由模范畴得到的不变量 $|M|_\mathcal{V}$ 称为 Turaev–Viro 型不变量。

其中一项任务是研究简单模范畴的 Reshetikhin–Turaev 型不变量和 Turaev–Viro 型不变量的性质。融合范畴（见[4, 2, 5]）是适合此类研究的一个相当方便的范畴。论文 [15] 给出了模融合范畴的完整分类，这些范畴的秩

*本研究由俄罗斯科学基金会（项目编号：23-21-10014）资助

（即简单对象的同构类数）不超过四个。这些范畴可用于构造 Reshetikhin–Turaev 型和 Turaev–Viro 型的最简单不变量。

范畴 $\mathfrak{E}$ 在本文中起着核心作用。这个范畴广为人知。例如，它是量子计算中反常费波纳契模型的基础（见 [6, 22]）。作为仅含两个简单对象的融合范畴中最简单的非平凡范畴之一，它经常出现（见 [12]）。范畴 $\mathfrak{E}$ 的一个特点是包含非平凡的结合子。尽管存在“相干定理”（见 [8]），该定理指出每个幺半范畴都等价于一个严格幺半范畴（即所有结合子都平凡的范畴），但范畴 $\mathfrak{E}$ 在进行某些计算时仍然十分方便。由范畴 $\mathfrak{E}$ 得到的 Reshetikhin–Turaev 型不变量记作 tr_ε，而 Turaev–Viro 型不变量记作 tv_ε。这两个不变量的值都取决于参数 ε，该参数可以是方程 $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$的任意平方根。

常数 ε 用于构造不变量 tr_ε 和 tv_ε，它出现在三维流形的 ε-不变量的定义中（见 [11]）。这个不变量可以用几种等价的方式定义。其中一种是将其定义为 5 阶经典 Turaev–Viro 不变量的同调平凡部分。ε-不变量在三维流形的复杂性理论中发挥着重要作用（见 [9]）。例如，该不变量已用于计算若干无限系列三维流形的显式复杂度值（见 [20, 21]）。

本文证明了闭三维流形的 ε-不变量的值与 tv_ε不变量相同（定理 13）。由于 tr_ε 不变量强于 tv_ε 不变量（例 10），因此可以将其视为 ε-不变量的增强版本。由于 ε-不变量是某个经典 Turaev–Viro 不变量的一部分，因此 tr_ε 不变量也属于某个经典 Reshetikhin–Turaev 不变量，这是很自然的（见 [7]）。tr_ε 不变量并非新提出，但所采用的方法能够以纯组合的方式给出其定义，而无需使用量子群表示论。在介绍范畴 $\mathfrak{E}$ 以及不变量 tr_ε 和 tv_ε时，我们主要采用书籍 [17]中的术语和记号。

本文结构如下。第 2 节详细介绍范畴 $\mathfrak{E}$。[22]从另一种视角对该范畴作了类似的介绍。尽管范畴 $\mathfrak{E}$ 的构造早已广为人知，本文仍出于以下几个原因对其加以介绍。首先，统一记号，并为范畴 $\mathfrak{E}$中态射的表示建立图示方法。其次，确定范畴 $\mathfrak{E}$的几种等价观点之一。第三，这样的介绍使全文在一定程度上具有自足性。

第 3 节定义了针对无定向链环和三维流形的不变量 tr_ε，并计算了若干示例。特别地，本文推导出一个显式公式，用于求取一般化霍普夫链环和透镜空间对应的不变量 tr_ε 的值。

第 4 节证明，由范畴 $\mathfrak{E}$ 导出的图拉耶夫–维罗型不变量 tv_ε 与闭三维流形的 ε-不变量一致。

2. 范畴 $\mathfrak{E}$

本节将构造模范畴 $\mathfrak{E}$。这一构造简单明了，完全是组合性的。

2.1. 对象与态射

2.1.1. 对象

设 $I = \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$ 是一个包含两个元素 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{A}$ 的集合。这两个元素在该范畴中充当简单对象。每个对象 X 属于 $\mathfrak{E}$，都是一个有限有序元组 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，其中每个 $x_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$。在大多数情况下，将 X 理解为非交换和 $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ 会更方便。从图示上看，每个对象都可以画成一列，由若干个单元组成，每个单元中包含符号 $\mathbf{1}$ 或 $\mathbf{A}$（图 1）。列从上往下读取。

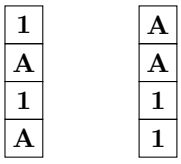


图 1. 对象 $\mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A}$（左侧）和 $\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{1}$（右侧）的图示

如果 $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$，那么记 $|X|_{\mathbf{1}}$ 中元素 $\mathbf{1}$ 的个数为 X，并记 $|X|_{\mathbf{A}}$ 中元素 $\mathbf{A}$ 的个数为 n。显然，$|X|_{\mathbf{1}} + |X|_{\mathbf{A}} = n$。

2.1.2. 态射

n m设 $X = \sum x_i$和 $Y = \sum y_j$, $x_i, y_j \in I$是两个对象。从 X到 $Y$$i=1$ $j=1$的每个态射 $f \in Hom(X,Y)$都是一个映射 $(x_i, y_j) \mapsto a_i^j \in \mathbb{C}$，并满足以下性质：若 $x_i \neq y_j$，则 $a_i^j = 0$；若 $x_i = y_j$，则值 a_i^j可以是任意复数。

从图形上看，每个态射都绘制为箭头，将第一个对象的每个单元与第二个对象的每个单元连接起来。每个箭头都标记一个复数。为方便起见，值为零的箭头通常不绘制。图2展示了一个态射的示例。

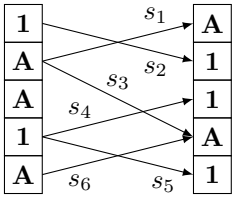


图2。 从对象 $\mathbf{1}+\mathrm{A}+\mathrm{A}+\mathbf{1}+\mathrm{A}$到对象 $\mathrm{A}+\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathrm{A}+$的态射示例 $\mathbf{1}$

n m设 $f \in Hom(X,Y)$是从对象 $X = \sum x_i$到对象 $Y = \sum y_j$的一个态射。然后我们可以构造$i=1$ $j=1$两个矩阵： $[f]_{\mathbf{1}}$其大小为 $|Y|_{\mathbf{1}} \times |X|_{\mathbf{1}}$，另一个 $[f]_{\mathbf{A}}$其大小为 $|Y|_{\mathbf{A}} \times |X|_{\mathbf{A}}$。矩阵$[f]_{\mathbf{1}}$的列与 X中值为 1 的元素一一对应。矩阵 $[f]_{\mathbf{1}}$的行与Y中值为 1 的元素一一对应。矩阵 $[f]_{\mathbf{1}}$的元素 a_i^j等于连接 X 中第i个符号 1 与 Y中第 j个符号 1 的箭头所对应的值。矩阵 $[f]_{\mathbf{A}}$ 以类似的方式构造，但它只包含连接符号 A 的箭头所对应的值。

例如，对于图2中所示的态射 f，我们有

$$[f]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_4 \\ 0 & s_5 \end{pmatrix} \text{ and } [f]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & s_6 \end{pmatrix}.$$

2.1.3. 态射复合

n m l设 $X = \sum x_i$、 $Y = \sum y_j$ 和 $Z = \sum z_k$ 为三个对象。设 $f \in Hom$（X，Y）是从 $X$$i=1$ $j=1$ $k=1$到 Y 的一个态射， $g \in Hom$（Y， Z）是从 Y 到 Z 的一个态射。那么，复合 $f \circ g$ 是一个从 X 到 Z 的态射，其定义如下列矩阵所示：

$$[f \circ g]_{\mathbf{1}} = [g]_{\mathbf{1}} \cdot [f]_{\mathbf{1}} \text{ and } [f \circ g]_{\mathbf{A}} = [g]_{\mathbf{A}} \cdot [f]_{\mathbf{A}}.$$

请注意，我们将态射 f 和 g 的复合 $f \circ g$ 按从左到右的顺序书写。首先应用左侧态射 f，然后应用右侧态射 g。

等价地，我们也可以在图示上定义复合 $f \circ g$。要定义连接对象 X 的单元 x_i 与对象 Z 的单元 z_k 的箭头的值，我们应在态射 f 和 g 的图示中，找出所有从 x_i到 z_k 的有向二步路径。然后，对每条路径，计算该路径上各箭头对应值的乘积。最后，将计算所得的乘积相加（图3）。

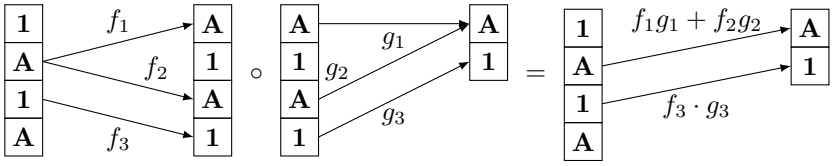


图3. 两个态射的复合

2.1.4. 恒等态射

设 $X = \sum x_i$是一个对象。然后，恒等态射 id_X 由两个矩阵定义： $[id_X]_{\mathbf{1}}$ 是大小为 $|X|_{\mathbf{1}}$ 的$i=1$单位矩阵，而 $[id_X]_{\mathbf{A}}$ 是大小为 $|X|_{\mathbf{A}}$的单位矩阵。恒等态射的图示id_X 包含 n 个平行箭头，每个箭头都关联数字 1（图 4）。

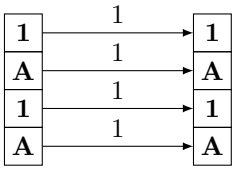


图 4. 对象 $X = \mathbf{1} + \mathrm{A} + \mathbf{1} + \mathrm{A}$ 的恒等态射 id_X

定理 1。 $\mathfrak{C}$ 是该范畴。

证明。首先，我们应验证态射的复合满足结合性，即对于任意四个对象X, Y, Z, W以及三个态射 $f \in Hom(X, Y)$、$g \in Hom(Y, Z)$ 和 $h \in Hom(Z, W)$:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

其次，我们应验证与恒等态射复合不会改变另一个态射，即对于任意两个对象 X, Y以及态射 $f \in Hom(X, Y)$:

$$id_X \circ f = f \circ id_Y = f.$$

这两个结论显而易见，并且可由矩阵乘法的结合性以及与单位矩阵相乘的性质得出。□

2.2. 幺半结构

这里我们在范畴 $\mathfrak{C}$上定义一种幺半结构，从而使该范畴成为幺半范畴。我们将定义对象和态射的张量积、结合律同构、单位对象以及左、右单位同构。事实证明，范畴 $\mathfrak{C}$ 并非严格的。它包含非恒等的结合子同构。

2.2.1. 对象的张量积

设 X、$Y \in I$ 为简单对象。定义张量积 $X \otimes Y$ 如下:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1},\\
&\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A},\\
&\mathbf{A} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{A},\\
&\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

通过线性性，将已定义的简单对象的张量积扩展到范畴 $\mathfrak{C}$ 的所有对象:

$$(X_1 + X_2) \otimes Y = X_1 \otimes Y + X_2 \otimes Y \text{ for } X_1, X_2, Y \in I$$

and

$$X \otimes (Y_1 + Y_2) = X \otimes Y_1 + X \otimes Y_2 \text{ for } X, Y_1, Y_2 \in I.$$

由于范畴 $\mathfrak{C}$ 的对象表示为非交换和，我们应精确定义求和项的顺序。如果乘积中的第一个和第二个元素不是简单对象，则按如下方式定义顺序:

$$(X_1 + X_2) \otimes (Y_1 + Y_2) = X_1 \otimes Y_1 + X_1 \otimes Y_2 + X_2 \otimes Y_1 + X_2 \otimes Y_2 \text{ for } X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in I.$$

如果对象 X 或 Y 不是简单对象，则通过归纳应用前述规则，可以正确地定义结果 $X \otimes Y$。

例 1. 计算 $X \otimes (Y \otimes Z)$，其中 $X = \mathrm{A} + \mathbf{1}$、$Y = \mathrm{A}$ 和 $Z = \mathbf{1} + \mathrm{A}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} + \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{1} + \mathbf{A})) = (\mathbf{A} + \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} + \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A}) =\\
= \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

注 1. 一般情况下（$X \otimes Y$）$\otimes Z \neq X \otimes$（$Y \otimes Z$）。不过，当然，$|$（$X \otimes Y$）$\otimes Z|_{\mathbf{1}} = |X \otimes$（$Y \otimes Z$）$|_{\mathbf{1}}$以及 $|$（$X \otimes Y$）$\otimes Z|_{\mathbf{A}} = |X \otimes$（$Y \otimes Z$）$|_{\mathbf{A}}$。事实上，对象（$X \otimes Y$）$\otimes Z$ 和 $X \otimes$（$Y \otimes Z$）的区别仅在于求和项的顺序。

2.2.2. 态射的张量积

设 $X=\sum_{i=1}^{n} x_i$、$Y=\sum_{j=1}^{m} y_j$、$Z=\sum_{r=1}^{p} z_r$ 和 $T=\sum_{s=1}^{q} t_s$ 是范畴 $\mathfrak{C}$中的对象，其中 x_i、y_j、z_r、$t_s \in I$ 都是简单对象。设 $f \in Hom(X、Y)$ 是从 X到 Y 的一个态射，$g \in Hom(Z、T)$ 是从 Z到 T的一个态射。最后，设态射 f由取值 $f(x_i、y_j)=f_i^j \in \mathbb{C}$、$i \in \{1,\ldots,n\}$、$j \in \{1,\ldots,m\}$定义，态射 g由取值 $g(z_r、t_s)=g_r^s \in \mathbb{C}$、$r \in \{1,\ldots,p\}$、$s \in \{1,\ldots,q\}$定义。

如下定义态射 $f \otimes g \in Hom(X \otimes Z, Y \otimes T)$。考虑 $X \otimes Z$ 中的求和项 $x_i \otimes z_r$ 和 $Y \otimes T$ 中的求和项 $y_j \otimes t_s$。每个求和项要么是一个求和项（如果至少一个对象是 $\mathbf{1}$），要么是两个求和项（如果两个简单对象都是 $\mathbf{A}$）。如果 $x_i \neq y_j$ 或 $z_r \neq t_s$，则将与 $x_i \otimes z_r$和 $y_j \otimes t_s$ 的所有求和项相关联的态射 $f \otimes g$ 的值定义为零。如果 $x_i = y_j$和 $z_r = t_s$，则 $x_i \otimes z_r = y_j \otimes t_s$。如果 x_i或 z_r 中任意一个是 $\mathbf{1}$，则将与这一对 $(x_i \otimes z_r, y_j \otimes t_s)$ 相关联的态射 $f \otimes g$ 的值定义为 $f_i^j \cdot g_r^s \in \mathbb{C}$。当 $x_i = z_r = \mathbf{A}$（且 $y_j = t_s = \mathbf{A}$）时，结果为 $x_i \otimes z_r = \mathbf{1} + \mathbf{A}$ 和 $y_j \otimes t_s = \mathbf{1} + \mathbf{A}$。将与 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 和 $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ 这两对相关联的态射 $f \otimes g$ 的值定义为 $f_i^j \cdot g_r^s \in \mathbb{C}$，与另外两对相关联的值定义为零。

态射的张量积可以用图示来描述。我们将在顶部绘制第一个态射 $f \in Hom(X, Y)$，在底部绘制第二个态射 $g \in Hom(Z, T)$（左侧的图5）。在 f 的图示中选取一个非零箭头，并在 g 的图示中选取一个非零箭头。设与这两个箭头分别关联的值为 f_i^j 和 g_r^s。按照图5中间和右侧所示的规则，计算这两个箭头的张量积结果。对 f 和 g 的图示中的每一对非零箭头都执行此操作。

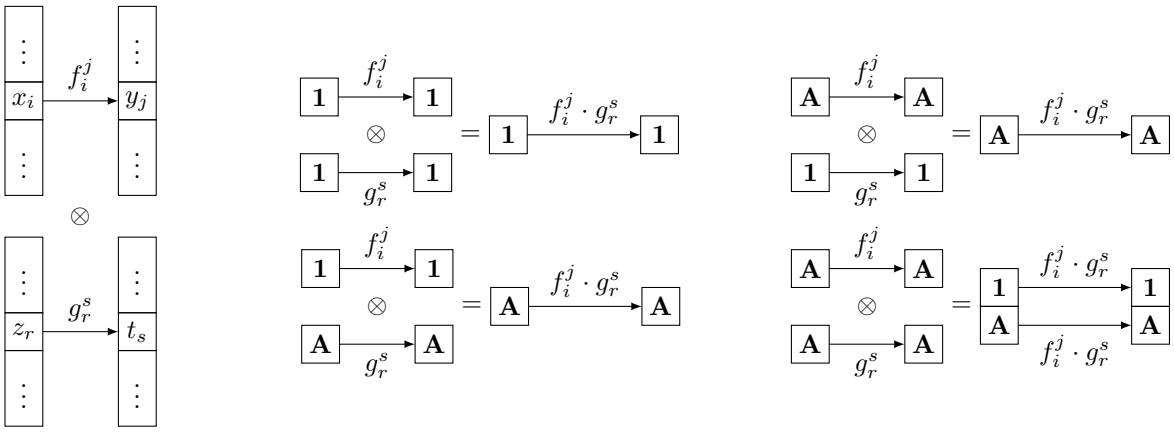


图5。态射图的张量积（左），简单对象之间的态射的张量积结果（中间和右侧）

例 2。设态射 $f \in Hom(\mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A},\ \mathbf{1} + \mathbf{A})$ 由矩阵定义

$$[f]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} f_2 \end{pmatrix}, [f]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且，态射 $g \in Hom(\mathbf{1} + \mathbf{A},\ \mathbf{1} + \mathbf{A})$ 由矩阵定义。

$$[g]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} g_1 \end{pmatrix}, [g]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} g_2 \end{pmatrix}.$$

这些态射的图示见左侧的图6。

张量积 $f \otimes g$ 的结果是一个从 $(\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1}+\mathbf{A}) = \mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}+\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}$ 到 $(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1} + \mathbf{A}) = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A}$ 的态射，由矩阵定义

$$[f \otimes g]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 g_1 & 0 \\ f_1 g_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [f \otimes g]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 g_2 & 0 & 0 \\ f_1 g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 g_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

态射 $f \otimes g$ 的图示见右侧的图6。

引理 1. 设 X、Y、Z、X'、Y'、Z' 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的对象，并设 $f \in Hom(X、Y)$、$g \in Hom(Y、Z)$、$f' \in Hom(X'、Y')$、$g' \in Hom(Y'、Z')$ 是态射。则

$$(f \otimes f') \circ (g \otimes g') = (f \circ g) \otimes (f' \circ g').$$

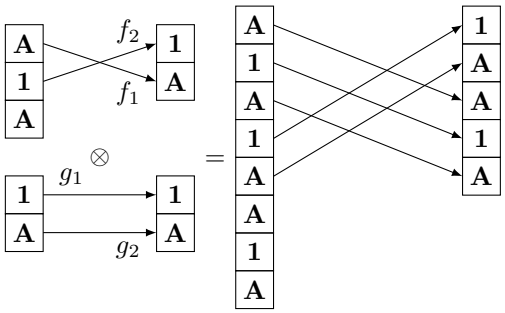


图6。两个态射的张量积示例

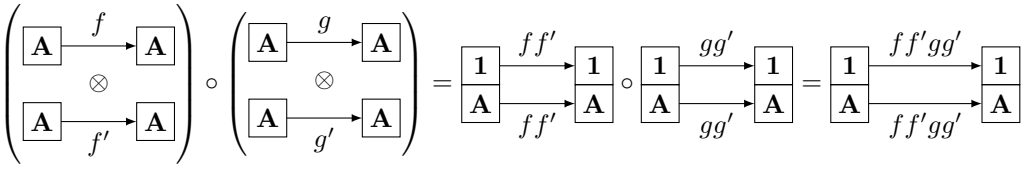


图 7。引理 1 陈述左侧的图示

证明。只需对简单对象 X、Y、Z、X'、Y'、Z' 证明该引理即可。唯一的非平凡情形是 $X = Y = Z =$ A 且 $X' = Y' = Z' =$ A。引理陈述左侧的图示见图 7。

引理陈述右侧的图示如图 8 所示。两个态射相同。

□

引理 2。设 X、Y 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的对象。则 $id_{X\otimes Y} = id_X \otimes id_Y$。

证明。该引理的陈述显然。 □

2.2.3. 结合性同构

对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中的每组三个对象 X、Y、Z，我们应定义同构族 $\alpha_{X,Y,Z} \in Hom((X \otimes Y) \otimes Z, X \otimes (Y \otimes Z))$。考虑所有对象 X、Y、Z 都是简单对象的情形。如果其中一个等于 $\mathbf{1}$，则定义 $\alpha_{X,Y,Z} = id_{(X\otimes Y)\otimes Z}$。如果 $X = Y = Z =$A，则 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A})$，并用两个矩阵定义 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (1), [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

其中 ε 是方程 $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ 的任意一个根，而 $x \in \mathbb{C}$ 是任意一个非零复数 .

注 2. 态射 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 是一个同构。逆态射 $\alpha^{-1}{}_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})$ 由相同的矩阵定义

$$[\alpha^{-1}_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (1), [\alpha^{-1}_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将已定义的结合子同构通过线性性扩展到范畴 $\mathfrak{C}$ 的所有对象上。这意味着如下内容。设 X_1、X_2、Y、Z 为简单对象。设对象 $((X_1 + X_2) \otimes Y) \otimes Z$ 表示为简单对象 $\mathbf{1}$、A 的非交换和。此和中的某些求和项对应于结果 $(X_1 \otimes Y) \otimes Z$，而其他求和项对应于结果 $(X_2 \otimes Y) \otimes Z$。按如下方式定义同构 $\alpha_{X_1+X_2,Y,Z}$：对于对应于 $(X_1 \otimes Y) \otimes Z$ 的求和项，它等于 $\alpha_{X_1,Y,Z}$ 的相应取值；对于所有其他求和项，它等于 $\alpha_{X_2,Y,Z}$ 的相应取值。类似地，为 $X, Y_1, Y_2, Z \in I$ 定义结合子同构 $\alpha_{X,Y_1+Y_2,Z}$，并为 $X, Y, Z_1, Z_2 \in I$ 定义结合子同构 α_{X,Y,Z_1+Z_2}。任意三个对象 X, Y, Z 的结合律同构 $\alpha_{X,Y,Z}$ 通过递归应用这些规则定义。

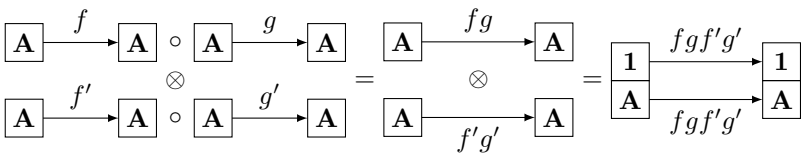


图 8. 引理 1 陈述右侧的图示

例3. 同构 $\alpha_{\mathbf{1+A},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A}\ \mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A})$由矩阵定义

$$[\alpha_{\mathbf{1+A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{1+A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

同构 同构 m $\alpha_{\mathbf{A},\ \mathbf{1+A},\ \mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A}\ \mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A})$，由相同的矩阵定义 s

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1+A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1+A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

同构 $\alpha_{\mathbf{A},\ \mathbf{A},\ \mathbf{1+A}} \in Hom(\mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A}\ \mathbf{1+A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{A}\ +\mathbf{1+A})$，由矩阵定义

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1+A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1+A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

让我们更详细地解释矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1+A}}]_{\mathbf{A}}$。同构 $\alpha_{\mathbf{A},\ \mathbf{A},\ \mathbf{1+A}}$ 是从对象 (A ⊗ A) ⊗ (1 + A) 到对象 A ⊗ (A ⊗ (1 + A)) 的一个态射。将第一个对象表示为简单对象的直和，并用单下划线标记对应于 1 的直和项，用双下划线标记对应于 A 的直和项:

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\otimes(\underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = (\mathbf{1}+\mathbf{A})\otimes(\underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}.$$

对第二个对象 A ⊗ (A ⊗ (1 + A)) 进行相同的操作:

$$\mathbf{A}\otimes(\mathbf{A}\otimes(\underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}})) = \mathbf{A}\otimes(\underline{\mathbf{A}}+\underline{\mathbf{1}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbf{1}}+\underline{\mathbf{A}}+\underline{\underline{\mathbf{A}}}+\underline{\mathbf{1}}+\underline{\mathbf{A}}.$$

因此，矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A}\,\mathbf{1+A}}]_{\mathbf{A}}$ 包含来自两个矩阵的元素。对于矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}}]_{\mathbf{A}}$，它是一个相同的矩阵，其中数字 1 对应于第一个对象的第二个符号 A 和第二个对象的第一个符号 A。因此，矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A}\,\mathbf{1+A}}]_{\mathbf{A}}$ 的第二列在第一行包含数字 1，其余值均为零。我们从矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$ 中取出全部四个元素，并将它们置于第一列和第三列（因为在第一个对象中，第一个和第三个符号 A 带有双下划线），以及第二行和第三行（因为在第二个对象中，第二个和第三个符号 A 带有双下划线）。

根据定义可知，如果对象 X、Y、Z 中的任意一个等于 1，则 $\alpha_{X,\ Y,\ Z} = id_{(X\otimes Y)\otimes Z}$。

绘制结合子同构的图示时，使用不同颜色的箭头会更方便。这些箭头对应不同的值。值为 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的箭头用蓝色绘制，值为 $\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ 的箭头用红色绘制，值为 $\frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}$ 的箭头用绿色绘制，值为 $-\frac{1}{\varepsilon}$ 的箭头用橙色绘制，值为 1 的箭头用黑色绘制（图9）。

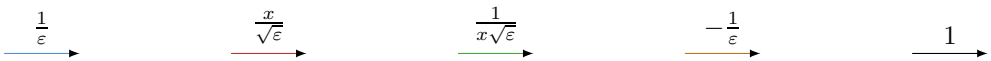


图9. 不同值的箭头使用不同颜色

图10展示了结合子同构 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{1+A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1+A},\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1+A}}$, $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}\otimes id_{\mathbf{A}}$ 和 $id_{\mathbf{A}}\otimes\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$的图示。

引理 3. 对范畴 $\mathfrak{C}$ 的所有对象 X, Y, Z，同构族 $\alpha_{X,Y,Z} \in Hom((X\otimes Y)\otimes Z)\ X\otimes(Y\otimes Z))$ 满足五边形关系

$$(\alpha_{X,Y,Z}\otimes id_W)\circ\alpha_{X,Y\otimes Z,W}\circ(id_X\otimes\alpha_{Y,Z,W}) = \alpha_{X\otimes Y,Z,W}\circ\alpha_{X,Y,Z\otimes W}$$

对于任意对象 X、Y、Z、W。

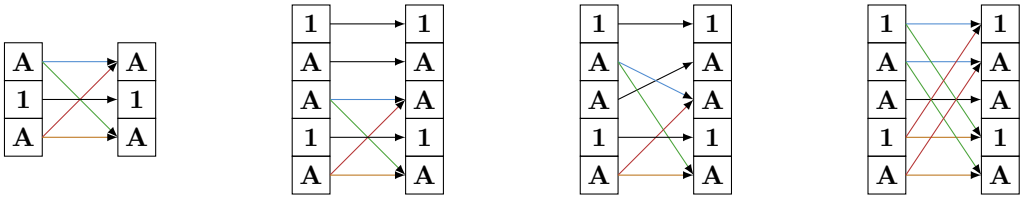


图10. 从左至右：同构的图示 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ （第一个），$\alpha_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}$ （第二个），$\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ （第三个），$\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ 和 $id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ （第四个）

注 3. 如前所述，引理陈述中的态射复合应从左向右阅读。

五边形关系的另一种表述方式是：图11所示的图示是交换的。

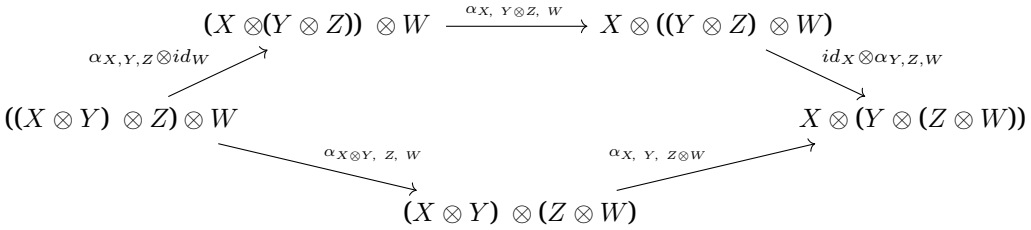


图11. 结合子同构的五边形关系

证明。只需对简单对象 X、Y、Z、$W \in I$ 证明该引理即可。如果其中一个等于 1，则该命题显然成立。考虑 $X = Y = Z = W = \mathrm{A}$ 的情形。

态射 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 的图示如图10所示（从左数第二个）。态射 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ 和 $id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 的图示如图10所示（最右侧）。

将这 条引理陈述左侧的态射记为 $L \in Hom(((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}, \mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})))$。该态射由以下两个矩阵定义：

$$[L]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[L]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

我们利用以下事实：$1 + \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$ 和 $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon^2}$。

接下来，将引理陈述右侧的态射记为 $R \in Hom(((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}, \mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})))$。例3中计算得到的态射矩阵为 $\alpha_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}$。态射 R 由以下两个矩阵定义：

$$[R]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[R]_{\mathbf{A}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ 0 & \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

因此，$[L]_{\mathbf{1}} = [R]_{\mathbf{1}}$ 和 $[L]_{\mathbf{A}} = [R]_{\mathbf{A}}$。 □

注 4。我们通过假设矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}}$ 和 $[\alpha_{\mathbf{AA},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$ 来定义结合律同构。很容易证明这些结合子同构满足五边形关系。但仍有一个问题：如何找到这些初始矩阵？

我们采用了以下方法。为简单起见，假设只要对象 X、Y、Z 中至少有一个等于 $\mathbf{1}$，$\alpha_{X,Y,Z}$ 就是相同的态射。然后考虑定义态射 $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 的矩阵，其元素取值为

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} t \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 t、a、b、c、$d \in \mathbb{C}$。接下来需要写出这些变量应满足的条件。这些条件来自五边形关系。

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix},$$

$$[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [\alpha_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

五边形关系给出以下两个矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

由此得到以下十二个方程组成的方程组：

$$\begin{array}{lll} a^2 + b \cdot c \cdot t = 1, & a^2 + b \cdot c \cdot d = 0, & b \cdot d \cdot t = b \cdot d, \\ a \cdot b + b \cdot d \cdot t = 0, & b \cdot c \cdot t = a, & a \cdot c + c \cdot d^2 = c, \\ a \cdot c + c \cdot d \cdot t = 0, & a \cdot b + b \cdot d^2 = b, & c \cdot d \cdot t = c \cdot d, \\ b \cdot c + d^2 \cdot t = t^2, & a \cdot t^2 = b \cdot c, & b \cdot c + d^3 = d^2. \end{array}$$

这个方程组有一族由复参数 $x \neq 0$ 参数化的无穷多个非平凡解：

$$t = 1, a = \frac{1}{\varepsilon}, b = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, c = \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}, d = -\frac{1}{\varepsilon},$$

其中 $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$。

引理 4. Let $f \in Hom(X_1, Y_1)$、$g \in Hom(X_2, Y_2)$ 和 $h \in Hom(X_3, Y_3)$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的三个态射。那么

$$(f \otimes g) \otimes h \circ \alpha_{Y_1,Y_2,Y_3} = \alpha_{X_1,X_2,X_3} \circ f \otimes (g \otimes h).$$

证明。如前面的引理所示，只需证明 $X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = X_3 = Y_3 = \mathbf{A}$ 这一情形下的命题。在这种情况下，每个态射 f、g、$h \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ 都由一个数定义，我们将分别记为 $\widehat{f}$、$\widehat{g}$、$\widehat{h} \in \mathbb{C}$。

对于任意态射 γ 以及任意数 $c \in \mathbb{C}$，记作 $c \cdot \gamma$ 态射，其作用类似于 γ，但所有值均乘以 c。Then

$$(f \otimes g) \otimes h \circ \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} = (\widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot \widehat{h}) \cdot id_{\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}} \circ \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} = (\widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot \widehat{h}) \cdot \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} =$$
$$= (\widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot \widehat{h}) \cdot \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \circ id_{\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}} = \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \circ (\widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot \widehat{h}) \cdot id_{\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}} = \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \circ f \otimes (g \otimes h).$$

□

2.2.4. 单位对象

定义单位对象 $\mathbb{I} = \mathbf{1}$。

引理 5. 对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中的任意对象 X：$X \otimes \mathbb{I} = \mathbb{I} \otimes X = X$。

对于任意态射 $f \in Hom(X, Y)$：$f \otimes id_{\mathbb{I}} = id_{\mathbb{I}} \otimes f = f$。

证明。两个陈述都显而易见。 □

2.2.5. 左、右单位同构

对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中的每个对象 X，将同构族 $l_X \in Hom(\mathbb{I} \otimes X, X)$ 和 $r_X \in Hom(X \otimes \mathbb{I}, X)$ 定义为相同的态射，即

$$l_X = id_X, r_X = id_X.$$

引理 6. 对范畴 $\mathfrak{C}$ 中的所有对象 X，同构族 $l_X \in Hom(\mathbb{I} \otimes X, X)$和 $r_X \in Hom(X \otimes \mathbb{I}, X)$满足三角关系

$$(r_X \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes l_Y) = \alpha_{X,\mathbb{I},Y}$$

对任意对象 X, Y。

对于任意态射 $f \in Hom(X, Y)$

$$(id_{\mathbb{I}} \otimes f) \circ l_Y = l_X \circ f \text{ and } (f \otimes id_{\mathbb{I}}) \circ r_Y = r_X \circ f.$$

Proof. 引理的两个陈述都显然成立，因为$\alpha_{X,\ \mathbb{I},\ Y} = id_{X \otimes Y}$和 $l_X = r_X = id_X$. □

定理 2. 范畴 $\mathfrak{C}$ 是幺半范畴。

证明。该定理由以下各点得出：

1. 根据引理 1 和 2，张量积是一个从 $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的函子；2. 结合子同构族 $\alpha_{X,\ Y,\ Z}$ 根据引理 3 满足五边形关系；

3. 单位同构族 l_X 和 r_X 根据引理 6（第一条陈述）满足三角关系；

4. 结合律同构 $\alpha_{X,\ Y,\ Z}$ 的自然性由引理 4 得出；5. 单位同构的自然性α_X和 由引理 6（第二条陈述）

单位同构 l_X 和 r_X 的自然性由引理 6（第二个陈述）推出 .

□

2.3. 编织

在本小节中，我们将定义同构族 $c_{X,Y} \in Hom(X \otimes Y, Y \otimes X)$，它为范畴 $\mathfrak{C}$中每一对对象 X、Y 定义。

在上一小节中，我们使用常数 ε定义了结合律同构，该常数满足方程 $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$。有两个实数具有这一性质：一个为正，另一个为负。令$\xi = e^{\frac{\pi}{5}}$——一个 10 次单位根。如果常数 ε 为正，则 $\varepsilon = \xi + \xi^{-1}$；如果为负，则 $\varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3}$。根据常数 ε的取值，按以下方式引入两个常数 β_ε^+和 β_ε^-：

$$\beta_\varepsilon^+ = \begin{cases} \xi^3, \text{ if } \varepsilon = \xi + \xi^{-1} \\ \xi, \text{ if } \varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3} \end{cases} \text{ and } \beta_\varepsilon^- = \begin{cases} \xi^{-3}, \text{ if } \varepsilon = \xi + \xi^{-1} \\ \xi^{-1}, \text{ if } \varepsilon = \xi^3 + \xi^{-3} \end{cases} .$$

我们用 β_ε 表示 β_ε^+或 β_ε^-中的任意一个。

注 5。容易验证

$$\beta_\varepsilon^2 \cdot \varepsilon + \beta_\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Then

$$\beta_\varepsilon^2 = -1 - \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}, \beta_\varepsilon^3 = \frac{1 - \beta_\varepsilon}{\varepsilon}, \beta_\varepsilon^4 = \beta_\varepsilon + \varepsilon - 1, \beta_\varepsilon^5 = -1.$$

设 X、$Y \in I$ 是范畴 $\mathfrak{C}$中的简单对象。如果这两个对象中至少有一个等于 $\mathbf{1}$，则定义$c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$。如果 $X = Y = \mathbf{A}$，则 $X \otimes Y = Y \otimes X = \mathbf{1} + \mathbf{A}$。在这种情况下，由以下两个矩阵定义同构 $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$：

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \left(\beta_\varepsilon^2\right), [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \left(\beta_\varepsilon\right).$$

通过线性性将为简单对象定义的同构 $c_{X,Y}$ 扩展到该范畴的所有对象 $\mathfrak{C}$ （即采用与定义结合律同构相同的方法）。

例 4。 态射 $c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}, id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A})$ 由相同的矩阵 es

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \left(\beta_\varepsilon\right), [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Morphisms $c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}, c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{1}+\mathbf{A})$ 也由相同的矩阵定义 es

$$[c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \left(\beta_\varepsilon^2\right), [c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

态射的图示 $c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}, c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}, id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}, c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$ 和 $c_{\mathbf{A},\ \mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 如图 12 所示。

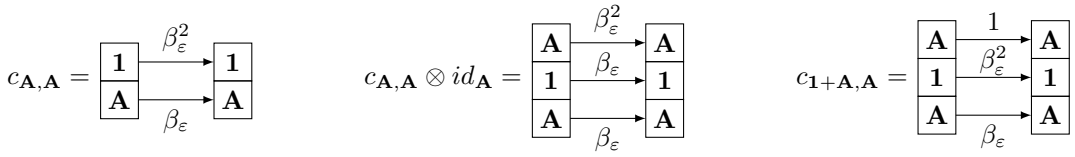


图 12。态射的图示 $c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$ （左侧）、$c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$,$id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$ （中间）以及$c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$,$c_{\mathbf{A},\ \mathbf{1}+\mathbf{A}}$ （右侧）

引理 7. 设 X_1, X_2, Y_1, Y_2 是范畴 $\mathfrak{C}$ 的对象。设 $f \in Hom(X_1, Y_1)$ 和 $g \in Hom(X_2, Y_2)$ 是两个态射。那么

$$(f \otimes g) \circ c_{Y_1,Y_2} = c_{X_1,X_2} \circ (g \otimes f).$$

证明. 只需证明该引理对简单对象成立。如果对象 X_1, X_2, Y_1, Y_2 中至少有一个$\widehat{\ }$等于 1，那么该命题显然成立。考虑 $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = \mathrm{A}$ 的情形。设 f 是定义态射 f 的数，设 $\widehat{g}$ 是定义态射 g 的数。引理陈述左侧的图示如图13所示。

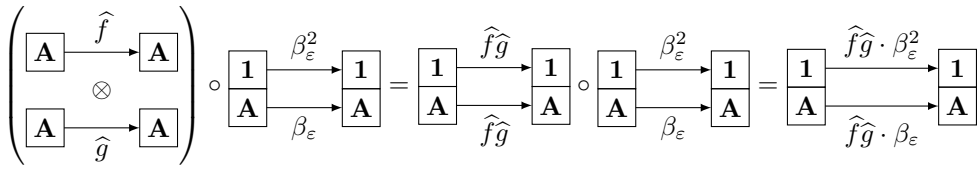


图13. 引理 7 陈述左侧的图示

引理陈述右侧的类似图示如图14所示。这些态射相同。

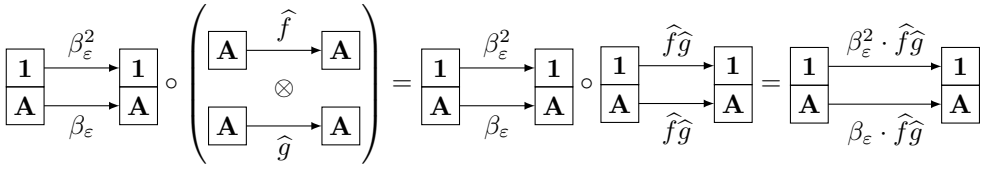


图14. 引理 7 陈述右侧的图示

□

引理8. 对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中的任意三个对象 X、Y、Z：

$$\alpha_{X,Y,Z} \circ c_{X,Y\otimes Z} \circ \alpha_{Y,Z,X} = (c_{X,Y} \otimes id_Z) \circ \alpha_{Y,X,Z} \circ (id_Y \otimes c_{X,Z}),$$

$$\alpha^{-1}_{X,Y,Z} \circ c_{X\otimes Y,Z} \circ \alpha^{-1}_{Z,X,Y} = (id_X \otimes c_{Y,Z}) \circ \alpha^{-1}_{X,Z,Y} \circ (c_{X,Z} \otimes id_Y).$$

证明. 我们将证明引理的第一个结论，第二个结论的证明类似。与前面的引理一样，只需对简单对象证明即可。如果对象 X、Y、Z 中有一个等于 1，则该结论显然成立。考虑 $X = Y = Z = \mathrm{A}$ 的情形。

记　　引理陈述的左边为 $L \in Hom((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}, (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A})$。该　　n

$$[L]_{\mathbf{1}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \left(1\right) \cdot \left(\beta_\varepsilon^2\right) \cdot \left(1\right) = \left(\beta_\varepsilon^2\right),$$

$$[L]_{\mathbf{A}} = [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1-\beta_\varepsilon) \\ \frac{1}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1-\beta_\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

记　　引理陈述的右侧为 $R \in Hom((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}, (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A})$。Th　　en

$$[R]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \left(\beta_\varepsilon\right) \cdot \left(1\right) \cdot \left(\beta_\varepsilon\right) = \left(\beta_\varepsilon^2\right),$$

$$[R]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} \cdot [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon^4}{\varepsilon} & \frac{x\beta_\varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{\beta_\varepsilon^3}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{\beta_\varepsilon^2}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x(1-\beta_\varepsilon)}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1-\beta_\varepsilon}{x\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

在最后一个等式中，我们用到了注 5。

因此， $[L]_{\mathbf{1}} = [R]_{\mathbf{1}}$ 和 $[L]_{\mathbf{A}} = [R]_{\mathbf{A}}$。由此可得 $L = R$。

引理的第二个陈述可用类似的方法证明。对于态射 $\alpha^{-1}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}\mathbf{A}}$，我们可以使用矩阵 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}}$ 和 $[\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$，因为它们的阶都为 2。□

注释 6. 与注 4 一样，说明如何求得同构$c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}}$。其他所有同构 $c_{X,\,Y}$ 都可由此得到。

设同构$c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}}$ 由两个矩阵定义

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (p)\,, [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = (q)\,.$$

Then

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (p)\,, [c_{\mathbf{A},\mathbf{1}+\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [c_{\mathbf{1}+\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

$$[c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = (q)\,, [c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = [id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

引理8的两个条件给出以下矩阵方程

$$(1) \cdot (p) \cdot (1) = (q) \cdot (1) \cdot (q)\,,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

由此得到以下方程组，其中有四个方程和两个变量（p 和 q）：

$$\begin{cases} p = q^2 \\ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{q}{\varepsilon} = \frac{p^2}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{q}{\varepsilon} = pq \\ \frac{1}{\varepsilon} + \frac{q}{\varepsilon^2} = -\frac{q^2}{\varepsilon} \end{cases}.$$

$p = \beta_\varepsilon^2$ 和 $q = \beta_\varepsilon$ 的值是该方程组的解。

定理 3。范畴 $\mathfrak{C}$ 是一个辫子幺半范畴。

证明。对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中的所有对象 X、Y，同构族 $c_{X,\,Y}$ 在 $\mathfrak{C}$上构成一个编织。这些态射的自然性由引理 7 得出。六边形辫子关系在引理 8 中得到证明。□

2.4. 扭结与对偶性

2.4.1. 扭结

对于范畴 $\mathfrak{C}$的每个对象 X，按以下方式定义同构 $\theta_X \in Hom(X,X)$：$\theta_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$、$\theta_{\mathbf{A}}$ 由数值 $\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$定义，并通过线性性将这些同构扩展到范畴 $\mathfrak{C}$的所有其他对象。

$_n$注 7. 任意态射 $\theta_X \in Hom(X,X)$ 的图示非常简单。如果 $X = \sum x_i$, $x_i \in I_{,i=1}$，那么图示由 n 条平行箭头组成。如果箭头始于对象 $x_i = \mathbf{1}$ 并终于该对象，则关联值为 1；否则关联值为 $\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$。

引理 9. 设 $f \in Hom(X,Y)$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个态射。那么

$$f \circ \theta_Y = \theta_X \circ f.$$

.

证明。根据范畴 $\mathfrak{C}$中所有对象 X 的同构定义，很容易得出 θ_X。 □

引理 10. 设 X、Y 是范畴 $\mathfrak{C}$中的两个对象。那么

$$\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ c_{X,Y} \circ c_{Y,X}.$$

证明。只需证明该引理对简单对象成立即可。若对象 X、Y 中至少有一个等于 1，则该命题显然成立。考虑 $X = Y =$A 的情况。引理命题左侧的图示如图 15 上方所示，右侧的图示如同一图 15 下方所示。这些态射的图示相同。□

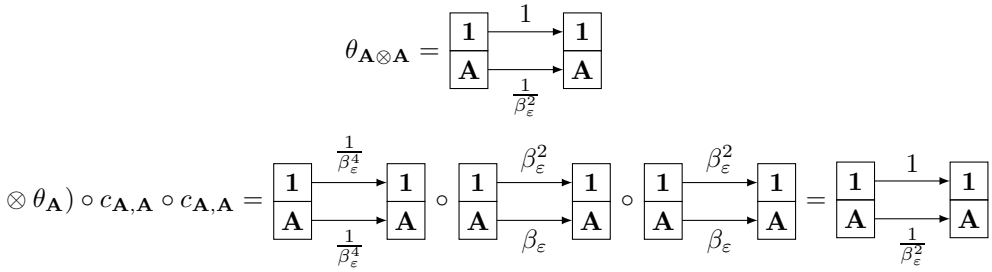


图 15. 态射 $\theta_{\mathbf{A}、\otimes\mathbf{A}}$ （上方）和 $(\theta_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ c_{\mathbf{A}、\,\mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A}、\,\mathbf{A}}$ （下方）的图示

注 8. D 引理 10 的 将定义同构 $\theta_{\mathbf{A}}$ 的值记为 $s \in \mathbb{C}$。该命题的图示 $X =$A 如图 16 所示。

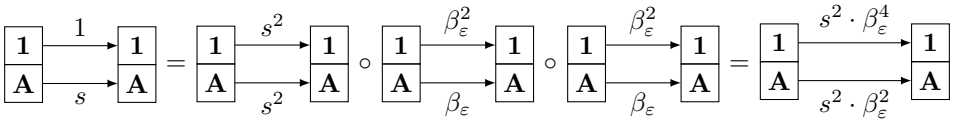


图 16. 条件 $\theta_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} = (\theta_{\mathbf{A}} \otimes \theta_{\mathbf{A}}) \circ c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$

这导出如下方程组

$$\begin{cases} s^2 \cdot \beta_\varepsilon^4 = 1 \\ s^2 \cdot \beta_\varepsilon^2 = s \end{cases}$$

该方程组有唯一解 $s = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$。

将 $diag(v_1, \ldots, v_n)$ 记为一个大小为 $n \times n$ 的对角矩阵，其对角元素为 $v_1, \ldots, v_n$。将$E_n = diag(1, \ldots, 1)$ 记为。

$_n$引理 11. 设 $X = \sum x_i$, $x_i \in I$ 是范畴 $\mathfrak{C}$, $|X|_{\mathbf{1}} = n_{\mathbf{1}}$, $|X|_{\mathbf{A}} = n_{\mathbf{A}}$ 中的一个对象。那么$_{i=1}$有以下结论：

1. $[\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}} = [id_X \otimes \theta_X]_{\mathbf{1}}$;
2. $[(\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X,\ X}]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}$。

证明。根据定义可得 $[\theta_X]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}}$和$[\theta_X]_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2} \cdot E_{n_{\mathbf{A}}}$。显然，$[id_X]_{\mathbf{1}} = E_{n_{\mathbf{1}}}$和 $[id_X]_{\mathbf{A}} = E_{n_{\mathbf{A}}}$。于是

$$[\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}} = diag(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}),$$

其中，当相应的求和项由 $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ 相乘得到时，δ_i 的值为 1；如果相应的求和项由 A ⊗ A 相乘得到，则 δ_i 的值为 $\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}$（该乘法得到两个求和项：1 和 A）。类似地，

$$[id_X \otimes \theta_X]_{\mathbf{1}} = diag(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}).$$

因此，引理的第一个结论得证 .
为证明第二个结论，注意到

$$[c_{X,X}]_{\mathbf{1}} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}),$$

其中，如果相应的求和项是通过将 $x_p \otimes x_q$ 相乘得到的，则 σ_i 等于 1；在此过程中，x_p 或 x_q 中至少有一个等于 1；如果相应的求和项是通过将 A ⊗ A 相乘得到的，则 σ_i 等于 β_ε^2。因此，乘积 $[c_{X,X}]_{\mathbf{1}} \cdot [\theta_X \otimes id_X]_{\mathbf{1}}$ 是一个矩阵 $E_{n_{\mathbf{1}}^2 + n_{\mathbf{A}}^2}$。□

2.4.2. 对偶性

In t范畴 $\mathfrak{C}$ 中的每个对象都是自对偶的，即对于范畴 $\mathfrak{C}$ 的每个对象 X，都有 $X^* = X$.

$_n$设 $X = \sum x_i,\ x_i \in I$ 是范畴 $\mathfrak{C}$, $|X|_{\mathbf{1}} = n_{\mathbf{1}}$, $|X|_{\mathbf{A}} = n_{\mathbf{A}}$ 中的一个对象。定义态射$_{i=1}$$b_X \in Hom(\mathbf{1}, X \otimes X)$ 和 $d_X \in Hom(X \otimes X, \mathbf{1})$ 如下。注意， $x_i \otimes x_i$要么是 $\mathbf{1}$（如果 $x_i = \mathbf{1}$），要么是$\mathbf{1}+\mathbf{A}$（如果 $x_i = \mathbf{A}$）。令 $(x_i \otimes x_i)_1$ 为该乘积中的第一项（始终等于 $\mathbf{1}$）。态射 b_X和 d_X 完全由以下矩阵定义

$$[b_X]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{n_{\mathbf{1}}^2+n_{\mathbf{A}}^2} \end{pmatrix}, [d_X]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n_{\mathbf{1}}^2+n_{\mathbf{A}}^2} \end{pmatrix}.$$

如果 s 中的第 $\delta_s = \sigma_s = 0$ 个求和项 $\mathbf{1}$ 是由 $X \otimes X$ 得到的，则定义 $\delta_s = \sigma_s = 0$ s，并且如果第 s 个求和项是 $(x_i \otimes x_i)_1$，则定义 $\delta_s = \varphi_i, \sigma_s = \psi_i$。然后，如果 $x_i = \mathbf{1}$，定义 $\varphi_i = y, \psi_i = \frac{1}{y}$；如果 $x_i = \mathbf{A}$, $i \in \{1, \dots, n\}$，则定义 $\varphi_i = y\sqrt{\varepsilon}, \psi_i = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$。这里的 $y \in \mathbb{C}$ 是任意固定的非零复数。

例 5. 显然， $b_{\mathbf{1}} = d_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$。

$b_{\mathbf{A}}$ 和 $d_{\mathbf{A}}$ 的图示见图17。在这种情况下，$\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{A}$，且第一个求和项 $\mathbf{1}$ 恰好是 $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_1$。因此， $b_{\mathbf{A}}$ 和 $d_{\mathbf{A}}$ 的图示中唯一箭头所对应的值分别是 $y\sqrt{\varepsilon}$ 和 $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$。

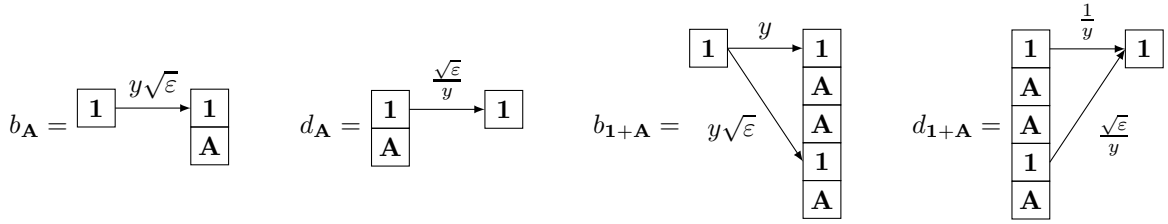


图17. 态射 $b_{\mathbf{A}}$、 $d_{\mathbf{A}}$、 $b_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 和 $d_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$

图17展示了态射 $b_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 和 $d_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 的图示。在这种情况下，$(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{1} + \mathbf{A}) = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{1} + \mathbf{A}$，其中第一个符号 $\mathbf{1}$ 是 $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_1$，第二个符号 $\mathbf{1}$ 是 $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_1$。因此，在 $b_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 的图示中，值 y 对应第一个箭头，值$y\sqrt{\varepsilon}$ 对应第二个箭头。同样，在 $d_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$的图示中，值 $\frac{1}{y}$ 对应第一个箭头，值 $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}$ 对应第二个箭头。

引理12. 对于范畴 $\mathfrak{C}$中的任意对象 X：

1. $(b_X \otimes id_X) \circ \alpha_{X,X,X} \circ (id_X \otimes d_X) = id_X$;
2. $(id_X \otimes b_X) \circ \alpha^{-1}_{X,X,X} \circ (d_X \otimes id_X) = id_X$.

$_n$证明. 设 $X = \sum x_i, x_i \in I$。我们将使用图示语言证明引理的第一条陈述。$_{i=1}$

根据态射 $b_X \in Hom(\mathbf{1}, X \otimes X)$的定义，该态射的图示$b_X$ 恰好包含 n 个非零箭头。这些箭头将带有符号 $\mathbf{1}$的单元与单元$(x_1 \otimes x_1)_1$，……，$(x_n \otimes x_n)_1$连接起来。设 $\varphi_i \in \{y, y\sqrt{\varepsilon}\}$ 为与第 i个箭头相关联的值（图18左侧）。那么，态射 $b_X \otimes id_X \in Hom(X, (X \otimes X) \otimes X)$的图示恰好包含 n^2 个箭头。这些箭头将单元 x_i 与单元$(x_1 \otimes x_1)_1 \otimes x_i$，……，$(x_n \otimes x_n)_1 \otimes x_i$连接起来，与这些箭头相关联的值依次为 φ_1，……，φ_n（图18右侧）。

类似地，态射 d_X 的图示恰好包含 n 个非零箭头。第 i 个箭头将 $(x_i \otimes x_i)_1$ 与 $\mathbf{1}$ 相连，其对应的值为 $\psi_i \in \{\frac{1}{y}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y}\}$（左侧的图19）。然后，态射 $id_X \otimes d_X \in Hom(X \otimes (X \otimes X)\ X)$ 的图示恰好包含 n^2 个箭头。对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$，对应值为 ψ_j 的箭头将单元 $x_i \otimes (x_j \otimes x_j)_1$ 与单元 x_i 相连（右侧的图19）。

最后请注意，结合律同构 $\alpha_{X,\ X,\ X}$ 包含非零箭头，当且仅当 $i = j = p = q$ 时，这些箭头由 $(x_j \otimes x_j)_1 \otimes x_i$ 和 $x_p \otimes (x_q \otimes x_q)_1$ 相连。若 $x_i = x_j = x_p = x_q = \mathbf{1}$，则此箭头对应的值为 $\mathbf{1}$；若 $x_i = x_j = x_p = x_q = \mathbf{A}$，则该值为 $\frac{1}{\varepsilon}$。因此，在复合 $(b_X \otimes id_X) \circ \alpha_{X,\ X,\ X} \circ (id_X \otimes d_X)$ 的图示中，左侧单元 x_i 仅与右侧单元 x_i 相连，且此箭头对应的值等于 $\mathbf{1}$。这个态射与 id_X 重合。

该引理第二个陈述的证明类似。 □

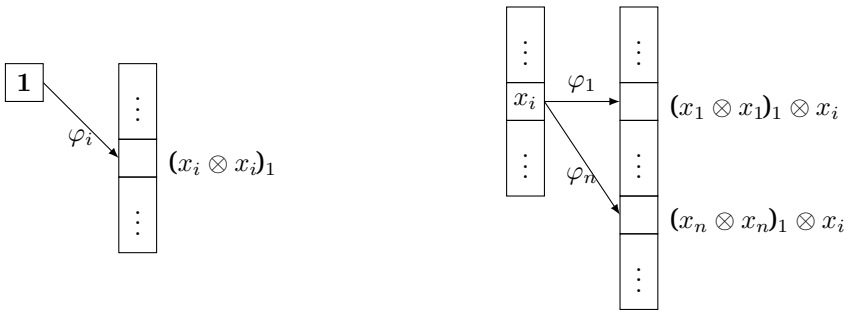


图18。态射 b_X （左侧）和 $b_X \otimes id_X$ （右侧）的图示

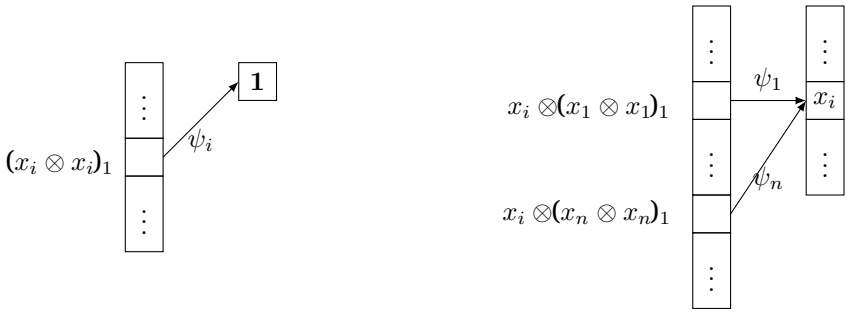


图19. 态射 d_X （左侧）和 $id_X \otimes d_X$ （右侧）的图示

引理13. 设 X 是范畴 $\mathfrak{E}$中的一个对象。那么

1. $b_X \circ (\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X,\ X} = b_X$；2. ($\theta_X \otimes id_X) \circ c_{X,\ X} \circ d_X = d_X$；3. $b_X \circ (\theta_X \otimes id_X) = b_X \circ (id_X \otimes \theta_X)$】【。

证明。态射 b_X 仅由矩阵 $[b_X]_{\mathbf{1}}$ 定义，因为矩阵 $[b_X]_{\mathbf{A}}$ 没有列。因此，复合 $b_X \circ f$ 与任何合适的态射 f 都仅由 $[b_X]_{\mathbf{1}}$ 和 $[f]_{\mathbf{1}}$ 定义。引理的前两个陈述由引理 11 的第二个陈述得出。引理的第三个陈述由同一引理 11 的第一个陈述得出。□

定理 4。范畴 $\mathfrak{E}$ 是带状范畴。

证明。同构族 θ_X 在辫状范畴 $\mathfrak{E}$上构成一个扭结。由引理 9 可得 θ_X 的自然性，与编织的相容性已在引理 10 中得到证明。

态射族 b_X、d_X 在辫状范畴 $\mathfrak{E}$上定义了对偶性。它们的相容性由引理 12 和 13（第三条陈述）推出。□

定理 5。范畴 $\mathfrak{E}$ 是模的。

证明。显然，范畴 $\mathfrak{E}$ 是一个 Ab-范畴。事实上，对于任意两个对象 X、Y，集合 $Hom(X,Y)$ 具有阿贝尔群的自然结构，使得态射的复合是双线性的。

$\mathfrak{E}$ 中的每个对象都由简单对象 1、A 支配。原因也很明显，因为每个对象都是这些简单对象的和。因此，关于 $\mathfrak{E}$ 的模性，我们只需检验矩阵

$$S = \begin{pmatrix} S_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & S_{\mathbf{1},\mathbf{A}} \\ S_{\mathbf{A},\mathbf{1}} & S_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{C}$ 上可逆。这里的值 $S_{X,\ Y}$ 对于由复合定义的范畴 $\mathfrak{E}$ 中任意两个对象 X、Y

$$S_{X,Y} = b_{X\otimes Y} \circ ((c_{X,Y} \circ c_{Y,X}) \otimes id_{X\otimes Y}) \circ d_{X\otimes Y}.$$

注意，利用引理13（第一和第二个陈述），这个公式比一般情形下的公式更简洁。

显然，$S_{\mathbf{1},\ \mathbf{1}} = b_{\mathbf{1}} \circ ((c_{\mathbf{1},\ \mathbf{1}} \circ c_{\mathbf{1},\ \mathbf{1}}) \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ d_{\mathbf{1}} = 1$。

如果 X、$Y \in I$和 $X \neq Y$，那么 $b_{X\otimes Y} = b_{\mathbf{A}}$、$c_{X,\ Y} = c_{Y,\ X} = id_{\mathbf{A}}$、$id_{X\otimes Y} = id_{\mathbf{A}}$和 $d_{X\otimes Y} = d_{\mathbf{A}}$。因此，$S_{\mathbf{1},\ \mathbf{A}} = S_{\mathbf{A},\ \mathbf{1}} = b_{\mathbf{A}} \circ d_{\mathbf{A}} = \varepsilon$。

最后，考虑 $X = Y =$A 的情况。复合 $b_{\mathbf{1}+\mathbf{A}} \circ ((c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}) \circ d_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$的图示如图20所示。因此，

$$S_{\mathbf{A},\mathbf{A}} = \beta_\varepsilon^4 + \varepsilon \cdot \beta_\varepsilon^2 = \beta_\varepsilon + \varepsilon - 1 + \varepsilon \cdot (-1 - \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}) = -1.$$

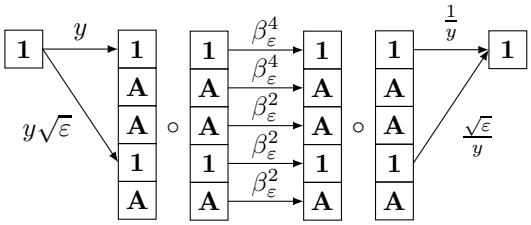


图20。复合 $b_{\mathbf{1}+\mathbf{A}} \circ ((c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}} \circ c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}) \circ d_{\mathbf{1}+\mathbf{A}}$ 的图示

因此

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix}, \det S = -2 - \varepsilon \neq 0.$$

□

3. 不变量 tr_ε

设 $L = l_1 \cup \ldots \cup l_k$ 是 k 分支链环的一个图示。L 的着色是一个映射 ξ: $\{l_1, \ldots, l_k\} \to \{\mathbf{1}, \mathrm{A}\}$。如下定义态射 $\{L\}_\xi \in Hom(\mathbf{1}, \mathbf{1})$。首先，移除所有颜色为 1 的图分量。我们将得到一个子链环 L'，其中所有分支都着色为 A。用垂直线将图示 L' 分割成若干层，使得每层包含图示中任意数量的平行水平弧，以及图21所示的某一线段。设 λ 是分割后的一层。将该层中的正交叉 λ 与态射 $c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$ 对应，将负交叉与态射 $c^{-1}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}$ 对应，将左半圆与态射 $b_{\mathbf{A}}$ 对应，将右半圆与态射 $d_{\mathbf{A}}$对应，将正圈与态射 $\theta_{\mathbf{A}}$ 对应，将负圈与态射 $\theta^{-1}{}_{\mathbf{A}}$对应，并将平凡水平弧与恒等态射 $id_{\mathbf{A}}$ 对应（图21）。从上到下叠放图示线段，得到相应态射的张量积。固定这些乘法的任意顺序。如果该层 λ 的左侧与图示 L' 相交于 n 个点，且该层右侧与图示相交于 m 个点，那么这一层定义了一个从 $\mathrm{A}^{\otimes n}$ 到 $\mathrm{A}^{\otimes m}$ 的态射（乘法顺序任意）（两个例子见图22）。将通过此过程为层 λ得到的范畴 $\mathfrak{C}$ 中的态射记作 μ_λ。



图21。从左到右：正交叉、负交叉、左半圆、右半圆、正圈、负圈、平凡弧

如果图示 L' 分解为层 λ_1、.....、λ_n（从左到右读取），那么态射 $\{L\}_\xi$ 是一个复合

$$\mu_{\lambda_1} \circ \tau_1 \circ \mu_{\lambda_2} \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{n-1} \circ \mu_{\lambda_n},$$

其中 τ_i 是由结合子同构组成的组合，从层 λ_i 的右侧到层 λ_{i+1} 的左侧（这些侧面因乘法顺序不同而不同）。

带有颜色 ξ 的图示 L 可以理解为态射 $\{L\}_\xi$ 的图示。为了将其与其他已经使用的态射图示（带有单元和箭头）区分开来，我们将图示 L 称为态射 $\{L\}_\xi$ 的带结图。

态射 $\{L\}_\xi$ 是从 1 到 1 的态射，因此它由一个复数定义。我们可以将这个态射与该数等同起来，并假设 $\{L\}_\xi \in \mathbb{C}$。

注 9. 如果 $\{L\}_\xi = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_{n-1} \circ \mu_n$，那么

$$\{L\}_\xi = [\mu_n]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_{n-1}]_{\mathbf{1}} \cdot \ldots \cdot [\mu_2]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_1]_{\mathbf{1}}.$$

例6. 设 L 为图23所示的一个纽结图，设 ξ 为一种着色，它将 L 的唯一分支映射到 A。图示 L 被分为十一个层级 λ_1，.....，λ_{11}。与这些层级对应的态射如下：

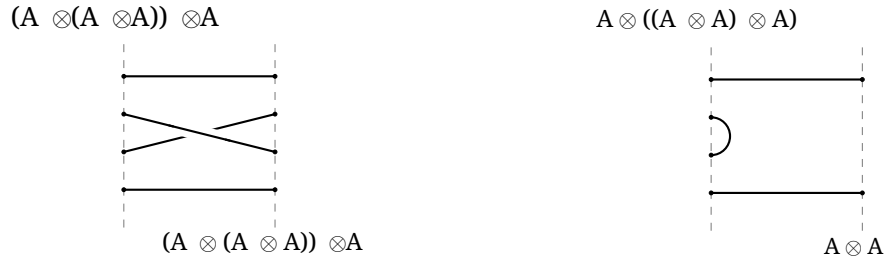


图22. 态射 $(id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\ \mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}}$ （左侧）和 $id_{\mathbf{A}} \otimes (d_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}})$（右侧 t)

$\mu_{\lambda_1} = b_{\mathbf{A}} \in Hom(1, \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}), \mu_{\lambda_2} = (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes b_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}, (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})) \mu_{\lambda_3} = \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} \in Hom((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}), \mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}))) \mu_{\lambda_4} = id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha^{-1}$ A,A,A$\in Hom(\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})), \mathrm{A} \otimes ((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A})) \mu_{\lambda_5} = \mu_{\lambda_6} = \mu_{\lambda_7} = id_{\mathbf{A}} \otimes (c_{\mathbf{A}},$ $_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in Hom(\mathrm{A} \otimes ((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}), \mathrm{A} \otimes ((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A})) \mu_{\lambda_8} = id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom$ $(\mathrm{A} \otimes ((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}), \mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}))) \mu_{\lambda_9} = \alpha^{-1}$ A,A,A$\otimes$A$\in Hom(\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes (\mathrm{A} \otimes$ A)), (A $\otimes$ A) $\otimes$ (A $\otimes$ A)) $\mu_{\lambda_{10}} = d_{\mathbf{A}} \otimes (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in Hom((\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}) \otimes (\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}), \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$ $\mu_{\lambda_{11}} = d_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}, 1)$.

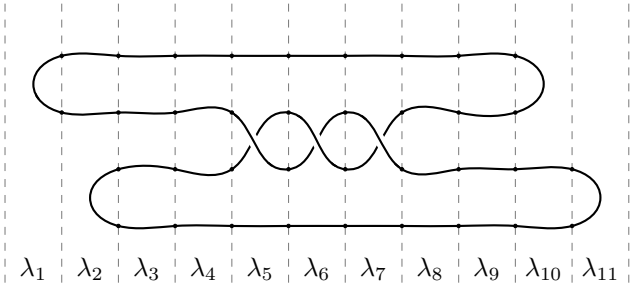


图23. 三叶结分裂成十一层 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{11}$

图24展示了复合 $\mu_{\lambda_1} \circ \ldots \circ \mu_{\lambda_{11}}$ 的图示。

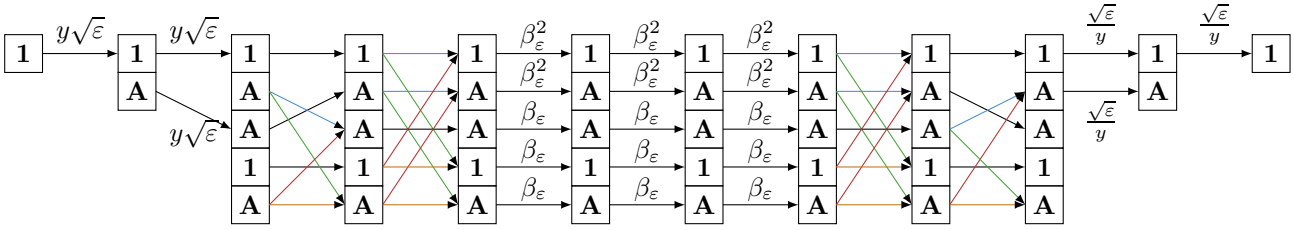


图24. 态射 $\mu_{\lambda_1} \circ \ldots \circ \mu_{\lambda_1}$的图示

因此

$$\{L\}_\xi = y\sqrt{\varepsilon} \cdot y\sqrt{\varepsilon} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \beta_\varepsilon^6 \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} \cdot \beta_\varepsilon^3 \cdot \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y} = \beta_\varepsilon^6 + \varepsilon \cdot \beta_\varepsilon^3 = -\beta_\varepsilon + 1 - \beta_\varepsilon = 1 - 2\beta_\varepsilon.$$

命题1. 设 L 是一个链环图， ξ 是该图示的着色。那么，值 $\{L\}_\xi$ 不依赖于态射 $b_{\mathbf{A}}$ 和 $d_{\mathbf{A}}$中 y 的选择。

证明. 不失一般性，我们可以假设着色 ξ 将 L 的每个分支映射到A。注意，图示 L 中的左半圆数量等于图示 L中的右半圆数量。因此，在态射 $\{L\}_\xi$ 的复合中，态射 $b_{\mathbf{A}}$ 的数量等于态射 $d_{\mathbf{A}}$的数量。所以， $b_{\mathbf{A}}$ 中的所有值 y 都与 $d_{\mathbf{A}}$中的值 $\frac{1}{y}$ 相消。□

3.1. 链环不变量

设 $L = l_1 \cup \ldots \cup l_k$ 是三维球面 S^3中无定向的 k分支链环的图示。设 $\xi_{\mathbf{A}}$: $\{l_1, \ldots, l_k\} \to \{\mathbf{1}, \mathrm{A}\}$ 是一个常值着色，它将每个分支 l_i映射到 A，其中所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$均成立。对于每个分支

to

定理 6。设 L_1 和 L_2 是 S^3 中同一链环的两个图示。那么 $tr_\varepsilon(L_1) = tr_\varepsilon(\{v7)$。

证明。只需证明当 L_2 是由 L_1 经过一次 Reidemeister 变换得到时，定理成立。

如果 L_2 是由 L_1 经过第二或第三类 Reidemeister 变换得到的，那么 $w(L_1) = w(L_2)$。根据 [17, 定理 I.2.5] 和定理 4，可得 $\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$。严格来说，[17] 中的定理 I.2.5 仅适用于严格带状范畴。我们的范畴 $\mathfrak{C}$ 并非严格范畴。但众所周知，每个非严格幺半范畴都等价于一个严格幺半范畴。设 $\mathfrak{C}'$ 是一个与 $\mathfrak{C}$ 等价的严格幺半范畴。那么，首先，$\mathfrak{C}$ 在 tr_ε 和 $\mathfrak{C}'$ 中的不变量相同；其次，我们可以在 $\mathfrak{C}'$ 中应用 [17] 的定理 I.2.5。因此 $tr_\varepsilon(L_1) = tr_\varepsilon(L_2)$。

设 L_2 是由 L_1 经过一次正的第一类 Reidemeister 变换得到的（即在图示的任意一条线上添加一个正圈）。那么 $w(L_2) = w(L_1) + 1$。

将态射 $\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$ 表示为复合 $\mu_1 \circ \mu_2$，并将态射 $\{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$ 表示为复合 $\mu_1 \circ (id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}) \circ \mu_2$。则

$$\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = [\mu_2]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_1]_{\mathbf{1}} \text{ and } \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = [\mu_2]_{\mathbf{1}} \cdot [id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}]_{\mathbf{1}} \cdot [\mu_1]_{\mathbf{1}}.$$

注意到 $[id_{\mathbf{A}^{\otimes n_1}} \otimes \theta_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}^{\otimes n_2}}]_{\mathbf{1}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2} \cdot E_{f_{n_1+n_2+1}}$，其中 f_n 是第 n 个斐波那契数。因此 $\{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon^2}\{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}}$。最后

$$tr_\varepsilon(L_2) = \frac{\beta_\varepsilon^{2w(L_2)}}{\varepsilon} \cdot \{L_2\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{\beta_\varepsilon^{2w(L_1)} \cdot \beta_\varepsilon^2}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\beta_\varepsilon^2} \cdot \{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{\beta_\varepsilon^{2w(L_1)}}{\varepsilon} \cdot \{L_1\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = tr_\varepsilon(L_1).$$

对于负的第一次 Reidemeister 移动，证明类似。 □

设 $\mathbb{L}$ 是 S^3 中的一个链环，且 L 是该链环的一个图示。于是我们可以定义 $tr_\varepsilon(\mathbb{L}) = tr_\varepsilon(L)$。定理 6 表明这个定义是正确的。

例 7. 设 $\mathbb{U}$ 是一个带有平凡图示 U 的平凡结（无结）。则 $\{U\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = b_{\mathbf{A}} \circ d_{\mathbf{A}} = \varepsilon$。因此 $tr_\varepsilon(\mathbb{U}) = 1$。

设 3_1 为一个右手三叶结。利用例 6，我们可以计算 $tr_\varepsilon(3_1) = \frac{\beta_\varepsilon^6}{\varepsilon} \cdot (1 - 2\beta_\varepsilon) = \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon} \cdot (2\beta_\varepsilon - 1)$。如果我们固定 ε 和 β_ε 的某些取值，那么 $tr_\varepsilon(3_1)$ 将是一个具体的复数。

设 $\mathbb{H}_2$ 是一个霍普夫链环。那么 $tr_\varepsilon(\mathbb{H}_2) = S_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$，其中 $S_{\mathbf{A},\mathbf{A}}$ 是定理 5 的证明中 S-矩阵的一个值。因此 $tr_\varepsilon(H_2) = -\frac{1}{\varepsilon}$。

设 $\mathbb{H}_k$, $k \geqslant 1$ 是一个广义的 k 分支霍普夫链环。该链环的图示 H_k 由一组有序的 k 平凡圆 $U_1, \ldots, U_k$ 组成，其中对于每个 $i \in \{1, k-1\}$，分支对 U_i, U_{i+1} 都构成经典霍普夫链环的最简图示（见图 25）。注意，$\mathbb{H}_1 = \mathbb{U}$ 是一个平凡结，$\mathbb{H}_2$ 是一个经典霍普夫链环。

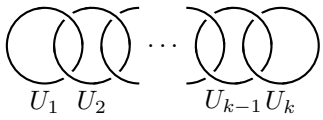


图 25. 广义 k 分支霍普夫链环

定理 7. $tr_\varepsilon(\mathbb{H}_k) = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{1-k}$ 对于 $k \geqslant 1$。

证明。设 $h \in Hom(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}, \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$ 是一个态射，其带结图如图 26 所示。该图示分为八层 λ_1，…，λ_8。对应的态射如下：

$$\begin{aligned}
\mu_{\lambda_1} &= (id_{\mathbf{A}} \otimes b_{\mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \otimes \mathbf{A}),\\
\mu_{\lambda_2} &= \alpha^{-1}_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})) \otimes \mathbf{A}, ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}),\\
\mu_{\lambda_3} &= (c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes id_{\mathbf{A}} \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}),\\
\mu_{\lambda_4} &= \alpha_{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom(((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})),\\
\mu_{\lambda_5} &= (id_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})),\\
\mu_{\lambda_6} &= \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} \in Hom((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))),\\
\mu_{\lambda_7} &= id_{\mathbf{A}} \otimes \alpha^{-1}_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})), \mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A})),\\
\mu_{\lambda_8} &= id_{\mathbf{A}} \otimes (d_{\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \in Hom(\mathbf{A} \otimes ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}), \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}).
\end{aligned}$$

态射 h 的图示如图 27 所示。

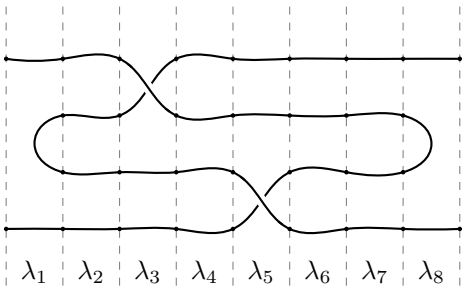


图 26. 态射 h 的带结图

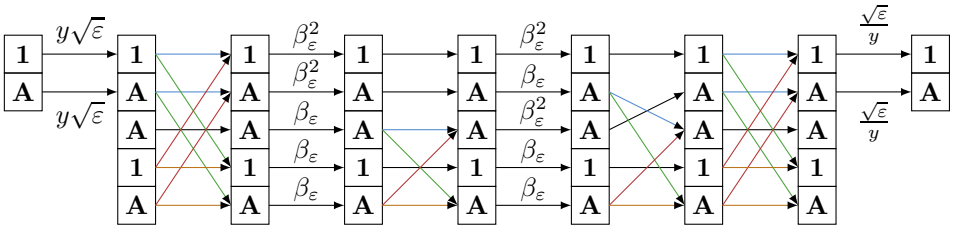


图 27. 态射 h 的图示

接下来计算

$$[h]_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \beta_\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y\sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_\varepsilon^4}{\varepsilon} + \beta_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

最后，注意到

$$\{H_k\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = b_{\mathbf{A}} \circ \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{k-1 \text{ times}} \circ d_{\mathbf{A}} = [d_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} \cdot [h]_{\mathbf{1}}^{k-1} \cdot [b_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{y} \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} \cdot y\sqrt{\varepsilon} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{2-k}.$$

因此

$$tr_\varepsilon(\mathbb{H}_k) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \{H_k\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon^{1-k}.$$

□

3.2. 三维流形的不变量

我们将带框架链环定义为一对 $(\mathbb{L}, \mathbb{F})$，其中 $\mathbb{L}$ 是一个无向的 k 分支链环，且分支集合上的顺序固定；$\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ 是一个整数元组。每个值 f_i、$i \in \{1, \ldots, k\}$ 都是第 i 个分支的框架。带框架链环图是链环 $\mathbb{L}$ 的一个图示 $L = l_1 \cup \ldots l_k$，满足对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$w(l_i) = f_i$。

我们将带框架链环（$\mathbb{L}, \mathbb{F}$）的符号差定义为矩阵的符号差

$$[(\mathbb{L}, \mathbb{F})] = \begin{pmatrix} f_1 & lk(l_1, l_2) & \ldots & lk(l_1, l_k) \\ lk(l_2, l_1) & f_2 & \ldots & lk(l_2, l_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ lk(l_k, l_1) & lk(l_k, l_2) & \ldots & f_k \end{pmatrix},$$

其中，$lk(l_i, l_j)$ 是分支 l_i 和 l_j 的链接数。符号差可以按以下方式计算。首先，考虑矩阵 $[(\mathbb{L}, \mathbb{F})]$ 所对应的二次型。然后，符号差是该二次型的标准形中正求和项数与负求和项数之差。

众所周知，任何闭三维流形都可以由 S^3 沿带框架链环进行手术得到。将由带框架链环 $(\mathbb{L}, \mathbb{F})$ 得到的流形记为 $M_{(\mathbb{L}, \mathbb{F})}$。

定义

$$tr_\varepsilon(M_{(\mathbb{L},\mathbb{F})}) = \Delta^\sigma \cdot D^{-\sigma-k-1} \cdot \sum_\xi \varepsilon^{|\xi|_{\mathbf{A}}} \cdot \{L\}_\xi,$$

其中 σ 是带框架链环 $(\mathbb{L},\mathbb{F})$ 的符号差， $\Delta = 1+\varepsilon^2\cdot\beta_\varepsilon^2$, $D=\sqrt{2+\varepsilon}$，求和遍历图示 L 的所有着色 ξ ，而 $|\xi|_{\mathbf{A}}$ 是着色 ξ中取值 A 的个数。由 [17, 定理 II.2.2.2]可知， tr_ε 是闭三维流形的不变量，即数值 $tr_\varepsilon(M_{(\mathbb{L},\mathbb{F})})$ 不依赖于定义该流形的带框架链环 $(\mathbb{L},\mathbb{F})$。

例 8. 设 M 是一个庞加莱球面。众所周知， M 可由 S^3 沿右手三叶结 3_1 进行框架为 $f_1=+1$ 的手术得到。该带框架结的图示 T 见图28。

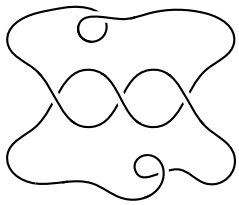


图28. 框架为 $+1$ 的右手三叶结图示 T

在这种情况下 $\sigma=1$，且只有两种着色：用对象 1 着色 $\xi_{\mathbf{1}}$ 、颜色 T， $\xi_{\mathbf{A}}$ 用对象 A 着色 T 。于是 $\{T\}_{\xi_{\mathbf{1}}}=1$ 且 $\{T\}_{\xi_{\mathbf{A}}}=(1-2\beta_\varepsilon)\cdot\beta_\varepsilon^4$（这里我们使用例 6 的结果以及 $[\theta^{-1}{}_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}=\beta_\varepsilon^2$这一事实）。最后

$$tr_\varepsilon(M) = \frac{(1+\varepsilon^2\cdot\beta_\varepsilon^2)\cdot(1+\varepsilon\cdot(\beta_\varepsilon^4+2))}{(\varepsilon+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

设 $(\mathbb{H}_k,\mathbb{F})$ 是一个广义霍普夫链环，其框架为 $\mathbb{F}=(f_1,..,f_k)$，并设 $H^{f_1,\dots,f_k}$ 是该带框架链环的图示（图29）。

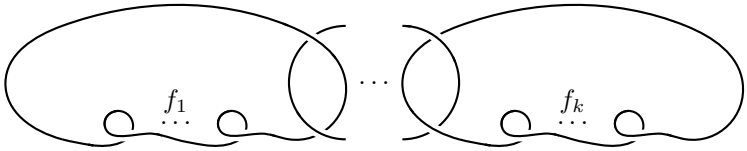


图29. 带框架广义霍普夫链环的图示 $H^{f_1,\dots,f_k}$

众所周知（见 [13]） ， $M_{(\mathbb{H}_k,\mathbb{F})}$ 是一个透镜空间$L_{p,q}$，其中

$$\frac{p}{q} = f_1 - \frac{1}{f_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{f_k}}}.$$

引理14. 设 $\xi_{\mathbf{A}}$ 是图示 $H^{f_1,\dots,f_k}$ 的一个常值着色，将每个分支映射到对象 A。则

$$\{H_k^{f_1,\dots,f_k}\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = \frac{(-1)^{k-1}}{\varepsilon^{k-2}\cdot\beta_\varepsilon^{2f_1+\dots+2f_k}}.$$

证明. 证明与定理 7 的证明类似。设 $h_{f_i}\in Hom(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A},\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})$ 是一个态射，其带结图如图30所示。

注意 $\underbrace{\theta_{\mathbf{A}}\circ\ldots\circ\theta_{\mathbf{A}}}_{f_i}$ 是一个由值 $\frac{1}{\beta_\varepsilon^{2f_i}}$定义的从 A 到 A 的态射。然后

$$[h_{f_i}]_{\mathbf{1}} = \left(-\tfrac{1}{\varepsilon\cdot\beta_\varepsilon^{2f_i}}\right), \text{ and } [b_{\mathbf{A}}\circ\underbrace{(id_{\mathbf{A}}\otimes\theta_{\mathbf{A}})\circ\ldots\circ(id_{\mathbf{A}}\otimes\theta_{\mathbf{A}})}_{f_1 \text{ times}}]_{\mathbf{1}} = \left(\tfrac{y\sqrt{\varepsilon}}{\beta_\varepsilon^{2f_1}}\right).$$

最后，

$$\{H_k^{f_1,\dots,f_k}\}_{\xi_{\mathbf{A}}} = (b_{\mathbf{A}}\circ\underbrace{(id_{\mathbf{A}}\otimes\theta_{\mathbf{A}})\circ\ldots\circ(id_{\mathbf{A}}\otimes\theta_{\mathbf{A}})}_{f_1 \text{ times}})\circ h_{f_2}\circ\ldots\circ h_{f_k}\circ d_{\mathbf{A}} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot\varepsilon}{\varepsilon^{k-1}\cdot\beta_\varepsilon^{2f_1}\cdot\ldots\cdot\beta_\varepsilon^{2f_k}}.$$

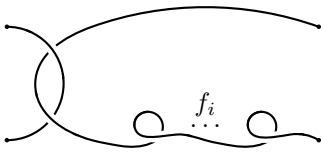


图30。态射 h_{f_i} 的带结图

□

设 $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ 是一个按升序排列的自然数序列。定义函数

$$c\colon \{i_1, \ldots, i_s\} \mapsto c(i_1, \ldots, i_s)$$

如下：将序列 $\{i_1, \ldots, i_s\}$ 拆分为包含连续数字的极大子序列（即，数字 i 包含在某个子序列中，当且仅当 $i-1$ 或 $i+1$ 包含在该子序列中）。设这些极大子序列的数量为 r，长度分别为 l_1、.....、l_r。那么

$$c(i_1, \ldots, i_s) = \prod_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{l_j-1}}{\varepsilon^{l_j-2}}.$$

例9。 $c(1,3) = \varepsilon^2$，因为 $\{1,3\}$ 中只有两个子序列： $\{1\}$ 和 $\{3\}$。对于两者，$l_1 = l_2 = 1$，因此两个乘数都是 $(-1)^0 = \varepsilon$。

$c(1,2,3,4) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$，因为对于序列 $\{1,2,3,4\}$： $r=1$、 $l_1 = 4$，因此唯一的乘数是 $(-1)^3\varepsilon^2$ 。

$c(2,3,4,6,7,9,10,11) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$，因为序列 $\{2,3,4,6,7,9,10,11\}$ 分成了三个子序列：$\{2,3,4\}$ 长度为 $l_1 = 3$， $\{6,7\}$ 长度为 $l_2 = 2$，以及 $\{9,10,11\}$ 长度为 $l_3 = 3$。因此

$$c(2,3,4,6,7,9,10,11) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

定理8. 设 $\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$，且 $L_{p,q}$ 是透镜空间，由沿带框架链环 $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})$ 进行手术 S^3 得到。那么

$$tr_\varepsilon(L_{p,q}) = \frac{(1+\varepsilon^2 \cdot \beta_\varepsilon^2)^\sigma}{(\varepsilon+2)^{\frac{\sigma+k+1}{2}}} \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{k} \left(\varepsilon^s \cdot \sum_{\{i_1,\ldots,i_s\}} \frac{c(i_1,\ldots,i_s)}{\beta_\varepsilon^{2f_{i_1}+\ldots+2f_{i_s}}} \right)\right),$$

其中，第二个和遍历所有阶为 s 的子集 $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$。

证明. 设 ξ 是图示 $H^{f_1,\ldots,f_k}_k$ 的一种着色。此着色通过选取子集 $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$ 来定义。图示 $H^{f_1,\ldots,f_k}_k$ 中下标属于该子集的分支用 A 着色，其余分支用 1 着色。对于这种着色， $|\xi|_{\mathbf{A}} = s$。根据引理14

$$\{H_k^{f_1,\ldots,f_k}\}_\xi = \frac{c(i_1,\ldots,i_s)}{\beta_\varepsilon^{2f_{i_1}+\ldots+2f_{i_s}}}.$$

将这些值以及 Δ 和 D 的值代入不变量 tr_ε 的公式后得到的定理陈述。□

命题 2. 设 $p \geqslant 1$，则 $tr_\varepsilon(L_{p,\ q}) = tr_\varepsilon(L_{p+5q,\ q})$。

证明。注意，如果 $L_{p,\ q} = M_{(\mathbb{H}_k,\mathbb{F})}$，其中 $\mathbb{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$，那么 $L_{5q+p,\ q} = M_{(\mathbb{H}_k,\mathbb{F}')}$，其中 $\mathbb{F}' = (f_1 + 5, f_2, \ldots, f_k)$。显然，带框架链环 $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F})$ 和 $(\mathbb{H}_k, \mathbb{F}')$ 的签名相同。接下来， β_ε 是一个 10 次单位根。因此，将 f_1 改为 $f_1 + 5$ 不会影响定理8中的值 tr_ε。□

4. tv_ε 与 ε-不变量之间的联系

4.1. 不变量 tv_ε

书籍 [17] 包含一个算法，该算法能够从任意模范畴中提取三维流形的 Turaev–Viro 型不变量。在本节中，我们将这一算法应用于范畴 $\mathfrak{E}$，并提取不变量 tv_ε。

4.1.1. 重数模

对所有简单对象 X、Y、$Z \in I = \{\mathbf{1}, \mathbf{A}\}$，定义 $H^{XYZ} = Hom(\mathbf{1}, (X \otimes Y) \otimes Z)$。每个 H^{XYZ}都是 $\mathbb{C}$上的一个模。显然，如果对象 X、Y、Z中 $\mathbf{A}$ 的数量不等于一个（即 $X = Y = Z = \mathbf{1}$，或 $X = Y = Z = \mathbf{A}$，或其中两个为 $\mathbf{A}$ 而另一个为 $\mathbf{1}$），则模 H^{XYZ}同构于 $\mathbb{C}$。所有其他模都是平凡的。如果模 H^{XYZ}非平凡，我们就称三元组 $(X$、Y、$Z)$ 是可容许的。

对于任意 $s \in \mathbb{C}$ 以及范畴 $\mathfrak{C}$中的任意对象 X，令 $u_s^X \in Hom(X, X)$ 表示由下列矩阵定义的从 X到 X 的态射：

$$[u_s^X]_{\mathbf{1}} = diag(s, \ldots, s) \text{ and } [u_s^X]_{\mathbf{A}} = diag(s, \ldots, s).$$

记 $v'_{\mathbf{1}} = 1$ 和 $v'_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\beta_\varepsilon}$。

对于每组三个简单对象 X、Y、$Z \in I$，考虑两个同构 $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}$: $H^{XYZ} \to H^{YXZ}$和$\mathcal{I}_{23}^{XYZ}$: $H^{XYZ} \to H^{XZY}$，它们由下列复合定义：

$$\mathcal{I}_{12}^{XYZ}(a) = a \circ (c_{X,Y} \otimes id_Z) \circ u^{(Y\otimes X)\otimes Z}_{v'_X v'_Y (v'_Z)^{-1}},$$

$$\mathcal{I}_{23}^{XYZ}(a) = a \circ \alpha_{X,Y,Z} \circ (id_X \otimes c_{Y,Z}) \circ \alpha^{-1}_{X,Z,Y} \circ u^{(X\otimes Z)\otimes Y}_{(v'_X)^{-1} v'_Y v'_Z}$$

对于每个态射 $a \in H^{XYZ}$。

注10。左侧图31展示了同构 $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}$的带结图，右侧图31展示了同构 $\mathcal{I}_{23}^{XYZ}$的图示。



图31. 同构 $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}$（左侧）和 $\mathcal{I}_{23}^{XYZ}$（右侧）

命题3. 对于任意可容许三元组（X，Y，Z），两个同构 $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}$和 $\mathcal{I}_{23}^{XYZ}$都是恒等映射。

证明. 针对不同的可容许三元组（X，Y，Z），考虑五种不同情形。

$X = Y = Z = \mathbf{1}$。在这种情况下，$\mathcal{I}_{12}^{\mathbf{111}}(a) = a \circ (c_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ u_1^{\mathbf{1}} = a$ 和 $\mathcal{I}_{23}^{\mathbf{111}}(a) = a \circ \alpha_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \circ \alpha^{-1}_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} \circ u_1^{\mathbf{1}} = a$，因为 $c_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$。

$X = \mathbf{1}$ $Y = Z =$ $\mathcal{I}_{12}^{\mathbf{1AA}}$ a $= a \circ$ $c_{\mathbf{1}\,\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}$ $\circ u_1^{\mathbf{1+A}} = a$ $\mathcal{I}_{23}^{\mathbf{1AA}}$ a $= a \circ \alpha_{\mathbf{1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}} \circ$ $id_{\mathbf{1}} \otimes$，A。在这种 $c_{\mathbf{A}\,\mathbf{A}}$ $\circ \alpha_{\mathbf{1}}^{-1}$ 32

情况下，( ) (,) 和 ( ) ,,(,) , A, A $\circ u^{\mathbf{1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}}$。第二个复合的图示如图 所示。

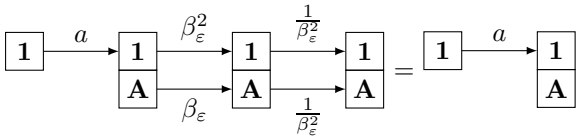


图32。复合 $a \circ \alpha_{\mathbf{1},\,\mathbf{A},\,\mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}}) \circ \alpha_{\mathbf{1}}^{-1}$, A, A $\circ u^{\mathbf{1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}}$ 和 $a \circ (c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ u^{\mathbf{1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}}$ 的图示

$X = \mathbf{A}$, $Y = \mathbf{1}$, $Z = \mathbf{A}$。在这种情况下，$\mathcal{I}_{12}^{\mathbf{A1A}}(a) = a \circ (c_{\mathbf{A},\,\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \circ u_1^{\mathbf{1+A}} = a$ 和 $\mathcal{I}_{23}^{\mathbf{A1A}}(a) = a \circ \alpha_{\mathbf{A},\,\mathbf{1},\,\mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{1},\,\mathbf{A}}) \circ \alpha^{-1}$ A, A 1 $\circ u_1^{\mathbf{1+A}} = a$，因为 $c_{\mathbf{A},\,\mathbf{1}} = c_{\mathbf{1},\,\mathbf{A}} = id_{\mathbf{A}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A},\,\mathbf{1},\,\mathbf{A}} = \alpha_{\mathbf{A},\,\mathbf{A},\,\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1+A}}$。

$X = Y = \mathbf{A}$, $Z = \mathbf{1}$。在这种情况下，$\mathcal{I}_{12}^{\mathbf{AA1}}(a) = a \circ (c_{\mathbf{A},\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ u^{\mathbf{1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon^2}}$ 和 $\mathcal{I}_{23}^{\mathbf{AA1}}(a) = a \circ \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{1}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{1}}) \circ \alpha^{-1}$ A,1,A $\circ u_1^{\mathbf{1+A}} = a$。第一个复合的二元图如图32所示。

$X = Y = Z = \mathbf{A}$. 在此情况下，$\mathcal{I}_{12}^{\mathbf{AAA}}(a) = a \circ (c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \circ u^{\mathbf{A+1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}}$ 和 $\mathcal{I}_{23}^{\mathbf{AAA}}(a) = a \circ \alpha_{\mathbf{A},\,\mathbf{A},\,\mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}}) \circ \alpha^{-1}$ A, A, A $\circ u^{\mathbf{A+1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}}$。第一个复合的图示如图33所示。第二个复合的图示如图34所示。

□

对于任意可容许三元组 (X, Y, Z)，定义模 $H(X, Y, Z)$：将 H^{XYZ}, H^{XZY},H^{YXZ}, H^{YZX}, H^{ZXY} 和 H^{ZYX} 通过由 $\mathcal{I}_{12}^{XYZ}$ 和 $\mathcal{I}_{23}^{XYZ}$ 生成的同构识别而得到。实际上，要得到任意元素 $a \in H(X, Y, Z)$，我们应从这六个模中选取同一个元素 a。

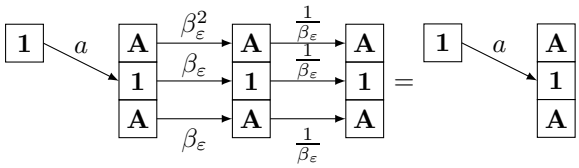


图33。复合 $a \circ (c_{\mathbf{A},\,\mathbf{A}} \otimes id_{\mathbf{A}}) \circ u^{\mathbf{A+1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}}$

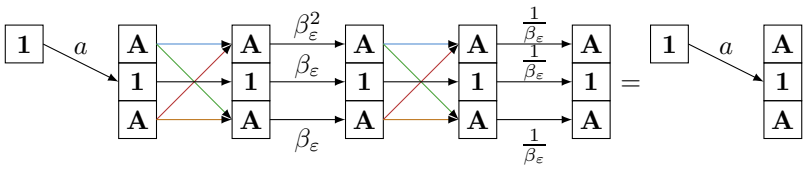


图34。复合图示 $a \circ \alpha_{\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes c_{\mathbf{A},\mathbf{A}}) \circ \alpha^{-1}{}_{\mathrm{A,A,A}} \circ u^{\mathbf{A+1+A}}_{\frac{1}{\beta_\varepsilon}}$

4.1.2. 配对

设 $w_{\mathbf{1}} \in Ho\ m(\mathbf{1},\mathbf{1})$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个态射，其值定义为 1（即 $w_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$），并且 l et $w_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathrm{A},\mathrm{A})$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个态射，其定义为非零值 $z \in \mathbb{C}$。

引理 15. 对于每个简单对象 $X \in I$: $(w_X \otimes id_X) \circ d_X = (id_X \otimes w_X) \circ d_X$.

证明。引理陈述显而易见。 □

对于任意可容许的简单对象三元组 (X,Y,Z)，定义配对 $(\cdot,\cdot)^{XYZ}$: $H(X,Y,Z)\times H(X,Y,Z) \to \mathbb{C}$ 如下。对于任意两个元素 $a,b \in H(X,Y,Z)$，其配对值 $(a,b)^{XYZ}$ 等于图35所示的态射。该态射是从 1 到 1 的态射，因此由一个复数确定。

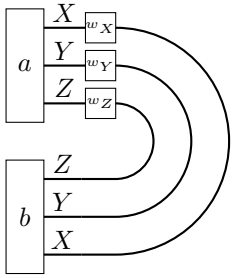


图35. 配对 $(a,b)^{XYZ}$ 的态射的带结图

定理 9. $(a,b)^{\mathbf{111}} = ab$, $(a,b)^{\mathbf{1AA}} = aby^2z^2$ 和 $(a,b)^{\mathbf{AAA}} = abxy^3z^3$.

证明。对于任意一组三个简单对象（X,Y,Z），以及任意的 $a,b \in H(X,Y,Z)$，态射 $(a,b)^{XYZ}$ 是由九个态射复合 $\mu_1 \circ \ldots \circ \mu_9$ 而成，其中:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= a \otimes b,\\
\mu_2 &= ((w_X \otimes w_Y) \otimes w_Z) \otimes ((id_Z \otimes id_Y) \otimes id_X),\\
\mu_3 &= \alpha^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z, Z\otimes Y, X},\\
\mu_4 &= \alpha^{-1}_{(X\otimes Y)\otimes Z, Z, Y} \otimes id_X,\\
\mu_5 &= (\alpha_{X\otimes Y, Z, Z} \otimes id_Y) \otimes id_X,\\
\mu_6 &= (((id_X \otimes id_Y) \otimes d_Z) \otimes id_Y) \otimes id_X,\\
\mu_7 &= \alpha_{X,Y,Y} \otimes id_X,\\
\mu_8 &= (id_X \otimes d_Y) \otimes id_X,\\
\mu_9 &= d_X.
\end{aligned}
$$

该定理源于对三种不同情形下这些态射的仔细计算，其中 (X,Y,Z) 分别与 (1, 1, 1)、(1, A, A) 或 (A, A, A) 相同。 □

4.1.3. 6j 符号

对于任意一组简单对象 $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \in I$，定义 6j 符号

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| : H(X_1, Y_1, Z_1) \otimes H(X_1, Y_2, Z_2) \otimes H(Y_1, Z_2, X_2) \otimes H(Z_1, X_2, Y_2) \to \mathbb{C}$$

如下所述。如果四元组 (X_1, Y_1, Z_1)、(X_1, Y_2, Z_2)、(Y_1, Z_2, X_2) 或 (Z_1, X_2, Y_2) 中至少有一个不是可容许的，则相应的模是平凡模，6j 符号也是平凡映射。如果四元组 (X_1, Y_1, Z_1)、(X_1, Y_2, Z_2)、(Y_1, Z_2, X_2) 和 (Z_1, X_2, Y_2) 都是可容许的，则四个模 $H(X_1, Y_1, Z_1)$、$H(X_1, Y_2, Z_2)$、$H(Y_1, Z_2, X_2)$ 和 $H(Z_1, X_2, Y_2)$ 都同构于 $\mathbb{C}$。在这种情况下，对于任意 $a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$、$a_2 \in H(X_1, Y_1, Z_2)$、$a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$、$a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$，6j 符号将 $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4$ 映射到图 36 所示态射的值。该态射是从 1 到 1 的态射，因此由一个复数值定义。该复数值定义了其像

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4).$$

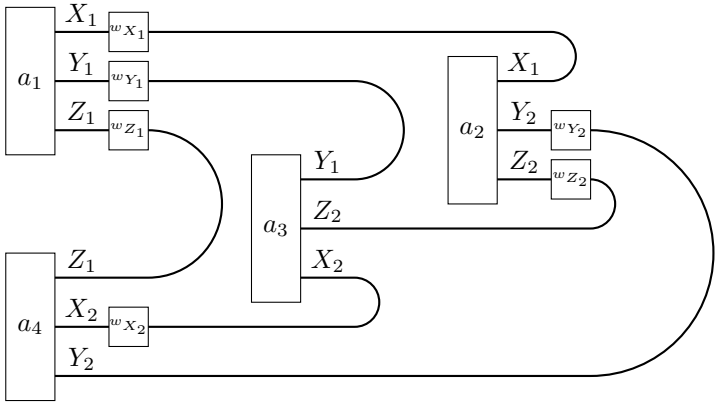


图 36. 6j 符号的带结图

注 11. 所有 6j 符号都具有如下对称性：对于任意简单对象 $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \in I$ 和 $a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$，$a_2 \in H(X_1, Y_2, Z_2)$，$a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$，$a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$，我们有

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = \left| \begin{array}{ccc} X_1 & Z_2 & Y_1 \\ X_2 & Z_1 & Y_1 \end{array} \right| (a_2 \otimes a_1 \otimes a_3 \otimes a_4) = \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & Y_2 & X_2 \\ Z_2 & Y_1 & X_1 \end{array} \right| (a_4 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3).$$

定理 10. 非平凡的 6j 符号如下：

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4,$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{y^3 z^3}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{y^4 z^4}{\varepsilon},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{x y^5 z^5}{\varepsilon},$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 \frac{x^2 y^6 z^6}{-\varepsilon^2}.$$

证明. 对于定义非平凡 6j 符号的任意六个简单对象 $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$，以及任意$a_1 \in H(X_1, Y_1, Z_1)$，$a_2 \in H(X_1, Y_2, Z_2)$，$a_3 \in H(Y_1, Z_2, X_2)$，$a_4 \in H(Z_1, X_2, Y_2)$，该态射

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{array} \right| (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4)$$

是一种复合 $\mu_1 \circ \ldots \circ \mu_{21}$，其中

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= a_1 \otimes a_4,\\
\mu_2 &= ((w_{X_1} \otimes w_{Y_1}) \otimes w_{Z_1}) \otimes ((id_{Z_1} \otimes w_{X_2}) \otimes id_{Y_2}),\\
\mu_3 &= \alpha^{-1}_{(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1, Z_1 \otimes X_2, Y_2},\\
\mu_4 &= \alpha^{-1}_{(X_1 \otimes Y_1) \otimes Z_1, Z_1, X_2} \otimes id_{Y_2},\\
\mu_5 &= (\alpha_{X_1 \otimes Y_1, Z_1, Z_1} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_6 &= (((id_{X_1} \otimes id_{Y_1}) \otimes d_{Z_1}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_7 &= (((id_{X_1} \otimes id_{Y_1}) \otimes a_3) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_8 &= (\alpha^{-1}_{X_1 \otimes Y_1, Y_1 \otimes Z_2, X_2} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_9 &= ((\alpha^{-1}_{X_1 \otimes Y_1, Y_1, Z_2} \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{10} &= (((\alpha_{X_1, Y_1, Y_1} \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{11} &= ((((id_{X_1} \otimes d_{Y_1}) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{12} &= \alpha_{X_1 \otimes Z_2, X_2, X_2} \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{13} &= ((id_{X_1} \otimes id_{Z_2}) \otimes d_{X_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{14} &= ((id_{X_1} \otimes a_2) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{15} &= ((id_{X_1} \otimes ((id_{X_1} \otimes w_{Y_2}) \otimes w_{Z_2})) \otimes id_{Z_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{16} &= \alpha_{X_1, (X_1 \otimes Y_2) \otimes Z_2, Z_2} \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{17} &= (id_{X_1} \otimes \alpha_{X_1 \otimes Y_2, Z_2, Z_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{18} &= (id_{X_1} \otimes ((id_{X_1} \otimes id_{Y_2}) \otimes d_{Z_2})) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{19} &= \alpha^{-1}_{X_1, X_1, Y_2} \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{20} &= (d_{X_1} \otimes id_{Y_2}) \otimes id_{Y_2},\\
\mu_{21} &= d_{Y_2}.
\end{aligned}
$$

该定理是通过仔细计算对象 X_1、Y_1、Z_1、X_2、Y_2、$Z_2 \in I$ 的所有必要组合对应的态射得出的。□

4.1.4. 特殊脊与 tv_ε 的定义

在书籍 [17] 中，由模范畴导出的 Turaev–Viro 型不变量的构造，是通过三维流形的三角剖分来实现的。我们将采用对偶方法，并用三维流形的特殊脊来描述该不变量tv_ε。

若二维多面体 P 满足以下条件，则称其为特殊的。

1. 每个点 $x \in P$ 的链环同胚于圆（左侧的图37，这些点称为正则点）、带一条直径的圆（中间的图37，这些点称为三重点），或带两条直径的圆（右侧的图37，这些点称为真顶点）；

2. 所有三重点的并集是由若干互不相交的区间组成的集合，称为三重线;

所有正则点的并集是不相交开圆盘的并集，称为 2-分量。

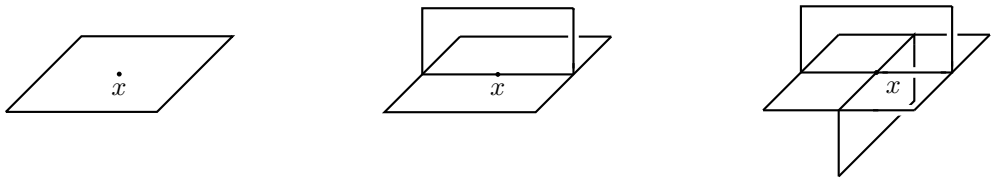


图37. 一般点（左侧）、三重点（中间）、真顶点（右侧） t)

如果特殊多面体的补集 $M \setminus P$ 与开3-球同胚，那么它就称为闭三维流形 M的特殊脊。我们将只讨论闭三维流形，因此无需给出脊的一般定义。

现在我们可以定义不变量 tv_ε 了。设 P 是闭三维流形 M 的一个特殊脊。令 $\mathcal{V}(P)$ 为所有真顶点的集合，$\mathcal{E}(P)$ 为所有三重线的集合，$\mathcal{C}(P)$ 为脊 P 的所有 2-分量的集合。P 的着色是一个映射 $\zeta\colon \mathcal{C}(P) \to \{\mathbf{1}, \mathrm{A}\}$。定义着色脊 $\{P\}_\zeta$ 的权重如下。对于每个真顶点 $v \in \mathcal{V}(P)$，关联一个 6j 符号 $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$，其中 X_1、X_2、X_3 是在 v 邻域内与一条三重线相接的三个 2-分量的颜色，而 X_2、Y_2、Z_2 是相对的二维分量的颜色（左侧图 38）。使用定理 10 中的 6j 符号。然后，权重 $\{P\}_\zeta$

是与所有真顶点关联的所有张量的缩并。缩并通过定理 9 中的配对完成。

从等价的角度来看，我们可以如下定义 $\{P\}_\zeta$。对于每条 $e \in \mathcal{E}(P)$ 三重线，若其与颜色为 X、Y、Z 的 2-分量相接，则赋予它与 $(1,1)^{XYZ}$ 相反的值（图 38 右侧）。于是，权重$\{P\}_\zeta$ 等于这些赋值与真顶点对应的 6j 符号的乘积，其中 6j 符号按参数 $1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$ 计算。

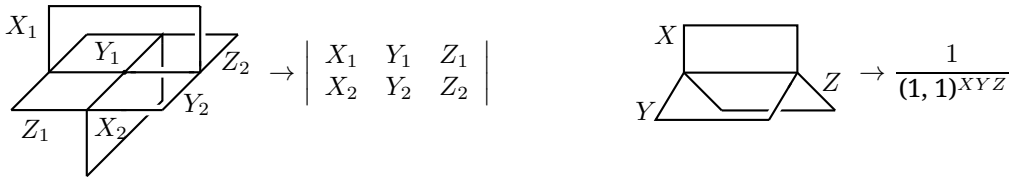


图 38. 6j 符　　号对应一个真顶点（左侧），与配对相反的值对应一条三重　　le 线（右侧　　）

设 ζ 为一种着色。用 $|\zeta|_{\mathbf{A}}$ 表示着色为 A 的 2-分量的数量。那么

$$tv_\varepsilon(P) = \sum_\zeta \varepsilon^{|\zeta|_{\mathbf{A}}} \cdot \{P\}_\zeta,$$

其中的和是对脊 P 的所有着色取的。

与 [17, 第 VII.1 节3] 中的原始定义相比，我们的 Turaev–Viro 型不变量定义只有一处不同。我们不使用系数 $\frac{1}{D^{2V}}$，其中 V 是流形三角剖分中的顶点数。在我们的情形中，脊的补集始终是一个开3-球。因此，我们可以忽略这个系数。

定理 11. 若 P_1 和 P_2 是闭三维流形 M 的特殊脊，则 $tv_\varepsilon(P_1) = tv_\varepsilon(P_2)$。

证明. 定理陈述由 [17, 定理 VII.14] 推出。 □

因此，对于闭三维流形 M 的任意特殊脊 P，我们可以将 $tv_\varepsilon(M)$ 正确定义为等于 $tv_\varepsilon(P)$。

定理 12. 对于任意闭三维流形 M:

$$|tr_\varepsilon(M)|^2 = \frac{tv_\varepsilon(M)}{\varepsilon + 2}.$$

证明。该定理陈述是 [17, 定理 VII.4.11]的推论。 □

4.2. ε-不变量

有多种等价方式可以定义三维流形的 ε-不变量（见 [10, 第 8]章）。我们将采用一种与 tv_ε 不变量的定义非常接近的方法。

令 P 为一个 闭三维流形 M的特殊脊，并令 $\eta\colon\ \mathcal{C}(P) \to \{0,1\}$ 为用两种　　o 颜色着色：0 和 1。 将颜色权重定义如下： $\omega_0 = 1$ 和 $\omega_1 = \varepsilon$，其中，与之前一样， $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$。

设 $v \in \mathcal{V}(P)$ 为脊 P 的一个真顶点。该顶点的邻域包含六个 2-分量。设 $i,j,k \in \{0,1\}$ 为该顶点邻域v中与一条三重线相邻的分支的颜色，并设 l,m,n 为相对的二维分量的颜色。将顶点 v 的权重 ω_v 定义如下:

$$\omega_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}',$$

其中

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}' = 1, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\varepsilon}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = \frac{1}{\varepsilon}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}' = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

在所有其他情况下， $\omega_v = 0$ 。

这里我们使用带撇号的 6j 符号，以便与之前使用的 6j 符号区分。流形 M 的ε-不变量（记作 t）定义如下:

$$t(M) = \sum_\eta \left(\prod_{c \in \mathcal{C}(p)} \omega_{\eta(c)} \cdot \prod_{v \in \mathcal{V}(P)} \omega_v \right),$$

其中的和遍历 P 的所有着色。

定理 13. 对于任意闭三维流形 M：

$$tv_\varepsilon(M) = t(M).$$

证明。证明的关键步骤是说明， $tv_\varepsilon(M)$的值不依赖于构造中使用的参数 x、 y和 z 。

设 P是流形 M的一个特殊脊，并设 $\zeta\colon \mathcal{C}(P) \to \{\mathbf{1}, \mathrm{A}\}$是一个非平凡着色（即$\{P\}_\zeta \neq 0$）。根据着色脊 P 的真顶点邻域中被着色为 A 的 2-分量数，将所有真顶点分为五类。令 k_0 表示所有关联的 2-分量均被着色为 1 的顶点数， k_1 表示有三个关联的 2-分量被着色为 A 的顶点数， k_2 表示有四个关联的 2-分量被着色为 A 的顶点数， k_3 表示有五个关联的 2-分量被着色为 A 的顶点数，最后， k_4 表示所有关联的 2-分量均被着色为 A 的顶点数。于是

$$\{P\}_\zeta = \left(\frac{y^3z^3}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{y^4z^4}{\varepsilon}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{xy^5z^5}{\varepsilon}\right)^{k_3} \cdot \left(-\frac{x^2y^6z^6}{\varepsilon^2}\right)^{k_4} \cdot \left(\frac{1}{xy^3z^3}\right)^{k_3+2k_4} \cdot \left(\frac{1}{z^2y^2}\right)^{\frac{3}{2}k_1+2k_2+k_3}.$$

最后两个乘数来自 P的三重线。仅有一个关联的 2-分量被着色为 1 的三重线数等于$\frac{3}{2}k_1 + 2k_2 + k_3$，而三个关联的 2-分量均被着色为 A 的三重线数等于 $k_3 + 2k_4$。

在表达式 $\{P\}_\zeta$ 中，参数 x 的总次数为 $k_3 + 2k_4 - k_3 - 2k_4 = 0$，参数 y 和 z 的总次数相等，均为 $3k_1 + 4k_2 + 5k_3 + 6k_4 - 3k_3 - 6k_4 - 3k_1 - 4k_2 - 2k_3 = 0$。

值 $\{P\}_\zeta$ 不依赖于参数 x、 y、 z。因此我们可以取 $x = y = z = 1$，此时 $tv_\varepsilon(M)$ 的公式与 $t(M)$ 的公式完全相同（将 1 改为 0，并将 A 改为 1 后）。□

例 10。 tr_ε 不变量比 tv_ε 更强。已知透镜空间的 ε-不变量只有四个不同的取值（[11], [10, 定理 8.1。28]）。

计算 $tv_\varepsilon(L_{1,1}) = tv_\varepsilon(L_{4,1}) = 1$很容易，但计算 $tr_\varepsilon(L_{1,1}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon+2}} \in \mathbb{R}$ 和 $tr_\varepsilon(L_{4,1}) = (\varepsilon+1)\cdot\frac{(1+\beta_\varepsilon)^2}{(\varepsilon+2)^{\frac{3}{2}}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 就不容易了。因此， $tr_\varepsilon(L_{1,1}) \neq tr_\varepsilon(L_{4,1})$。

参考文献

[1] B. Bakalov、A. Kirillov，《张量范畴与模函子的讲义》// 美国数学学会，大学讲座丛书，2000年。[2] P. Etingof、D. Calaque，《张量范畴讲义》// IRMA 数学与理论物理讲座，第12卷，2008年。[3] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych、V. Ostrik，《张量范畴》// 美国数学学会，2010年。[4] P. Etingof、D. Nikshych、V. Ostrik，《关于融合范畴》//《数学年刊》第二辑，2005年，第162卷，第2期，第581–642页。[5] P. Etingof、D. Nikshych、V. Ostrik，《融合范畴与同伦论》//《量子拓扑》，2010年，第1卷，第209–273页。[6] B. Field、T. Simula，《非阿贝尔任意子拓扑量子计算导论》//《量子科学与技术》，2018年，第3卷，第4期。[7] R. Kirby、P. Melvin，《Witten与Reshetikhin-Turaev的三维流形不变量：针对 $sl(2,\mathbb{C})$》//《数学发明》，1991年，第105卷，第473–545页。[8] S. Mac Lane，《自然结合律与交换律》//《莱斯大学研究》，1963年，第49卷，第28–46页。[9] S. V. Matveev，《三维流形的复杂性理论》//《应用数学学报》，1990年，第19卷，第101–130页。[10] S. Matveev，《算法拓扑学与三维流形分类》// 柏林：施普林格出版社，2007年。[11] S. V. Matveev、M. A. Ovchinnikov、M. V. Sokolov，《 t-不变量的构造与性质》//《数学科学杂志》，2003年，第113卷，第6期，第849–855页。[12] V. Ostrik，《秩为2的融合范畴》//《数学研究快报》，2003年，第10卷，第2期，第177–183页。

[13] V. V. Prasolov，A. B. Sossinsky，《结、链环、辫子与三维流形：低维拓扑新不变量导论》// 美国数学会，1996。[14] N. Reshetikhin，V. Turaev，《通过链环多项式与量子群构造三维流形的不变量》//《数学发明》，1991，卷103，第3期，第547–597页。[15] E. Rowell，R. Stong，Z. Wang，《关于模张量范畴的分类》//《数学物理通讯》，2009，卷292，第2期，第343–389页。[16] V. Turaev，《模范畴与三维流形不变量》//《现代物理学国际期刊B》，1992，卷06，第11–12期，第1807–1824页。[17] V. G. Turaev，《结与三维流形的量子不变量》// De Gruyter 数学研究，2016。[18] V. Turaev，A. Virelizier，《幺半范畴与拓扑场论》// Birkh¨auser Cham，数学进展，2017。[19] V. Turaev，O. Viro，《三维流形的状态和不变量与量子 $6j$-符号》//《拓扑学》，1992，卷31，第4期，第865–902页。[20] A. Yu. Vesnin，E. A. Fominykh，《具有测地边界的三维双曲流形的复杂度》//《西伯利亚数学杂志》，2012，卷53，第4期，第625–634页。[21] A. Yu. Vesnin，V. G. Turaev，E. A. Fominykh，《具有贫脊的三维流形》//《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，2015，卷288，第29–38页。[22] Z. Wang，《拓扑量子计算》//《CBMS 数学区域会议丛书》，2010，卷112，第115页。