arXiv:2305.00745v1 [math.AP] 1 May 2023

# 求解直至 $6p$-TH 维的库拉莫托-西瓦辛斯基-伯格斯方程：布朗时间范式

HASSAN ALLOUBA

ABSTRACT. 我们运用先前建立的布朗时间框架，在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上表述并证明库拉莫托-西瓦辛斯基偏微分方程的伯格斯型版本的全局唯一性和局部时间存在性；对每个 $d < 6p$，解属于时间连续的 $\mathrm{L}^{2p}$ 值解类 $p \geq 1$。我们既不假设空间紧致性，也不假设解依赖于空间坐标，更不要求初始数据足够小。我们的方法揭示了一个出人意料的发现：即使对于局部解，维数也存在 $6p$ 维的上界。布朗时间核是我们方法的核心，它是带角度的 $d$ 维薛定谔传播子的布朗平均。我们利用该核，为所有维数同时提供一种系统方法，其中包括对 KS 方程的一种新表述，即使在广为人知的 $d = 1$ 情形下也是如此。由此得到的估计导出了本文的结论。我们通过融合先前构造的若干布朗时间随机过程及相关思想（这些内容编码在上述核中）与分析方法（包括复分析和调和分析），并结合恰当的 $N$ 球逼近、不动点理论，以及将随机解析停时技巧改造应用于确定性情形，获得了上述结果。在后续即将发表的文章中，我们将采用另一种同样基于布朗时间范式的策略，处理多维 KS 方程的整体适定性。本文也为另一篇即将发表的文章提供了范本；在该文中，我们将证明多维空间中时间分数阶伯格斯方程的类似结果。

## CONTENTS

1. 引言与结果陈述 2
1.1. 库拉莫托-西瓦辛斯基偏微分方程及其伯格斯形式 2
1.2. 虚布朗时间-布朗角核表述 4
1.3. 主要结果与简要证明思路 5
2. L-KS 核及其导数的基本估计与卷积估计 7
2.1. 布朗时间核的基本估计与傅里叶变换 7
2.2. 与 L-KS 核导数的卷积： $6p$维障碍 11
2.3. 与 L-KS 核的卷积 15
3. 通过 $\mathbb{L}^{2p}$ 解实现局部 $N$球 KSB 近似 17

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35G20、35G25、60H30、60J65、35A01、35A02、35A08、35A09、35A22、35A23、35A25、35A35、35G99、42A38、45P05。*Key words and phrases.* Kuramoto-Sivashinsky-Burgers 偏微分方程、四阶偏微分方程、非线性四阶偏微分方程、虚布朗时间-布朗角过程、虚布朗时间-布朗角核、L-KS 核、角度修正 Shr¨odinger 传播子的高斯平均。

3.1. KSB $\mathbb{L}^{2p}$ 球近似的存在性、唯一性与一致性 $N$球近似 173.2. KSB 方程的全局唯一性与局部存在性 21附录 A：简述布朗时间布朗运动的联系 22附录 B：简述弱稳定性及时空连续性 24B.1. 关于弱$\mathbb{L}^{2p}$ 稳定性 24B.2. 关于时空连续性 25附录 C：常用缩略语及记号表 26参考文献 26

## 1. Introduction and statement of results

1.1.**Kuramoto-Sivashinsky 偏微分方程及其伯格斯形式**。Kuramoto-Sivashinsky（KS）方程引起了众多专家的关注，无法在此一一列举（例如，参见 Temam 的经典著作 [23] 及其中的参考文献，以及 [14,15, 17, 18]）。该方程用于描述与化学和燃烧中的湍流相关的模型。在空间维数为 $d = 1$时，它由 Kuramoto [19] 为研究 Belousov-Zhabotinsky 反应中的相位湍流而提出。Sivashinsky [21, 22] 将 Kuramoto 的方程推广到 $d \geq 2$ ，以研究温和燃烧情况下火焰前沿的传播。在其标准的程函形式下，KS 偏微分方程是一个标量方程，表示为[1]

$$\begin{aligned} &\partial_t \tilde{U} = -\tfrac{1}{8}\left(\Delta^2 + 4\Delta\right)\tilde{U} - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\partial_k \tilde{U}\right)^2,\ (t,x) \in \mathring{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^d; \\ &\tilde{U}(0,x) = \tilde{u}_0(x),\ x \in \mathbb{R}^d; \end{aligned} \tag{1.1}$$

°其中 $\mathbb{R}_+ = (0,\ \infty)$。方程（1.1）在 $d \geq 2$ 中的适定性是一个长期悬而未决的问题。因此，目前关于 KS 的多维数学理论并不完整（在这种情况下，相应的半群并非处处有定义，见 [23,第 141]页）。

我们建立了时间连续的 $\mathbb{L}^{2p}$值的、$p \geq 1$与（1.1）密切相关的伯格斯形式——库拉莫托-西瓦辛斯基-伯格斯方程（KSB）偏微分方程的解的全局唯一性和局部存在性[2]:

$$\begin{aligned} &\partial_t U = -\tfrac{1}{8}\left(\Delta^2 + 4\Delta\right)U - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\partial_k U^2,\ (t,x) \in \mathring{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^d; \\ &U(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^d; \end{aligned} \tag{1.2}$$

在空间维度 $d < 6p$[3]。由于式（1.2）中的 KS-Burgers 相互作用，以及 KS 和 Burgers 组成部分所发挥的普遍作用，该问题本身也颇具研究价值

[1] 出于美观、排版便利和/或行文流畅等原因，对于 $\partial/\partial x_k$ 和 $\partial_k$——关于第 $k$ 个空间变量的偏导数—— $k \in \{1, \ldots, d\}$，以及 $\partial_t$ 和 $\partial/\partial t$ 关于时间变量 $t$的偏导数，我们可以自由交替使用不同记号。混合偏导数也记作 $\partial^2_{t,\ k}$。[2]当然，（ 1/8 和 4 可轻易改变，而利用我们 L-KS 核中的缩放参数，还可以在微分算子中引入阶参数；我们将在 [2]中明确详述。[3]特别地，唯一的 $\mathbb{L}^2$ 解在空间维度 $d = 1$、 2、.....、5 中存在。

在湍流行为建模中，KS 方程的 Burgers 表述（1.2）继承了相同的 KS 微分算子，并且与式（1.1）中的程函 KSPDE 密切相关。

为了证明我们的结果，我们综合采用了布朗时间计划中的多种思想和方法 [2]–[8] 以及 [12, 13]；分析方法（包括复分析/调和分析）；还有随机分析停止时刻论证，并将其调整到我们的确定性情形中。论证中的布朗时间部分由我们的 L-KS 核 [2, 5, 6, 7, 12] 及其相关的新型公式（1.2）所概括，它们在整个证明过程中发挥着关键作用。一方面，L-KS 核是我们布朗时间计划第二个主要方向的核心，促成了对多类其他更简单的四阶 KS 型偏微分方程/随机偏微分方程在多个空间维度中的温和解形式及分析[4]。另一方面，L-KS 核的形式通过其传播子，在二阶薛定谔方程与——截然不同的情形——四阶 KS 型方程之间架起了一座桥梁（见下文第1.2节）。

如 [23], 当 $d=1$ 两种表述（1.1）和（1.2）可以互换时。˜对（1.1）关于 $x$ 求导，并令 $U=\partial U/\partial x$，即可容易地得到（1.2）。类似地，当 $d>1$时，KS 伯格斯偏微分方程（1.2）嵌入在（1.1）中，并且是其正则性的主要驱动因素。只需沿着 $d$维向量 $v=\frac{1}{d}\langle 1,1,\dots,1\rangle$的方向，对（1.1）取方向导数，即可得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\partial_t+\tfrac{1}{8}\left(\Delta^2+4\Delta\right)\right)\left(\tfrac{1}{d}\sum_{\ell=1}^{d}\partial_\ell\tilde{U}\right)+\tfrac{1}{2d}\sum_{\ell=1}^{d}\partial_\ell\sum_{k=1}^{d}\left(\partial_k\tilde{U}\right)^2\\
&= \left(\partial_t+\tfrac{1}{8}\left(\Delta^2+4\Delta\right)\right)\left(\tfrac{1}{d}\sum_{\ell=1}^{d}\partial_\ell\tilde{U}\right)\\
&\quad+\tfrac{1}{2d}\sum_{\ell=1}^{d}\partial_\ell\left[\left(\sum_{k=1}^{d}\partial_k\tilde{U}\right)^2-\sum_{\substack{k_1\neq k_2\\ k_1,k_2\in\{1,\dots,d\}}}\left(\partial_{k_1}\tilde{U}\right)\left(\partial_{k_2}\tilde{U}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

显然，等式（1.3）第二个等号右侧的前四项构成了[5] 中的$U=\sum_{\ell=1}^{d}\partial_\ell\tilde{U}/d$KS 伯格斯偏微分方程。而（1.3）中的额外第五项（也就是最后一项）是第四项的非对角部分；因此，它的各个加数与第四项中的各项具有相同的形式和阶数（每一项都是 $\tilde{U}$的一阶空间导数的乘积）[6]。因此，研究 KS 伯格斯偏微分方程（1.2）不仅本身具有意义，也有助于深入认识空间维度为 $d\geq 1$的（1.1）。下文中，我们将把分析和讨论完全聚焦于 KS 伯格斯偏微分方程（1.2）。

[4]第一项是高阶／时间分数阶偏微分方程与密切相关的布朗时间随机过程之间的联系，我们从 [13, 8]

[5] 在这里，（1.2）中求和符号前的 $1/2$ 被替换为 $d/2$ （仅改变了（1.2）中的常数）。[6]注意，若 $\tilde{U}$ 是（1.1）的一个解，且具有置换不变梯度 $\pi(\nabla\tilde{U})=\nabla\tilde{U}$，那么对每个置换 $\pi$——等价地，$\partial\tilde{U}(t,x)/\partial x_i=\partial\tilde{U}(t,x)/\partial x_j\ \forall i,j\in\{1,2,\dots,d\}$——对（1.1）取方向导数（即（1.3））， 可化简为（1.2），其中 $U=\left(\sum_{\ell=1}^{d}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x_\ell}\right)/d$。

1.2.**虚布朗时间-布朗角核的表述**。分析 KS 方程时，我们采用的一项关键基础要素和创新是虚布朗时间-布朗角核，也称 L-KS 核。我们使用 L-KS 核——该核在 [7] 中引入，并在 [2, 6, 12]中以基础性方式用于表述不同类型的 KS 方程——来构建 KS 伯格斯偏微分方程（1.2）的新表述并对其进行分析。这个 L-KS 核是带角度的薛定谔传播子的布朗平均（见下文（¨1.5）），使我们能够获得足够精确的估计，并由此得到诸多结果，其中包括 KS 伯格斯方程令人惊讶的 $6p$维极限现象。正如我们在早先的工作 [2, 6, 7, 12], 中所解释的，L-KS 核是 L-KS 偏微分方程的基本解。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\tfrac{1}{8}\left(\Delta + 2\right)^2 u, \text{ with } u(0,x) = \delta(x), \tag{1.4}$$

其中， $\delta(x)$ 是通常的狄拉克 δ 函数，其表达式为

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}} K^{\mathrm{BM}}_{t;s}\, ds + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}} K^{\mathrm{BM}}_{t;s}\, ds \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{t}{8}\left(-2+|\xi|^2\right)^2} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\langle \xi, x-y\rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{t}{8}\left(-2+|\xi|^2\right)^2} \cos\left(\langle \xi, x-y\rangle\right) d\xi,\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ and where $K^{\mathrm{BM}}_{t;s} = \mathrm{e}^{-(s^2/2t)}/\sqrt{2\pi t}$ 是从 0 出发的一维布朗运动的密度。为得到式 (1.5) 中最后两个等式，我们对 $\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x} = \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\,0\,x}$ ; 进行了空间傅里叶变换的逆变换（见下文 [2, 引理 2.1] 和引理 2.1，公式 (2.1)）。由于 $\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}/(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}$ 是著名的薛定谔传播子，我们将第一种表示——即式 (1.5) 的第一个等式——称为 L-KS 核的带角薛定谔传播子形式的布朗平均。我们将由式 (1.5) 最后两个等式给出的第二种表达式称为 L-KS 核的傅里叶形式。从概率角度看，L-KS 核也可以被视为虚布朗时间-布朗角过程 ([2, 6, 7]) 的“密度[7]”

$$\mathbb{X}^x_B(t) := \begin{cases} X^x(\mathbf{i}B(t)) \exp\left(\mathbf{i}B(t)\right), & B(t) \geq 0; \\ \mathbf{i}X^{-\mathbf{i}x}(-\mathbf{i}B(t)) \exp\left(\mathbf{i}B(t)\right), & B(t) < 0; \end{cases} \tag{1.6}$$

其中，过程 $X^x$ 是一个从 $x \in \mathbb{R}^d$出发的 $\mathbb{R}^d$ 值布朗运动（BM），$X^{-ix}$ 是一个从 $-ix$ 出发且与之独立的 $i\mathbb{R}^d$ 值 BM （因此 $iX^{-ix}$ 从 $x$ 出发），二者均独立于从 0 出发的内层标准 $\mathbb{R}$ 值布朗运动 $B$。外层布朗运动 $X^x$ 和 $X^{-ix}$ 的时钟由正的虚布朗时间取代；而 $\mathbb{X}^x_B$ 在复平面上的角度为布朗运动 $B$ [2, 7]。我们认为虚时间过程$\{X^x(is)\ s \geq 0\}$和 $\{iX^{-ix}(-is)\ s \leq 0\}$在 $\mathbb{R}^d$ 上具有相同的复高斯分布，并具有相应的复分布密度（或

[7] 当然，正如我们在 [2, 7], L-KS 核是 $not$ 标准概率密度函数。

薛定谔传播子）

$$K^{\mathrm{SP}^d}_{\mathbf{i}s;x,y} = \frac{1}{(2\pi i s)^{d/2}} e^{-|x-y|^2/2is}.$$

式（1.5）中的 L-KS 核与布朗时间过程的密度密切相关，例如布朗时间布朗运动及其迭代 [3, 4, 8, 13, 12]——它们是时间分数阶偏微分方程和带记忆的高阶偏微分方程的基本解——详见 [2, 5, 6, 7, 12] （另见下文引理2.1 和引理A.1以及此前的讨论）。这一基础性的布朗时间构造同时（1）为我们在此处理 KS 方程增添了概率论色彩；（2）为如何处理时间分数阶伯格斯偏微分方程提供了范例，相关内容将在我们即将发表的工作中讨论（[11]以及后续工作）。此外，我们的 L-KS 表述适用于所有维度，使 KS 伯格斯方程能够在确定性和随机偏微分方程框架下，适用于广泛的依赖维数的研究。我们计划在未来的文章中探讨 KS 伯格斯方程解及其行为的其他多个方面。

为将我们的偏微分方程（1.2）改写为 L-KS 核表述，我们稍作改写如下

$$\begin{aligned} &\partial_t U = -\tfrac{1}{8}\left(\Delta + 2\right)^2 U + \tfrac{1}{2}U - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \partial_k U^2 \\ &U(0,x) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

接着，我们用温和 L-KS 表述来表述（1.7）（等价地，（1.2））：

$$\begin{aligned} U(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} u_0(y) dy + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y} U(s,y) ds dy \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}}{\partial y_\ell} U^2(s,y) ds dy. \end{aligned} \tag{1.8}$$

**注 1.1**。 在我们的结果中，除非另有明确说明，KSB 偏微分方程（1.2）的所有解均取 L-KS 核温和意义（1.8）。此外，我们始终假设 $T > 0$ 是一个固定但任意的时间；并且 $C$ 是一个通用常数，其值可能因行而异。

**记号 1.1** （函数空间及相关记号）。 在陈述结果时，我们令

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}; |f|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

表示通常的 $\mathbb{L}^p$ 空间，并用 $\mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 表示连续函数 $\{u(t)$ 的集合；$0 \le t \le T\}$ 它们取值于 $\mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$。为使表述更加流畅，我们也会交替使用记号 $|u(t)|_p$ 和 $|u(t,\ \cdot)|_p$。本文所用缩略语和记号的完整列表，参见附录 C。

1.3. **主要结果及简要证明思路**。 现在转向本文关于（1.2）的主要存在性、唯一性和正则性结果。我们将任意 $U$满足（1.8）的 1.2）称为 L-KS 解。

**定理 1.1**（KS 伯格斯偏微分方程（1.2）关于 $d < 6p$）的局部存在性和全局唯一性。**假设** $T > 0$ 和 $p \geq 1$ 任意且固定。如果 $u_0 \in \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$ 那么存在一个时间 $\tau \in (0,\ T]$，以及一个唯一的 *L-KS* 解 $U \in \mathbb{C}\left([0,\tau];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 对应于 *KSB* 偏微分方程（1.2）且 $d < 6p$。此外，如果对于所有 $t \in [0,T]$，*KSB* 偏微分方程的存在性成立，那么唯一性也成立。

**注 1.2.**（1）我们的结果表明，时间连续的 $\mathbb{L}^2$值局部解（特殊情形 $p = 1$）在空间维度$d = 1$、2、3、 4、 5 中存在且唯一。（2）对我们的论证稍作调整，即可得到附录 B$^{2p}$中的附加弱 L$^{2p}$稳定性（见定理 B.1），以及当 $u_0 \in \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right) \cap \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ 时解的空间连续性（更多简要说明见附录 B）。我们将在未来的一篇文章中，对解的精确连续模数进行详细分析，其中也包括随机偏微分方程情形（关于较简单的线性 SPDE 情形下此类结果的概况，见 [12] ）。(3) 本文中 KSB 方程的整体适定性将在我们即将发表的文章 [1]中讨论。

自然地，我们的核表示（1.8），去掉 $U/2$ 项后，连同相应的论证也同时确立——作为额外结果——定理 1.1中的相同结论对（1.2）的一个轻微变体同样成立：

$$\begin{aligned} \partial_t U &= -\tfrac{1}{8}\left(\Delta + 2\right)^2 U - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \partial_k U^2 \\ U(0,x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

我们将这一事实表述为以下定理。

**定理 1.2**（ $d < 6p$中的 KSB 变体之存在性与唯一性）。在满足定理*1.1*的假设时，定理 *1.1*的相同结论对 *KSB* 变体（1.9）同样成立。

现在，我们简要介绍本文其余部分的结构，并概述证明中的主要亮点。证明分为两个主要阶段，现概述如下。

我们在第2 节首先推导其模的基本估计 $\mathbb{K}_{t\ x}^{\mathrm{LKS}^d}$；并结合先前得到的 $\mathbb{K}_{t\ x}^{\mathrm{LKS}^d}$ 的傅里叶变换；(见 [2, 引理 2。1])，利用这些结果推导出足够精确的、

依赖维数的 $\mathrm{L}^{2p}$ 卷积估计，适用于这些算子

$$
\begin{aligned}
&\text{(i) } (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} z(y)dy, \text{ with } (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(0,x) = z(x),\\
&\text{(ii) } (\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d} u)(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;x,y} u(r,y)dydr, \text{ and}\\
&\text{(iii) } (\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d} v)(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;x,y}}{\partial y_\ell} v(r,y)dydr, \ \ell = 1,\dots,d,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

对于 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ 及函数 $z \in \mathrm{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$, $u \in \mathrm{L}^{\gamma_1}\left([0,T];\ \mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 以及 $v \in \mathrm{L}^{\gamma_2}\left([0,T];\ \mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$，对于 $p \geq 1$ 和适当的 $\gamma_1,\gamma_2 > 1$。这些估计不仅在我们分析 (1.2) 时起着关键作用，也揭示了 KS 伯格斯偏微分方程 (1.2) 的维数上限。

接下来，在第3节中，我们通过 L-KS 表述 (1.8) 的 $N$-球逼近序列，构造 KS 伯格斯方程 (1.2) 的取值于 $\mathrm{L}^{2p}$ 的局部解。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们将 (1.8) 右端的每个 $U$ 映射到以原点为中心、半径为 $N$ 的 $\mathrm{L}^{2p}$ 球 $\mathrm{B}_N(0) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R})$ 中（见下文 (3.2)）。然后，我们结合第2节的卷积估计与不动点引理，证明存在唯一解 $U_N \in \mathrm{C}\left([0,T];\ \mathrm{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$，它对应第 $N$ 次逼近，并满足对每个 $N \in \mathbb{N}$，$\sup_{t\in[0,T]} |U_N(t)|_{2p} < \infty$。利用随机分析式的停时型论证 `（例如，分别参见方程 (3.15) 和 (2.3)]，以及 [16]），我们提取出 (1.8) 的一个局部 L-KS 解 $U \in \mathrm{C}\left([0,\tau_\infty);\ \mathrm{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$，其定义于某个时间 $0 < \tau_\infty \leq T$。这个局部解$U$ 可以理解为：对于所有 $N \geq 2$，将 $U_N$ 的路径与 $U_{N-1}$ 的路径拼接而得，从而得到方程 (1.2) 的解。该论证还确立了方程 (1.2) 解的唯一性。

## 2. Fundamental and convolution estimates for the L-KS kernel and its derivatives

我们首先建立一些 $\mathbb{L}^{2p}$ 关于卷积算子与 L-KS 核及其空间导数的估计，见（1.10）。我们先处理较粗糙的算子$\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$，因为在温和 L-KS 表述（1.8）中，它处于 KS 微分算子（通过核）与 Burgers非线性项的交汇处。随后，我们证明较简单的 $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$ 和 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 的相应结果。

2.1. **布朗时间核的基本估计与傅里叶变换**。为了从 L-KS 核中提取足够的信息，我们需要一个基本引理，随后还需要在分析 $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$ 和 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$ 时用到的卷积引理。引理2.1（2.2）中的估计，源自对 L-KS 过程 [6, 7] 及其布朗时间布朗运动对应过程[8, 13] 和它们的核之间密切关系的直观认识（另见 [2, 12]，其中介绍了更多联系和相关性质）。这种密切关系是我们开展工作的重要动机，在文中也曾反复提及 [12]–[13]。附录A 中简要讨论了这一点（尤其参见其中 BTBM 密度的相应估计，见（A.1），引理 A.1 中的方程（A.3）；除常数外，它们完全相同）。

**引理 2.1**（基本 L-KS 引理：关于 $\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}$；）**的上界和傅里叶变换**。$\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}$；的空间傅里叶变换为[8]

$$\hat{\mathbb{K}}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;\xi} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{8}\left(-2+|\xi|^2\right)^2};\ t>0, \xi\in\mathbb{R}^d, d\in\mathbb{N}. \tag{2.1}$$

任取 $T>0$，设 $t\in(0,T]$，且 $\ell\in\{1,\cdots,d\}$。对于 *L-KS* 核 $\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}{}_{;,y}$：[9]，以下估计成立

$$\begin{aligned}
&(a)\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}\right| \le C_1\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-c_1|x-y|^2/s}}{s^{d/2}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{c_2 s^2}{t}}}{t^{1/2}}ds,\\
&(b)\left|\partial_t\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}\right| \le C_2\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-c_3|x-y|^2/s}}{s^{d/2}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{c_4 s^2}{t}}}{t^{3/2}}ds,\\
&(c)\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}\right| \le C_3\int_0^\infty \frac{e^{-c_5|x-y|^2/s}}{s^{(d+1)/2}}\frac{e^{-\frac{c_6 s^2}{t}}}{t^{1/2}}ds,\\
&(d)\left|\partial^2_{t,\ell}\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}\right| \le C_4\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_7|x-y|^2}{s}}}{s^{(d+1)/2}}\frac{e^{-\frac{c_8 s^2}{t}}}{t^{3/2}}ds,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

因此

$$\begin{aligned}
&(a)\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;\cdot}\right|_1 \le \tilde{C}_1,\\
&(b)\left|\partial_t\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;\cdot}\right|_1 \le \tilde{C}_2 t^{-1},\\
&(c)\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;\cdot}\right|_1 \le \tilde{C}_3 t^{-1/4},\\
&(d)\left|\partial^2_{t,\ell}\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;\cdot}\right|_1 \le \tilde{C}_4 t^{-5/4},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

对于 $(t,x,y)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$，并且对于某些常数 $C_i, \tilde{C}_i, c_j\in(0,\infty)$，$i=1,2,3$以及 $j=1,2,3,4,5,6,7,8$，它们仅依赖于 $T$和 $d$。

引理的证明 *2.1*。证明见 [2, 引理2。1] 关于 (2.1) 的证明。下面转向 (2.2) 的证明，回顾一下

$$\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}}\frac{\mathrm{e}^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}ds.$$

我们将给出在 $(0,\infty)$ 上积分的估计：

$$\mathscr{J}_+(t,|x-y|) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}}\frac{\mathrm{e}^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}ds. \tag{2.4}$$

关于 $(-\infty,0)$，$\mathscr{J}_-(t,|x-y|)$ 上积分的论证非常相似，因此不再重复。

---

[8]我们采用酉傅里叶变换的定义

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\langle x,\xi\rangle}dx$$

并使用记号 $\partial^2_{t,\ell}$ 表示 $\partial^2/\partial t\partial y_\ell$。

[9]2)(a) 只是布朗时间布朗运动密度的重新缩放形式（参见（A.1））。

令 $\mathbb{L}_\epsilon$ 为将正实轴 $\mathbb{R}_+$ 顺时针旋转所得的直线，位于

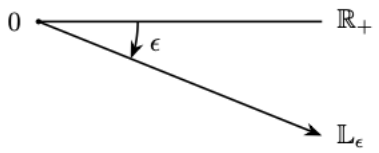



FIGURE 2.1.

复平面 $\mathbb{C}$ 旋转角度为 $\epsilon$ (图 2.1)。然后， $\mathscr{J}_+$ 可正则化为

$$\mathscr{J}_+(t,|x-y|)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{L}_\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi\mathbf{i}s)^{d/2}}\frac{\mathrm{e}^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}ds.$$

此外，对 $\mathbb{L}_\epsilon$ 的积分不依赖于 $\epsilon>0$ ，且当 $\epsilon>0$较小时，对于锥形区域内的复数 $t$ 定义良好，该锥形区域的顶点位于复平面原点，方向沿着 $\mathbb{R}_+$——向右——，张角为 $\alpha$ (图 2.2 中包含 $\mathbb{R}_+$ 的区域，其上下边界为从复平面原点出发、与 $\alpha$ 分别成固定角度 $\mathbb{R}_+$的两条直线），条件是 $\alpha+2\epsilon<\pi/2$。令 $\alpha=\epsilon=\pi/8$。则在 $\mathbb{L}_\epsilon$上，有

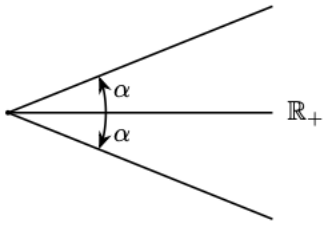



FIGURE 2.2.

$$\Re(\mathbf{i}s)\le|s|,\ \Re\left(1/\mathbf{i}s\right)\ge\sin(\pi/8)\cdot\frac{1}{|s|},\ \text{and}\ \Re(s^2/2t)\ge\sin(\pi/8)\cdot\frac{|s|^2}{2|t|}. \tag{2.5}$$

因此，

$$|\mathscr{J}_+(t,|x-y|)|\le\frac{|t|^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2\sigma}\sin(\pi/8)}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2|t|}\sin(\pi/8)}}{(2\pi\sigma)^{d/2}}d\sigma. \tag{2.6}$$

我们现在注意到

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\sigma-\frac{\sigma^2\sin(\pi/8)}{2|t|}}\le\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\sin(\pi/8)}{4|t|}}, & \text{for } \sigma\ge 4|t|/\sin(\pi/8);\\ \mathrm{e}^{\sigma}\le\mathrm{e}^{\frac{4|t|}{\sin(\pi/8)}}, & \text{for } \sigma<4|t|/\sin(\pi/8).\end{cases} \tag{2.7}$$

接着，我们很容易得到上界

$$|\mathscr{J}_+(t,|x-y|)|\le\frac{\mathrm{e}^{\frac{4}{\sin(\pi/8)}|t|}|t|^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2\sigma}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}e^{-\frac{\sigma^2}{2|t|}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}}{(2\pi\sigma)^{d/2}}d\sigma. \tag{2.8}$$

最后，对于任意固定的 $t\in(0,\ T]$ 在以 $t$ 为圆心、半径为 $t$的复圆盘中，使用（2.8）中的上界 $t$ ，其中半径为 $t\sin(\pi/8)$（图 2.3）

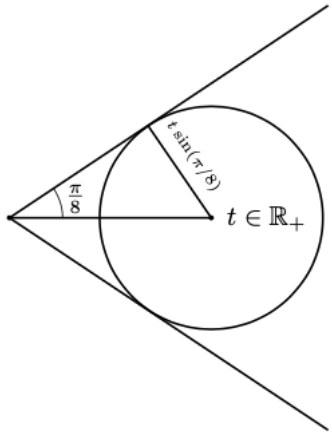



FIGURE 2.3.

再结合柯西估计可得

$$
\begin{aligned}
&(a)\,|\mathscr{J}_+(t,|x-y|)| \le C_{T,d}t^{-1/2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2\sigma}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}e^{-\frac{\sigma^2}{2t}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}}{\sigma^{d/2}}d\sigma,\\
&(b)\,|\partial_t\mathscr{J}_+(t,|x-y|)| \le C_{T,d}t^{-3/2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2\sigma}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}e^{-\frac{\sigma^2}{2t}\frac{\sin(\pi/8)}{4}}}{\sigma^{d/2}}d\sigma,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

其中常数 $C_{T,d} \in (0,\infty)$ 取决于 $T$ 和 $d$。类似地，我们可得 $|\mathscr{J}_-(t,|x-y|)|$ 和 $|\partial_t\mathscr{J}_-(t,|x-y|)|$所需的上界。这就证明了 (2.2) 的 (a) 和 (b) 部分。

将 $\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}{}_{;,y}$ 替换为

$$
\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}s}(x_\ell-y_\ell)\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2\mathbf{i}s}}{(2\pi)^{d/2}(\mathbf{i}s)^{\frac{d}{2}+1}}\frac{\mathrm{e}^{-s^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}ds,
$$

并仅稍作修改地应用上述相同论证，我们得到

$$
\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}\right| \le C_{T,d}\int_0^\infty \left|(x_\ell-y_\ell)\frac{e^{-c|x-y|^2}}{s^{\frac{d}{2}}+1}\right|\frac{\mathrm{e}^{-\tilde{c}s^2/t}}{\sqrt{t}}ds, \tag{2.10}
$$

对于某些常数 $c,\tilde{c},C_{T,d}\in(0,\infty)$，它们可能依赖于 $T$和 $d$。(2.2) 的 (c) 部分现可结合 (2.10) 以及以下关于布朗运动密度（或热核）导数的标准估计直接得到：

$$
\left|(x_\ell-y_\ell)\frac{e^{-|x-y|^2/2s}}{(2\pi)^{d/2}s^{\frac{d}{2}}+1}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y_\ell}\frac{e^{-|x-y|^2/2s}}{(2\pi s)^{d/2}}\right| \le C\frac{e^{-c|x-y|^2/s}}{s^{(d+1)/2}}, \tag{2.11}
$$

对于每个（$s$，$x$，$y$）$\in$（0，$\infty$）$\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$，$\ell\in\{1,\cdots,d\}$，对于某些常数 $c$，$C\in$（0，$\infty$），它们可能依赖于 $d$；并且如上所述，柯西估计随后给出（2.2）（d）。证明至此完成，因为（2.3）由（2.2）对 $\mathbb{R}^d$积分后立即得出。□

**致谢**。我想感谢 Fedja Nazarov 对引理2.1中（2.2）证明提出的建议。我们在上文采纳了这些建议，代替原先较长的论证。我还要感谢 Hala Eweiss Allouba 协助绘制证明中的图，更重要的是，感谢她给予我无可估量的爱与支持。

2.2. **与 L-KS 核导数的卷积：第 $6p$ 维障碍**。现在，我们为算子 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$（1.10）建立正则性估计。该算子与 KS 方程中 Burgers 项之和相关（即（1.2）右端第二项，或（1.7）中的第三项），以及其温和解形式（1.8）。

**引理 2.2**（卷积算子 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$ 的估计）。固定任意 $T>0$ 和 $p\geq 1$，并令 $d<6p$。对于所有 $\gamma>8p/(6p-d)$，算子 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$ 从 $\mathbb{L}^\gamma\left([0,T];\ \mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 映射到 $\mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 是有界的，并满足以下估计：

$$
\begin{aligned}
&(a)\left|(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(t)\right|_{2p}\leq C\int_0^t(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}|v(r)|_p dr\leq C\left(\int_0^t|v(r)|_p^\gamma dr\right)^{1/\gamma},\\
&(b)\left|(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(t)-(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(s)\right|_{2p}\leq C(t-s)^\varrho\left(\int_0^t|v(r)|_p^\gamma dr\right)^{1/\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

对于某个常数 $C\in(0,\infty)$——该常数可能依赖于 $T$、$d$ 和 $p$——对于 —— – $\varrho<\frac{6p-d}{8p}-\frac{1}{\gamma}$ 以及 $0\leq s<t\leq T$。

**注 2.1**。上述估计中时间指数 –$(2p+d)/8p$ 以及相应的 $\gamma$ >$8p/(6p-d)$ 的上界，正是我们的解受限于空间维度 $d<6p$ 的原因。

证明。我们先证明 (2.12) 的 (a) 部分。利用闵可夫斯基不等式和杨不等式，并用 $*$ 表示空间卷积，用 $\ell$ 个空间变量中的第 $\partial_\ell$ 个空间偏导数，得到

$$
\begin{aligned}
\left|(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(t)\right|_{2p}&=\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_0^t\left(\partial_\ell\mathbb{K}_{t-r;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}*v(r,\cdot)\right)(x)dr\right|^{2p}dx\right]^{1/2p}\\
&\leq\int_0^t\left|\left|\partial_\ell\mathbb{K}_{t-r;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}\right|*|v(r,\cdot)|\right|_{2p}dr\\
&\leq\int_0^t\left|\partial_\ell\mathbb{K}_{t-r;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}\right|_q|v(r,\cdot)|_p\,dr,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

其中 $q=\frac{2p}{2p-1}$。为完成 (2.12) (a) 的证明，我们需要估计 $|\partial_\ell\mathbb{K}_{t-r}^{\mathrm{LKS}^d};\cdot|_q$对于 $p\geq 1$（等价地，$1<q\leq 2$）。我们分三步进行：

(1) 我们先从情形 $p_0=1$ ($q_0=2$) 入手；(2) 接着，对于某个合适的依赖维数的 $p_{1,\ d}$，得到相应的 $p>p_{1,\ d}>p_0$ 估计；(3) 然后利用 $\mathrm{L}^p$ 范数的标准对数凸性，在 $|\partial_\ell\mathbb{K}_{t-r}^{\mathrm{LKS}^d};\cdot|_q$ 的估计中，对 $p_0$ 和 $p_{1,\ d}$ 值（或其等价的 $q$ 值）之间的间隙进行插值。

对于情形 $p_0 = 1$ ($q_0 = 2$)，令 $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^d$ 由下式给出

$$\mathbb{S} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d; |\xi| \in \left[0, \sqrt{4-2\sqrt{2}}\,\right] \cup \left[\sqrt{4+2\sqrt{2}}, \infty\right) \right\}, \tag{2.14}$$

并注意到，对于 $0 < t \le T$，我们有

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}(-2+|\xi|^2)^2} \le \mathrm{e}^{-\frac{t}{8}|\xi|^4}, & \xi \in \mathbb{S}; \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}(-2+|\xi|^2)^2} \le C_T \mathrm{e}^{-\frac{t}{8}|\xi|^4}, & \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}; \end{cases}$$

其中 $C_T \in (1, \infty)$ 仅取决于 $T$。然后，利用帕塞瓦尔-普朗歇尔恒等式以及 L-KS 核的傅里叶变换，根据引理 2.1 公式 (2.1)，可得

$$\begin{aligned} \left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_2 &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \xi_\ell^2 \mathrm{e}^{-\frac{(t-r)}{4}(-2+|\xi|^2)^2} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\int_{\mathbb{S}} \xi_\ell^2 \mathrm{e}^{-\frac{(t-r)}{8}|\xi|^4} d\xi + C_T \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}} \xi_\ell^2 \mathrm{e}^{-\frac{(t-r)}{8}|\xi|^4} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sqrt{C_T} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \xi_\ell^2 \mathrm{e}^{-\frac{(t-r)}{8}|\xi|^4} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= C|t-r|^{-\frac{d+2}{8}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于 $0 \le r < t \le T$，对所有 $d \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 均成立。

对于 $1 < q < 2$ ($p > 1$) 的情形，我们首先利用引理 2.1，公式 (2.2) (c)，推导得

$$\left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_q \le C \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^\infty \frac{e^{-c_5|x|^2/s}}{s^{(d+1)/2}} \gamma_{t-r}(ds) \right|^q dx\right]^{1/q}, \tag{2.16}$$

其中

$$\gamma_{t-r}(ds) = \frac{e^{-\frac{c_6 s^2}{t-r}}}{\sqrt{\pi(t-r)/4c_6}} ds$$

是定义在 $(0, \infty)$ 上的高斯概率测度。我们将使用初等积分

$$\int_0^\infty s^\alpha \frac{e^{-\frac{c_6 s^2}{t}}}{\sqrt{\pi t/4c_6}} ds = \frac{t^{-\frac{\alpha}{2}} c_6^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \text{ for } \alpha < 1, t > 0. \tag{2.17}$$

现在我们分别处理 $d = 1$ 和多维情形。我们将詹森不等式应用于（2.16）以得到

$$\begin{aligned} \left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_q &\le C \left[\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{e^{-c_5|x|^2/s}}{s^{(d+1)/2}}\right)^q dx\, \gamma_{t-r}(ds)\right]^{1/q} \\ &\le C \left[\int_0^\infty s^{-(\frac{d+1}{2}q - \frac{d}{2})} \gamma_{t-r}(ds)\right]^{1/q} \\ &= C(t-r)^{-\frac{d(q-1)+q}{4q}} = C(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

对于 $1 < q < (d+2)/(d+1)$（等价地， $p > (d+2)/2$）。特别地，对于 $d = 1$ $1 < q < 3/2$ （等价地， $p > 3/2$）。

另一方面，对（2.16）应用闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_q &\le C\int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{e^{-c_5|x|^2/s}}{s^{(d+1)/2}}\right)^q dx\right]^{1/q}\gamma_{t-r}(ds)\\ &\le C\int_0^\infty s^{-(\frac{d+1}{2}-\frac{d}{q})}\gamma_{t-r}(ds)\\ &= C(t-r)^{-\frac{d(q-1)+q}{4q}} = C(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}},\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $q<\frac{d}{d-1}$（等价地， $p>\frac{d}{2}$）且 $d\ge 2$。[10]

现在我们来到了前文概述的对数凸插值步骤 (3)，以完成剩余 $p$ 值 $1=p_0<p\le p_{1,d}$ 对应的 $|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r}{}_{;\cdot}|_q$ 估计，其中 $p_{1,d}=3/2$ 对于 $d=1$，而 $p_{1,d}=d/2$ 对于 $d\ge 2$（分别见 (2.18) 和 (2.19) 后的注释）。因此，对于 $0<\theta<1$，令 $p_1^+{}_{,d}>p_{1,d}$ 为固定但任意的，并令 $q_1^+{}_{,d}=2p_1^+{}_{,d}/(2p_1^+{}_{,d}-1)$。我们使用标准关系

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{(1-\theta)}{p_0}+\frac{\theta}{p^+_{1,d}} \text{ and } \frac{1}{q_\theta}=\frac{(1-\theta)}{q_0}+\frac{\theta}{q^+_{1,d}}$$

且 $\mathrm{L}^p$ 范数的对数凸性可直接推出

$$\begin{aligned}\left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_{q_\theta} &\le \left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_{q_0}^{1-\theta}\left|\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_{q_{1,d}}^{\theta}\\ &\le C(t-r)^{-\frac{d(q_\theta-1)+q_\theta}{4q_\theta}}\\ &= C(t-r)^{-\frac{2p_\theta+d}{8p_\theta}}, 1<p_\theta<p^+_{1,d}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

由方程（2.15）、（2.18）、（2.19）、（2.20），以及上文对 $p_{1,d}$ 和 $p_1^+{}_{,d}$ 的定义，可得 $\mathrm{L}^q$ 范数在 $\partial_\ell \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r}{}_{;\cdot}$ 上的上界为

$$\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_q \le C(t-r)^{-\frac{d(q-1)+q}{4q}} = C(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}},\ \forall p\in[1,\infty),\ d\in\mathbb{N}. \tag{2.21}$$

因此，由（2.13）和 H¨older 不等式可得

$$\left|(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(t)\right|_{2p}\le C\int_0^t (t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}|v(r)|_p dr \le C\left(\int_0^t |v(r)|_p^\gamma dr\right)^{1/\gamma},$$

对于 $\gamma\ge\frac{8p}{6p-d}$，$d<6p$，$p\ge 1$和 $t\in(0,T]$。由此证明了（2.12）（a）。

现在来看（2.12）的（b）部分。对于 $s<t$，有

$$\left|(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(t)-(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}v)(s)\right|_{2p}\le\sum_{i=1}^2 F_i^{(p)}(s,t), \tag{2.22}$$

其中

$$F_1^{(p)}(s,t)=\left|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot,y}}{\partial y_\ell}v(r,y)dydr\right|_{2p}$$

[10]与詹森不等式相比，闵可夫斯基不等式在更大的 $q$（因此也包括 $p$）范围内给出所需的上界；但由于 $q<2$ 闵可夫斯基上界 $q<\frac{d}{d-1}$ 仅适用于 $d\ge 2$，因此我们对 $d=1$使用詹森不等式给出的上界。

and

$$F_2^{(p)}(s,t)=\left|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\partial\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot,y}}{\partial y_\ell}-\frac{\partial\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{s-r;\cdot,y}}{\partial y_\ell}\right)v(r,y)dydr\right|_{2p}.$$

我们使用与（ $F_1^{(p)}$ 2.13）中完全相同的论证来得到第一项的上界，从而得到（ 2.12）（a）。因此，利用闵可夫斯基不等式和杨氏不等式，我们对$|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r\ ;\cdot}|_q$的估计，再结合霍尔德不等式，得到

$$\begin{aligned}F_1^{(p)}(s,t)&\le\int_s^t\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_q|v(r)|_p dr\\&\le C\int_s^t(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}|v(r)|_p dr\\&\le C\left[\int_s^t(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}\frac{\gamma}{\gamma-1}}dr\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left[\int_s^t|v(r)|_p^\gamma dr\right]^{1/\gamma}\\&\le C|t-s|^{1-\frac{2p+d}{8p}-\frac{1}{\gamma}}\left[\int_0^t|v(r)|_p^\gamma dr\right]^{1/\gamma},\end{aligned}\tag{2.23}$$

对于 $\gamma>\frac{8p}{6p-d}$、 $d<6p$、 $p\ge1$和 $0\le s<t\le T$。

对于 $F_2^{(p)}$，我们使用闵可夫斯基不等式和杨氏不等式，如（2.13）所示，得到

$$F_2^{(p)}(s,t)\le\int_0^s\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}-\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{s-r;\cdot}\right|_q|v(r,\cdot)|_p\,dr,\tag{2.24}$$

设 $\partial_\theta=\partial/\partial\theta$。根据闵可夫斯基不等式、微积分基本定理、引理 2.1 （2.2）(c) 和 (d)，以及上述 $|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r}{}_{;\cdot}|_q$ 估计，可得

$$\begin{aligned}\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}-\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{s-r;\cdot}\right|_q&\le\int_s^t\left|\partial_\theta\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{\theta-r;\cdot}\right|_q d\theta\\&\le C\int_s^t(\theta-r)^{-1}\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{\theta-r;\cdot}\right|_q d\theta\\&\le C\int_s^t(\theta-r)^{-1-\frac{2p+d}{8p}}d\theta,\end{aligned}\tag{2.25}$$

对于 $0<r<s<\theta<t\le T$、 $p\ge1$、 $d\in\mathbb{N}$，以及一个仅依赖于 $T$ 的常数 $C\in(0,\infty)$。

将（2.24）与（2.25）结合，并在¨中使用 Hölder 不等式 $\theta$ ，然后在 $r$中使用，可得

$$\begin{aligned}F_2^{(p)}(s,t)&\le C\int_0^s\int_s^t(\theta-r)^{-1-\frac{2p+d}{8p}}|v(r,\cdot)|_p\,d\theta dr\\&\le C|t-s|^\varrho\int_0^s(s-r)^{1-\varrho-\frac{10p+d}{8p}}|v(r,\cdot)|_p\,dr\\&\le C|t-s|^\varrho\left(\int_0^t|v(r,\cdot)|_p^\gamma\,dr\right)^{1/\gamma},\end{aligned}\tag{2.26}$$

对于 $\gamma>\frac{8p}{6p-d}$， $\varrho<1-\frac{2p+d}{8p}-\frac{1}{\gamma}$， $d<6p$以及 $0<s<t\le T$。因此，估计式（2.12） (b) 可由方程（2.22）、（2.23）和（2.26）推出。引理的证明至此完成。

□

2.3. **与 L-KS 核的卷积**。现在我们陈述并证明（ $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$ 和 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 在（1.10）中的算子估计，这些算子与（1.7）中的第二项和初始数据项及其温和解形式（1.8）相关。

**引理 2.3** (卷积算子的估计 $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$)。 任取$T > 0$ 和 $p \geq 1$，并令 $d < 6p$。对于每个 $\gamma > 1$ ，算子 $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$ 是从 $\mathbb{L}^\gamma\left([0,T];\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$ 到 $\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$的有界算子，并满足以下估计：

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left|(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}u)(t)\right|_{2p} \leq C\int_0^t |u(r)|_{2p}dr,\\
&(b)\ \left|(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}u)(t)-(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}u)(s)\right|_{2p} \leq C(t-s)^\varrho\left(\int_0^t |u(r)|_{2p}^\gamma dr\right)^{1/\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

对于某个常数 $C \in (0,\infty)$——它可能依赖于 $T$、 $d$ 和 $p$——当 $\varrho < 1-\frac{1}{\gamma}$ 时以及当 $0 \leq s < t \leq T$ 时成立。

证明。 我们先证明 (2.27) 的 (a) 部分。利用 Minkowski 不等式和 Young 不等式，并用 $*$表示空间卷积，可得

$$
\begin{aligned}
\left|(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}u)(t)\right|_{2p} &= \left[\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_0^t\left(\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}*u(r,\cdot)\right)(x)dr\right|^{2p}dx\right]^{1/2p}\\
&\leq \int_0^t\left|\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|*|u(r,\cdot)|\right|_{2p}dr\\
&\leq \int_0^t\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_1|u(r,\cdot)|_{2p}\,dr \leq C\int_0^t|u(r,\cdot)|_{2p}\,dr,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

其中，最后一个不等式由引理2.1中的（2.3）(a) 得出。因此，（2.27）(a) 得证。

现在，我们仿照引理2.2中相应部分的证明来处理（2.27）(b)。对于$s<t$，有

$$
\left|\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}(u)(t)-\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}(u)(s)\right|_{2p} \leq \sum_{i=1}^2 F_i^{(p)}(s,t),
\tag{2.29}
$$

其中

$$
F_1^{(p)}(s,t) = \left|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot,y}u(r,y)dydr\right|_{2p}
$$

and

$$
F_2^{(p)}(s,t) = \left|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left(\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot,y}-\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{s-r;\cdot,y}\right)u(r,y)dydr\right|_{2p}.
$$

上界 $F_1^{(p)}$ 如（2.28）以及引理 2.1 （2.2）(a) 和 H¨older 不等式

$$
\begin{aligned}
F_1^{(p)}(s,t) &\leq \int_s^t \left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_1 |u(r,\cdot)|_{2p}\, dr \\
&\leq C\int_s^t |u(r,\cdot)|_{2p}\, dr \leq C(t-s)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int_s^t |u(r,\cdot)|^{\gamma}_{2p}\, dr\right)^{\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

对于 $F_2^{(p)}$ ，我们利用闵可夫斯基不等式、微积分基本定理、引理 2.1 (2.2) (b) 和 (2.3) (b) 中的 L-KS 核估计，以及闵可夫斯基不等式、杨不等式和H¨older 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
F_2^{(p)}(s,t) &\leq \int_0^s \left|\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial_\theta \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{\theta-r;\cdot,y}\right| |u(r,y)|\, dyd\theta\right|_{2p} dr \\
&\leq C\int_0^s \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_1|x-y|^2}{\varsigma}} e^{-\frac{c_2\varsigma^2}{\theta-r}}}{\varsigma^{d/2}(\theta-r)^{3/2}} |u(r,y)|\, d\varsigma dyd\theta\right|^{2p} dx\right]^{1/2p} dr \\
&\leq C\int_0^s \int_s^t \left|\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_1|\cdot|^2}{\varsigma}} e^{-\frac{c_2\varsigma^2}{\theta-r}}}{\varsigma^{d/2}(\theta-r)^{3/2}} d\varsigma\right|_1 |u(r,\cdot)|_{2p}\, d\theta dr \\
&\leq C\int_0^s \int_s^t (\theta-r)^{-1} |u(r,\cdot)|_{2p}\, d\theta dr \\
&\leq C(t-s)^{\varrho}\int_0^s (s-r)^{\beta-1} |u(r,\cdot)|_{2p}\, dr \\
&\leq C(t-s)^{\varrho} T^{1-\frac{1}{\gamma}-\varrho}\left[\int_0^t |u(r,\cdot)|^{\gamma}_{2p}\, dr\right]^{1/\gamma} \\
&\leq C(t-s)^{\varrho}\left[\int_0^t |u(r,\cdot)|^{\gamma}_{2p}\, dr\right]^{1/\gamma},
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

其中 $\varrho+\beta=1$，假设 $\varrho<1-1/\gamma$ 且 $0<s<t\leq T$。因此，估计式 (2.27) (b) 可由方程 (2.29)、(2.30) 和 (2.31) 得出。

因此，引理的证明完成。 □

利用引理 2.1并采用与引理 2.3的证明类似但更简单的论证，我们很容易得到关于 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 在 (1.10) 中的下一个结果。

**引理 2.4** (卷积算子 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 的估计)。 任取$T>0$、 $p\geq 1$，并令 $d<6p$。算子 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 是从 $\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$到 $\mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$的有界算子，并满足以下估计：

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t)\right|_{2p} \leq C|z|_{2p},\ \textit{with}\ \left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(0)\right|_{2p} = |z|_{2p}, \\
&(b)\ \left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t) - (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(s)\right|_{2p} \leq C\left[(\log(t)-\log(s))\wedge 1\right]|z|_{2p},
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

对于 $0<s<t\leq T$。

证明。 杨氏不等式结合引理 2.1，(2.3) (a)，可得

$$\left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t)\right|_{2p} \le \left|\left|\mathbb{K}_{t;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}\right| * |z|\right|_{2p} \le \left|\mathbb{K}_{t;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}\right|_1 |z|_{2p} \le C\,|z|_{2p} < \infty, \tag{2.33}$$

当 $0 < t \le T$；而 $t = 0$ 的情形可由 (1.10) (i) 直接得出，从而得到估计式 (2.32) (a)。

仿照上文 (2.31) 的论证，可得

$$\begin{aligned}\left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t) - (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(s)\right|_{2p} &\le C\int_s^t \left|\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_1|\cdot|^2}{\varsigma}} e^{-\frac{c_2\varsigma^2}{\theta}}}{\varsigma^{d/2}\theta^{3/2}} d\varsigma\right|_1 d\theta\,|z|_{2p} \\ &\le C(\log(t) - \log(s))\,|z|_{2p}\,,\end{aligned} \tag{2.34}$$

当 $0 < s < t \le T$。利用 (2.32) (b) 的上界现在可由 (2.34) 和 (2.32) (a) 以及闵可夫斯基不等式直接得到。接下来讨论时刻 0 的连续性。根据引理 2.1 (2.2) (a) 和 (2.32) (a)，可得[11]

(i) 几乎处处逐点收敛

$$(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t,x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} z(x) \text{ a.e.},$$

由标准论证可得，因为 $\mathbb{K}_{t\ x}^{\mathrm{LKS}^d}{}_{;\ ,\ y}$ 是方程（1.4）的基本解；并且

(ii) $\mathrm{L}^{2p}$ 范数收敛

$$|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t))|_{2p} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} |z|_{2p}\,,$$

结合（i）和一般的维塔利收敛定理（例如， [20, 第 5 章，第 98] 页），可得 $\{|\ (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)\ \ (t,\ \ x)\ |^{2p}\}_{t>0}$ 这一族显然是一致可积且紧的。

由（i）和（ii）中的后两种收敛方式，并应用法图引理，可得在 $\mathrm{L}^{2p}$ 范数意义下关于时间 0 的连续性（例如， [20, 定理 7，第 148] 页）：

$$\left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t) - (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(0)\right|_{2p} = \left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t) - z\right|_{2p} \longrightarrow 0 \text{ as } t \searrow 0. \tag{2.35}$$

证明完毕。 □

## 3. Local $\mathrm{L}^{2p}$ solution via the $N$-ball KSB approximations

**3.1. KSB 球近似的存在性、唯一性与 $\mathrm{L}^{2p}$ 一致性** $N$。**设 为任意固定的自然数，对于 ，令。设 B(0) L(; ) 是 L(; ) 中以原点为中心、半径为 的球。定义映射 (**$_{p)\ N}$**:** $\mathrm{L}^{2p}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{B}_N(0)$，使得

$$\mathscr{I}_N^{(p)}(v) = \begin{cases} v, & \text{if } |v|_{2p} \le N, \\ \dfrac{v}{|v|_{2p}} N, & \text{if } |v|_{2p} > N. \end{cases} \tag{3.1}$$

[11]显然，通过令 $t_n = 1/n$，可以轻易地将 $(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t,x)$ 转化为一个序列，此时 $n \nearrow \infty$ 表示 $t_n \searrow 0$。

对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们首先证明以下 $\mathbb{L}^{2p}$ 解的存在性与唯一性，该解对库拉莫托-西瓦辛斯基-伯格斯方程及其 L-KS 表述的 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ -近似具有一致性（1.8）：

$$
\begin{aligned}
U_N(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} u_0(y)dy + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(s,y)dsdy \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}}{\partial y_\ell}[(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(s,y)]^2 dsdy.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

**定理 3.1** (存在性、唯一性和 $\mathbb{L}^{2p}$ 一致性：关于 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ -KS 方程 (3.2))。 设 $p \geq 1$ 且 $d < 6p$。进一步假设 $u_0 \in \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$。那么，对于任意固定的 $N \in \mathbb{N}$，存在唯一解 $U_N \in \mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 满足(3.2)，使得

$$
\sup_{t\in[0,T]} |U_N(t)|_{2p} \leq C\left(|u_0|_{2p} + TN + dN^2T^{\frac{6p-d}{8p}}\right) < \infty. \tag{3.3}
$$

定理 3.1 对所有 $N \in \mathbb{N}$ 均成立，并将用于证明定理3.2 中 KSB 方程(1.7)（等价地，(1.2)）的唯一性和局部存在性。定理 3.1 的证明由以下两个引理推出。

**引理 3.1** (一致 $\mathbb{L}^{2p}$ 范数：关于 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ -KS 算子 (3.2))。 设 $p \geq 1$，$d < 6p$，且 $u_0 \in \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$。固定 $N \in \mathbb{N}$，并且对于 $U_N \in \mathbb{M}_{\mathscr{B}}\left([0,T];\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$[12]，令算子 $\mathscr{O}_N$ 定义如下

$$
\left(\mathscr{O}_N U_N\right)(t,x) = (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}u_0)(t,x) + \sum_{k=1}^2 \left(\mathscr{O}_{k,N}U_N\right)(t,x), \tag{3.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}u_0)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y}u_0(y)dy \\
(\mathscr{O}_{1,N}U_N)(t,x) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)\right)(t,x) \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(s,y)dsdy, \\
(\mathscr{O}_{2,N}U_N)(t,x) &= \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^d\left(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}\left([\mathscr{I}_N^{(p)}U_N]^2\right)\right)(t,x) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}}{\partial y_\ell}[(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(s,y)]^2 dsdy.
\end{aligned}
$$

于是，

$$
\sup_{t\in[0,T]} |(\mathscr{O}_N U_N)(t)|_{2p} \leq C\left(|u_0|_{2p} + TN + dN^2T^{\frac{6p-d}{8p}}\right) < \infty, \tag{3.5}
$$

对于某个常数 $C \in (0,\ \infty)$。此外，$\mathscr{O}_N U_N \in \mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$。

[12]取值于$\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)$定义在 $[0,T]$ （附录C （10））上的博雷尔可测函数。

证明。首先，根据引理 2.3 中的等式（2.27）（a），并根据 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ 的定义，我们 (3.1) 有

$$\begin{aligned}|(\mathscr{O}_{1,N}U_N)(t)|_{2p} &= \tfrac{1}{2}\left|\left(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)\right)(t)\right|_{2p}\\ &\le C\int_0^t |(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(r)|_{2p}dr \le CTN.\end{aligned} \tag{3.6}$$

其次，根据闵可夫斯基不等式、引理 2.2 (2.12) (a) 以及 (3.1)，我们有

$$\begin{aligned}|(\mathscr{O}_{2,N}U_N)(t)|_{2p} &\le \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^d\left|\left(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}\left([\mathscr{I}_N^{(p)}U_N]^2\right)\right)(t)\right|_{2p}\\ &\le C\sum_{\ell=1}^d\int_0^t (t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U_N)(s)\right|_{2p}^2 ds\\ &\le CdN^2T^{\frac{6p-d}{8p}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

最后，根据引理 2.4的证明中的 (2.33, (2.32) (a)，我们有

$$\left|(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}u_0)(t)\right|_{2p} \le \left|\mathbb{K}_{t;\cdot}^{\mathrm{LKS}^d}\right|_1 |u_0|_{2p} \le C\,|u_0|_{2p} < \infty,\ 0<t\le T. \tag{3.8}$$

由 (3.4)、(3.6)、(3.7)、(3.8) 以及闵可夫斯基不等式，可得所需的统一 $\mathbf{L}^{2p}$上界。结论 $\mathscr{O}_N U_N \in \mathbf{C}\left([0,T];\mathbf{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$ 是由卷积引理 2.2–2.4 以及 $\mathscr{O}_N U_N$ 和 $\mathscr{I}_{N}^{(p)}U_N$ 的定义直接推出的。□

**引理 3.2**（-KS 方程（3.2）的一个不动点引理）。假设定理 3.1 中的条件均成立。令 $\mathbb{U}_\lambda$ 表示由以下函数组成的巴拿赫空间：$\mathbb{M}_{\mathscr{B}}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 函数 $U$满足 $u$（0）$=u_0$，其范数定义为

$$|U|_{\mathbb{U}_\lambda} = \left[\int_0^T e^{-\lambda t}|U(t)|_{2p}^{2p}dt\right]^{1/2p} < \infty,\ \lambda\in(0,\infty). \tag{3.9}$$

那么，对于每个 $N\in\mathbb{N}$，记 $\Gamma$ 为标准伽马函数，存在一个常数 $C\in$（0，$\infty$），它可能依赖于 $N$ 和 $T$ 以及一个 $\lambda_{0,\ d}>0$ 满足

$$\left[\lambda_{0,d}^{-1}+\Gamma\left(\frac{6p-d}{8p}\right)(\lambda_{0,d})^{\frac{d-6p}{8p}}\right] = 1\wedge\frac{1}{C},\ d<6p, \tag{3.10}$$

使得对于任意 $\lambda > \lambda_{0,\ d}$ 算子 $\mathscr{O}_N$ 在（3.4）中是 $\mathbb{U}_\lambda$上的压缩映射，因此方程（3.2）存在唯一解，$U_N\in\mathbb{U}_\lambda$。此外，$U_N\in\mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 以及 $U_N$满足一致的 $\mathbb{L}^{2p}$范数上界（见（3.3））。

证明。取 $\lambda\in(0,\infty)$。对每个 $N\in\mathbb{N}$，定义 $\mathscr{O}_N$ 在 $\mathbb{U}_\lambda$ 上由（3.4）给出。由上文引理 3.1 可知，算子 $\mathscr{O}_N$ 将巴拿赫空间$\mathbb{U}_\lambda$ 映射到其自身。取两个元素 $U,V\in\mathbb{U}_\lambda$ 并取 $N\in\mathbb{N}$。

按照引理 2.3 的证明过程，对于（2.27）的 (a) 部分，我们应用闵可夫斯基不等式和杨氏不等式，接着应用引理 2.1 (2.3) (a) 以及詹森不等式，得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathscr{O}_{1,N}U\right)(t)-\left(\mathscr{O}_{1,N}V\right)(t)\right|_{2p}^{2p}\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_0^t\left(\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}*\left[(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(r,\cdot)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(r,\cdot)\right]\right)(x)dr\right|^{2p}dx\\
&\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left|\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|*\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(r,\cdot)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(r,\cdot)\right|\right|_{2p}dr\right]^{2p}\\
&\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left|\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;\cdot}\right|_1\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(r,\cdot)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(r,\cdot)\right|_{2p}dr\right]^{2p}\\
&\leq CT^{2p-1}\int_0^t\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(r,\cdot)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(r,\cdot)\right|_{2p}^{2p}dr,
\end{aligned}
$$

在使用（3.1）后，可推出存在一个常数 $C\in(0,\infty)$，它依赖于 $N,T$ 和 $p$），使得

$$
\left|\left(\mathscr{O}_{1,N}U\right)(t)-\left(\mathscr{O}_{1,N}V\right)(t)\right|_{2p}^{2p}\leq C\int_0^t|U(s)-V(s)|_{2p}^{2p}\,ds. \tag{3.11}
$$

利用基本不等式 $|\sum_{i=1}^d|a_i||^{2p}\leq C\sum_{i=1}^d|a_i|^{2p}$，对所有 $p\geq 1/2$，引理 2.2，关于 $[0,t]$ 上由 $\mu_t^d(ds)/|\mu_t^d|$,给出的概率测度的詹森不等式，其中 $\mu_t^d(ds)=(t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}ds$ 以及 $|\mu_t^d|=t^{\frac{6p-d}{8p}}$，Hölder 不等式，并利用这一事实：$|\mathscr{I}_{(p)N}(v)|_{2p}\leq N$，可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathscr{O}_{2,N}U\right)(t)-\left(\mathscr{O}_{2,N}V\right)(t)\right|_{2p}^{2p}\\
&\leq C\sum_{\ell=1}^d\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;\cdot,y}}{\partial y_l}\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)^2(s,y)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)^2(s,y)\right|dyds\right|_{2p}^{2p}\\
&\leq C\left[\int_0^t(t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)^2(s,y)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)^2(s,y)\right|^p dy\right)^{1/p}ds\right]^{2p}\\
&\leq C|\mu_t^d|^{2p-1}\int_0^t\left|\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(s)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(s)\right|\left[|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(s)|+|(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(s)|\right]\right|_p^{2p}\mu_t^d(ds)\\
&\leq C_{N,T,p}\int_0^t(t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}\left|(\mathscr{I}_N^{(p)}U)(s)-(\mathscr{I}_N^{(p)}V)(s)\right|_{2p}^{2p}ds,
\end{aligned}
$$

这里用到了以下事实：$|\mu_t^d|\leq T^{\frac{6p-d}{8p}}$。结合式（$\mathscr{I}_{(p)N}$ 在（3.1）中的定义，可得

$$
|\mathscr{O}_{2,N}U(t)-\mathscr{O}_{2,N}V(t)|_{2p}^{2p}\leq C\int_0^t(t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}|U(s)-V(s)|_{2p}^{2p}\,ds. \tag{3.12}
$$

由估计式（3.11）和（3.12）可推得

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{O}_N U-\mathscr{O}_N V|_{\mathbb{U}_\lambda}^{2p} &= \int_0^T e^{-\lambda t}|\mathscr{O}_N U(t)-\mathscr{O}_N V(t)|_{2p}^{2p}dt \\
&\le C\int_0^T e^{-\lambda t}\left(\int_0^t \left[1+(t-s)^{-\frac{2p+d}{8p}}\right]|U(s)-V(s)|_{2p}^{2p}\,ds\right)dt \\
&\le C\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\rho}\left[1+\rho^{-\frac{2p+d}{8p}}\right]d\rho\right)|U-V|_{\mathbb{U}_\lambda}^{2p} \\
&= C\left[\lambda^{-1}+\Gamma\left(\tfrac{6p-d}{8p}\right)\lambda^{\frac{d-6p}{8p}}\right]|U-V|_{\mathbb{U}_\lambda}^{2p}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

取（3.13）末尾的常数 $C$，令 $\lambda_{0,\,d}$ 满足

$$
\left[\lambda_{0,d}^{-1}+\Gamma\left(\tfrac{6p-d}{8p}\right)(\lambda_{0,d})^{\frac{d-6p}{8p}}\right]=1\wedge\frac{1}{C},\ d<6p.
$$

那么，对于任意 $\lambda>\lambda_{0,\,d}$，算子 $\mathscr{O}_N$ 在 $\mathbb{U}_\lambda$上是压缩映射。因此，对于每个 $\lambda>\lambda_{0,\,d}$，该算子都存在唯一的不动点 $U_N=\mathscr{O}_N U_N$；即，方程 $U_N\in\mathbb{U}_\lambda$（3.2）存在唯一解。根据引理 3.1，$U_N\in\mathbb{C}\left([0,T];\ \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 且满足（$\mathbb{L}^{2p}$ 范数的一致上界（3.3）。 □

完成定理 *3.1* 的证明。根据引理 3.1 和引理3.2 可得所需的存在性、唯一性、连续性，以及解$\mathbb{L}^{2p}$ 范数的一致上界（3.3），其对应方程为（3.2），如定理 3.1所述。 □

3.2. **KSB 方程的全局唯一性和局部存在性**。 定理 3.1 推出了 $\mathbb{L}^{2p},\ p\ge 1$是 KSB 偏微分方程（1.2）在空间维度 $d<6p$下解的唯一性和局部时间存在性。这就是下一个结果的内容，它重述了定理 1.1 中的主要结果。

定理 *3.2*（*KS* 伯格斯偏微分方程（*1.2*）的唯一性和局部存在性）。设 $p\ge 1$ 和 $d<6p$。进一步假设 $u_0\in L^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$。令 $U_1,U_2\in C\left([0,T];L^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}\right)\right)$ 为（*1.2*）的解。那么，对所有 $t\in[0,T]$.，$U_1(t)=U_2(t)$。此外，存在一个解 $U\in C\left([0,\tau_\infty);L^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$，它满足 *KS* 偏微分方程（*1.2*），其中 $0<\tau_\infty\le T$。

我们的证明借鉴了随机分析中的停时论证（例如，[10, 9, 分别对应方程 (3.15) 和 (2.3)] 以及[16]），并将其调整用于此处的确定性情形。

证明。设 $U_1$ 和 $U_2$ 如上文定理 3.2 所述，则它们满足库拉莫托-西瓦辛斯基方程（1.8）。现在，定义这些时刻

$$
\sigma_N:=T\wedge\inf\left\{t\ge 0;|U_1(t)|_{2p}\wedge|U_2(t)|_{2p}\ge N\right\},\quad N\in\mathbb{N};
$$

那么函数

$$
U_i^{(N)}=\{U_i(t\wedge\sigma_N);0\le t\le T\},\ i=1,2,
$$

是逼近 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ -库拉莫托-西瓦辛斯基方程积分方程（3.2）的解，对于每个 $N \in \mathbb{N}$。因此，定理3.1意味着

$$U_1(t \wedge \sigma_N) = U_2(t \wedge \sigma_N), \ \forall (N,t) \in \mathbb{N} \times [0,T].$$

令 $N \nearrow \infty$ 取极限，并利用 $U$ 和 $V$ 的时间连续性以及 $\sigma_N$ 定义，可得

$$U_1(t) = \lim_{N \nearrow \infty} U_1(t \wedge \sigma_N) = \lim_{N \nearrow \infty} U_2(t \wedge \sigma_N) = U_2(t), \ t \in [0,T];$$

并且（1.2）的唯一性得以确立。

对于局部存在性结论，设 $U_N$ 是对每个 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ 所对应的 KS 近似解（3.2）$N \in \mathbb{N}$。定义时间 $\tau_N$ 为

$$\tau_N := T \wedge \inf\left\{t \geq 0; |U_N(t)|_{2p} \geq N\right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

显然，

$$U_M(t) = U_N(t) \text{ for all } M \geq N \text{ and } t \leq \tau_N. \tag{3.14}$$

此外，函数 $\{U_N(t); 0 \leq t \leq \tau_N\}$ 在时间区间 $[0, \tau_N]$上满足温和 L-KS 表述（1.8），因此也满足 KSB 偏微分方程。令 $\tau_\infty =$ 上确界$_{N \nearrow \infty} \tau_N \leq T$。然后，利用（3.14）中的一致性性质，并令 $U(t) := U_N(t)$，对于$t \leq \tau_N$和 $N \geq 1$，我们得到一个解 $U$，它满足时间区间 $[0, \tau_\infty)$ 内的 KS 偏微分方程（ 1.2 ） [13]。

**注 3.1**（新增：KSPDE 变体的局部存在性与唯一性）。 定理 3.1和定理3.2 的相同陈述和结论，对 $\mathscr{I}_N^{(p)}$ 版本的 KS 变体（1.9）仍然成立：

$$\begin{aligned} U_N(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} u_0(y) dy \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y}}{\partial y_\ell} [(\mathscr{I}_N^{(p)} U_N)(s,y)]^2 ds dy \end{aligned} \tag{3.15}$$

以及对（1.9）本身也分别成立。证明与上文相同，只是额外因子

$$\tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-s;x,y} (\mathscr{I}_N^{(p)} U_N)(s,y) ds dy$$

以及不再需要引理 2.3 这两点都消失了。

## Appendix A. Briefly on Brownian-time Brownian motion connection

正如我们在先前的工作中指出的 [2, 6, 7, 12], , L-KS 核与双布朗时间布朗运动（BTBM）核之间存在密切联系：

$$\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y} = 2 \int_0^\infty K^{\mathrm{BM}^d}_{s;x,y} K^{\mathrm{BM}}_{t;s} ds = 2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2s} \mathrm{e}^{-s^2/2t}}{(2\pi s)^{d/2} \sqrt{2\pi t}} ds, \tag{A.1}$$

它同时是

[13]正如我们在第 1.3 节中所指出的，我们可以将刚刚构造的 $U$ 视为这样一个函数：其路径是将 $U_N$ 的路径拼接到 $U_{N-1}$ 的路径上而得到的，对所有 $N \geq 2$ 都成立。

(i) 双布朗时间布朗运动 $\{X^x(|B_t|); t \geq 0\}$ 的密度，其中 $X^x$ 是一个从 $x \in \mathbb{R}^d$ 开始的 $d$ 维布朗运动，而 $B$ 是一个独立的一维
从 0 开始的布朗运动；以及

（ii）时间分数阶偏微分方程与四阶偏微分方程这一对方程的基本解：

$$\partial_t^{1/2} u = \tfrac{1}{\sqrt{8}}\Delta u \quad \text{and} \quad \partial_t u = \tfrac{1}{\sqrt{8\pi t}}\Delta u_0 + \tfrac{1}{8}\Delta^2 u, \text{ with } u(0,x) = \delta(x), \tag{A.2}$$

它们在适当的初始条件下等价 $u(0,\ x)$（更多详情请参见 [3, 13] 及其中的参考文献）。

BTBM 与 L-KS 核及其对应偏微分方程之间的密切联系，源于二者共同采用的布朗时间构造（参见 [2, 方程 (2.12) 和引理 3。1]，其中给出了这两个核的类似估计）。利用标准热核估计和 $\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t\ x}$ ;在 (A.1) 中的定义，我们可以轻易证明，对于 $\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t\ x}$ ;，引理 2.1 (2.2) 以及由此得到的 (2.3) 均成立，只需用 $\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t\ x}$ ; 替代 L-KS 核$\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}$ ;，并采用不同的常数[14]。

**引理 A.1** (双 BTBM 核的基本估计)。 *BTBM* 密度(A.1) 满足与 (2.2)中 *L-KS* 核相同的估计，只是常数不同。也就是说，

$$\begin{aligned}
&(a)\ \left|\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y}\right| = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-|x-y|^2/2s}\mathrm{e}^{-s^2/2t}}{(2\pi s)^{d/2}\sqrt{2\pi t}}ds\\
&(b)\ \left|\frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y}}{\partial y_\ell}\right| \leq C_2\int_0^\infty \frac{e^{-c_2|x-y|^2/s}}{s^{\frac{d+1}{2}}}\frac{e^{-\frac{s^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}ds\\
&(c)\ \left|\frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y}}{\partial t}\right| \leq C_3\int_0^\infty \frac{e^{-c_1|x-y|^2/s}}{s^{d/2}}\frac{e^{-\frac{c_3 s^2}{t}}}{t^{3/2}}ds\\
&(d)\ \left|\frac{\partial^2 \mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y}}{\partial t\partial y_\ell}\right| \leq C_4\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_2|y|^2}{s}}}{s^{(d+1)/2}}\frac{e^{-\frac{c_3 s^2}{t}}}{t^{3/2}}ds,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

对于 $(t,x,y)\ \in (0,\ T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 以及某些常数 $C_i, c_i > 0$, $i = 1, 2$、3 和 $C_4 = C_2C_3$，它们可能仅依赖于 $T$ 和 $d$。

证明。 （a）部分就是（A.1）。 （b）部分可由（A.1）以及以下关于 $d$维布朗运动密度的标准估计轻易得到

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_\ell}K^{\mathrm{BM}^d}_{s;x,y}\right| \leq C_2\frac{e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}}{s^{(d+1)/2}};\ s\in(0,\infty), x, y\in\mathbb{R}^d, \text{ and } \ell = 1,\ldots,d, \tag{A.4}$$

而 (c) 部分可直接由（A.1）以及一维布朗运动密度的以下标准时间导数估计推出

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}K^{\mathrm{BM}}_{t;s}\right| \leq C_3\frac{e^{-\frac{c_3 s^2}{t}}}{t^{3/2}};\ 0 < t < T \text{ and } y\in\mathbb{R}^d. \tag{A.5}$$

[14]当然，对于 BTBM 密度 $|\mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_t$ ; .　　$|_1 = 1$。

混合时空导数的估计现可立即得到。记 $\partial_\ell$ 和 $\partial_t$ 分别为偏导数 $\partial/\partial y_\ell$ 和 $\partial/\partial t$。由（A.1）、（A.4）和（A.5）可轻易得出

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 \mathbb{K}^{\mathrm{BTBM}^d}_{t;x,y}}{\partial t \partial y_\ell}\right| &\le 2\int_0^\infty \left|\partial_\ell K^{\mathrm{BM}^d}_{s;x,y}\right| \left|\partial_t K^{\mathrm{BM}}_{t;s}\right| ds \\ &\le C\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{c_2|x-y|^2}{s}}}{s^{(d+1)/2}} \frac{e^{-\frac{c_3 s^2}{t}}}{t^{3/2}} ds,\end{aligned} \tag{A.6}$$

完成证明。 □

## Appendix B. Briefly on weak stability and space-time continuity

我们首先将 KSB 偏微分方程的 L-KS 温和解公式（1.8）改写为关于以下算子的形式 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$、$\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$和 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$（1.10）：

$$U(t,x) = (\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} u_0)(t,x) + \tfrac{1}{2}(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d} U)(t,x) + \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{d} (\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d} U^2)(t,x) \tag{B.1}$$

### B.1. 弱$\mathbb{L}^{2p}$ 稳定性。

**定理 B.1**（全局弱$\mathbb{L}^{2p}$ 稳定性（KSB））。设 $T > 0$ 和$p \ge 1$为任意固定值，并令 $d < 6p$。若 $u_0^{(1)}$，$u_0^{(2)} \in \mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ 且若$U^{(k)} \in \mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{L}^{2p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$ 是对应于 $u_0^{(k)}$，$k = 1,2$ 的 *KSB* 偏微分方程（(1.2)）的唯一 *L-KS* 解，则

$$\left|U^{(1)}(t) - U^{(2)}(t)\right|_{2p} \le C_{T,d,p}\left|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\right|_{2p}, \tag{B.2}$$

其中常数$C_{T,\ d,\ p} \in (0,\ \infty)$取决于 $T$、$d$、$p$，以及

$$\max_{k=1,2}\sup_{0\le r\le T}\left|U^{(k)}(r)\right|_{2p}.$$

特别地，对于(B.2) 中的 *KSB* 偏微分方程，弱稳定性 $t \in [0,\tau]$成立，其中$\tau$ 与定理*1.1*中的一致。

**注 B.1**。提醒读者，我们定理1.1 中的结果断言了全局唯一性，因此在定理 $U^{(k)}$，$k = 1,\ 2$. B.1中，我们只假设全局解存在。对范数的依赖

$$\max_{k=1,2}\sup_{0\le r\le T}\left|U^{(k)}(r)\right|_{2p}$$

这就是我们称其稳定性为弱稳定性的原因。

证明。利用（B.1）以及引理 2.2–引理 2.4，再应用柯西–施瓦茨不等式

由不等式可直接得到

$$
\begin{aligned}
\left|U^{(1)}(t)-U^{(2)}(t)\right|_{2p} &\le \left|\left(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}\left[u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\right]\right)(t)\right|_{2p} \\
&+\tfrac{1}{2}\left|\left(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}\left[U^{(1)}-U^{(2)}\right]\right)(t)\right|_{2p} \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{d}\left|\left(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}\left[\left(U^{(1)}\right)^2-\left(U^{(2)}\right)^2\right]\right)(t)\right|_{2p} \\
&\le C\left\{\left|u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\right|_{2p}+\int_0^t\left|U^{(1)}(r)-U^{(2)}(r)\right|_{2p}dr\right\} \\
&+C\int_0^t(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}\left|\left[U^{(1)}(r)-U^{(2)}(r)\right]\left[U^{(1)}(r)+U^{(2)}(r)\right]\right|_p dr \\
&\le C\int_0^t\left|U^{(1)}(r)-U^{(2)}(r)\right|_{2p}\left[1+(t-r)^{-\frac{2p+d}{8p}}\max_{k=1,2}\sup_{0\le r\le T}\left|U^{(k)}(r)\right|_{2p}\right]dr \\
&+C\left|u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\right|_{2p}.
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

所需结论现在由 Gr¨onwall 不等式直接得出。 □

B.2. **关于时空连续性。** 备注1.2中的连续性很容易由（B.1）中各项的连续性推出；对于阶梯函数，这些项显然都是连续的。现在，我们陈述并证明关于算子 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$（对应于 Burgers 项）的一个稍强结果，而将较简单的情形 $\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$ 和 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$ 留给感兴趣的读者。

**引理B.1.** 任取 $T>0$ 和 $p>1$，并设 $d<3p$。算子$\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$从 $\mathbb{L}^\gamma\left([0,T];\mathbb{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 映入 $\mathbb{C}_b\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$，且满足以下估计

$$
\left|\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}(u)(t,x)\right|\le\int_0^t(t-r)^{-\frac{p+d}{4p}}|u(r,\cdot)|_p dr\le C\left(\int_0^t|u(r)|_p^\gamma dr\right)^{1/\gamma},
\tag{B.4}
$$

对于 $\gamma>4p/(3p-d)$。

证明。 在空间中应用两次 H¨older 不等式，然后在时间上应用；再结合估计式 (2.21)（另见 (2.15)、(2.18)、(2.19)）以及 $q=p/(p-1)$，得到[15]

$$
\begin{aligned}
\left|\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}(u)(t,x)\right| &\le \int_0^t\left|\partial_\ell\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;x,\cdot}\right|_q|u(r)|_p dr \\
&\le C\int_0^t(t-r)^{-\frac{p+d}{4p}}|u(r)|_p dr\le C\left(\int_0^t|u(r)|_p^\gamma dr\right)^{1/\gamma},
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

对 $\gamma>4p/(3p-d)$，由此得到 (B.4)。显然，$\{\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}(u)(t,x);(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\}$ 对于阶梯函数 $u$是连续的，证毕。 □

[15]这里我们注意到，在 (2.21) 中，$(p,q)$ 处使用的是 Young对，而非 H¨older 对，如上文 (B.5) 中那样。

## Appendix C. Frequent acronyms and notations key

### I. 缩略语

(1) BM：布朗运动。(2) BTBM：布朗时间布朗运动。(3) KS：Kuramoto-Sivashinsky。(4) KSB：Kuramoto-Sivashinsky-Burgers。

### II. 符号

本文中，数字集或欧几里得空间使用 \mathbb 字体表示（例如，$\mathbb{R}$、$\mathbb{R}^d$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{N}$ 等）；函数空间使用 \mathscr 字体表示（例如，$\mathscr{C}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$、$\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 等）。以下列出本文中使用的一些符号：

(1) $\mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t\ x}$ ; , $_y$ 是 L-KS 核；(2) 对于适当的函数 $z$，$u$，以及 $v$ (见 (1.10)) 算子 $\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d}$，$\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d}$，以及 $\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{K}_0^{\mathrm{LKS}^d} z)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t;x,y} z(y)dy,\\
(\mathscr{K}^{\mathrm{LKS}^d} u)(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;x,y} u(r,y)dydr,\\
(\mathscr{K}_\ell^{\mathrm{LKS}^d} v)(t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \mathbb{K}^{\mathrm{LKS}^d}_{t-r;x,y}}{\partial y_\ell} v(r,y)dydr,\ \ell = 1,\dots,d;
\end{aligned}
$$

(3) $*$ 表示标准卷积算子；(4) $\hat{\mathbb{K}}_t^{\mathrm{LKS}^d}$ ;$_\xi$ 是 L-KS 核的傅里叶变换；(5) $\hat{u}(\xi) = (\mathscr{F}u)(\xi)$ 是函数 $u$在 $\xi \in \mathbb{R}^d$处的傅里叶变换；(6) $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) := \left\{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ |f|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,dx < \infty\right\}$；(7) $|f|_p$和 $|f(\cdot)|_p$表示实函数 $f$的 $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$-范数；(8) $\mathscr{C}\left([0,T];\mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$ 表示连续函数 $\{u(t);\ 0 \le t \le T\}$ 的集合，这些函数取值于 $\mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$；(9) $\mathscr{C}_b\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$ 表示定义在 $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上的有界实值连续函数集合；(10) $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\left([0,T];\mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)\right)$ 表示博雷尔可测函数$u = \{u(t);\ 0 \le t \le T\}$ 的集合，这些函数取值于 $\mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$；(11) $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 是具有紧支集的连续函数集合；(12) $\mathscr{B}_N(0) \subset \mathscr{L}^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{L}^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 中以原点为中心、半径为 $N$的球。(13) $\partial_\ell$是关于第 $\ell$个空间变量 $\ell \in \{1,\dots,d\}$的偏导数；(14) $\partial_t$ 是关于时间变量 $t$的偏导数；(15) $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$和 $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$；以及

## References

[1] H. Allouba，多维 Kuramoto-Sivashinsky-Burgers 方程的整体适定性。 *In final preparation*。

[2] H. Allouba，L-Kuramoto-Sivashinsky随机偏微分方程的一至三维情形：L-KS 核、尖锐的H¨older正则性及Swift-Hohenberg定律等价性， *J. Differential Equations* **259** (2015)，第11期，6851–6884。MR3397341[3] H. Allouba，$\Delta^{2^k}$ 时间分数阶及具有记忆的随机积分方程在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$上的情形：我们能将白噪声推进多远？ *Illinois J. Math.* **57** ( 2013 4, 919 963 3285862 )，第–期。MR H. Allouba，布朗时间布朗运动[4] $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$随机积分方程在上的情形：超正则直接解与格点极限解及四阶随机偏微分方程之间的联系， *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **33** (2013)，第2期，413–463。MR2975119[5]H. Allouba，从布朗时间布朗片到一个四阶偏微分方程与一个Kuramoto-Sivashinsky变体相互作用的偏微分方程系统， *Stoch. Anal. Appl.* **29** (2011)，933–950。MR2847330[6] H. Allouba，一次关于四阶偏微分方程、线性化Kuramoto-Sivashinsky方程及 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *Stoch. Dyn.* **6** 2006 4, 521 534 2285514 上的布朗时间过程随机偏微[7] 分方程的布朗时间游程，( )，第–期。MR H. Allouba，通过虚布朗时间-布朗角过程得到的线性化Kuramoto-Sivashinsky偏微分方程， *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336**，第4期，(2003)，309–314。MR1976309[8] H. Allouba，布朗时间过程：偏微分方程联系。II. 及其相应的Feynman-Kac公式， *Trans. Amer. Math. Soc.* **354**，第11期，(2002)，4627–4637（电子版）。MR1926892[9] H. Allouba，通过测度变换证明Allen-Cahn随机偏微分方程的分布唯一性， *C. R. Acad.* ，第 *Sci. Paris Sér. I Math.* **330** 2000 371 376 5, 1751673 期( )，–。MR H. Allouba，从Girsanov定理看不同类[10] 型的随机偏微分方程。 *Stochastic Anal.* ，第( ) *Appl.* **16** 5, 1998 787 810 1643116 期，–。MR[11] H. Allouba和M. Terzi，多空间维度中的时间分数阶伯格斯方程。 *In final preparation* 。[12] H. Allouba和Y. Xiao，L-Kuramoto-Sivashinsky随机偏微分方程与时间分数阶随机偏积分微分方程：精确的连续性与梯度模、 1 2 *J. Differential Equations* **263** 2017 1552 1610 363222 -/-导数临界性及定理，，，( )，–。MR[13] H. Allouba和W. Zheng，布朗时间过程：偏微分方程联系及半阶导数生成元， *Ann. Probab.* **29**，第 4, 2001 1780 1795 1880242 期( )，–。[14] MR S. Benachour、I. Kukavica、W. Rusin和M. Ziane，二维Kuramoto-Sivashinsky方程的各向异性估计。 *J. Dynam. Differential Equations* **26** (2014)，第3期，461–476。MR3274428[15] A. Cheskidov和C. Foias，关于非齐次定常Kuramoto-Sivashinsky方程。 *Phys. D* **154** ( 2001 1 2, 1 14 1840801 )，第-期，–。[16] MR G. Da Prato和J. Zabczyk，《无限维随机演化方程》，剑桥大学出版社， 1992 1207136 。[17] MR Z. Grujic和I. Kukavica，关于Kuramoto-Sivashinsky方程时间解析性的注记， *Nonlinear Anal.* **52** ( 2003 1, 69 78 1938651 )，第–期。MR I. Kukavica，关于负时间下[18] Kuramoto-Sivashinsky方程解的行为， *J. Math. Anal. Appl.* **166**，第 2, 1992 601 606 1160948 2142437 期( )–。MR MR Y. [19] Kuramoto，反应系统中的扩散诱导混沌，, 64 1978 346 367 ( )，–。[20] H. Royden和P. Fitzpatrick，《实分析》（经典版）。第四版。Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series，2017年。x+505 页。ISBN: 0134689496[21] G. I. Sivashinsky，层流火焰中流体动力学不稳定性的非线性分析。I. 基本方程的推导， *Acta Astronaut.* **4** ( 1977 11 12, 1177 1206 0502829 )，第-期，–。MR G. I. [22] Sivashinsky，关于化学计量比条件下的火焰传播， *SIAM J. Appl.* ( )，第–期。MR *Math.* **39** 1980 1, 67 82 0585829 [23] R. Temam，《力学与物理学中的无限维动力系统》。第二版。应用数学科学丛书，第68卷。Springer-Verlag，纽约，1997年。xxii+648 页。ISBN: 0-387-94866-X MR1441312

Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent, Ohio 44242
*Email address*: allouba@math.kent.edu