arXiv:2305.00743v1 [math.CV] 1 May 2023

多项式触角计算方面简介——综述

Vitaly A. Krasikov

关键词。 多项式触角、牛顿多胞体、极大稀疏多项式、软件测试。

摘要。 本文综述多项式触角这一主题，回顾了相关论文的研究成果，并着重介绍其计算方面。多项式触角在数学和物理的诸多领域中有广泛应用。对于给定多项式，计算其阿米巴并描述其性质，通常是一个复杂度很高的问题。我们概述了现有的阿米巴及其相关几何对象（如等高线和骨架）的计算与绘制算法，并回顾了最新的多项式触角计算软件包，比较其功能与性能。

1. 引言

多项式的阿米巴是其零点集在对数尺度下向绝对值空间的投影。I.M. Gelfand、M.M. Kapranov 和 A.V. Zelevinsky 最初在 1994 [21] 中引入了这一概念。多项式触角在拓扑 [23],动力系统 [64], 代数几何 [22, 39, 48], 复分析 [16], 镜像对称 [14, 25, 62], 测度论 [49, 58],以及统计物理 [44, 57]等领域有广泛应用。

已有若干关于多项式触角的综述（见 [46, 68, 69]），但没有一篇综述介绍计算触角的算法和软件。本文尝试对此进行综述，重点关注多项式触角的计算方面。触角的计算是一项极其重要的问题，同时也具有很高的复杂度，原因如下。首先，多项式的触角是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个无界子集（但一维情形除外）；然而，在高维中，任意给定多项式的触角又是 $\mathbb{R}^n$, 中的一个非常“狭窄”的子集，因此，即使只是在实空间中定位触角，也并非易事。一般而言，无法在多项式时间内解决判定给定点是否属于触角（成员判定问题）的问题 [4]。由于成员判定问题对于计算触角至关重要，因此有许多论文提出了解决该问题的方法 [20, 61, 64, 65]）。另一个难题是定位触角补集的连通分支，因为其数量可能变化，而且这些分支可能小到任意程度。这就是为什么一般而言，计算多项式触角需要极高精度 [71]。

多项式阿米巴的几何与其牛顿多胞体之间有着密切联系。回想一下，多项式的牛顿多胞体是其支撑在 $\mathbb{R}^n$ 中的凸包，即

本研究获得俄罗斯科学基金会项目资助，编号：22-21-00556，https://rscf.ru/project/22-21-00556/。

（也就是其单项式指数向量的集合）。文献 [16]已证明，对于任意多项式，其阿米巴触角补集的连通分支数至少等于其牛顿多胞体的顶点数，至多等于其牛顿多胞体所含整点的总数。补集中连通分支数最少的阿米巴称为实心阿米巴，连通分支数最多的阿米巴则称为最优。

关于多项式触角，存在若干尚未解决的公开问题。本文探讨的其中一个问题是 M. Passare 提出的以下猜想 [1]:

猜想 1.1。（*Passare* 猜想）。令 $p(z)$ 为极大稀疏多项式（即，p 的支撑等于其牛顿多胞体的顶点集合）。那么 $p(z)$ 的阿米巴是实心的。

本综述的主要目的是概述并讨论计算背景下的多项式阿米巴概念，包括多项式阿米巴的起源历史、其现代应用以及计算方面。本文还回顾了用于计算阿米巴的算法和软件包，并通过不同类别的多项式对这些软件包进行测试。围绕 Passare 猜想，我们要回答的主要问题是：用于计算多项式触角的软件现状，是否提供了证明该猜想所需的手段，或者能否通过找到反例来推翻该猜想。

2. 符号、基本性质与例子

设 $p(z)$ 是一个关于 n 个复变量的（Laurent）多项式:

$$p(z_1,\dots,z_n)=\sum_{\alpha\in A} c_\alpha z^\alpha=\sum_{\alpha\in A} c_{\alpha_1\dots\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n},$$

其中 $A\subset\mathbb{Z}^n$ 是一个有限集。下文将集合 A 称为 $p(z)$ 的支撑。

定义 2.1。多项式阿米巴 $\mathcal{A}_p$ 是多项式 $p(z)$ 的零点集在映射 $\mathrm{Log}:(\mathbb{C}^*)^n\to\mathbb{R}^n$,下的像，其中 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$：

$$\mathrm{Log}:(z_1,\dots,z_n)\longmapsto(\ln|z_1|,\dots,\ln|z_n|).$$

多项式触角由 I.M. Gelfand、M.M. Kapranov 和 A.V. Zelevinsky 于 [21] 年提出。“阿米巴”这一术语源于映射 $\mathrm{Log}(z|p(z)=0)$ 的形状与同名单细胞生物相似；具体而言，多项式阿米巴也有笔直且逐渐变窄、延伸至无穷远的“触角”。借助 Log 映射，阿米巴的概念可应用于代数甚至超越型超曲面 [57], ，但下文将重点讨论多项式触角。

多项式的阿米巴的结构和性质与其牛顿多胞体的结构密切相关。

定义 2.2. $\mathbb{R}^n$ 中集合 A 的凸包称为 $p(z)$ 的牛顿多胞体（若 $n=2$，则称为 $p(z)$ 的牛顿多边形）。下文将其记为 $\mathcal{N}_p$.

触角补集 ${}^c\mathcal{A}_p=\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{A}_p$ 的连通分支是 $\mathbb{R}^n$.中的凸子集。它们与有理函数 $1/p(z)$ [21] 的不同 Laurent展开（以原点为中心）一一对应。一般情况下，有如下结论:

定理 2.3. [16] 触角补集 ${}^c\mathcal{A}_p$ 的连通分支数量至少等于牛顿多胞体 $\mathcal{N}_p$ 的顶点数量，至多等于 $\mathcal{N}$中整点的总数 $_p\cap\mathbb{Z}^n$.

定理 2.3 中关于连通分支数量下界的部分已在 [21] 和 [51]中得到证明。

定义 2.4. 如果 ${}^c\mathcal{A}_p$ 的连通分支数量等于牛顿多胞体 $\mathcal{N}_p$的顶点数量，则称阿米巴 $\mathcal{A}_p$ 为实心。 如果 ${}^c\mathcal{A}_p$ 的连通分支数量等于 $\mathcal{N}_p \cap \mathbb{Z}^n$中的整点数量，则称阿米巴 $\mathcal{A}_p$ 为最优。

例 2.5. 考虑由生成函数定义的多项式族 V_α （见 [12, 第 2 章3]）

$$(1 - 2\langle b, x\rangle + ||b||^2)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b^\alpha V_\alpha(x),$$

其中 $b \in \mathbb{R}^n, ||b|| < 1, \langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$.中的标准标量积

忽略 V_α 的单项式因子，并将变量 $x_j, j = 1, \ldots, n$ 替换为 $\xi_j = x_j^2$,~，即可得到多项式 $V_\alpha(\xi)$，其触角补集的连通分支数量与 $V(x)$ 相同（参见 [8]中的引理 2.6 和例 2.10）。

~多项式 $V_{(5,2,3)}(\xi)$的牛顿多胞体和阿米巴如图 1 所示。图中用彩色凸形状表示触角补集的各个分支，阿米巴~本身则是其间的白色区域。 $V_{(5,2,3)}(\xi)$的牛顿多胞体包含 12 个整点，这一数量~与触角补集的连通分支数相同，因此多项式 $V_{(5,2,3)}(\xi)$的阿米巴是最优的。

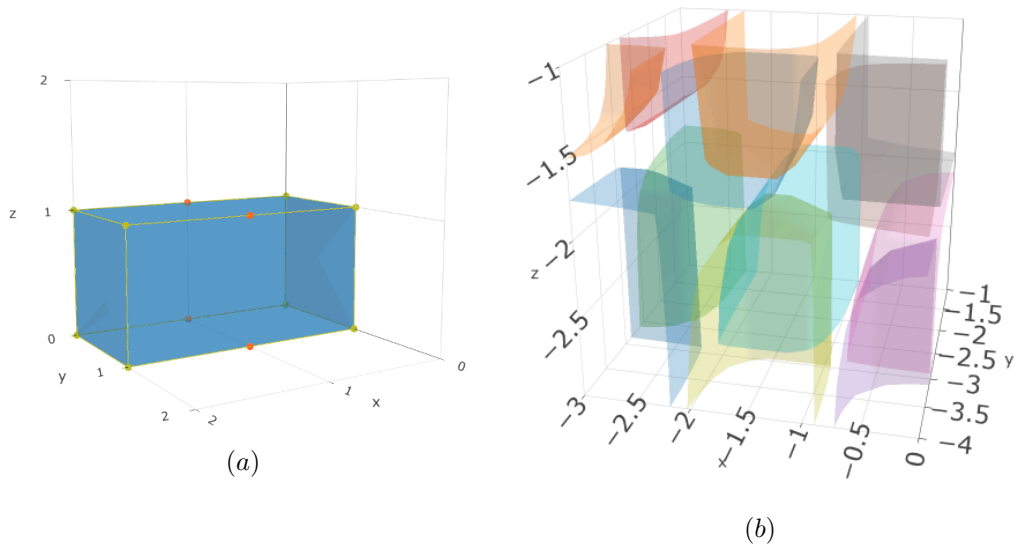


图 1. 多项式 $V_{(5,2,3)}$的牛顿多胞体（a）以及阿米巴（b）补集的连通分支~

由定理 2.3 可知，存在一个从 ${}^c\mathcal{A}_p$ 的连通分支集合到 $\mathcal{N}_p \cap \mathbb{Z}^n$. 的单射。可以利用 Ronkin 函数构造这样的函数

$$N_p(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \ln|p(z)|\frac{dz}{z}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

函数 N_p 在 $\mathbb{R}^n$ 上是凸的，并且在开连通集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上是仿射线性的，当且仅当 $\Omega \subset {}^c\mathcal{A}_p$. 。单射 $\nu\colon \{E\} \to \mathbb{Z}_n \cap \mathcal{N}_p$ 由该连通分支的序诱导。

定义 2.6。（参见 [16]）。连通分支的序 $E \subset {}^c\mathcal{A}_p$ 定义为向量$\nu \in \mathbb{Z}^n$，其分量为

$$\nu_j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(u)} \frac{z_j \partial_j p(z)}{p(z)} \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{z_1 \ldots z_n}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

其中，$u \in E$. ν_j 的值不依赖于 u, 的选择，因为对于所有 $u \in E$.，环 $\mathrm{Log}^{-1}(u)$ 的同调类都相同。

还可以使用矩映射 [45] $\mu : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathcal{N}_p$ 构造多项式阿米巴的紧化版本:

$$\mu : (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \frac{\sum_{\alpha \in A} |z^\alpha| \cdot \alpha}{\sum_{\alpha \in A} |z^\alpha|}.$$

定义 2.7。多项式的紧化阿米巴 $\mathcal{A}_p$ $p(z)$ 是其零点集在映射 $\mu(z)$下的像的闭包。

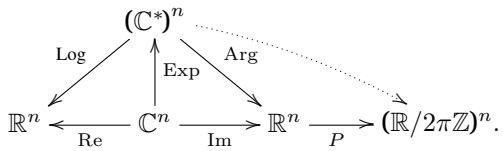
除了本文综述中的多项式触角，我们还研究与之密切相关的对象，例如余触角、阿米巴的轮廓和骨架，因为计算这些对象通常有助于理解阿米巴的性质。

定义 2.8。多项式的余阿米巴 $co\mathcal{A}_p$ 是多项式 $p(z)$ 的零点集在映射 $\mathrm{Arg} : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$ 下的像:

$$\mathrm{Arg} : (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\arg(z_1), \ldots, \arg(z_n)).$$

余触角由 M. Passare 于 2004 年的一次演讲中引入，并具有多种应用，例如应用于数学物理领域，详情见第 3 节。文献 [30] 中引入了余触角的 Ronkin 函数类比。

Log 和 Arg 映射生成以下交换图 [63], ，其中 P 是到 n 维实环面上的投影映射:



定义 2.9。阿米巴的轮廓 $\mathcal{A}_p$ 是将对数映射 Log 限制在多项式 $p(x)$的零点集上所得的临界点 $\mathcal{C}_p$ 的集合。

阿米巴的轮廓是 $\mathbb{R}^n$, 中的闭实解析超曲面 $\partial\mathcal{A}_p$边界是轮廓 $\mathcal{C}_p$ 的一个子集，但通常与其不同。文献 [41]给出了直线与超曲面阿米巴的轮廓的交点的最大数量的相关结果。

设 $\mathcal{A}' \subset \mathbb{R}^n \cap \mathcal{N}_p$ 为一组向量 α，使得 ${}^c\mathcal{A}_p$ 包含阶数为 α 的分量 E_α，并

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(u)} \ln\left|\frac{p(z)}{z^\alpha}\right| \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{z_1 \ldots z_n}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}', \quad u \in E_\alpha.$$

考虑函数 S_p： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$：

$$S_p(x) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}'} \{\langle \alpha, x \rangle + a_\alpha\}$$

定义 2.10。 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n, \text{其中 } S_p(x) \text{ 不光滑}\}$ 称为的骨架

文献 [58] 证明，阿米巴 $\mathcal{A}_p$ 的骨架是其形变收缩。

例 2.11. 考虑多项式 $p_1(z_1,\ z_2) = 5z_1 + 15z_1^2 + 8z_1^3z_2 + 10z_2^2 + 10z_1^3z_2^2 + 8z_2^3 + 15z_1z_2^4 + 5z_1^2z_2^4 + 50z_1z_2^3 + 50z_1^2z_2$. 图 2 展示了 p_1 的牛顿多胞体、阿米巴、骨架和紧化阿米巴。

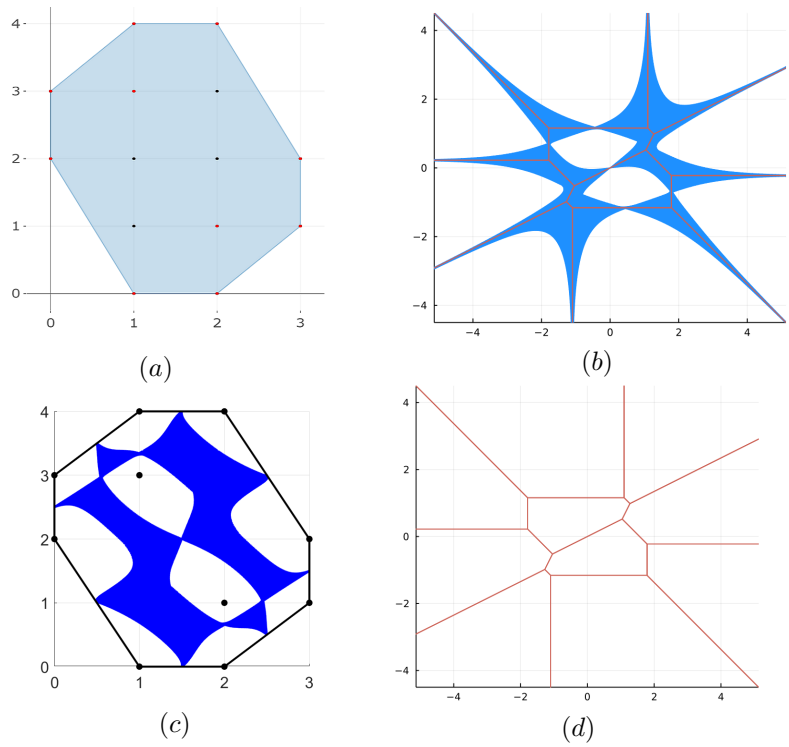


图 2. 多项式 p_1的牛顿多胞体 (a)、阿米巴 (b)、紧化阿米巴 (c) 和阿米巴骨架 (d)

Passare 猜想

目前，一个重要的问题悬而未决：究竟应该尝试证明 Passare 猜想 1.1，还是将其推翻？M. Passare 曾指出："看起来很有可能，对于项数至多为 $n+2$ 的极大稀疏多项式，其补集连通分支数最少" [1]。大量计算实验表明，在低维情形下（尤其是对于 $n = 2$），极大稀疏多项式具有实心阿米巴。

例 2.12. 考虑多项式 $\tilde{p}_1(z_1,\ z_2)$，它是从 $p_1(z_1,\ z_2)$ 中删去对应于其牛顿多胞体内部格点的单项式后得到的：$\tilde{p}_1(z_1,\ z_2) = 5z_1 + 15z_1^2 + 8z_1^3z_2 + 10z_2^2 + 10z_1^3z_2^2 + 8z_2^3 + 15z_1z_2^4 + 5z_1^2z_2^4$. $\tilde{p}_1$ 的阿米巴如图 3 所示，且它是实心的。

关于某些稀疏多项式类别的实心阿米巴，已有一些研究结果。在 [27] 中，作者研究了这样一类多项式：它们含有多个实变量，其牛顿多胞体为单纯形，且支撑由牛顿多胞体的所有顶点和一个额外的内部格点构成。研究证明，在某些条件下，这类多项式的阿米巴是实心的。

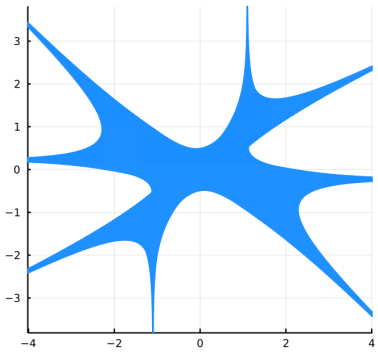


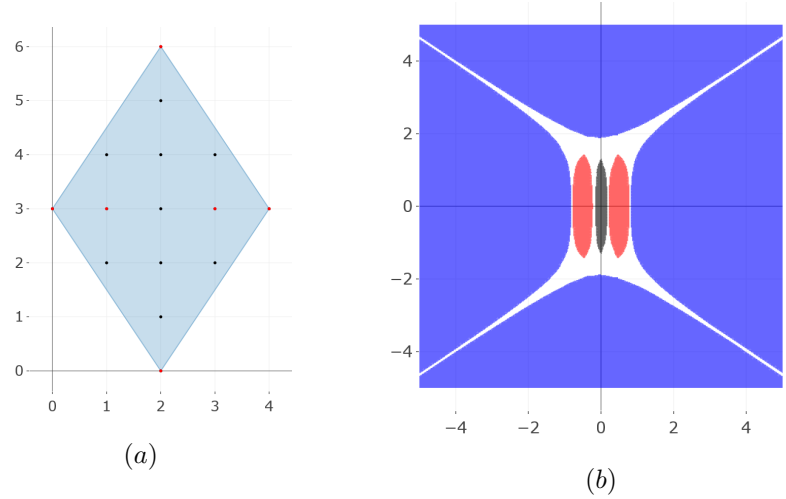
图 3。多项式 $\tilde{p}_1$ 的阿米巴是实心的

正如 [59], 中所证明的，另一类具有实心阿米巴的多项式族是主 $\mathcal{A}$-行列式，它们在 [21], 中被引入；这一结果也意味着单变量多项式判别式的阿米巴是实心的。

在 Passare 猜想的背景下，还应提及 A.G. Khovanskii [37] 提出的少项式理论。其核心思想是，由一组“简单”多项式定义的簇应具有“简单”的拓扑。极大稀疏多项式同样具有这种简单性，即在所有具有给定牛顿多胞体的多项式中，它包含尽可能少的单项式。

Passare 猜想提出了一个问题：多项式的支撑与其阿米巴补集中的连通分支之间有何依赖关系？特别是，如果与分支序映射 ν, 类似，还存在一个从 $\{E\}$ 到 A.的单射，那么这个问题就很容易证明。下面的例子表明，事实并非如此。

例 2.13. 考虑多项式 $p_2(z_1, z_2) = z_1^2 + 50z_2^3 + 100iz_1z_2^3 + 100z_1^3z_2^3 - 50z_1^4z_2^3 + z_1^2z_2^6$. p_2 的牛顿多胞体和阿米巴如图 4 所示。



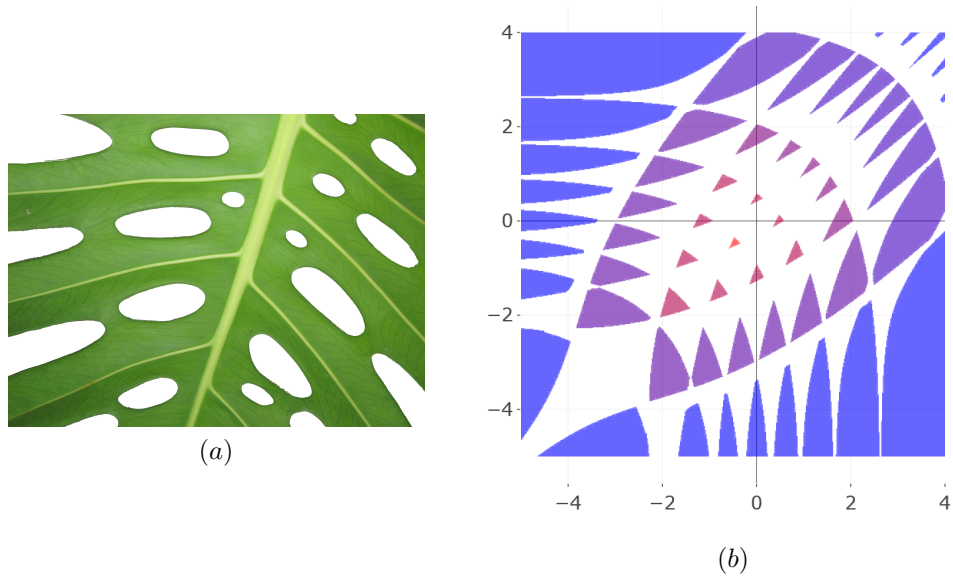
(a) (b)

图 4. 多项式 p_2的牛顿多胞体 (a) 以及阿米巴补集的连通分支 (b)

阿米巴补集中的无界连通分支与牛顿多面体的顶点相对应。多项式 p_2 还包含另外两个单项式，其指数向量分别为 (1,3) 和 (3,3)，，但阿米巴补集中有三个有界连通分支。因此，阿米巴补集中存在一个不与任何单项式相对应的有界连通分支。

还应注意，具有给定牛顿多胞体的多项式的系数与其阿米巴补集中的有界连通分支数之间的关系相当复杂。以下示例展示了由此产生的问题之一。

例 2.14。 图 5 (a) 展示了一片名为龟背竹的热带植物叶片，图片由 T.M. Sadykov 惠允提供。请注意，这片叶子的结构与阿米巴的结构相似。



(a) (b)

图 5. 龟背竹的叶片 (a) 及其对应阿米巴补集的连通分支 (b)

一个二元多项式。龟背竹叶片上的孔洞是凸的，正如多项式阿米巴补集的连通分支一样；叶片上带有裂口的部分则类似于阿米巴的触角。这样的开口使植物能够在整个叶片表面优化光合作用过程，而处于阴影中的叶片通常没有这样的裂口。叶片上的叶脉图案类似于阿米巴热带图骨架的结构（见定义 2.10）。

图 5 (b) 展示了我们能找到的最接近的阿米巴对应物——也就是说，它是通过使用 OptimalPolynomialSimplex算法，依据 [71] 生成的多项式的最优阿米巴。此处省略了多项式的完整形式，因为它相当长；使用参数 {dimension = 2、次数 = 10、幂 = 2}运行该算法，并从结果中删去对应于指数向量 (0，0) 的单项式，即可得到该多项式。

这两个对象的相似性相当表面，因此产生了一个问题：已知多项式的阿米巴，如何求出该多项式的显式形式？在某些特殊情况下，可以通过为具有给定牛顿多胞体的多项式选择系数来解决，但一般而言，这一过程并不简单，因为即使只改变一个系数，也可能导致阿米巴的触角补集中某些分支不可预测地出现或消失。第 3.4 节将讨论与多项式触角相关的其他“热带”对象。

3. 多项式触角的历史参考与应用

人们对计算多项式触角并研究其性质抱有浓厚兴趣，原因在于阿米巴能够刻画多项式的零点集。因此，一方面，早在阿米巴这一概念正式出现之前，它们就已成为研究对象；另一方面，它们也被广泛应用于科学的各个领域。本节将讨论与多项式触角相关的数学概念，包括历史上的和近期的概念，并介绍多项式触角的应用。

3.1. 阿米巴与幂级数的收敛性

考虑一个以原点为中心的幂级数：

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C}, z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}. \tag{3.1}$$

级数 (3.1) 的收敛定义域是一个以原点为中心的完备莱因哈特域。关于 $n = 1$，阿贝尔引理中对此有明确表述，而试图查明这一事实最初的措辞，最终找到了 A.-L. Cauchy 在 1831 [9, 第 8 卷第 151] 页中的表述（由法文原文译出）：

x 表示一个实变量或复变量，关于 x 的一个实函数或复函数，可以按该变量的递增幂展开为有序收敛级数，只要该变量的模保持小于使函数或其导数不再有限或连续的各数值中的最小值。

关于多变量情形下这一命题的证明见于多个不同来源，但要找出最初的出处并非易事。

如果级数 (3.1) 的所有奇点都属于某个代数超曲面，那么其收敛定义域的结构就与该超曲面的阿米巴密切相关。更确切地说，对于任意多项式 $p(z)$，代数集 $\{p(z) = 0\}$ 的触角补集的连通分支与分母为 $p(z)$ [21] 的洛朗级数展开的收敛定义域之间存在一一对应关系。

3.2. 希尔伯特第十六问题

与多项式触角相关的问题之一，是著名的希尔伯特第十六问题，即关于代数曲线和曲面的拓扑问题 [26]。最初，该问题分为两部分：第一部分考察次数为 d 的实代数曲线各分支的相对位置；第二部分则讨论次数为 d 的二维多项式向量场中极限环数量的上界及其相对位置。

希尔伯特第十六问题的第一部分之后，A. Harnack 研究了平面上次数为 d 的代数曲线的不同连通分支数。Harnack 证明了 [24]，这类曲线的连通分支数不超过 $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$。如果一条曲线达到连通分支数的最大值，就称其为哈纳克曲线。从某种意义上说，哈纳克曲线的连通分支具有可能的最佳拓扑构型 [45]。哈纳克曲线的阿米巴可以解析地描述为

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \prod_{\alpha,\beta=\pm 1} P_W(\alpha e^x, \beta e^y) \le 0\right\},$$

其中 P_W 是定义该曲线的多项式 [14]。

哈纳克曲线的阿米巴具有多种最优性质：例如，亏格为 g 的哈纳克曲线的阿米巴，其补集中恰有 g 个紧分支 [36], 当且仅当曲线的阿米巴在给定 Newton多边形时具有可能的最大面积，该曲线才是哈纳克曲线 [49],

哈纳克曲线 C 总是存在从 $C(\mathbb{C})$ 到 $\mathcal{A}_C$ 的映射，使其除有限多个实节点处可能为一对一外，处处都是二对一。

文献 [35],针对阿米巴“孔洞”（即阿米巴补集中的有界连通分支）提出了一种特殊的变分原理，类似于共形映射的变分原理。本文证明，阿米巴孔洞的面积及阿米巴触角之间的距离，为哈纳克曲线模空间提供了全局坐标。

文献 [56] 给出了一个显式积分公式，用于描述哈纳克曲线定义的多项式情况下从阿米巴到余触角的映射，并精确刻画了这类多项式的余触角。

3.3. 现代阿米巴

近年来，关于多项式触角不同主题的论文层出不穷。触角可以针对不同的簇来定义，包括球面热带簇 [33], 、非超曲面簇 [32], 以及非交换李群的子簇 [50]。文献 [54]考察了零维情形。文献 [11, 48]介绍了关于簇的触角维数的结果。文献 [55]研究了一种特殊的多面体复形，它是多项式牛顿多胞体的子集，并具有多项式触角的关键拓扑与组合性质。

一些近期文章以多项式触角理论的形式重新表述了经典问题。例如，在 [66]中，这种方法被用于研究如何确定一元三项式根的行为。在 [43] 中，多项式触角被用于研究里奥丹数组的性质，这类数组是差分方程柯西问题的解。

如果多项式触角由超几何函数定义，它们便具有一些最优性质。 [8] 证明，在某些非退化条件下，超几何多项式的触角是最优的。 [59] 表明，任意非合流超几何函数的奇异超曲面都具有实心触角。 [60],给出了以触角补集描述超几何级数收敛定义域的方法； [10, 53]介绍了这一主题的最新成果。

3.4. 热带几何

多项式触角与热带几何领域有许多自然联系。“热带”一词最初指的是这门理论的先驱之一——巴西计算机科学家和逻辑学家 I. Simon [69]。在这篇综述中，我们不会深入探讨这一领域的具体内容，因为已有许多经典及近期研究详细阐述了多项式触角与热带几何之间的关系（例如参见 [38, 40, 46, 47, 68, 69]）。不过，由于一些计算触角的算法涉及热带几何的概念，因此仍有必要作一些介绍。

热带几何的基本对象是热带半环 $(\mathbb{R} \cup \{\infty\},\ \oplus,\ \odot)$，它本质上是一个包含无穷大的实数集合，其加法和乘法运算定义如下： $x \oplus y = \max(x,\ y)$ $x \odot y = x + y$. 文献 [69]介绍了在这一结构上发展微积分的各种框架。

对于变量 $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_n)$ $x_i \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\},\ \oplus,\ \odot)$ $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n$我们定义热带多项式：

$$\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{k=1}^{d} a_{j_k} \odot x^{\odot j_k} = \max\{a_{j_1} + \langle x, j_1\rangle, \ldots, a_{j_d} + \langle x, j_d\rangle\}.$$

n 变量中的热带多项式是在 $\mathbb{R}^n$ 上具有整数系数的分段线性凹函数。热带超曲面 $\mathcal{H}(\mathfrak{p})$是点集 $x \in \mathbb{R}^n$，其中 $\mathfrak{p}(x)$不是线性函数。热带超曲面的一个例子是阿米巴的骨架，因为就

热带半环而言，定义 2.10 中的函数 $S_p(x)$是一个热带多项式： $S_p(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}'} \odot x^{\odot \alpha}$

多项式触角与热带几何的另一种联系，是代数曲线的热带化 [31]。文献 [28] 介绍了一种用于构造复曲线热带化的数值方法实现。

基于阿基米德阿米巴这一概念的多项式触角计算算法 [4, 18] （详情请参见第 4.1.2 节）。文献 [13] 讨论了非阿基米德阿米巴。

3.5. 物理学中的应用

数学物理领域中定义着一种二维组合系统，称为二聚体模型 [34]。二聚体模型在镜像对称和弦理论中有广泛应用。在某些情况下，文献 $\mathbb{C}^3$ 中曲线的二聚体模型图与这些曲线的阿米巴相一致 [14]。文献 [36] 研究了图的 Kasteleyn算子对应的谱曲线。该谱曲线的阿米巴表示二聚体模型的相图。二聚体模型的一种物理解释是处于平衡态的晶体表面；文献 [36] 介绍了这类模型，其中晶体晶面与阿米巴补集的各个连通分支一一对应。此外，该文还建立了哈纳克曲线的阿米巴性质与二聚体模型各相（冻结相、液相和气相）之间的诸多联系。

阿米巴和余触角（见定义 2.8）不仅应用于二聚体理论。实二维环面上的二聚体模型与 $(\mathbb{C}^\times)^2$ 中的曲线的余触角之间的关系在 [17] 中有所描述。该文证明，由余触角边界构造的二聚体模型是闭余触角的形变收缩，当且仅当闭余触角补集的连通分支数达到最大值。

另一个与多项式触角相关的对象是场论中引入的 (p, q)-网模型，见 [2]。二元多项式 P 的阿米巴骨架是与托里克图相关联的 (p, q)-网；该托里克图即为 P [14]的 Newton多边形。在 [5]中，作者将数论中的 Mahler测度推广到托里克夸克规范理论，并且他们在那里引入的 Mahler流可从几何上用多项式触角及其孔洞来解释。

求解统计热力学中的基本热力学关系系统，引出了多项式触角及其轮廓 [57]的概念。文献 [70] 借助夸克规范理论表明，晶体模型的极限形状、阿米巴的边界及其海纳克曲线特征，能够明确地导出自由能、熵和增长率等热力学观测量。文献 [3],在研究物理学不同分支中的配分函数时，作者引入了统计阿米巴的概念，并阐述了它们与多项式触角的关系。

4. 多项式触角的计算

要对多项式的阿米巴给出完整的几何或组合描述，计算复杂度很高，尤其是在高维情况下。本节回顾阿米巴计算的主要问题，以及用于解决这些问题的现有算法。

算法的实现可能取决于多种因素，例如所用的编程语言或框架，尤其是数据类型。在这篇综述中，在可能的情况下省略了实现的技术细节。

4.1. 问题与算法

4.1.1. 成员判定问题。阿米巴计算的基本问题之一是判断给定点是否属于阿米巴，或者等价地，判断它是否属于阿米巴补集的某个连通分支（成员判定问题）。这个问题非常自然，因此许多探讨阿米巴计算的论文都涉及它。一种解决成员判定问题的方法是找到一个证书 C，使得如果 $C(|z|)$ 为真，则 $\mathrm{Log}(z) \notin \mathcal{A}_p$，其中 p 是一个多项式（例如，参见 [20]）。[64, 推论 2.7] 指出，对于固定维数 n，这个问题可以在多项式时间内解决。[4, 定理 4.2] 表明，一般而言，这个问题属于**多项式空间**，也就是说，只要允许使用指数多的处理器，就可以通过并行算法在多项式时间内解决。

简化计算的阿米巴性质之一是偏斜性（见 [19]）。在 [61] 中介绍了偏斜性判据，该判据为判定某点不属于阿米巴提供了基于不等式的证书。基于这一概念，可以构造出阿米巴的近似序列，并使其收敛。这些近似使用循环结式，而 [20]中给出了一种快速计算此类结式的方法。此类近似的另一个可能基础是实零点定理（见 [65]）。

为了更高效地解决成员判定问题，一些作者提出了某些表述，使其在某种程度上限制更少。例如，在 [67] 中，软成员判定问题表述如下：以高置信度确定给定点是否属于阿米巴，这意味着所选判据只需以某个可控的高概率给出正确解。随后，通过对初始多项式进行实化（见 [65]），这一新问题被归约为求解一个多项式方程组。

4.1.2. 阿米巴的描绘。在二维和三维情形下，描绘阿米巴是描述其结构最简单的方法之一。对于 $n > 3$，可以通过描绘阿米巴的三维截面来直观地展示它。

由于阿米巴的触角 $\mathcal{A}_p$ 总是延伸至无穷远，通常只需选取一个定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，描绘阿米巴与 Ω 的交集 $\mathcal{A}_p \cap \Omega$ 即可。由此产生的计算问题是如何选择定义域 Ω，使交集能够保留阿米巴的基本特征，例如其补集中的连通分支数量。[67]介绍了一种用于计算 Ω 的启发式算法。

描绘多项式阿米巴的基本算法包括在 Ω 上选取网格，并将问题转化为求单变量多项式的根。例如，在二维情形下，对于多项式 $p(z_1, z_2)$，定义域 $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$，在集合 $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, 2\pi)$ 上选取网格 $\{(x_j, \theta_k) | (j, k) \in S \subset \mathbb{N}^2\}$，并对每个网格点 (x_j, θ_k) 求出多项式 $p(e^{x_j + i\theta_k}, z_2)$ 的根。根据多项式阿米巴的定义，对于每个根 $z_2^{(m)}$，$x_j, \ln|z_2^{(m)}| \in \mathcal{A}_p$.。[7, 15, 29, 42, 52]介绍了这些算法的不同变体。下文将这类算法称为“朴素”算法。朴素算法有一些主要缺点。首先，使用这类算法得到的阿米巴点并非全部都属于 Ω，因此有些计算是多余的。由于无法很好地控制所获阿米巴点的密度，要想获得高质量的图像，可能需要采用步长非常小的网格。这些算法还有一个特点：每种算法都将一个用于计算复系数单变量多项式之根的算法作为子程序。求解求根问题的算法有很多，其中一些列于 [42]。

在 [67]另一种绘制阿米巴的方法中，将定义域 Ω 映射到输出设备的一组像素上，并对相应的点执行成员资格测试，以确定是否应将某个像素绘制为阿米巴的一部分。下文中，我们像其作者一样，将该算法称为“简单”算法。

阿米巴计算方面的一些改进包括基于阿基米德热带超曲面构建网格 [4]，这样只需对位于阿米巴近邻区域内的点执行成员资格测试。另一种避免测试不属于阿米巴的点的方法是使用贪心算法 [67],，也就是说，只测试已测试点附近区域内的点。

另一种方法也见于 [67],，该方法基于用一组多边形逼近二元多项式的阿米巴。该过程首先构造阿米巴热带图骨架和一组三角形，使每个三角形的一条边与骨架的一条线段重合。随后迭代添加新的三角形，使它们的并集尽可能覆盖阿米巴的区域。使用成员资格测试来确定新添加三角形的大小。

在 [71]中，作者利用连通分支的阶来计算阿米巴补集的连通分支。由于同一分支中所有点的阶值相同，而不同分支中的点阶值不同，因此分支的阶可以很好地用于对阿米巴补集中的点进行分类。对于阿米巴上的点，用于计算阶的积分并不总是收敛，但阶函数本身的跳跃可以作为判断某点是否属于阿米巴的标准。该构造过程本身与 [67], 中的多边形算法类似，但使用长方体而非三角形，因此很容易推广至具有任意多个变量的多项式。下文将此算法称为“二分法”，因为它通过迭代将长方体划分为 2^n 部分，以提高计算精度。

需要注意的是，有一些常用技术可以提升阿米巴计算算法的性能。例如，采用分布式计算； [42, 67]中给出了用于计算阿米巴的并行算法。

[6] 中使用机器学习解决多项式触角的计算问题。作者使用人工神经网络来确定阿米巴的亏格并解决成员判定问题。其中一些算法展现出令人瞩目的效果，例如，一个基于阿米巴亏格进行分类的模型，其预测准确率约为 0.95。这里的准确率指用于评估分类模型的一项指标，计算方法是正确预测的数量与预测总数之比。神经网络模型似乎适用于解决一些与阿米巴多项式相关的问题。例如，例 2.14 中给定阿米巴求多项式的问题，类似于一个可以用神经网络解决的图像分类问题。

4.1.3. 小连通分支问题。文献中并未明确提出这一问题，不过，若干关于多项式触角可视化的研究都涉及触角补集中尺寸较小的有界连通分支（“小型”或“狭窄”连通分支）问题。

要严格定义触角补集中有界连通分支的尺寸，可以将该连通分支的直径定义为其各点之间的最大距离。 [71]中指出，对于阿米巴可视化的二分算法，无法保证检测出直径小于某个较小值 ε 的补集连通分支。 [67] 中，用于计算阿米巴骨架的算法将一个数值 δ 作为输入参数之一，作者称其为补集中任意连通分支尺寸的下界；该算法的运行时间实际上取决于 δ。

小连通分支问题对于寻找 Passare 猜想的反例可能至关重要，而能否开发出一种算法，在多项式时间内找到阿米巴触角补集中有界连通分支的最小直径，仍是一个开放问题。 n.

4.1.4. 算法比较。需要指出的是，所介绍算法的计算复杂度取决于其子程序的复杂度，尤其取决于在其框架内解决成员判定问题的方式。因此，为简化表述，本文以这些算法的作者所得结论以及计算机实验结果作为比较依据。

朴素算法最适合用于理解阿米巴的一般结构。与其他算法相比，由于其简单性，这些算法能够相对快速且准确地计算阿米巴。然而，如果输入多项式的阿米巴足够复杂，例如其补集包含尺寸较小的有界连通分支，这类算法的表现就会很差。

与朴素算法相比，简单算法能够更好地控制所计算的阿米巴点，因此在处理较小的补集连通分支时表现更佳。其计算时间与朴素算法的结果相当，包括最优触角的计算。使用基于阿基米德热带超曲面的网格可以缩短计算时间，但提升并不显著 [67, 第 1 节。4]。

使用贪心算法可以显著提高计算速度。该算法的另一项重要特性是，增加网格点的数量（即以更高精度进行计算）并不会导致计算时间按比例增加 [67,注 1.5。6]。

在所有展示的方法中，多边形近似的图像质量最佳（见图 7 (b)）。不过，该算法常会出现图像伪影（见示例 4.2），但这也可能是由实现上的特点造成的。

二分算法的终止速度与多边形算法相当，而且能够以任意高的精度进行计算（不过，精度的提高会显著增加计算时间）。使用该算法检测小分量时，可以选择面积足够小的定义域 Ω。

4.2. 软件比较

我们来考察三种用于绘制多项式触角的软件工具，并比较它们的功能。所有这些解决方案都是免费软件，且可在线获取。

[a] Dmitry Bogdanov 编写的脚本，网址为 http://dvbogdanov.ru/amoeba。该脚本使用简单，功能也十分简洁，可用于绘制阿米巴和紧化触角。脚本本身仅生成用于绘制给定参数下阿米巴的 MatLab 代码。使用该软件绘制的结构最复杂的阿米巴见 www.researchgate.net/publication/338341129_Giant_amoeba_zoo。

[b] 由 Sascha Timme 使用 Julia 编程语言编写的 PolynomialAmoebas 软件包，网址为 https://github.com/saschatimme/PolynomialAmoebas.jl。它的功能非常广泛，不仅提供用于绘制阿米巴的工具，而且不限于二维情形。它还可以绘制阿米巴的骨架和等高线、余触角，以及三维阿米巴。阿米巴的计算可通过多种算法实现。

[c] Timur Sadykov 和 Timur Zhukov 的项目，网址为 http://amoebas.ru/index.html。它包含二维和三维阿米巴的可视化、四维阿米巴的三维切片，以及多项式系数变化所引起的阿米巴演化。

4.2.1. 功能与算法。所有上述软件工具的基本功能都是绘制多项式触角，但它们在所实现的算法方面存在显著差异。

软件 [a] 实现了用于计算阿米巴的朴素算法，以及用于计算紧化触角的对应版本。该软件的缺点是缺少用于选择阿米巴绘图定义域的算法，而且执行计算必须安装 Matlab。

软件 [b]包含简单算法、贪心算法，以及基于阿基米德热带超曲面和多边形近似的算法实现。用于绘制阿米巴的定义域可以通过启发式算法自动选择，该算法基于计算阿米巴的阿基米德热带超曲面。简单算法和贪心算法的版本用于绘制三维阿米巴。还可以通过简单算法、贪心算法或粗略算法计算余触角。

软件 [c] 实现了一种二分算法，该算法基于计算触角补集各连通分支的阶。由于该算法不依赖于空间的维数，因此除了二维阿米巴外，还可以绘制三维阿米巴以及四维阿米巴的截面。

表 1 总结了软件工具中计算触角的功能和已实现的算法。

表 1. 用于计算多项式触角的软件包的功能与已实现算法

功能	算法		
	软件 [a]	软件 [b]	软件 [c]
牛顿多胞体	+		+
阿米巴	朴素算法	简单 贪心的 阿基米德的 多边形的	二分的
紧化触角	+		
阿米巴的等高线		+	
阿米巴的脊线		+	
余触角		+	
三维阿米巴		简单 贪心	二分的
阿米巴演化			+

衡量软件性能的一个重要问题是参数的选择。使用软件 [a] 描绘阿米巴，需要通过选择模数值的数量 r_x，r_y 以及自变量值的数量 ϕ. 来确定网格。有关算法及其参数的详细信息见 [7]。参数值较小时，算法终止得更快，但阿米巴图像会消散为一组孤立点，尤其是在放大查看时。测试中使用了两组参数：默认值（每个数均为 100）以及每个数均为 500，后者生成的图像较为平滑。为简便起见，下文分别将这两种情况称为“100 个值”和“500 个值”。

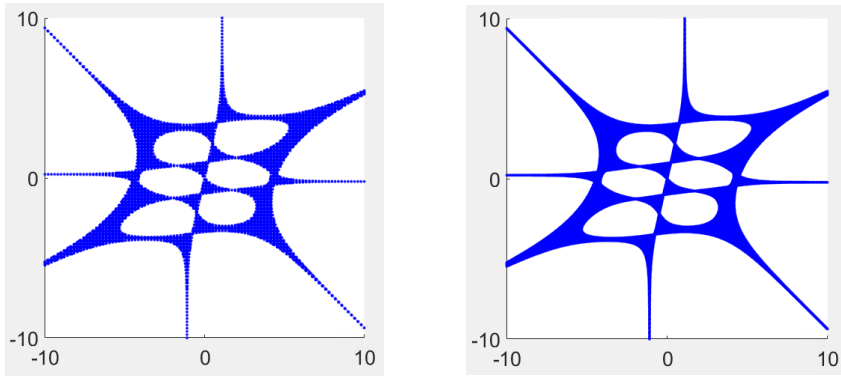
使用软件 [b] 得到的计算结果取决于算法和网格的选择。在所考察的所有软件包中，只有这款软件提供的是编程接口，而非图形界面，以供调用其功能。

对于软件 [c]，影响终止时间和最终图像质量的重要参数是算法执行的迭代次数。精度采样次数表示算法通过对不同自变量值计算积分，对其找到的点的顺序进行检查的次数。如果该数值较高，算法的终止速度会较慢；但如果该参数的取值较低，阿米巴中的某些点可能会被误判为阿米巴补集中的点，反之亦然。

例4.1。 考虑多项式 $p_3(z_1, z_2) = 5z_1 + 15z_1^2 + 240z_1z_2 + 400z_1^2z_2 + 8z_1^3z_2 + 10z_2^2 + 900z_1z_2^2 + 900z_1^2z_2^2 + 10z_1^3z_2^2 + 8z_2^3 + 400z_1z_2^3 + 240z_1^2z_2^3 + 15z_1z_2^4 + 5z_1^2z_2^4$. 这个多项式

是使用 [71] 中给出的 OptimalPolyZonotope 算法生成的。我们来用软件 [a], [b], 和 [c] 计算 p_3 的阿米巴。

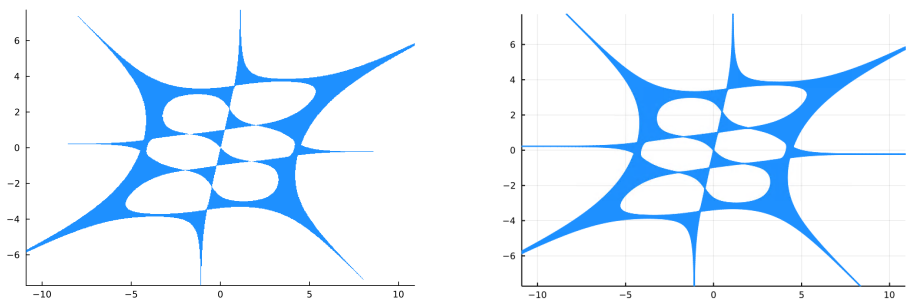
使用软件 [a] 对 100 个取值进行计算所得的结果如图 6 (a) 所示。它展现了阿米巴的结构，但图像质量还不够高。对于 500 个取值，图像质量有所提高，而且图中没有看起来孤立的点（见图 6 (b)）。



(a) (b)

图 6. 使用软件 [a] 计算得到的多项式 p_3 的阿米巴——100 个取值 (a), 500 个取值 (b)

软件 [b] 的计算结果如图 7 所示。该软件包提供的算法中，速度最快的是贪心算法（见图 7 (a)），但默认算法（多边形近似）生成的图像质量更好（见图 7 (b)）。



(a) (b)

图 7. 使用软件 [b] 计算得到的多项式 p_3 的阿米巴——“贪心”算法 (a)，“多边形”算法 (b)

软件 [c] 的结果如图 8 所示，展示了迭代参数取两个不同值时的情况：迭代 5 次时，图中触角补集的连通分支数与实际数量一致，这是满足该条件的最小迭代次数；迭代 9 次时，图像较为平滑，但算法的终止速度慢得多。

4.2.2. 测试用例。本小节介绍可用于测试触角可视化软件工具的多项式类别。

有一些类别的多项式，其阿米巴尤其值得关注。最优多项式的阿米巴结构最为复杂，因此它们很可能是最难以.....的。

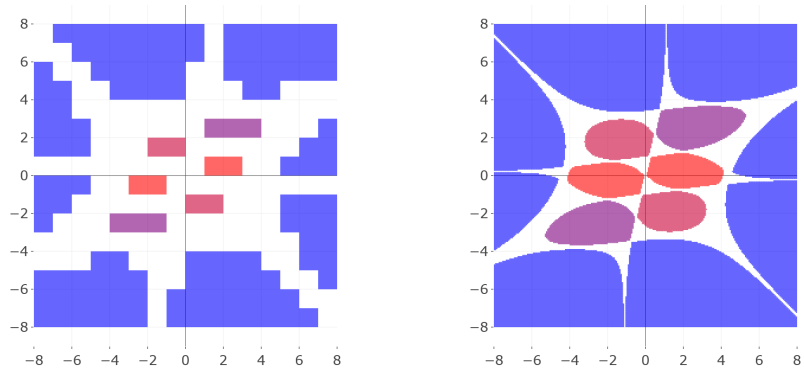


图 8. 使用软件 [c] 计算的多项式 p_3 的阿米巴补集的连通分支——5 次迭代（a），9 次迭代（b）

计算。复杂性的另一个方面是，阿米巴补集可能包含较小的有界连通分支（见第4.1.3节）。

还需要指出，任何阿米巴可视化软件都有一个特点：随着所描绘的阿米巴复杂度增加，生成的图像中出现各种伪影的概率也会增加。这些伪影的形态各异，其产生原因也可能各不相同。在大多数情况下，这些伪影很容易被检测出来，但它们的存在会增加分析阿米巴结构的难度。

示例 4.2。 图 9 展示了图像伪影的示例。图 9（a）展示了阿米巴中心缺少线条，且平行于 y 轴的触角绘制不完整，这可能是由于其复杂性所致。另一种情况是图片中出现了多余的线条，如图 9（b）所示。

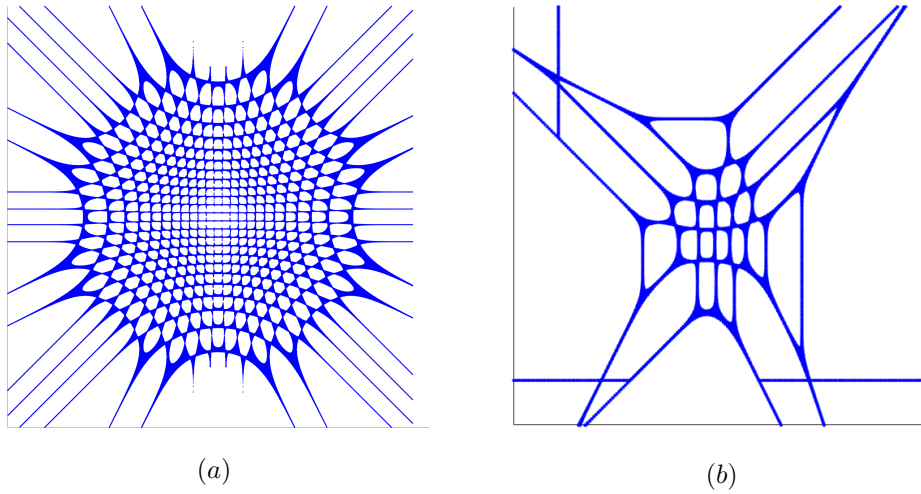


图 9. 阿米巴可视化中的图像伪影——图片中缺失的线条（a），图片中多出的线条（b）

为了测试算法在阿米巴存在视觉伪影的多项式上的表现，建议使用给定次数的随机多项式集合，因为输入多项式的随机性会产生令人极不愉快且带有众多触角的阿米巴。

考虑到上述内容，以下几类多项式可用于软件测试：
1. 通过 [71] 中介绍的算法生成的最优多项式。2. 触角补集包含小型有界连通分支的多项式——可使用软件 [c] 的阿米巴演化功能生成此类多项式。3. 随机生成的多项式集合。

4.3. 实验结论

本小节介绍上述测试用例的软件测试结果。

软件 [b] 似乎不适用于大规模测试，因为许多作为输入提供的多项式都会导致程序抛出异常。这可能是由于 Julia 软件包更新，同时开发者缺乏支持所致。目前的软件 [b] 仅适用于某些特定情况的计算，因为有些输入多项式只会引发错误，而且还出现过算法无明显原因陷入无限循环的情况。对于适用的多项式，其计算时间优于软件 [c]。

对于最优多项式，软件 [a] 比软件 [c] 更快，但它对多项式次数有所限制，而且单项式数量越多，限制就越严格。对于随机多项式，结果存在许多问题（包括图像伪影，甚至计算错误）。

在能够确保最佳性能的参数取值下，软件 [c] 比软件 [a] 慢，且计算时间取决于单项式的数量；不过，与另外两个软件包相比，它对输入多项式参数的限制较少。

5. 结论

计算机性能的提升显著增强了计算多项式触角的能力。然而，这一问题的主要复杂性更多体现在算法的计算复杂度上。

成员判定问题通常无法在多项式时间内解决，但已有多种不同的算法解决方案，并已实现于用于计算多项式触角的软件工具中。这些方案可以计算结构简单的阿米巴；然而，在计算任意多项式的阿米巴时，会出现其他问题，例如识别小型连通分支以及伪影的出现（见图 9）。

小型连通分支问题是 Passare 猜想的关键问题之一，而且它本身似乎具有很高的复杂度，因为尽管作者提到了这个问题，却没有任何软件工具提供解决它的算法。 [67, 71]

综上所述，引言中提出的核心问题可作如下回答：尽管目前尚不清楚 Passare 猜想究竟成立还是不成立，但大量计算机实验表明，如果它存在反例，那么反例很可能出现在高维空间中。要找到这一反例，就必须改进现有算法，以便构造具有大量变量的多项式的阿米巴及其截面。

参考文献

[1] 开放问题：阿米巴与热带几何。美国数学研究所（2009），https: //aimath.org/~aimath/WWN/openproblems/problemlist11.pdf

[2] Aharony, O., Hanany, A., Kol, B.：(p, q)五维膜的网络、五维场论与网格图。Journal of High Energy Physics 1（1998），https://doi.org/10.1088/1126-6708/ 1998/01/002[3] Angelelli, M., Konopelchenko, B.：配分函数的零点与阿米巴。Reviews in Mathematical Physics 30(9)（2018），https://doi.org/10.1142/S0129055X18500150[4] Avenda˜no, M., Kogan, R., Nisse, M., Rojas, J.：阿基米德阿米巴与热带超曲面的度量估计和成员资格判定复杂度。Reviews in Mathematical Physics 46，45–65（2018），https://doi.org/10.1016/j.jco.2017.11.008[5] Bao, J., He, Y.H., Zahabi, A.：箭图交响曲的 Mahler测度。Communications in Mathematical Physics 394，573–624（2022），https://doi.org/10.1007/s00220-022-04404-y[6] Bao, J., He, Y.H., Hirst, E.：阿米巴上的神经元。Journal of Symbolic Computation 116，1–38（2023），https://doi.org/10.1016/j.jsc.2022.08.021[7]Bogdanov, D., Kytmanov, A., Sadykov, T.：多项式触角的算法计算。计算机科学讲义（包括人工智能讲义和生物信息学讲义子系列）9890 LNCS，87–100（2016），https://doi.org/10.1007/ 978-3-319-45641-6 7_[8] Bogdanov, D., Sadykov, T.：超几何多项式是最优的。Mathematische Zeitschrift 296(1-2)，373–390（2020），https://doi.org/10.1007/s00209-019-02444-0[9] Cauchy, A.L.：奥古斯丁·柯西全集。Addison Wesley，马萨诸塞州，第2版（1882–1938），https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90181x.image#[10]Cherepanskiy, A., Tsikh, A.：代数函数的二维超几何级数的收敛性。Integral Transforms and Special Functions 31(10)，838–855（2020），https://www. tandfonline.com/doi/full/10.1080/10652469.2020.1756794[11] Draisma, J., Rau, J., Yuen, C.：阿米巴的维数。Bulletin of the London Mathematical Society 52(1)，16–23（2020），https://doi.org/10.1112/blms.12301[12] Dunkl, C., Xu, Y.：多变量正交多项式。剑桥大学出版社，剑桥（2014），https://doi.org/10.1017/CBO9781107786134[13] Einsiedler, M., Kapranov, M., Lind, D.：非阿基米德阿米巴与热带簇。Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 601，139–157（2006），https://doi.org/10.1515/CRELLE. 2006.097[14] Feng, B., He, Y.H., Kennaway, K., Vafa, C.：由镜像对称得到的二聚体模型与箭图阿米巴。Advances in Theoretical and Mathematical Physics 12(3)，489–545（2008），http://doi.org/10. 4310/ATMP.2008.v12.n3.a2 [15] Forsberg, M.：阿米巴与劳朗级数。博士论文，皇家理工学院，斯德哥尔摩，瑞典（1998）[16] Forsberg, M., Passare, M., Tsikh, A.：劳朗行列式与超平面阿米巴的配置。Advances in Mathematics 151(1)，45–70（2000），https://doi.org/10.1006/aima.1999.1856[17] Forsgård, J.：关于二聚体模型与余触角。Annales de l’Institut Henri Poincare (D) Combinatorics, Physics and their Interactions 6(2)，199–219（2019），https://doi.org/10.4171/aihpd/69[18]Forsgård, J.：指数和的热带逼近与多变量藤原界。莫斯科数学期刊 20(2)，311–321（2020），http://www.mathjournals.org/mmj/ 2020-020-002/2020-020-002-004.html[19]Forsgård, J.：判别式阿米巴与偏斜性。Journal of Commutative Algebra 13(1)，41–60（2021），https://doi.org/10.1216/jca.2021.13.41[20] Forsgård, J., Matusevich, L., Mehlhop, N., de Wolff, T.：阿米巴的偏斜逼近。《计算数学》88(315)，485–500（2019），http://doi.org/10.1090/mcom/3323[21]Gelfand, I., Kapranov, M., Zelevinsky, A.：判别式、结式与多维行列式。Birkhäuser Boston Inc.，波士顿，马萨诸塞州（1994），https://doi.org/10.1007/ 978-0-8176-4771-1

[22] Goucha, A., Gouveia, J.：矩阵的无相位秩。《SIAM应用代数与几何杂志》**5**(3), 526–551 (2021), https://doi.org/10.1137/19M1289820[23] Guilloux, A., Marché, J.：精确多项式的体积函数与Mahler测度。《组合数学》**157**(4), 809–834 (2021), https://doi.org/10.1112/S0010437X21007016 [24] Harnack, A.：关于平面代数曲线的多重性。《数学年刊》**10**, 189–198 (1876), https://doi.org/10.1007/BF01442458[25] Hicks, J.：热带拉格朗日超曲面不存在障碍。《拓扑学杂志》**13**(4), 1409–1454 (2020), https://doi.org/10.1112/topo.12165[26]Hilbert, D.：数学问题。《美国数学学会通报》**8**, 437–479 (1902), https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society/volume-8/issue-10/Mathematical-problems/bams/1183417035.full[27]Iliman, S., de Wolff, T.：阿米巴、非负多项式与由回路支撑的平方和。《数学科学研究》**3**(1) (2016), https://doi.org/10.1186/ s40687-016-0052-2 [28] Jensen, A., Leykin, A., Yu, J.：通过同伦延拓计算热带曲线。《实验数学》**25**(1), 83–93 (2016), https://doi.org/10.1080/10586458.2015.1037407[29] Johansson, P.：论余触角的拓扑。博士论文, 瑞典斯德哥尔摩大学 (2014)，http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A715770&dswid=-3042[30] Johansson, P., Kalm, H.S.：余触角的一种 Ronkin 型函数。《几何分析杂志》**27**(1), 643–670 (2017), https://doi.org/10.1007/s12220-016-9693-z[31] Jonsson, M.：阿米巴的退化与 Berkovich 空间。《数学年刊》**364**(1-2), 293– 311 (2016), https://doi.org/10.1007/s00208-015-1210-3[32] Juhnke-Kubitzke, M., de Wolff, T.：阿米巴的交集。载于：第28届形式幂级数与代数组合国际会议（FPSAC 2016），第659–670页。美国温哥华 (2016), http: //doi.org/10.46298/dmtcs.6375[33]Kaveh, K., Manon, C.：球面簇上的 Gröbner 理论与热带几何。《变换群》**24**(4), 1095–1145 (2019), https://doi.org/10.1007/s00031-019-09536-5[34]Kenyon, R.：二聚体模型导论 (2008)，https://arxiv.org/pdf/math/ 0310326.pdf[35] Kenyon, R., Okounkov, A.：平面二聚体与 Harnack 曲线。《杜克数学杂志》**131**(3), 499– 524 (2006), http://doi.org/10.1215/S0012-7094-06-13134-4[36] Kenyon, R., Okounkov, A., Sheffield, S.：二聚体与阿米巴。《数学年刊》**163**(3), 1019–1056 (2006), http://doi.org/10.4007/annals.2006.163.1019[37] Khovanskii, A.：《数学专著译丛》第88卷：少项式。美国数学学会 (1991)，https://doi.org/10.1090/mmono/088[38] Kim, Y., Nisse, M.：相位热带超曲面的自然拓扑流形结构。《韩国数学学会杂志》**58**(2), 451–471 (2021), https://doi.org/10.4134/JKMS. j200132[39] Lang, L.：曲线的阿米巴与 Lyashko–Looijenga 映射。《伦敦数学学会杂志》**100**(1), 301–322 (2019), https://doi.org/10.1112/jlms.12214[40] Lang, L.：调和热带态射与逼近。《数学年刊》**377**(1-2), 379–419 (2020), https://doi.org/10.1007/s00208-020-01971-0[41] Lang, L., Shapiro, B., Shustin, E.：阿米巴轮廓与直线的交点数。《印第安纳大学数学杂志》**70**(4), 1335–1353 (2021), http://doi.org/10.1512/iumj.2021.70.8627[42]Leksell, M., Komorowski, W.：阿米巴程序：若干复值二元表达式的阿米巴计算与可视化 (2007)，http://qrf.servequake.com/amoeba/ AmoebaProgram.pdf

[43] Lyapin, A.：Riordan 阵列与二维差分方程。《西伯利亚联邦大学学报：数学与物理》**2**(2), 210–220 (2009), https://www.mathnet.ru/links/ 0f23ed09125459c04ae0fb47dbc5f6a4/jsfu66.pdf[44] Maslov, V.：将热带几何与阿米巴推广到负压区域：与范德瓦耳斯气体的比较。《数学札记》**98**(3-4), 429–440 (2015), https://doi.org/10. 1134/S0001434615090084[45] Mikhalkin, G.：实代数曲线、矩映射与阿米巴。《数学年刊》**151**(1), 309–326 (2000), https://doi.org/10.2307/121119[46] Mikhalkin, G.：代数簇的阿米巴与热带几何。载于：《几何的不同面貌》。国际数学丛书（纽约）3, 第257–300页。Kluwer (2004)，https://doi.org/10. 1007/0-306-48658-X_6[47] Mikhalkin, G.：热带几何及其应用。载于：国际数学家大会（ICM 2006），第2卷，第827–852页 (2006), https://doi.org/10.4171/022-2/40[48] Mikhalkin, G.：半维簇的阿米巴。《数学前沿》**9783319524696**, 349–359 (2017), https://doi.org/10.1007/978-3-319-52471-9_21[49] Mikhalkin, G., Rullgård, H.：最大面积的阿米巴。《国际数学研究通知》**2001**(9), 441–451 (2001), https://doi.org/10.1155/S107379280100023X[50] Mikhalkin, G., Shkolnikov, M.：非交换阿米巴。《伦敦数学学会通报》**54**(2), 335–368 (2022), https://doi.org/10.1112/blms.12622[51] Mkrtchian, M., Yuzhakov, A.：有理函数的牛顿多胞体与 Laurent 级数（变量数为 n）。《亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院通报》**17**, 99–105 (1982), https://arar.sci.am/publication/ 122533[52] Nilsson, L.：阿米巴、判别式与超几何函数。博士论文，瑞典斯德哥尔摩大学 (2009)[53] Nilsson, L., Passare, M., Tsikh, A.：A-超几何级数与积分的收敛定义域。《西伯利亚联邦大学学报：数学与物理》**12**(4), 509–529 (2019), https:// doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-4-509-529[54] Nisse, M.：零维簇的阿米巴基。《纯粹与应用代数杂志》**220**(3), 1252–1257 (2016), http://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.08.018[55]Nisse, M., Sadykov, T.：代数超曲面的阿米巴形多面体复形。《几何分析杂志》**29**(2), 1356–1368 (2019), https://doi.org/10.1007/ s12220-018-0041-3[56] Passare, M.：Harnack 曲线的三角学。《西伯利亚联邦大学学报：数学与物理》**9**(3), 347–352 (2016), https://doi.org/10.17516/ 1997-1397-2016-9-3-347-352[57] Passare, M., Pochekutov, D., Tsikh, A.：统计热力学中的复超曲面阿米巴。《数学物理、分析与几何》**16**, 89–108 (2013), https://doi.org/10.1007/ s11040-012-9122-x[58]Passare, M., Rullgård, H.：阿米巴、Monge-Ampère 测度与牛顿多胞体的三角剖分。《杜克数学杂志》**121**(3), 481–507 (2004), http://doi.org/10.1215/ S0012-7094-04-12134-7[59] Passare, M., Sadykov, T., Tsikh, A.：多变量超几何函数的奇点。《组合数学》**141**(3), 787–810 (2005), https://doi.org/10.1112/S0010437X04001411[60] Passare, M., Tsikh, A.：代数方程与超几何级数。载于：Laudal, O.A., Piene, R. (编)《尼尔斯·亨里克·阿贝尔的遗产》，第653–672页。Springer，柏林、海德堡 (2004)，https://doi. org/10.1007/978-3-642-18908-1_21[61] Purbhoo, K.：阿米巴的零点定理。《杜克数学杂志》**141**(3), 407–445 (2008), http://doi. org/10.1215/00127094-2007-001[62] Ruan, W.D.：牛顿多边形与弦图。《分析与几何通讯》**15**(1), 77– 119 (2007), https://doi.org/10.4310/CAG.2007.V15.N1.A3

[63] Sadykov, T., Tsikh, A：《多变量超几何函数与代数函数》（俄文）。Nauka，俄罗斯莫斯科（2019），https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1923557#1[64] Theobald, T.：计算触角。《实验数学》**11**(4), 513–526（2002），http://doi. org/10.1080/10586458.2002.10504703[65]Theobald, T., de Wolff, T.：用平方和逼近阿米巴和余触角。《计算数学》**84**(291), 455–473（2015），http://doi.org/10.1090/ S0025-5718-2014-02828-7[66] Theobald, T., de Wolff, T.：三项式根的范数。《数学年刊》**366**(1-2), 219–247（2016），https://doi.org/10.1007/s00208-015-1323-8[67] Timme, S.：低维空间中阿米巴、余触角和虚投影的快速计算（2018）[68] de Wolff, T.：阿米巴及其热带化——综述。载于：《分析与几何相遇》，第157–190页（2017），https://doi.org/10.1007/978-3-319-52471-9_12[69] Yger, A.：热带几何与阿米巴。波尔多第一大学，法国（2016），https://cel.hal. science/cel-00728880/document[70] Zahabi, A.：箭图渐近与阿米巴：环面卡拉比–丘除子上的瞬子。《物理评论 D》**103**(8)（2021），https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.086024[71] Zhukov, T., Sadykov, T.：计算多个复变量多项式的阿米巴补集的连通分支。《程序设计与计算机软件》**49**(2), 133–141（2023），https://doi.org/10.1134/S0361768823020159

Vitaly A. Krasikov 普列汉诺夫俄罗斯经济大学 俄罗斯莫斯科斯特列米扬内巷36号 电子邮箱：krasikov.va@rea.ru,vitkras@inbox.ru