三维流形的对称 Dijkgraaf–Witten 型不变量 Korablev Ph. G.*korablev @csu.ru

摘要

本文介绍了三维流形不变量的构造，其基础概念与经典的 Dijkgraaf–Witten 不变量相同。我们引入特殊 G-系统的概念，并描述每个系统如何不仅为闭三维流形诱导出不变量，也能为带边界流形诱导出不变量。最后，我们展示了如何利用群上同调构造一个非常简单的一维特殊 G-系统。

目录

1. 引言.1 2. 不变量 $DW_{\mathcal{S}}$ .2

2.1 Simplex 2.2 着色..... 2 2.3 G-系统..... 4 2.4 不变量 $DW_{\mathcal{S}}$ 8

3. 一维情形.9 3.1 有限群的链复形.9 3.2 不变量 DW_{ω} .11

arXiv:2305.00737v2 [math.GT] 1 Oct 2023

1. 引言

针对三维流形的 Dijkgraaf–Witten 不变量最初于 [1] 中提出。后来， [7] 将其重新表述为定向三维流形的三角剖分形式。推广 Dijkgraaf–Witten 不变量的构造有多种方法。例如，在 [2] 中，这些不变量被扩展到带有尖点的 3-流形类。在 [6, 附录 H] 中，Dijkgraaf–Witten 不变量是从球面融合范畴中提取的。

本文介绍了所谓的三维流形对称 Dijkgraaf–Witten 型不变量。我们使用三维流形的特殊脊和简单骨架（见 [4]），而非三角剖分。对于每个简单多面体，我们考虑该多面体由有限群 G 的元素着色所得到的集合。若该多面体是某个闭流形的特殊脊，那么这些着色与从该流形的基本群到群 G 的表示相一致。一般而言，对于任意简单多面体，颜色集都有明确的定义。与经典 Dijkgraaf–Witten 不变量一样，我们为每种着色赋予环 $\mathbb{K}$ 中的一个值。区别在于，经典情形下，不变量是这些赋值的和；而在本文中，不变量是这些值构成的多重集，因为该多重集不依赖于流形所选取的简单骨架。因此，我们称这些不变量为 Dijkgraaf–Witten 型不变量。

我们构造的优势在于，它不仅为闭三维流形提供不变量，也适用于带边界流形，甚至虚流形（[5]）。我们采用的方法是构造构形不变量方法（[3]）的扩展。

我们构造的核心概念是 G-系统。粗略地说， G-系统是由模及其上的张量组成的集合，并满足某些对称性质。如果该系统满足一个条件，则称为特殊 G-系统，并定义模 T-变换下简单多面体的不变量。如果它还满足另一个条件，则称为强特殊 G-系统，并定义模 T, L-变换下的不变量。构造不变量最重要的一步是找到一个特殊（或强特殊）G-系统。我们没有提供构造这类系统的通用方法。如何从某些类型的范畴中提取这类系统，将是一个有趣的研究方向。

在第 2 节中，我们介绍 G-系统的概念，并证明如果该系统是强的且特殊的，那么它就定义了 3-流形的不变量。在第 3 节中，我们更详细地讨论最简单的一维情形。在这种情形下， G 系统中的所有模都是一维的。我们构造一个链复形（以及相应的余链复形），并证明第三上同调群中的任意元素都定义了特殊的 G 系统。这种构造类似于群的经典上同调构造，但略有不同。例如，众所周知的循环群的上循环在我们的情形下并不是上循环。在本节末尾，我们给出一个具有非平凡上循环的群 $\mathbb{Z}_4$ 的例子，并计算透镜空间 $L_{4,\ 1}$的不变量值。

*本研究得到 RSF 资助（项目编号：23-21-10014）

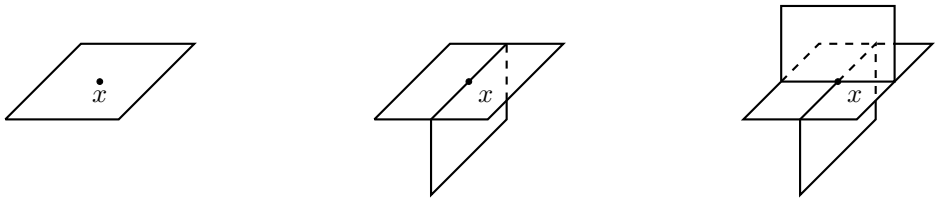
2. 不变量 DW_S

2.1. 简单多面体

定义 1 . 如果每个点 $x \in P$ 的链接都同胚，则称二维多面体 P 为简单多面体。 o-同胚于以下某个一维多面体:

1. 一个圆（图 1 左侧），此时点 x 称为正规点；2. 一个带有一条直径的圆（图 1 中间），此时点 x 称为三重点；3. 一个带有两条直径的圆（图 1 右侧），此时点 x 称为真顶点。

如果一个简单多面体的正规点并集是若干互不相交的开圆盘之并，且三重点的并是若干互不相交的区间之并，那么这个多面体称为特殊的。



Figu图 1. 正规点（左）、三重点（中）和真顶点（右）)

对于每个简单多面体 P，记 $\mathcal{V}(P)$ 为 P 的真顶点集， $\mathcal{E}(P)$ 为所有三重线的集合（即所有三重点并的连通分支）， $\mathcal{C}(P)$ 为所有 2-分量的集合（即所有正规点并的连通分支）。如果 P 是特殊的，那么 $\mathcal{C}(P)$ 中的所有元素都是圆盘，且 $\mathcal{E}(P)$ 的所有连通分支都是区间。如果 P 是一个简单多面体，那么集合 $\mathcal{C}(P)$ 可以包含任意曲面。

定义 2. 设 M 是一个 3-流形。若满足以下条件，则称多面体 $P \subseteq M$ 是 M 的骨架:

1. 在 $\partial M = \emptyset$ 的情形下，补集 $M \setminus P$ 与一个开 3-球同胚；

2. 在 这种情况下，补集 $M \setminus P$ 同胚于直积 $\partial M \times [0; 1)$.

若多面体 P 是特殊的，则骨架 P 称为特殊骨架；若多面体 P 是简单的，则称为简单骨架。

简单骨架存在几种不改变相应流形的局部变换。我们将用到其中两种： T-变换（图 2 左侧）和 L-变换（图 2 右侧）。

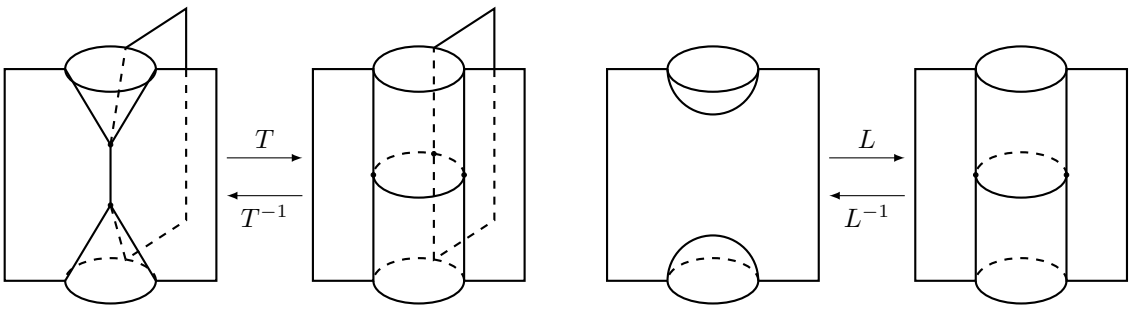


图 2. $T^{\pm 1}$-变换（左侧）和 $L^{\pm 1}$-变换（右侧）

众所周知，流形 M 的任意两个简单骨架 P_1, P_2 都可以通过有限次 T-变换、 L-变换及其逆变换（[4, 定理 1.2.27]）相互变换。此外，如果 P_1 和 P_2 都是特殊的，且至少含有两个真顶点，那么只需使用 T-变换（[4, 定理 1.2.5]），即可将 P_1 变换为 P_2。

2.2. 着色

定向简单多面体是指所有三重线和 2-分量都具有固定定向的多面体。

定义 3. 设 M 为一个定向三维流形， $P \subseteq M$ 为一个简单定向骨架， G为一个有限群。映射 ξ: $\mathcal{C}(P) \to G$ 称为 P的着色，当且仅当对每条三重线 $e \in \mathcal{E}(P)$:

$$g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} g_{i_3}^{\varepsilon_3} = 1,$$

其中 g_{i_1}、 g_{i_2}、 $g_{i_3} \in G$ 是与 e 相邻的 2-分量的颜色；若颜色为 g_{i_j} 的 2-分量的定向与 e 的定向一致，则取 $\varepsilon_j = 1$，反之则取 $\varepsilon_j = -1$ （图 3）。群元素序列 g_{i_1}、 g_{i_2}、 g_{i_3} 是相对于 e 的定向以及整个流形 M 的定向写出的。

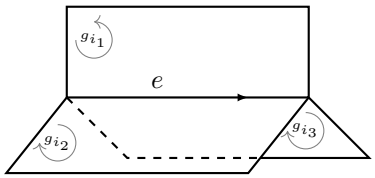


图 3. 边 e 邻域中 2-分量的颜色

设 $Col_G(P)$ 为简单多面体 P 到群 G 的元素所作的所有着色构成的集合。显然，集合 $Col_G(P)$ 是有限的。

定理 1. 设 M 为一个定向 3-流形， G 为一个有限群。则对该流形 M 的任意两个简单骨架 P_1、 P_2:

$$|Col_G(P_1)| = |Col_G(P_2)|.$$

注 1. 若 M 是闭的，则该定理的陈述显然成立。事实上，在这种情况下，对于 $i = 1$，集合 $Col_G(P_i)$ 只是从 $\pi_1(P_i)$ 到 G 的同态集合。但在更一般的情况下，当流形 M 不是闭的时，这个简单的论证并不成立。

证明。我们首先证明集合 $Col_G(P)$ 的基数不依赖于 P 的定向。

令 P_2 由 P_1 改变 2-分量 $c \in \mathcal{C}(P_1)$ 的定向得到。则对于每个着色 ξ: $\mathcal{C}(P_1) \to G$，都存在一个对应的着色 ξ': $\mathcal{C}(P_2) \to G$，其定义规则如下: $\xi(c) = \xi'(c)^{-1}$，且对于所有 $f \neq c, f \in \mathcal{C}(P_1)$ $\mathcal{C}(P_2)$， $\xi(f) = \xi'(f)$。

接下来考虑这样的情形： P_2 由 P_1 改变三重线 $e \in \mathcal{E}(P_1)$ 的定向得到。如果 ξ: $\mathcal{C}(P_1) \to G$ 是一个着色，那么同一个映射就定义了多面体 P_2 的着色。由 $g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} g_{i_3}^{\varepsilon_3} = 1$ 在 G 中等价于 $g_{i_3}^{-\varepsilon_3} g_{i_2}^{-\varepsilon_2} g_{i_1}^{-\varepsilon_1} = 1$ 这一事实可知。

众所周知，流形 M 的任意两个简单骨架都可以通过有限次 T-移动、 L-移动及其逆变换（[4, 定理 1.2.27]）相互得到。

设 P_2 由 P_1 经一次 T-移动得到。按图 4 所示固定 P_1 和 P_2 的定向。设 ξ: $\mathcal{C}$（P_1） $\to G$ 是图 4 左侧所示的着色。那么特别地

$$\begin{array}{lll} x_1 y_3^{-1} y_2 = 1, & x_2 y_1^{-1} y_3 = 1, & x_3 y_2^{-1} y_1 = 1, \\ x_1 z_3 z_2^{-1} = 1, & x_2 z_1 z_3^{-1} = 1, & x_3 z_2 z_1^{-1} = 1, \\ & x_1 x_2 x_3 = 1. & \end{array}$$

由此可得 $y_1^{-1} y_3 = x_2^{-1}$、 $y_1^{-1} y_2 = x_3$、 $x_2 = z_3 z_1^{-1}$ 和 $x_3 = x_1 x_1^{-1}$。

如下定义相应的着色 ξ': $\mathcal{C}$（P_2） $\to G$。所有 2-分量都取向，并用相同的颜色着色；新的 2-分量按图 4 右侧所示取向，并用元素 $w \in G$ 着色。我们应证明存在唯一的颜色 w，使得下列方程成立

$$\begin{array}{lll} x_1 y_3^{-1} y_2 = 1, & x_2 y_1^{-1} y_3 = 1, & x_3 y_2^{-1} y_1 = 1, \\ x_1 z_3 z_2^{-1} = 1, & x_2 z_1 z_3^{-1} = 1, & x_3 z_2 z_1^{-1} = 1, \\ w y_3 z_3 = 1, & w y_1 z_1 = 1, & w y_2 z_2 = 1. \end{array}$$

前六个方程与 ξ 相同，因此结论成立。定义 $w = z_1^{-1} y_1^{-1}$。注意， $z_1^{-1} y_1^{-1} y_3 z_3 = z_1^{-1} x_2^{-1} z_3 = 1$ 以及 $z_1^{-1} y_1^{-1} y_2 z_2 = z_1^{-1} x_3 z_2 = 1$。因此，着色 ξ' 定义正确。

为了证明 着色 ξ 也可由 ξ' 唯一确定，注意由 $x_1 = y_2^{-1} y_3$， $x_2 = y_3^{-1} y_1$ 可 d $x_3 = y_1^{-1} y_2$ 得 出 $x_1 x_2 x_3 = 1$。

令 P_2 由 P_1 通过一次 L-移动得到，并令 ξ: $\mathcal{C}(P_1) \to G$ 为图5中所示的 P_1 着色。由此可得 $ab_1c_1 = 1$ 和 $ab_2c_2 = 1$。定义着色 ξ': $\mathcal{C}(P_2) \to G$，如图5所示。我们需要证明 $a' = a$，且存在唯一的颜色 $w \in G$ 使得

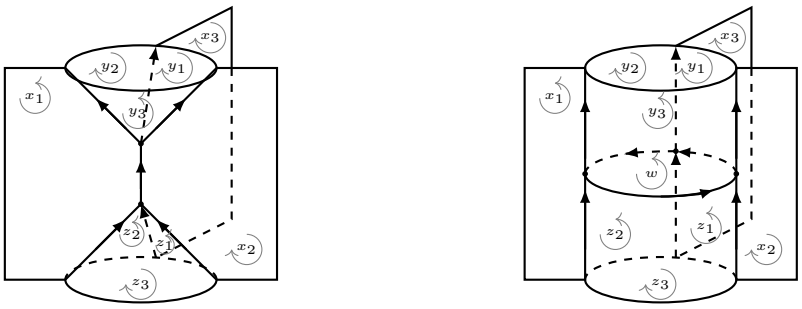


图 4. 着色定向多面体在 T-变换之前（左侧）和之后（右侧）

$$\begin{array}{ll} ab_1c_1 = 1 & ab_2c_2 = 1 \\ c_2c_1^{-1}w = 1 & b_2^{-1}b_1w = 1 \\ a'b_2c_2 = 1 & a'b_1c_1 = 1 \end{array}$$

注意到 $a' = (b_2c_2)^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a$。取 $w = c_1c_2^{-1}$。于是 $b_2^{-1}b_1c_1c_2^{-1} = b_2^{-1}a^{-1}c_2^{-1} = 1$。

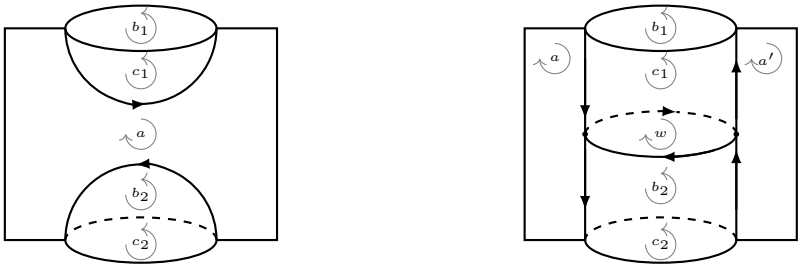


图5. 着色定向多面体在 L-变换之前（左侧）和之后（右侧）

□

注2. 事实上，在定理 1 的证明中，我们证明了一个更一般的陈述：对于流形 M 的任意两个简单骨架 P_1、P_2，$Col_G(P_1)$ 与 $Col_G(P_2)$ 之间存在自然双射。

2.3. G-系统

设 G 为有限群，$\mathbb{K}$ 为含单位元的结合环。对于满足 abc =1 的每个三元组 $(a,b,c) \in G^3$，考虑环 $\mathbb{K}$ 上的有限维模 $V_{a,b,c}$。我们假设 $V_{a,b,c} = V_{b,c,a} = V_{c,a,b}$，这三种记法都只是同一个模的不同名称。此外，设 $\mathcal{I}_{a,b,c}\colon V_{a,b,c} \to V^*_{c^{-1},b^{-1},a^{-1}}$ 是模 $V_{a,b,c}$ 与对偶模 $V^*_{c^{-1},b^{-1},a^{-1}}$ 之间的固定同构。

定义 4. 有序对 $(\{V_{a,b,c}\}, \{\mathcal{I}_{a,b,c}\})$ 称为群 G 的模系统。

设 G 是有限群，$\mathbb{K}$ 是环，且 $(\{V_{a,b,c}\}, \{\mathcal{I}_{a,b,c}\})$ 是 G 的模系统。考虑张量族

$$[a,b,c]\colon V_{b,c,(bc)^{-1}} \otimes V^*_{ab,c,(abc)^{-1}} \otimes V_{a,bc,(abc)^{-1}} \otimes V^*_{a,b,(ab)^{-1}} \to \mathbb{K},$$

它对每个三元组 $(a,b,c) \in G^3$ 都有定义，以及张量族

$$\overline{[a,b,c]}\colon V^*_{b,c,(bc)^{-1}} \otimes V_{ab,c,(abc)^{-1}} \otimes V^*_{a,bc,(abc)^{-1}} \otimes V_{a,b,(ab)^{-1}} \to \mathbb{K},$$

它也对每个三元组 $(a,b,c) \in G^3$ 有定义。

描述这些张量 $[a,b,c]$ 和 $\overline{[a,b,c]}$ 的几何意义。设 $T^+ = [0,1,2,3]$ 是一个四面体，其顶点有序排列，使得该排列诱导四面体的正定向（左侧的图6）。将 T^+ 的所有边定向为从 i 指向 j，其中 $i < j$。如左侧图6所示，用群 G 的元素为 T^+ 的边着色。链 $0-1-2-3$ 的边分别用元素 a、b、$c \in G$ 着色；所有其他边的颜色由以下规则唯一确定：对于顶点为 $i < j < k$ 的面，边 $[i,k]$ 的颜色等于边 $[i,j]$ 和 $[j,k]$ 的颜色之积。

四面体 T^+ 有四个面 $\partial_0T^0 = [1,2,3]$、$\partial_1T^+ = [0,2,3]$、$\partial_2T^+ = [0,1,3]$ 和 $\partial_3T^+ = [0,1,2]$。如果面的顶点顺序 $[i,j,k]$（其中 $i < j < k$）决定了该面的内法向量，那么我们为该面指定模 $V_{x,y,(xy)^{-1}}$，其中 x 是边 $[i,j]$ 的颜色，而 y 是边 $[j,k]$的颜色。如果 The

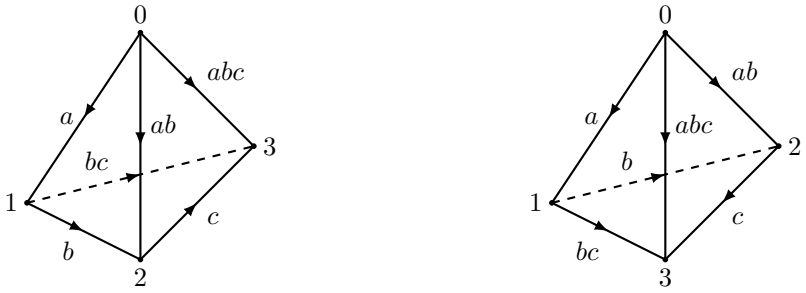


图6. 着色四面体 T^+（左侧）和 T^-（右侧）

顶点的顺序为面 $[i,j,k]$ 确定了一个外法向量，因此我们将对偶模赋给该面。因此，面 $\partial_0 T^+$ 被赋予模 $V_{b,c,(bc)^{-1}}$，面 $\partial_1 T^+$ 被赋予模 $V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}$，面 $\partial_2 T^+$ 被赋予模 $V_{a,bc,(abc)^{-1}}$，面 $\partial_3 T^+$ 被赋予模 $V^*_{a,b,(ab)^{-1}}$。

张量 $[a,b,c]$ 是从分配给面 $\partial_0 T^+$、 $\partial_1 T^+$、 $\partial_2 T^+$和 $\partial_3 T^+$ 的模的张量积到环 $\mathbb{K}$的映射。

张量 $\overline{[a,b,c]}$ 由类似的方法定义，但我们使用负定向四面体 T^-，而不是正定向四面体。 T^- 的边着色如图6右侧所示。将模 $V^*_{b,c,(bc)^{-1}}$分配给面 $\partial_0 T^-$，将模 $V_{ab,c,(abc)^{-1}}$分配给面 $\partial_1 T^-$，将模 $V^*_{a,bc,(abc)^{-1}}$ 分配给面 $\partial_2 T^-$，并将模 $V_{a,b,(ab)^{-1}}$分配给面 $\partial_3 T^-$。

定义 5. 四元组 $(\{V_{a,b,c}\},\{\mathcal{I}_{a,b,c}\},\{[a,b,c]\},\{\overline{[a,b,c]}\})$ 称为 G-系统，如果张量族$\{[a,b,c]\}$ 和 $\{\overline{[a,b,c]}\}$ 对于所有 a、 b、 $c\in G$均满足以下条件：

1. $\overline{[a^{-1},ab,c]}(x_0\otimes x_1\otimes x_2\otimes x_3) = [a,b,c](\mathcal{I}^{-1}_{a},_{bc},_{(abc)^{-1}}(x_2)\otimes\mathcal{I}_{a^{-1},ab,b^{-1}}(x_3))$ 对任意 $x_0\in V^*_{ab}$、$_c$、$_{(abc)^{-1}}$、$x_1\in V_{b}$、$_c$、$_{(bc)^{-1}}$、 $x_2\in V^*_{a^{-1}}$、$_{abc}$、$_{(bc)^{-1}}$ 以及 $x_3\in V_{a^{-1}}$、$_{ab}$、$_{b^{-1}}$;

2. $\overline{[ab,b^{-1},bc]}(x_0\otimes x_1\otimes x_2\otimes x_3) = [a,b,c](\mathcal{I}^{-1}_{b\ c},\ ,\ _{(bc)^{-1}}(x_0)\otimes x_2\otimes x_1\otimes\mathcal{I}_{ab,\ b^{-1},\ a^{-1}}(x_3))$ 对任意 $x_0\in V^*_{b^{-1},}$ $_{bc,\ c^{-1}},x_1\in V_{a,\ bc,\ (abc)^{-1}}$, $x_2\in V^*_{ab,\ c,\ (abc)^{-1}}$ 和 $x_3\in V_{ab,\ b^{-1},\ a^{-1}}$;

3. $\overline{[a,bc,c^{-1}]}(x_0\otimes x_1\otimes x_2\otimes x_3) = [a,b,c](\mathcal{I}^{-1}_{b\ c},,_{(bc)^{-1}}(x_0)\otimes\mathcal{I}_{abc,c^{-1}},_{(ab)^{-1}}(x_1)\otimes x_3\otimes x_2)$ 对任意 $x_0\in V^*_{bc,c^{-1}},$ $_{b^{-1}},x_1\in V_{abc,c^{-1}},_{(ab)^{-1}}$, $x_2\in V^*_{a},_{b},_{(ab)^{-1}}$ 和 $x_3\in V_{a},_{bc},_{(abc)^{-1}}$。

描述定义 5 中条件的几何意义。设 T^+ 为顶点为 0、1、2、3 的正向定向四面体。和之前一样，将 $[i,j]$ 的每条边 T^+ 从 i 定向到 j，其中 $i<j$、 i、 $j\in\{0,1,2,3\}$。为定向边着色，使链 $0-1-2-3$ 的颜色为元素 a、 b、 $c\in G$（左侧图 7）。如前所述，面 $\partial_0 T^+$、 $\partial_1 T^+$、 $\partial_2 T^+$ 和 $\partial_3 T^+$ 分别对应模 V_{b}、$_c$、$_{(bc)^{-1}}$、V^*_{ab}、$_c$、$_{(abc)^{-1}}$、 V_{a}、$_{bc}$、$_{(abc)^{-1}}$ 和 V^*_{a}、$_b$、$_{(ab)^{-1}}$。四面体 T^+ 对应张量 $[a,b,c]$。

交换顶点编号中的 0 和 1，但保持所有边的颜色不变。注意，连接 0 和 1 的边发生了翻转，因此我们将颜色 a 改为 a^{-1} （右侧图 7）。由此得到负向定向四面体 T^-，它对应于张量 $\overline{[a^{-1},ab,c]}$。面 $\partial_0 T^-$ 是面 $\partial_1 T^+$，其关联模为 $V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}$；面 $\partial_1 T^-$ 是面 $\partial_0 T^+$，其关联模为 $V_{b,c,(bc)^{-1}}$；面 $\partial_2 T^-$ 是面 $\partial_2 T^+$，其关联模为 $V^*_{a^{-1},abc,(bc)^{-1}}$，并且它与$\mathcal{I}_{a,bc,(abc)^{-1}}(V_{a,bc,(abc)^{-1}})$同构；面 $\partial_3 T^-$是面 $\partial_3 T^+$，其关联模为 $V_{a^{-1},ab,b^{-1}}$，并且它与 $\mathcal{I}^{-1}_{a^{-1},ab,b^{-1}}(V^*_{a},_{b},_{(ab)^{-1}})$同构。因此，定义 5 的第一个条件保证张量 $[a,b,c]$和 $\overline{[a^{-1},bc,c]}$ 相同。第二个条件来自类似的构造，但此时四面体 T^- 是通过交换顶点 1 和 2 得到的。第三个条件对应于交换顶点 2 和 3。换言之，在 G-系统中，与着色四面体关联的张量不依赖于顶点的顺序。

回顾张量缩并运算。设 φ: $A\otimes B\to\mathbb{K}$和 ψ: $A^*\otimes C\to\mathbb{K}$为张量。那么沿模 A对 φ和 ψ进行缩并，所得结果是张量 $\zeta=*_A(\varphi\otimes\psi)$， ζ: $B\otimes C\to\mathbb{K}$，其构造如下。任取模 A的一组基 $\{e_1,\dots,e_n\}$，并设 $\{e^1,\dots,e^n\}$是对偶模A^*的一组对偶基。那么对于任意 $b\in B$和 $c\in C$:

$$\zeta(b\otimes c)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i\otimes b)\cdot\psi(e^i\otimes c).$$

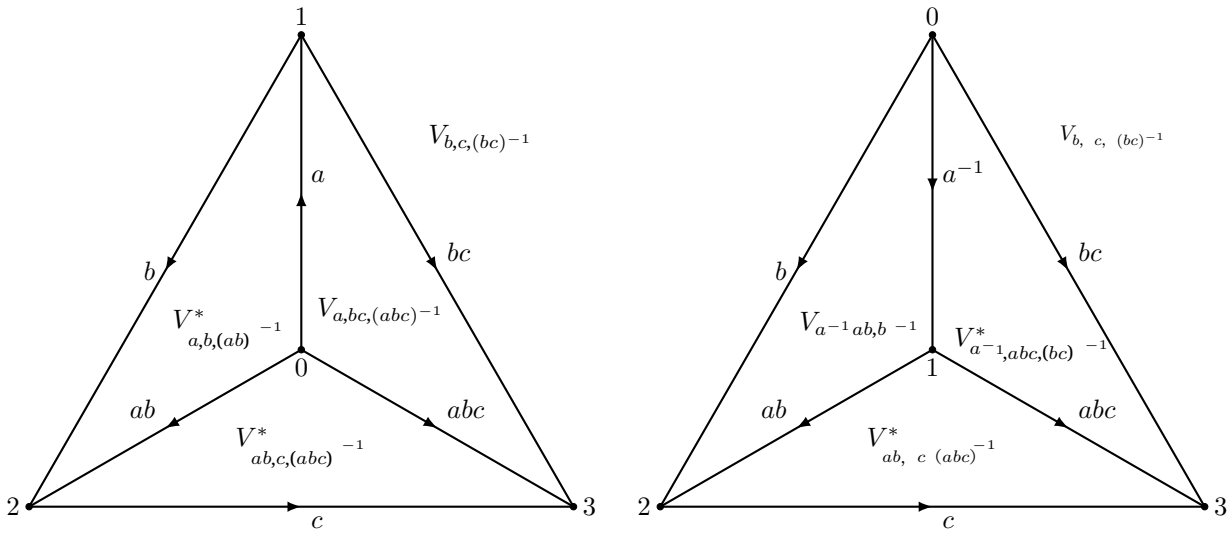


图 7。正向定向四面体的面及其对应的模（左侧），以及交换 0 和 1 后得到的负定向四面体的面及其对应的模（右侧）

容易验证，这个缩并运算的定义是正确的（即所得结果与所选模 A的基无关）。张量缩并运算自然可以扩展为沿多个模进行缩并。例如，若 $\varphi\colon A_1\otimes A_2\otimes B_1\otimes B_2\to\mathbb{K}$和 $\psi\colon A_1^*\otimes C_1\otimes C_2\otimes B_1^*\to\mathbb{K}$，则 $*_{A_1,\ B_1}(\varphi\otimes\psi)\colon\ A_2\otimes B_2\otimes C_1\otimes C_2\to\mathbb{K}$由以下公式定义

$$*_{A_1,B_1}(\varphi\otimes\psi)(a\otimes b\otimes c_1\otimes c_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(e_i\otimes a\otimes f_j\otimes b)\cdot\psi(e^i\otimes c_1\otimes c_2\otimes f^j),$$

其中，$\{e_1,\dots,e_n\}$是 A_1的一个基，$\{e^1,\dots,e^n\}$是 A_1^*的对偶基，$\{f_1,\dots,f_m\}$是 B_1的一个基，$\{f^1,\dots,f^m\}$是 B_1^*的对偶基。

定义 6。设 G是一个有限群。若对于任意 a、b、c、$d\in G$：则称 G-系统（$\{V_{a,b,c}\}$、$\{\mathcal{I}_{a,b,c}\}$、$\{[a,b,c]\}$、$\{\overline{[a,b,c]}\}$）是特殊的：

$$*_{V_{ab,cd,(abcd)^{-1}}}([ab,c,d]\otimes[a,b,cd])=*_{V_{b,c,(bc)^{-1}},V_{bc,d,(bcd)^{-1}},V_{a,bc,(abc)^{-1}}}([b,c,d]\otimes[a,bc,d]\otimes[a,b,c]).$$

定义 6 中条件两边都是 上的张量

$$V_{b,cd,(bcd)^{-1}}\otimes V_{a,bcd,(abcd)^{-1}}\otimes V^*_{a,b,(ab)^{-1}}\otimes V_{c,d,(cd)^{-1}}\otimes V^*_{abc,d,(abcd)^{-1}}\otimes V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}.$$

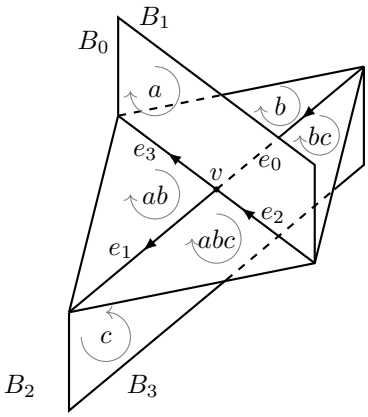
定义 7. 设 G是一个有限群。若一个特殊 G-系统（$\{V_{a,b,c}\},\{\mathcal{I}_{a,b,c}\},\{[a,b,c]\},\{\overline{[a,b,c]}\}$）称为强，如果对于任意 $a\ b\ c\in G$ $A\ V^*_{ab\ c\ \ abc\ ^{-1}}\otimes X\to,,,$ 它满足以下附加条件：对于任意 $\mathbb{K}\ B\ V_{ab\ c\ (abc)^{-1}}\otimes Y\to\mathbb{K}\ C\ V^*_{a\ bc\ \ abc\ ^{-1}}\otimes Z\to\mathbb{K}\qquad D\ V_{a\ bc\ (abc)^{-1}}\otimes T\to\mathbb{K}$ 张量：,,(),:,,,:,,()以及：,,

$$*_{V_{ab,c,(abc)^{-1}},V_{a,bc,(abc)^{-1}}}(A\otimes B\otimes C\otimes D)=$$
$$=*_{V_{ab,c,(abc)^{-1}},V_{ab,c,(abc)^{-1}},V_{a,bc,(abc)^{-1}},V_{a,bc,(abc)^{-1}}}(A\otimes B\otimes *_{V_{a,b,(ab)^{-1}},V_{b,c,(bc)^{-1}}}([a,b,c]\otimes\overline{[a,b,c]})\otimes C\otimes D),$$

其中 X,Y,Z,T是来自族 $\{V_{a,b,c}\}$ 及其对偶的模的张量积。

设 P是定向流形 M的一个定向简单骨架。任取一个真顶点 $v\in\mathcal{V}(P)$。v 在 P 中的邻域将 v 在 M 中的邻域分成四个球。按任意顺序将它们编号为 0、1、2、3，并记为 B_0,B_1,B_2,B_3。这一编号按如下方式确定 v 在 P邻域中胞腔和边的定向。选择分隔球 B_i 与球 B_j的胞腔的定向，使其与从 B_i 指向 B_j 的法向定向共同确定 M的定向。与 B_0,B_1,B_2 以及 B_0,B_2,B_3 相邻的边从 v定向，另外两条边则朝向 v 定向（图 8）。我们将这些定向称为 v 在 P邻域中胞腔和边的局部定向。注意，局部定向不一定与 P 的三重线和 2-分量的定向一致（这些是全局定向）。

设 G为一个有限群，且 $\xi\colon\mathcal{C}(P)\to G$是 P的一种着色。该着色按如下方式确定 P中 v 邻域内胞腔的局部着色。若胞腔的局部定向与其全局



F图 8. 真顶点周围的局部定向　　点 v

定向一致，则局部颜色与全局颜色一致。若定向不同，则局部颜色为全局颜色的逆变换。设 a 为与 B_0 和 B_1 相邻的胞腔的局部颜色，b 为与 B_1 和 B_2相邻的胞腔的局部颜色，c 为与 B_2 和 B_3相邻的胞腔的局部颜色。与 B_0 和 B_2 相邻的胞腔的局部颜色为 ab，与 B_0 和 B_3 相邻的胞腔的局部颜色为 abc，与 B_1 和B_3 相邻的胞腔的局部颜色为 bc（图 8）。

设 $(\{V_{a,b,c}\},\{\mathcal{I}_{a,b,c}\},\{[a,b,c]\},\{\overline{[a,b,c]}\})$ 是一个 G-系统。若球 B_0、…、B_3 的排列与 M 的定向一致，则将张量 $[a,b,c]$ 赋给真顶点 v。反之，则赋予张量$\overline{[a,b,c]}$。为简单起见，假设球的排列与 M 的定向一致。于是，我们将模 $V_{b,c,(bc)^{-1}}$ 赋给与 B_1,B_2,B_3 相 incident 的边 e_0，并将模 $V_{a,bc,(abc)^{-1}}$ 赋给与 B_0,B_1,B_3 相 incident 的边 e_2。对于与 B_0,B_2,B_3 相 incident 的边 e_1，我们赋予对偶模 $V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}$；对于与 B_0,B_1,B_2 相 incident 的边 e_3，我们赋予对偶模 $V^*_{a,b,(ab)^{-1}}$。

考虑映射 $i_0\otimes i_1\otimes i_2\otimes i_3$，其中如果边 e_j 的局部定向与三重线的全局定向一致，则 i_j 是恒等映射；如果局部定向与全局定向不同，则 i_j 是族 $\{\mathcal{I}_{a,b,c}\}$ 中的一个同构（或其逆变换）。定义张量 $[(v,\xi)]$，其公式为

$$[(v,\xi)](x\otimes y\otimes z\otimes t)=[a,b,c](i_0\otimes i_1\otimes i_2\otimes i_3(x\otimes y\otimes z\otimes t)).$$

例如，如果所有三重线的全局定向都从真顶点 v 出发，那么 $i_0=\mathcal{I}^{-1}_{b\,c\,,,(bc)^{-1}}$, $i_1=id_{V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}}$, $i_2=\mathcal{I}^{-1}_{a\,bc,,(abc)^{-1}}$ 以及 $i_3=id_{V^*_{a\,,b,(ab)^{-1}}}$。因此在这种情况下

$$[(v,\xi)]\colon V^*_{b,c,(bc)^{-1}}\otimes V^*_{ab,c,(abc)^{-1}}\otimes V^*_{a,bc,(abc)^{-1}}\otimes V^*_{a,b,(ab)^{-1}}\to\mathbb{K}$$

该张量的值由公式定义为

$$[(v,\xi)](x\otimes y\otimes z\otimes t)=[a,b,c](\mathcal{I}^{-1}_{b,c,(bc)^{-1}}(x)\otimes y\otimes\mathcal{I}^{-1}_{a,bc,(abc)^{-1}}(z)\otimes t).$$

定义 8. 设 G 为有限群，$(\{V_{a,b,c}\},\{\mathcal{I}_{a,b,c}\},\{[a,b,c]\},\{\overline{[a,b,c]}\})$ 为一个 G-系统，P 是定向三维流形 M 的定向特殊脊，并设 $\xi\colon\mathcal{C}(P)\to G$ 是一个着色。那么，沿着与 P 的三重线相对应的模，对所有真顶点 $v\in\mathcal{V}(P)$ 的张量 $[(v,\xi)]$ 进行缩并，所得结果称为着色多面体 P 的权，记作 $w_\xi(P)$。

引理 1. 设 G 是一个有限群，$(\{V_{a,b,c}\},\{\mathcal{I}_{a,b,c}\},\{[a,b,c]\},\{\overline{[a,b,c]}\})$ 是一个 G-系统。设 P是定向三维流形 M 的定向简单骨架，$\xi\colon\mathcal{C}(P)\to G$是 P 的一种着色。那么

1. 值 $w_\xi(P)$ 定义良好，即它不依赖于多面体 P 的每个真顶点邻域中球的排列顺序；

2. 若定向特殊多面体 P' 是通过改变一条三重线的定向从 P 得到的，则 $w_\xi(P)=w_\xi(P')$。

证明。第一条结论由定义 5 得出。该定义中的条件保证，与真顶点关联的张量不会因重新排列该顶点邻域中的球而改变。

为了证明第二个陈述，考虑三重线的两个真顶点 v_1,v_2，它们在 P 和 P' 中具有不同的定向。对于 P 和 P'，张量 $[(v_1,\xi)]$ 仅相差一个分量（添加或移除了一个同构 $\mathcal{I}_{a,\ b,\ c}$）。同样，对于 P 和 P'，张量 $[v_2,\xi]$ 也相差一个分量。此外，如果将该同构添加到 $[v_1,\xi]$ 的分量中，那么它就会从 $[v_2,\xi]$ 的分量中移除，反之亦然。因此，沿着对应于这条三重线的模进行缩并，结果保持不变。□

2.4. 不变量 $DW_{\mathcal{S}}$

记 $\mathbb{ZK}$ 为由 $\mathbb{K}$ 的元素构成的、系数为整数的所有有限形式和的集合（即 $\mathbb{ZK} = \{z_1k_1 + \ldots + z_nk_n | z_i \in \mathbb{Z}, k_i \in \mathbb{K}\}$）。这个集合上有自然的运算“+”和“·”。要将两个形式和相加，只需把它们写在一起，并将求和项中 $\mathbb{K}$ 的相同元素替换为系数之和。要将两个形式和相乘，则像多项式那样展开括号，并将相似的求和项合并为一项。注意，这些运算不使用环 $\mathbb{K}$ 中的加法，只使用乘法。显然， $\mathbb{ZK}$ 是一个环。

设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的有限多重集（即由 $\mathbb{K}$ 中的元素构成的有限集合，元素可以重复）。对于每个 $x \in X$，用 $|X|_x$ 表示多重集 X 中元素 x 的个数。定义映射 $\mathcal{Z}$，按照以下规则将 X 映射到 $\mathbb{ZK}$ 中的元素:

$$\mathcal{Z}(X) = |X|_{x_1}x_1 + \ldots + |X|_{x_n}x_n,$$

其中 x_1、.....、 x_n 是 X 中互不相同的元素。

定义 9. 设 G 是有限群， $\mathcal{S} = (\{V_{a,b,c}\}, \{\mathcal{I}_{a,b,c}\}, \{[a,b,c]\}, \{\overline{[a,b,c]}\})$ 是强特殊 G-系统， P 是定向三维流形 M 的定向特殊脊。那么，该流形 M 的对称 Dijkgraaf–Witten 型不变量为

$$DW_{\mathcal{S}}(M) = \mathcal{Z}(\{w_\xi(P) | \xi \in Col_G(P)\}).$$

注 3. 为了求定向流形 M 的不变量 $DW_{\mathcal{S}}$ 的值，我们应固定 M 的一个特殊脊 P，然后为 P 任取一个定向。接着，枚举以有限群 G 中的元素对 P 进行的所有着色。对每种着色，计算值 $w_\xi(P) \in \mathbb{K}$。由此得到多重集 $\{x_{\xi_1}(P)$ ....., $w_{\xi_n}(P)\}$。最后，将该多重集写成带整数系数的形式和。

定理 2. 设 G 为一个有限群， $\mathcal{S} = (\{V_{a,b,c}\}, \{\mathcal{I}_{a,b,c}\}, \{[a,b,c]\}, \{\overline{[a,b,c]}\})$ 为一个强特殊 G-系统。那么，对于定向三维流形 M，值 $DW_{\mathcal{S}}(M)$ 不依赖于 M 的特殊脊，也不依赖于该特殊脊的定向。

证明. 设 P为 M 的一个特殊脊。对于任意着色 $\xi \in Col_G(P)$，由引理 1 可知，值 $w_\xi(P)$ 不依赖于 P 的三重线的定向。整个多重集 $\{w_\xi(P) | \xi \in Col_G(P)\}$ 不会因反转 P 的任何一个 2-分量的定向而改变（这种反转只会重新排列多重集中的值）。

我们需要证明，若 P_1 和 P_2 是 M 的两个简单骨架，则多重集 $\{w_\xi(P_1) | \xi \in Col_G(P_1)\}$与 $\{w_\xi(P_2) | \xi \in Col_G(P_2)\}$ 相同。

设 P_2 由 P_1 经过一次 T-移动得到，并设 ξ' 为 P_2的着色，对应于 P_1的着色ξ。设 A、 B为移动前 P_1的真顶点，设 X、 Y、 Z为经过 T-移动后出现在 P_2中的真顶点。按照图9所示，选择 P_1 和 P_2的2-分量及三重线的定向，以及 P_1 和 P_2 的2-分量的颜色。注意，在此图中，局部定向与全局定向一致。

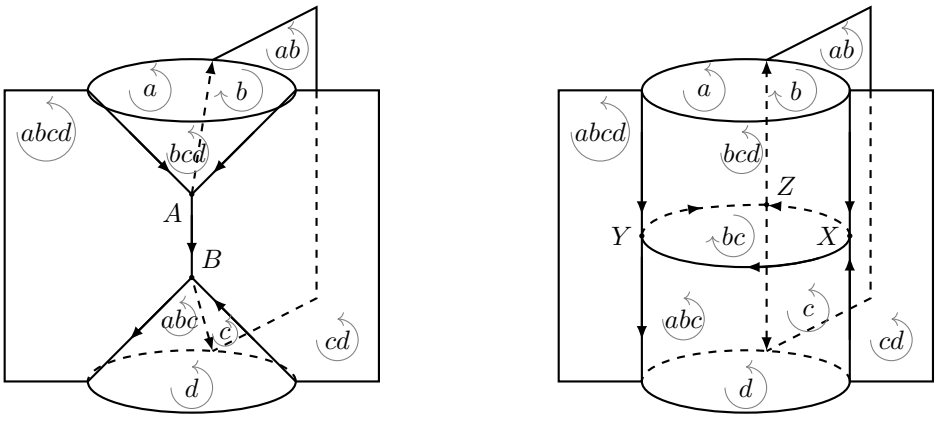


图9. T-移动前（左）和移动后（右）的局部定向与着色

Then

$$*_{V_{ab,cd,(abcd)^{-1}}}([A,\xi] \otimes [(B,\xi)]) = *_{V_{ab,cd,(abcd)^{-1}}}([a,b,cd] \otimes [ab,c,d]),$$

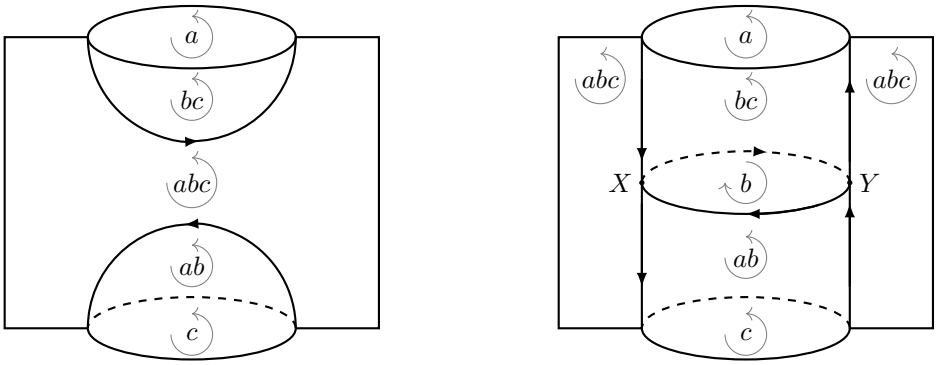
$$*_{V_{b,\ c,\ (bc)^{-1}},\ V_{bc,\ d,\ (bcd)^{-1}},\ V_{a,\ bc,\ (abc)^{-1}}}([(X,\xi')] \otimes [(Y,\xi')] \otimes [(Z,\xi')]) =$$

$$= *_{V_{b,\ c\ (bc)^{-1}},\ V_{bc,\ d\ (bcd)^{-1}},\ V_{a,\ bc\ (abc)^{-1}}}([b,c,d] \otimes [a,bc,d] \otimes [a,b,c]) \text{ 。}$$

我们的 G-系统 $\mathcal{S}$ 是特殊的，因此这些张量相同。于是 $w_\xi(P_1) = w_{\xi'}(P_2)$。

对于 P_2 由 P_1 经过 L 移动得到的情形，证明类似。设 X、Y 是 P_2 中经过 L 移动后出现的真顶点。我们可以按图 10 所示，为 P_1 和 P_2 选择定向和颜色。于是

$$*_{V_{b,c,bc^{-1}},V_{a,b,(ab)^{-1}}}([X,\xi']\otimes[Y,\xi']) = *_{V_{b,c,bc^{-1}},V_{a,b,(ab)^{-1}}}([a,b,c]\otimes\overline{[a,b,c]}).$$



Figu图 10. L 移动前（左）和移动后（右）的局部定向与着色 ve

我们的 G-系统 $\mathcal{S}$ 是强的，因此缩并的结果 $w_\xi(P_1)$ 和 $w_{\xi'}(P_2)$ 相同。 □

注 4. 在对称 Dijkgraaf–Witten 型不变量的定义中，我们使用强特殊 G-系统 $\mathcal{S}$。特殊性（定义 6）保证了对 T 移动的不变性，而强性质（定义 7）保证了对 L 移动的不变性。如前所述（另见 [4, 定理 1.2. 5]），同一 3-流形中任意两个至少含有两个真顶点的特殊脊，只能通过 T 移动相互关联。因此，若我们将范围限制在这一类 3-流形上，构造不变量时只需要一个不具备强性质的特殊 G-系统。

3. 一维情形

3.1. 有限群的链复形

设 G 是一个有限群，k 是一个环。对于 $n \geqslant 1$，定义

$$D_n(G;k) = \left\{ \sum_{(g_{i_1},\ldots,g_{i_n})} \alpha^{i_1\ldots i_n}(g_{i_1},\ldots,g_{i_n}) \right\},$$

其中 $\alpha^{i_1\ldots i_n} \in k$，且和遍历所有元素 $(g_{i_1},\ldots,g_{i_n}) \in G^n$。集合 $D_n(G;k)$ 的元素是来自 G、系数取自 k 的有限序列。集合 $D_n(G;k)$ 是一个按分量相加的阿贝尔群。对所有 $n \leqslant 0$，定义 $D_n(G;k)$ 为平凡群。

对于所有 $n \geqslant 2$，定义边界同态 $\partial_n\colon D_n(G;k) \to D_{n-1}(G;k)$ 如下 s:

$$\partial_n(g_1,\ldots,g_n) = (g_2,\ldots,g_n) - (g_1g_2,g_3,\ldots,g_n) + (g_1,g_2g_3,g_4,\ldots,g_n) + \ldots + \\ + (-1)^{n-1}(g_1,\ldots,g_{n-2},g_{n-1}g_n) + (-1)^n(g_1,\ldots,g_{n-1})$$

并将此定义按线性扩展到 $D_n(G;k)$ 的所有元素。对所有 $n \leqslant 1$，定义 $\partial_n = 0$。

注5. 考虑以下映射 $d_n^i\colon G^n \to G^{n-1}$, $i = 0,\ldots,n$，定义如下 :

$$d_n^0(g_1,\ldots,g_n) = (g_2,\ldots,g_n),\\ d_n^i(g_1,\ldots,g_n) = (g_1,\ldots,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},\ldots,g_n) \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ d_n^n(g_1,\ldots,g_n) = (g_1,\ldots,g_{n-1}).$$

那么，对于 $n \geqslant 2$，映射 $\partial_n\colon D_n(G;k) \to D_{n-1}(G;k)$ 可在基上定义如下:

$$\partial_n(g_1,\ldots,g_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_n^i(g_1,\ldots,g_n).$$

定理3. 对任意 $g_1,\ldots,g_n \in G$: $\partial_{n-1}(\partial_n(g_1,\ldots,g_n)) = 0$.

证明. 使用注5中的记号，我们可以写成

$$\partial_{n-1}(\partial_n(g_1,\dots,g_n)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j} d_{n-1}^j(d_n^i(g_1,\dots,g_n)).$$

注意，对于 $j<i$: $d_{n-1}^j(d_n^i(g_1,\dots,g_n)) = d_{n-1}^{i-1}(d_n^j(g_1,\dots,g_n))$。还要注意,

$$d_{n-1}^i(d_n^{i+1}(g_1,\dots,g_n)) = d_{n-1}^i(d_n^i(g_1,\dots,g_n)) = (g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1}g_{i+2},g_{i+3},\dots,g_n).$$

因此，像 $\partial_{n-1}(\partial_n(g_1,\dots,g_n))$ 中的和可拆分为若干对，每对中的值相等、符号相反。因此，这个和为零。□

描述边界同态 ∂_n: $D_n(G;\,k) \to D_{n-1}(G;\,k)$ 的几何意义。考虑带有有序顶点的 n-单形 $T_n = [0,1,\dots,n]$。将每条边 $[i,j]$, $i<j$ 定向为从 i 到 j。分别用群元素 $g_1,g_2,\dots,g_n$ 给边 $[0,1],[1,2],\dots,[n-1,n]$ 着色。按照以下规则将这种着色扩展到其他定向边：如果边 $[i,j]$, $i<j$ 的颜色为 x，且边 $[j,k]$, $j<k$ 的颜色为 y，那么边 $[i,k]$ 就用元素 xy 着色（参见图 11 中定向着色单形的例子 T_4）。

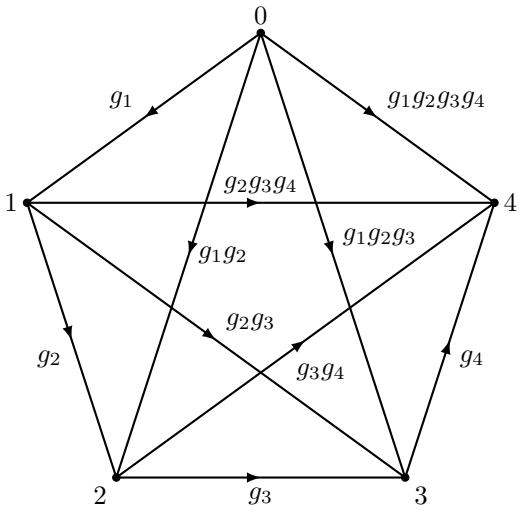


图 11. 定向且着色的单形 T 4

着色单形 T_n 对应于基元素 $(g_1,\dots,g_n) \in D_n(G;\,k)$。单形 T_n 有 n个面 $\partial_0T_n = [1,\dots,n]$, $\partial_1T_n = [0,2,\dots,n]$, …, $\partial_nT_n = [0,\dots,n-1]$。这些面 $\partial_0T_n,\dots,\partial_nT_n$ 也是带有定向且着色的边的单形（着色由 T_n的着色诱导）。因此，它们各自对应于 $D_{n-1}(G;\,k)$的一个基元素。在定义 ∂_n: $D_n(G;\,k) \to D_{n-1}(G;\,k)$中，我们将 D_n 的基元素（对应于单形 T_n）映射到 D_{n-1} 的基元素的交错和（对应于面 $\partial_0T_n,\dots,\partial_nT_n$）。

对于 $n \geqslant 2$，对于任意 $g_1,\dots,g_n \in G$，考虑 $D_n(G;\,k)$ 中的以下元素:

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{g_1,\dots,g_n} &= (g_1,\dots,g_n) + (g_1^{-1}, g_1g_2, g_3,\dots,g_n),\\
\gamma^2_{g_1,\dots,g_n} &= (g_1,\dots,g_n) + (g_1g_2, g_2^{-1}, g_2g_3, g_4,\dots,g_n),\\
\gamma^3_{g_1,\dots,g_n} &= (g_1,\dots,g_n) + (g_1, g_2g_3, g_3^{-1}, g_3g_4, g_5,\dots,g_n),\\
&\vdots\\
\gamma^{n-1}_{g_1,\dots,g_n} &= (g_1,\dots,g_n) + (g_1,\dots,g_{n-3}, g_{n-2}g_{n-1}, g_{n-1}^{-1}, g_{n-1}g_n),\\
\gamma^n_{g_1,\dots,g_n} &= (g_1,\dots,g_n) + (g_1,\dots,g_{n-2}, g_{n-1}g_n, g_n^{-1}).
\end{aligned}$$

对于 $n=1$，定义 $\gamma^1_{g_1} = (g_1) + (\{v5\}$。

对于每个 $n \geqslant 1$，考虑由元素 $\gamma^1_{g_1,\dots,g_n},\dots,\gamma^n_{g_1,\dots,g_n}$（对所有 $g_1,\dots,g_n \in G$）生成的子群 $Q_n \subseteq D_n(G;\,k)$。

命题 1. $\partial_n(Q_n) \subseteq Q_{n-1}$。

证明。我们应验证，对于任意 $i \in \{1,\dots,n\}$: $\partial_n(\gamma^i_{g_1,\dots,g_n}) \in Q_{n-1}$。首先检查 $i \neq 1,n$ 时的等式。在这种情况下

$$\gamma^i_{g_1,\dots,g_n} = (g_1,\dots,g_n) + (g_1,\dots,g_{i-1}g_i, g_i^{-1}, g_ig_{i+1},\dots,g_n).$$

注意到

$$d_n^{i-1}(g_1,\dots,g_{i-1}g_i,g_i^{-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n)=d_n^i(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_i,g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n),$$

$$d_n^i(g_1,\dots,g_{i-1}g_i,g_i^{-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n)=d_n^{i-1}(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_{i-2},g_{i-1}g_i,g_{i+1},\dots,g_n).$$

还要注意，对于 $j\neq i,i-1$:

$$d_n^j(g_1,\dots,g_n)+d_n^j(g_1,\dots,g_{i-1}g_i,g_i^{-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n)\in Q_{n-1}.$$

因此，在像 $\partial_n(\gamma^i_{g_1,\dots,g_n})$ 中，我们消去求和项对 $d_n^{i-1}(g_1,\dots,g_{i-1}g_i,g_i^{-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n)$, $d_n^i(g_1,\dots,g_n)$ 和 $d_n^i(g_1,\dots,g_{i-1}g_i,g_i^{-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n)$, $d_n^{i-1}(g_1,..,g_n)$（因为这些求和项符号相反）。所有其他求和项对都属于 Q_{n-1}，所以 $\partial_n(\gamma^i_{g_1,\dots,g_n})\in Q_{n-1}$。

对于 $i=0,n$ 这些情形，证明类似。只需注意

$$d_n^0(g_1^{-1},g_1g_2,\dots,g_n)=d_n^1(g_1,\dots,g_n)=(g_1g_2,g_3,\dots,g_n),$$

$$d_n^1(g_1^{-1},g_1g_2,\dots,g_n)=d_n^0(g_1,\dots,g_n)=(g_2,\dots,g_n),$$

$$d_n^{n-1}(g_1,\dots,g_{n-1}g_n,g_n^{-1})=d_n^n(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_{n-1}),$$

$$d_n^n(g_1,\dots,g_{n-1}g_n,g_n^{-1})=d_n^{n-1}(g_1,\dots,g_n)=(g_1,\dots,g_{n-1}g_n).$$

于是，与前面一样，$\partial_n(\gamma^1_{g_1,\dots,g_n})\ \partial_n(\gamma^n_{g_1,\dots,g_n})\in Q_{n-1}$。 □

对于有限群 G 和阿贝尔群 k，按如下方式构造链复形。链群为$C_n(G;\ k)=D_n(G;\ k)/Q_n$。边界同态 ∂_n: $C_n(G;\ k)\to C_{n-1}(G;\ k)$ 由 ∂_n: $D_n(G;\ k)\to D_{n-1}(G;k)$ 诱导（并用相同符号表示）。由定理3和命题1可知，这是一个定义良好的链复形。

考虑相应的上链复形，其上链群为 $C^n(G;\ k)=\{\omega\colon C_n(G;\ k)\to k\}$，余边界同态为 ∂^n: $C^{n-1}(G;\ k)\to C^n(G;\ k)$。对我们的目的而言，最重要的是 3-上循环 $\omega\in\ker\partial^4$。这些上循环是映射 ω: $G^3\to k$，并满足对任意$g_1,g_2,g_3,g_4\in G$均成立的以下条件：

1. $\omega(g_1,g_2,g_3)+\omega(g_1^{-1},g_1g_2,g_3)=0$; 2. $\omega(g_1,g_2,g_3)+\omega(g_1g_2,g_2^{-1},g_3)=0$; 3. $\omega(g_1,g_2,g_3)+\omega(g_1,g_2g_3,g_3^{-1})=0$; 4. $\omega(g_2,g_3,g_4)-\omega(g_1g_2,g_3,g_4)+\omega(g_1,g_2g_3,g_4)-\omega(g_1g_2,g_3g_4)+\omega(g_1,g_2,g_3)=0$.

3.2. 不变量 DW_ω

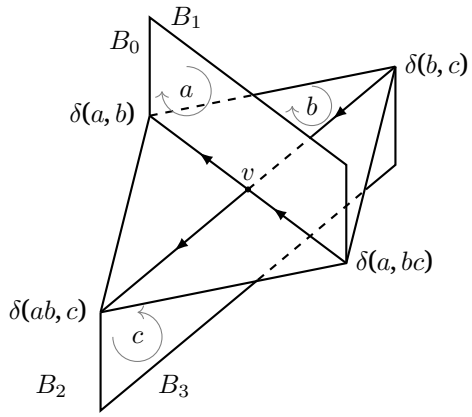
对于每个 3-余循环 $\omega\in\ker\partial^4$，定义如下特殊的 G-系统 $\mathcal{S}_\omega$。环 $\mathbb{K}$ 是一个乘法群与 k的加法群同构的环。所有模 $V_{a,\ b,\ c}$ 均为一维模。所有同构$\mathcal{I}_{a,\ b,\ c}$均为平凡同构（这意味着 $\mathcal{I}_{a,\ b,\ c}(1)$ 是从 $\mathbb{K}$到 $\mathbb{K}$的线性映射，且满足 $1\mapsto 1$）。张量 $[a,b,c]$和 $\overline{[a,b,c]}$是定义在一维模上的张量，因此它们只是 $\mathbb{K}$的元素。对于所有 a、b、$c\in G$，定义$[a,b,c]=\omega(a,b,c)$ 和 $\overline{[a,b,c]}=-\omega(a,b,c)$。

显然，$\mathcal{S}_\omega$ 是一个特殊的 G系统，因此它定义了对称的 Dijkgraaf–Witten 型不变量，我们将其称为 DW_ω。在这个简单的一维情形中，$\mathbb{K}$ 的加法结构并不重要。因此，将 $\mathbb{K}$ 上的乘法运算写成加法形式很方便。

不变量 DW_ω 可按以下方式计算。设 P 是流形 M的一个特殊脊。为 P的 2-分量和三重线任意选取定向，并选取着色 ξ: $P\to G$。然后，对每个真顶点 $v\in\mathcal{V}(P)$，计算值 $\omega(a,\ b,\ c)$，其中 a、b、c是与 v相邻的胞腔的颜色，并且其中恰有一个（颜色为 b）与另外两个（颜色分别为 a 和 c）相邻。将所有真顶点对应的值 $\omega(a,\ b,\ c)$相加，得到 $w_\xi(P)$。然后，$DW_\omega(M)=\mathcal{Z}(\{w_\xi(P)\,|\xi\in Col_G(P)\})$。

命题 2. 设 G 是一个有限群。那么对于任意 $\delta\in C^2(G;k)$，不变量 DW_ω（其中 $\omega=\partial^3(\delta)$）是平凡的。

注 6。DW_ω的平凡性意味着，如果 P是一个特殊多面体，且 ξ: $\mathcal{C}(P)\to G$是着色，那么 $w_\xi(P)=0\in\mathbb{K}$。



F图 12. 真　　顶点

证明。设 P为一个特殊定向多面体， ξ: $\mathcal{C}(P) \to G$为一种着色，且 $v \in \mathcal{V}(P)$是一个真顶点。设B_0、…、B_3为 v的邻域中的球。设 a、 b、 $c \in G$分别为将 B_0与 B_1、B_1与 B_2以及 B_2与 B_3分隔开的胞腔的颜色（图12）。假设球 B_0、……、B_3的顺序与 M的定向一致。

根据定义 $[(v,\xi)] = \omega(a,b,c) = \delta(b,c) - \delta(ab,c) + \delta(a,bc) - \delta(a,b)$。因此，要计算值 $[(v,\xi)],$，我们应计算 $\delta(x,y)$，其中 x 和 y 是每条边附近的胞腔在顶点 v邻域中的颜色（胞腔的局部定向与边的局部定向相匹配）；如果边的局部定向指向 v，则取值为“+”，否则取值为“–”。正确性源于以下事实：对于所有 x、 $y \in G$， $\delta(x,y) = -\delta(x^{-1},xy) = \delta(y,(xy)^{-1}) = -\delta(y^{-1},x^{-1}) = \delta((xy)^{-1},x)$。最后注意，在和 $\sum [(v,\xi)]$ 中，每个值 $\delta(x,y)$对于一个顶点对应“+”，对于另一个顶点对应“–”。因此， $_{v\in\mathcal{V}(P)}$总权重 $w_\xi(P)$始终为零。

□

由命题 2 可知，不变量 DW_ω 由上同调类 $[\omega] \in H^3(G;k)$定义。若选择该类的另一个代表元，其值不变。

例。设 $G = \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$，并设 $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{1,t\}$ $(t^2 = 1)$。考虑 3-余循环 ω: $G^3 \to \mathbb{K}$，使得 $\omega(1,1,1) = t$ (因此 $\omega(1,2,3) = \omega(2,1,2) = \omega(2,3,2) = \omega(3,2,1) = \omega(3,3,3) = t$)，且对于其他$a,b,c \in G$: $\omega(a,b,c) = 1$。不难验证， ω是一个 3-余循环。

设 M 是透镜空间 $L_{4,\ 1}$，并设 P 是 M 的特殊脊，如图13所示（该骨架以其奇异图的一个邻域表示）。

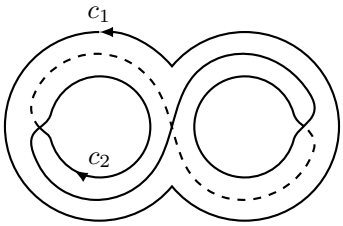


图13. 透镜空间的特殊脊 $L_{4,1}$

骨架 P 包含两个 2-分量，分别记为 c_1 和 c_2，且只有一个真顶点 v。设 c_1 为长度为 2 的 2-分量， c_2 为长度为 4 的 2-分量。将 P 用群 G 的元素着色，只有四种着色（在此情形下，2-分量和三重线的定向并不重要）：

$$(c_1,c_2) \mapsto (0,0),(0,2),(2,1),(2,3).$$

对于前两种着色，多面体 P 的权重分别为 $\omega(0,0,0) = 1$ 和 $\omega(2,0,2) = 1$。对于最后两种着色，权重分别为 $\omega(1,2,3) = t$ 和 $\omega(3,2,1) = t$。因此 $DW_\omega(M) = 2 + 2t$。

参考文献

[1] Dijkgraaf R.、Witten E.，《拓扑规范理论与群上同调》//《数学物理通讯》，1990年，第129卷，第393–429页。

[2] Kimura N.，《带尖点三维流形的Dijkgraaf-Witten不变量的一般化》// arXiv:1805.05130。[3] Korablev Ph.G.，《流形的构型同调 $\mathbb{Z}_2$-不变量》//《车里雅宾斯克物理与数学学报》，2021年，第6卷，第4期，第427–439页。[4] Matveev S.，《算法拓扑学与三维流形分类》// Springer Berlin，2007年，共492页。[5] Matveev S.V.，《虚三维流形》//《西伯利亚电子数学报告》，2009年，第6卷，第518–521页。[6] Turaev V.、Virelizier A.，《幺半群范畴与拓扑场论》// Birkh¨auser Cham，《数学进展》，第322卷，共523页。[7] Wakui M.，《关于三维流形的Dijkgraaf–Witten不变量》//《大阪数学学报》，1992年，第29卷，第675–696页。