arXiv:2305.00746v1 [math.AP] 1 May 2023

含逆平方势的能量临界非齐次广义 Hartree 方程

Seongyeon Kim 和 Tarek Saanouni

Abstract. 本文研究含逆平方势的能量临界非齐次 Hartree 方程的柯西问题

$$i\partial_t u - \mathcal{K}_\lambda u = \pm|x|^{-\tau}|u|^{p-2}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)u, \quad \mathcal{K}_\lambda = -\Delta + \frac{\lambda}{|x|^2}$$

在能量空间 $H^1_\lambda := \{f \in L^2, \quad \sqrt{\mathcal{K}_\lambda} f \in L^2\}$ 中。本文建立适定性理论，并研究 H^1_λ 中解的爆破。此外，我们在基态阈值条件下，给出了能量有界与解非整体存在之间的二分性。为此，我们使用 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 加权插值不等式以及一些考虑到 $\mathcal{K}_\lambda$ 的等价范数，从而能够控制涉及奇点 $|x|^{-\tau}$ 的非线性项以及逆平方势。本文的创新之处在于研究迄今仍未解决的能量临界情形，而所面临的挑战是处理三个技术难题：非局部源项、非齐次奇异项 $|\cdot|^{-\tau}$，以及逆平方势的存在。

Contents

1. 引言 21.1. 能量临界情形下的适定性 31.2. 能量解的爆破 42. 预备知识 63. 能量空间中的适定性 73.1. 非线性估计 83.2. 能量空间中的局部适定性 133.3. 小初值下能量空间中的整体适定性 143.4. 小初值下能量空间中的散射 154. 基态与加加利亚多–尼伦伯格估计 154.1. 加加利亚多–尼伦伯格估计 154.2. 基态的存在性 165. 能量解的爆破 175.1. 爆破判据 175.2. 能量解的有界性 205.3. 能量有界/非整体解 206. 附录：Morawetz估计 227. 声明 23

Date：2023年5月2日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35Q55。*Key words and phrases.* 非齐次广义方程，能量临界，逆平方势，整体存在/非整体存在。

参考文献 23

1. Introduction

本文研究带逆平方势的非齐次广义 Hartree 方程的柯西问题

$$\begin{cases} i\partial_t u - \mathcal{K}_\lambda u = \epsilon|x|^{-\tau}|u|^{p-2}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)u, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $p > 2$、$\epsilon = \pm 1$ 和 $\mathcal{K}_\lambda := -\Delta + \frac{\lambda}{|x|^2}$ 满足 $\lambda > -\frac{(n-2)^2}{4}$。这里，$\epsilon = 1$ 的情形为散焦型，而 $\epsilon = -1$ 的情形为聚焦型。Riesz 势在 $\mathbb{R}^n$ 上定义为

$$I_\alpha := \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha}|\cdot|^{\alpha-n}, \quad 0 < \alpha < n.$$

关于 λ 的假设来源于尖锐 Hardy 不等式 [3],

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^2}{|x|^2}dx \le \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^2 dx, \tag{1.2}$$

该不等式保证 $\mathcal{K}_\lambda$ 是 $-\Delta + \lambda/|x|^{-2}$ 的正自伴延拓。已知当 $-\frac{(n-2)^2}{4} < \lambda < 1 - {}_{(n-2)_4}{}^{2}$，时，该延拓并不唯一（见 [14, 31]）。~~在这~~种情况下，选取 Friedrichs 延拓（见 [14, 25]）。

问题（1.1）出现在各种物理情境中。在线性情形（$\epsilon = 0$）下，所研究的薛¨定谔方程描述量子力学 [14, 2]。在无势的非线性情形下，即 $\lambda = 0 \neq \epsilon$，方程（1.1）在非相对论玻色原子和分子的大型系统的平均场极限中具有重要意义；在这一情形下，玻色子的数量极大，而它们之间的相互作用很弱[9, 29, 12, 24]。与所研究的问题（1.1）相关的齐次问题，具体而言，当 $\lambda = \tau = 0$时，具有若干物理起源，例如量子力学[12, 19] 和哈特里–福克理论 [22]。特殊情形 $p = 2$ 和 $\lambda = \tau = 0$ 称为标准哈特里方程。它是描述通过二体势相互作用的非相对论量子多玻色子系统的场方程的经典极限[10]。

现在，让我们回到广义 Hartree 方程（1.1）的数学性质。回顾临界 Sobolev 指数。若 $u(x,t)$ 是方程（1.1）的一个解，则以下函数族也是解:

$$u_\delta(x,t) := \delta^{\frac{2-2\tau+\alpha}{2(p-1)}}u(\delta x, \delta^2 t),$$

其重标度后的初始数据为 $u_{\delta,0} := u_\delta(x,0)$，其中 $\delta > 0$ 任意。于是可得

$$\|u_{\delta,0}\|_{\dot{H}^1} = \delta^{1-\frac{n}{2}+\frac{2-2\tau+\alpha}{2(p-1)}}\|u_0\|_{\dot{H}^1}.$$

若 $p = 1 + \frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$，则缩放保持 $\dot{H}^1$ 的 u_0范数；此时，式（1.1）称为能量临界非齐次广义 Hartree 方程。此外，式（1.1）的解满足质量守恒和能量守恒，其中质量守恒为

$$\mathcal{M}[u(t)] := \int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^2 dx = \mathcal{M}[u_0], \tag{1.3}$$

能量守恒为

$$\mathcal{E}[u(t)] := \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + \lambda |x|^{-2} |u|^2 \right) dx + \frac{\epsilon}{p} \mathcal{P}[u(t)] = \mathcal{E}[u_0], \tag{1.4}$$

其中势能为

$$\mathcal{P}[u(t)] := \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau} \left(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau} |u|^p \right) |u|^p dx.$$

据我们所知，本文首次研究带有逆平方势的能量临界非齐次 Hartree 方程，具体而言是（1.1）式，其中$\lambda \neq 0$。本文的主要贡献是在能量临界情形下建立局部适定性理论，并研究非齐次广义 Hartree 方程（1.1）解在能量空间中的爆破。具体而言，局部理论基于标准的压缩映射论证，并利用 Strichartz 估计。更有意思的是，我们利用了一些与算子$\mathcal{K}_\lambda$相关的等价范数，即$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u\|_r \simeq \|u\|_{\dot{W}^{1,\, r}}$，从而能够在不直接处理该算子的情况下应用压缩映射原理。在排斥情形（$\epsilon = -1$）下，我们证明解会在有限时间内爆破，且无需假设径向对称或 $|x| u_0 \in L^2$等经典条件。爆破解以非守恒的势能来表述，这或许能给出一种符合[6], 思想的判据，并特别蕴含符合[15]思想的基态阈值下经典现象。

本文通过方程（1.1）处理三个技术问题：非局部源项、非齐次奇异项 $|\cdot|^{-\tau}$以及逆平方势的存在。实际上，为了在勒贝格空间中处理奇异项 $|\cdot|^{-\tau}$，文献中采用的方法是将积分分解为单位球内的部分及其补集上的部分（例如，见 [1]）。然而，在能量临界情形下，这已不足以得出结论。对于 $\lambda = 0$，第一作者利用了具有有用性质 $|\cdot|^{-\tau} \in L^{\frac{n}{\tau}, \infty}$ 的某些洛伦兹空间。为克服这些困难，我们采用了一些不同于现有方法的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 加权插值不等式。

在陈述我们的结果之前，我们先介绍一些以算子 $\mathcal{K}_\lambda$ 定义的索博列夫空间，它们是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 关于以下范数的完备化

$$\|u\|_{\dot{W}^{1,r}_\lambda} := \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u\|_{L^r} \quad \text{and} \quad \|u\|_{W^{1,r}_\lambda} := \|\langle \sqrt{\mathcal{K}_\lambda} \rangle u\|_{L^r},$$

其中 $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$ 以及 $L^r := L^r(\mathbb{R}^n)$。我们还将以下特殊的希尔伯特情形记为$\dot{W}^{1,}{}_\lambda{}^2 = \dot{H}^1_\lambda$以及 $W^{1,}{}_\lambda{}^2 = H^1_\lambda$。注意，根据算子 $\mathcal{K}_\lambda$的定义及 Hardy 估计（1.2），可得

$$\|u\|_{\dot{H}^1_\lambda} := \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u\| = \left(\|\nabla u\|^2 + \lambda \||x|^{-1} u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \|u\|_{\dot{H}^1},$$

为简便起见，我们记 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$。

1.1. 能量临界情形下的适定性。 关于非齐次 Hartree 方程的适定性理论（$\lambda = 0$见（1.1））在近几年得到了广泛研究，但目前仍未完全明了。（例如，参见 [1, 26, 18, 17] 及其中的参考文献）。关于相关的散射理论结果，球对称初值的情形另见 [27]， [32] 一般情形见。

我们的第一个结果如下：能量临界情形下的适定性。

定理 1.1. 设 $n \geq 3$、 $\lambda > -\frac{(n-2)^2}{4}$ 和 $2\kappa = n-2-\sqrt{(n-2)^2+4\lambda}$。假设 that

$$0 < \alpha < n, \quad 2\kappa < n-2-\frac{2(n-2)}{3n-2+2\sqrt{9n^2+8n-16}} \tag{1.5}$$

and

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{n+2+\sqrt{9n^2+8n-16}}{2} < \tau < \frac{\alpha}{2}-\max\{\frac{n-4}{2}, \frac{n-4}{n}, \frac{\kappa}{n-2-2\kappa}-\frac{n}{4}\}. \tag{1.6}$$

那么，对于 $u_0 \in H^1_\lambda(\mathbb{R}^n)$，存在 $T > 0$ 和唯一解

$$u \in C([0,T]; H^1_\lambda) \cap L^q([0,T]; W^{1,r}_\lambda)$$

至 (1.1) 且 $p = 1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$ 对于任意可容许对 (q,r) 见定义 *2.5*。此外，解关于初始数据连续依赖。

我们还 给出如下的小数据整体适定性和散射结果：

定理 1.2。 在与定理 *1.1* 相同的条件下，并且满足关于 $\|u_0\|_{H^1_\lambda}$的小性假设，存在唯一的整体解

$$u \in C([0,\infty); H^1_\lambda) \cap L^q([0,\infty); W^{1,r}_\lambda)$$

对于 (1.1)，且 $p = 1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$ 对于任意可容许对 (q,r)均成立。此外，该解在 H^1_λ中散射，即存在 $\phi \in H^1_\lambda$ 使得

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - e^{-it\mathcal{K}_\lambda}\phi\|_{H^1_\lambda} = 0.$$

1.2. 能量解的爆破。 现在我们转而关注聚焦情形下，基态阈值以下方程 (1.1) 的解的爆破。方程 (1.1) 的一个特殊整体解满足 $\epsilon = -1$，它是方程 (1.1) 的平稳解，即

$$-\Delta\varphi + \frac{\lambda}{|x|^2}\varphi = |x|^{-\tau}|\varphi|^{p-2}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|\varphi|^p)\varphi, \quad 0 \neq \varphi \in H^1_\lambda. \tag{1.7}$$

这种称为基态的解在聚焦情形中起着至关重要的作用。以下结果给出了方程 (1.7) 的基态存在性。

定理 1.3。设 $n \geq 3$、 $\lambda > -\frac{(n-2)^2}{4}$ 和 $p = 1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$。假设

$$0 < \alpha < n \quad and \quad 0 < \tau < 1+\frac{\alpha}{n}. \tag{1.8}$$

则以下不等式成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p) \leq C_{N,\tau,\alpha,\lambda}\left\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\right\|^{2p}. \tag{1.9}$$

此外，存在 $\varphi \in H^1_\lambda$ 一个方程 (1.7)的基态解，它是该问题的最小化解

$$\frac{1}{C_{N,\tau,\alpha,\lambda}} = \inf\left\{\frac{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p}}{\mathcal{P}[u]}, \quad 0 \neq u \in H^1_\lambda\right\}. \tag{1.10}$$

注 1.4。 1. 定理 *1.3* 不要求假设 $p \geq 2$;

2. $C_{N,\ \tau,\ \alpha,\ \lambda}$ 表示不等式 (1.9)中的最佳常数；3.与齐次情形 $\tau = 0$相比，极小值 (1.10) 对于 $\lambda > 0$永远无法达到，见 [16]。

此处及下文中，我们用 φ 表示（1.7）的一个基态解以及尺度不变数量

$$\mathcal{ME}[u_0] := \frac{\mathcal{E}[u_0]}{\mathcal{E}[\varphi]}, \quad \mathcal{MG}[u_0] := \frac{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u_0\|}{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|}, \quad \mathcal{MP}[u_0] := \frac{\mathcal{P}[u_0]}{\mathcal{P}[\varphi]}.$$

下一个定理给出了能量临界聚焦区域在基态阈值以下的爆破解。

定理1.5。 在 *1.1* 和 $\epsilon = -1$的假设下，令 φ 为 (1.7) 的基态解，且 $u \in C_{T^*}(H^1_\lambda)$ 为聚焦问题(1.1)的极大解。如果

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \mathcal{I}[u(t)] < 0, \tag{1.11}$$

那么， u 会在有限时间或无限时间内发生爆破。这里， $\mathcal{I}[u] : = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u\|^2 - \mathcal{P}[u]$。

注记 1 .6u 爆破1. -在无限时间内增长意味着它是全局的，并且存在 $t_n \to \infty$ 使得 $\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda} u\ (t_n)\ \| \to \infty$；2. 阈值用势能表示 $\mathcal{P}[u]$，势能不是守恒量；3. 这里的定理不要求经典假设，例如球对称数据或 $|x|u_0 \in L^2$；4. 方差恒等式的一个直接推论是，方程（1.1）的能量解将在有限时间内爆破，如果 $|x|u_0 \in L^2$ 且（1.11）得到满足；

下一个结果是定理1.5的推论。

推论 1.7。 在定理*1.1* 的假设以及 $\epsilon = -1$下，设 φ 是方程（1.7）的基态，并且 $u_0 \in H^1_\lambda$ 满足

$$\mathcal{ME}[u_0] < 1. \tag{1.12}$$

如果我们假设

$$\mathcal{MG}[u_0] > 1, \tag{1.13}$$

那么方程（1.1）的能量解将在有限或无限时间内爆破

注 1.8。 1. 上述结果的假设比(1.11)更容易检验，因为它们是用守恒量表述的；2. 上述基态阈值在非线性薛定谔方程背景下影响深远，这要归功于开创性的论文 [15, 13]；

最后，我们以一些额外结果结束本小节，这些结果给出了能量解的有界性。

命题 1.9。 在定理 *1.1* 及 $\epsilon = -1$的假设下，设 φ 是方程 (1.7) 的一个基态解，且 $u \in C_{T^*}(H^1_\lambda)$ 是聚焦问题(1.1)的一个极大解。若

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \mathcal{MP}[u(t)] < 1, \tag{1.14}$$

则 u 在 H^1_λ中有界。

接下来是命题 1.9 的一个推论。

推论 1.10。 在定理 *1.1* 和 $\epsilon=-1$的假设下。设 φ 是 (1.7) 的一个基态，且 $u_0\in H^1_\lambda$ 满足 (1.12)。若

$$\mathcal{MG}[u_0]<1, \tag{1.15}$$

则 (1.1) 的能量解有界。

注 1.11. 1. 在命题 (1.14) 的假设下的整体存在性和能量散射*1.9* 或 (1.12)-(1.15) 推论 *1.10* 中的问题正在一篇在写论文中探讨。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍我们需要的一些有用性质。第 3 节建立局部理论以及小初值下的整体理论。第 4 节证明基态的存在性。第 5 节证明基态阈值下解的爆破以及能量解的有界性。在附录中，我们证明一个 Morawetz 型估计。

全文中，字母 C 表示一个正数，该数在不同位置可能不同。我们还用 $A\lesssim B$ 表示带有未指定常数的 $A\leq CB\,C>0$。

2. Preliminaries

本节将介绍本文中会用到的一些有用性质，并回顾 Strichartz 估计。首先介绍适用于处理方程（ [20] 1.1）中非局部源项的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式：

引理 2.1. 设 $n\geq 1$ 且 $0<\alpha<n$。
1. 设 $s\geq 1$ 且 $r>1$ 满足$\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{\alpha}{n}$。则，
$\|I_\alpha * g\|_{L^s}\leq C_{n,s,\alpha}\|g\|_{L^r}$.2. 设 $1<s,\ r,\ t<\infty$满足
$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{t}+\frac{\alpha}{n}$。则，$\|f(I_\alpha * g)\|_{L^t}\leq C_{n,t,\alpha}\|f\|_{L^r}\|g\|_{L^s}$.

以下引理是 Sobolev 嵌入的加权版本，即 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 加权插值不等式 [30, 21] 的一个特例：

引理 2.2. 设 $n\geq 1$ 且

$$1<p\leq q<\infty,\quad -\frac{n}{q}<b\leq a<\frac{n}{p'}\quad and\quad a-b-1=n\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\Big).$$

则，

$$\||x|^b f\|_{L^q}\leq C\||x|^a\nabla f\|_{L^p}.$$

现在，我们描述与算子 $\mathcal{K}_\lambda$. 相关的若干性质。由于 $\|f\|_{H^1}\simeq\|f\|_{H^1_\lambda}$，有如下紧 Sobolev 嵌入（[5, 引理 3.1]）：

引理 2.3. 设 $n\geq 3$、 $0<\tau<2$ 和 $2<r<{}^{2\ (n-\tau)\ n-2}$。则，下面的嵌入是紧的：

$$H^1_\lambda\hookrightarrow\hookrightarrow L^r(|x|^{-\tau}\,dx).$$

我们还有如下 Sobolev 等价范数，参见 [16] 和 [5, 注 2.2]:

引理 2.4. 设 $n\geq 3$, $\lambda>-\frac{(n-2)^2}{4}$, $1<r<\infty$ 和 $2\kappa=n-2-\sqrt{(n-2)^2+4\lambda}$。那么，

1.若$\frac{1+\kappa}{n} < \frac{1}{r} < \min\{1, 1-\frac{\kappa}{n}\}$，则，$\|f\|_{\dot{W}^{1,r}} \lesssim \|f\|_{\dot{W}^{1,\lambda}}{}^{r}$ 2.若 $\max\{\frac{1}{n}, \frac{\kappa}{n}\} < \frac{1}{r} < \min\{1, 1-\frac{\kappa}{N}\}$，则，$\|f\|_{\dot{W}^{1,}{}_{\lambda}{}^{r}} \lesssim \|f\|_{\dot{W}^{1,r}}$

最后，我们回顾 Strichartz 估计。正如我们将看到的，这些估计是证明定理 1.1 的关键。

D定义 2.5. 设 $n \geq 3$。若 (q, r) 满足以下条件，则称其为一个可容许对：

$$2 \leq q \leq \infty, \quad 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2} \quad and \quad \frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2}.$$

命题 2.6. [4, 34, 8] 设 $n \geq 3$, $\lambda > -\frac{(n-2)^2}{4}$。则存在 $C > 0$，使得 1.$\|e^{-it\mathcal{K}_\lambda} f\|_{L_t^q(L_x^r)} \leq C\|f\|$,2. $\| \int_0^{t_1} e^{-i(t-t_1)\mathcal{K}_\lambda} F(\cdot, t_1) dt_1 \|_{L_t^q(L_x^r)} \leq C\|F\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$.

最后，给出一个在附录中证明的经典 Morawetz估计。设 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为一个光滑函数，并定义方差势

$$V_\phi(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)|u(x,t)|^2 \, dx,$$

以及莫拉韦茨作用量

$$M_\phi(t) := 2\Im \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(\xi_j u_j) \, dx = 2\Im \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(\nabla\phi \cdot \nabla u) \, dx.$$

命题 2.7。 设 ϕ: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个径向实值乘子，$\phi = \phi(|x|)$。那么，对于广义 Hartree 方程 （1.1）在聚焦号情形下，给定初始数据 $u_0 \in H_\lambda^1$的任意解 $u \in C([0,T]; H_\lambda^1)$，以下维里型恒等式成立：

$$V_\phi'(t) = 2\Im \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}\nabla\phi \cdot \nabla u dx$$

and

$$\begin{aligned} V_\phi''(t) = M_\phi'(t) = 4\sum_{k,l=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_l\partial_k\phi \Re(\partial_k u \partial_l \bar{u}) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2\phi|u|^2 dx + 4\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi \cdot x \frac{|u|^2}{|x|^4} dx \\ - \frac{2(p-2)}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\phi|x|^{-\tau}|u|^p (I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p) dx \\ - \frac{4\tau}{p} \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla\phi|x|^{-\tau-2}|u|^p (I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p) dx \\ - \frac{4(N-\alpha)}{p} \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|u|^p \partial_k\phi \left(\frac{x_k}{|\cdot|^2} I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p\right) dx. \end{aligned}$$

3. Well-posedness in the energy space

在本节中，我们将在能量空间 H_λ^1中建立局部理论，即定理 1.1。此外，我们将证明关于小初值整体理论的定理 1.2 。首先，我们将源项记为

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}[u] := |x|^{-\tau}|u|^{p-2}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)u.$$

3.1. 非线性估计。我们首先为 $\mathcal{N}[u]$ 建立一些非线性估计。这些非线性估计将在应用压缩映射原理证明适定性结果的过程中发挥重要作用。在陈述这些非线性估计之前，我们先引入一些记号。我们定义

$$\mathcal{A}=\{(q,r):(q,r)\text{ is admissible}\},$$

并定义范数

$$\|u\|_{\Lambda(I)}=\sup_{(q,r)\in\mathcal{A}}\|u\|_{L_t^q(I;L_x^r)}$$

及其对偶加权范数

$$\|u\|_{\Lambda'(I)}=\sup_{(\tilde{q},\tilde{r})\in\mathcal{A}}\|u\|_{L_t^{\tilde{q}'}(I;L_x^{\tilde{r}'})}$$

对于任意区间 $I\subset\mathbb{R}$.

引理 3.1. 设 $n\geq 3$、 $\lambda>-\frac{(n-2)^2}{4}$ 和 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$。假设

$$0<\alpha<n,\quad 2\kappa<\frac{5n-4-\sqrt{9n^2+8n-16}}{2} \tag{3.16}$$

and

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{n+2+\sqrt{9n^2+8n-16}}{2}<\tau<\frac{\alpha}{2}-\max\{\frac{n-4}{2},\frac{n-4}{n},\frac{\kappa}{n-2-2\kappa}-\frac{n}{4}\}. \tag{3.17}$$

那么，存在一个可容许对 (q,r)，使得

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\,\mathcal{N}[u]\|_{\Lambda'(0,T)}\leq C\|u\|^{2p-1}_{L_t^q(I;\dot{W}_\lambda^{1,r})} \tag{3.18}$$

and

$$\|\mathcal{N}[u]-\mathcal{N}[v]\|_{\Lambda'(0,T)}\leq C(\|u\|^{2p-2}_{L_t^q(I;\dot{W}_\lambda^{1,r})}+\|u\|^{2p-2}_{L_t^q(I;\dot{W}_\lambda^{1,r})})\|u-v\|_{L_t^q(I;L_x^r)}. \tag{3.19}$$

证明。只需证明存在满足以下条件的 (q,r):

$$\|\nabla\mathcal{N}[u]\|_{L_t^2(I;L_x^{\frac{2n}{n+2}})}\leq C\|\nabla u\|^{2p-1}_{L_t^q(I;L_x^r)} \tag{3.20}$$

and

$$\|\mathcal{N}[u]-\mathcal{N}[v]\|_{L_t^2(I;L_x^{\frac{2n}{n+2}})}\leq C\|\nabla u\|^{2p-2}_{L_t^q(I;L_x^r)}\|u-v\|_{L_t^q(I;L_x^r)} \tag{3.21}$$

对于 λ、α、κ、τ、p，如引理所述。事实上，通过将等价范数应用于 Sobolev 范数（见引理 2.4），当3.18）和（3.19）时，我们得到所需的估计

$$\max\{\frac{1}{n},\frac{\kappa}{n}\}<\frac{n+2}{2n}<\min\{1,\frac{n-\kappa}{n}\},\quad \frac{1+\kappa}{n}<\frac{1}{r}<\min\{1,\frac{n-\kappa}{n}\}, \tag{3.22}$$

这里很容易看出，（3.22）中的第一个条件始终成立。

现在我们开始证明（3.20）。令

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2(2p-1)},\quad \frac{n-2}{2n}\leq\frac{1}{r}\leq\frac{1}{2},\quad \frac{2}{q}+\frac{n}{r}=\frac{n}{2},\quad 0<\alpha<n. \tag{3.23}$$

首先我们看到

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mathcal{N}[u]\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\
&\lesssim \big\||x|^{-\tau-1}|u|^{p-1}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}} + \big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau-1}|u|^p)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\
&+ \||x|^{-\tau}|u|^{p-2}|\nabla u|(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}} + \||x|^{-\tau}|u|^{p-1}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^{p-1}\nabla u)\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\
&:= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

第一项 A_1 利用引理2.1 和2.2同样有界,

$$\begin{aligned}
\big\||x|^{-\tau-1}|u|^{p-1}|I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p|\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}} &\lesssim \||x|^{-\tau-1}|u|^{p-1}\|_{L_x^{a_1}}\||x|^{-\tau}|u|^p\|_{L_x^{b_1}}\\
&= \||x|^{-\frac{\tau+1}{p-1}}u\|_{L_x^{(p-1)a_1}}^{p-1}\||x|^{-\frac{\tau}{p}}u\|_{L_x^{pb_1}}^{p}\\
&\lesssim \|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-1},
\end{aligned}$$

if

$$0<\frac{1}{a_1},\frac{1}{b_1}<1,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{n+2}{2n}+\frac{\alpha}{n}, \tag{3.24}$$

$$0<\frac{1}{(p-1)a_1}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau+1}{p-1}<\frac{n}{(p-1)a_1},\quad \frac{\tau+1}{p-1}-1=\frac{n}{(p-1)a_1}-\frac{n}{r} \tag{3.25}$$

$$0<\frac{1}{pb_1}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p}<\frac{n}{pb_1},\quad \frac{\tau}{p}-1=\frac{n}{pb_1}-\frac{n}{r}. \tag{3.26}$$

同样,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau-1}|u|^p)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\
&\le \||x|^{-\tau}|u|^{p-1}\|_{L_x^{a_2}}\||x|^{-\tau-1}|u|^p\|_{L_x^{b_2}}\\
&\lesssim \|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-1}
\end{aligned}$$

if

$$0<\frac{1}{a_2},\frac{1}{b_2}<1,\quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{n+2}{2n}+\frac{\alpha}{n}, \tag{3.27}$$

$$0<\frac{1}{(p-1)a_2}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p-1}<\frac{n}{(p-1)a_2},\quad \frac{\tau}{p-1}-1=\frac{n}{(p-1)a_2}-\frac{n}{r}, \tag{3.28}$$

$$0<\frac{1}{pb_2}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau+1}{p}<\frac{n}{pb_2},\quad \frac{\tau+1}{p}-1=\frac{n}{pb_2}-\frac{n}{r}. \tag{3.29}$$

第三项 A_3 依次利用引理 2.1、H¨older 不等式和引理 2.2可得其有界性:

$$\begin{aligned}
\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-2}|\nabla u||I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p|\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}} &\lesssim \||x|^{-\tau}|u|^{p-2}|\nabla u|\|_{L_x^{a_1}}\||x|^{-\tau}|u|^p\|_{L_x^{b_1}}\\
&\le \||x|^{-\tau}|u|^{p-2}\|_{L_x^{a_3}}\|\nabla u\|_{L_x^r}\||x|^{-\tau}|u|^p\|_{L_x^{b_1}}\\
&= \||x|^{-\frac{\tau}{p-2}}u\|_{L_x^{(p-2)a_3}}^{p-2}\|\nabla u\|_{L_x^r}\||x|^{-\frac{\tau}{p}}u\|_{L_x^{pb_1}}^{p}\\
&\lesssim \|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-1}
\end{aligned}$$

if

$$0<\frac{1}{a_1},\frac{1}{b_1}<1,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{n+2}{2n}+\frac{\alpha}{n},\quad \frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{r}, \tag{3.30}$$

$$0<\frac{1}{(p-2)a_3}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p-2}<\frac{n}{(p-2)a_3},\quad \frac{\tau}{p-2}-1=\frac{n}{(p-2)a_3}-\frac{n}{r},\tag{3.31}$$

$$0<\frac{1}{pb_1}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p}<\frac{n}{pb_1},\quad \frac{\tau}{p}-1=\frac{n}{pb_1}-\frac{n}{r}.\tag{3.32}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}A_4&=\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^{p-1}\nabla u)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\&\lesssim\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}\big\|_{L_x^{a_2}}\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}\nabla u\big\|_{L_x^{b_2}}\\&\le\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-1}}|u|\big\|_{L_x^{(p-1)a_2}}^{p-1}\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-1}}u\big\|_{L_x^{(p-1)b_4}}^{p-1}\|\nabla u\|_{L_x^r}\\&\lesssim\|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-1}\end{aligned}$$

if

$$0<\frac{1}{a_2},\frac{1}{b_2}<1,\quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{n+2}{2n}+\frac{\alpha}{n},\quad \frac{1}{b_2}=\frac{1}{b_4}+\frac{1}{r}\tag{3.33}$$

$$0<\frac{1}{(p-1)a_2}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p-1}\le\frac{n}{(p-1)a_2},\quad \frac{\tau}{p-1}-1=\frac{n}{(p-1)a_2}-\frac{n}{r},\tag{3.34}$$

$$0<\frac{1}{(p-1)b_4}\le\frac{1}{r}\le 1,\quad 0\le\frac{\tau}{p-1}<\frac{n}{(p-1)b_4},\quad \frac{\tau}{p-1}-1=\frac{n}{(p-1)b_4}-\frac{n}{r}.\tag{3.35}$$

另一方面，为了证明（3.21），我们首先使用以下简单的不等式

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{N}[u]-\mathcal{N}[v]\big|\lesssim&\Big||x|^{-\tau}(|u|^{p-2}+|v|^{p-2})|u-v|(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)\Big|\\&+\Big||x|^{-\tau}|v|^{p-1}\big(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|\big)\Big|.\end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}[u]-\mathcal{N}[v]\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\le&\big\||x|^{-\tau}(|u|^{p-2}+|v|^{p-2})|u-v|(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\&+\big\||x|^{-\tau}|v|^{p-1}\big(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|\big)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\:=&\,B_1+B_2.\end{aligned}$$

在处理 A_3 的过程中将 ∇u 替换为 $u-v$，我们得到

$$\begin{aligned}B_1&=\big\||x|^{-\tau}(|u|^{p-2}+|v|^{p-2})|u-v|(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\&\lesssim\Big(\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-2}|u-v|\big\|_{L_x^{a_1}}+\big\||x|^{-\tau}|v|^{p-2}|u-v|\big\|_{L_x^{a_1}}\Big)\big\||x|^{-\tau}|u|^p\big\|_{L_x^{b_1}}\\&\lesssim\Big(\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-2}}u\big\|_{L_x^{(p-2)a_3}}^{p-2}+\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-2}}u\big\|_{L_x^{(p-2)a_3}}^{p-2}\Big)\|u-v\|_{L_x^r}\big\||x|^{-\frac{\tau}{p}}u\big\|_{L_x^{pb_1}}^p\\&\lesssim\big(\|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-2}+\|\nabla v\|_{L_x^r}^{2p-2}\big)\|u-v\|_{L_x^r}\end{aligned}$$

在条件（3.30）、（3.31）和（3.32）下。类似地，在估计 ∇u 时用 $u-v$ 替换 A_4，也有

$$\begin{aligned}B_2&=\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|)\big\|_{L_x^{\frac{2n}{n+2}}}\\&\lesssim\big\||x|^{-\tau}|u|^{p-1}\big\|_{L_x^{a_2}}\big\||x|^{-\tau}(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|\big\|_{L_x^{b_2}}\\&\lesssim\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-1}}u\big\|_{L_x^{(p-1)a_2}}^{p-1}\Big(\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-1}}u\big\|_{L_x^{(p-1)b_4}}^{p}+\big\||x|^{-\frac{\tau}{p-1}}v\big\|_{L_x^{(p-1)b_4}}^{p}\Big)\|u-v\|_{L_x^r}\\&\lesssim\big(\|\nabla u\|_{L_x^r}^{2p-2}+\|\nabla v\|_{L_x^r}^{2p-2}\big)\|u-v\|_{L_x^r}\end{aligned}$$

在条件（3.33）、（3.34）和（3.35）下。

现在需要消除一些冗余的配对，随后我们将证明存在一个可容许对（q，r），满足引理中的假设。（3.25）和（3.26）的第三个条件分别关于 a 和 b可改写如下：

$$\frac{n}{a_1}=\frac{(p-1)n}{r}+\tau-p+2,\quad \frac{n}{b_1}=\frac{pn}{r}+\tau-p. \tag{3.36}$$

将这些代入（3.24）的第二个条件可得

$$\frac{(2p-1)n}{r}=\alpha+2p-2\tau-1+\frac{n}{2}. \tag{3.37}$$

这里需要指出，利用（3.41），该方程等价于（3.27）的第二个条件。将（3.36）代入（3.24）、（3.25）和（3.26）中的条件，可将这些条件归纳如下：

$$\frac{p-\tau-2}{p-1}<\frac{n}{r}<\frac{p-\tau-2+n}{p-1},\quad \frac{p-\tau}{p}<\frac{n}{r}<\frac{p-\tau+n}{p}, \tag{3.38}$$

$$\tau-p+2\le 0,\quad \frac{n}{r}\le n,\quad \frac{p-\tau-2}{p-1}\le 1<\frac{n}{r} \tag{3.39}$$

$$\tau-p\le 0,\quad \frac{p-\tau}{p}\le 1<\frac{n}{r} \tag{3.40}$$

由于 $\tau>0$，（3.39）和（3.40）中最后几个条件的第一个不等式是冗余的。根据（3.39）中的第一个条件，（3.40）中的第一个条件也属冗余。

此外，（3.28）和（3.29）的第三个条件可改写为

$$\frac{n}{a_2}=\frac{(p-1)n}{r}+\tau-p+1,\quad \frac{n}{b_2}=\frac{pn}{r}+\tau-p+1 \tag{3.41}$$

将这些代入条件（3.27）、（3.28）和（3.29）后，这些条件可归纳为

$$\frac{p-\tau-1}{p-1}<\frac{n}{r}<\frac{p-\tau-1+n}{p-1},\quad \frac{p-\tau-1}{p}<\frac{n}{r}<\frac{p-\tau-1+n}{p} \tag{3.42}$$

$$\tau-p+1\le 0,\quad \frac{n}{r}\le n,\quad \frac{p-\tau-1}{p-1}\le 1<\frac{n}{r},\quad \frac{p-\tau-1}{p}\le 1<\frac{n}{r}. \tag{3.43}$$

这里，由于 $\tau>0$，条件（3.43）中最后两个条件的第一组不等式是多余的。条件（3.43）中的第一个条件也可由（3.39）中的第一个条件消去。

最后，将（3.31）和（3.35）中的前两个条件，分别代入（3.31）和（3.35）中的第三个条件，可归纳为

$$\frac{p-\tau-2}{p-2}<\frac{n}{r}\le n,\quad \tau-p+2\le 0,\quad \frac{p-\tau-2}{p-2}\le 1<\frac{n}{r}, \tag{3.44}$$

$$\frac{p-\tau-1}{p-1}<\frac{n}{r}\le n,\quad \tau-p+1\le 0,\quad \frac{p-\tau-1}{p-1}\le 1<\frac{n}{r}. \tag{3.45}$$

这里，式（3.45）中的第二个条件可由式（3.44）中的第二个条件消去。由于 $p>2$且 $\tau>0$，式（3.38）、（3.42）、（3.44）和（3.45）中对 n/r 的所有下界均可由 1 消去。此外，利用 $p>2$，式（3.38）中的第二个条件和式（3.42）中的第一个条件对 n/r 的上界，也可由式（3.42）第二个条件中 n/r 的上界消去。因此，综合以上所有条件，可得

$$1<\frac{n}{r}<\min\left\{\frac{p-\tau-2+n}{p-1},\frac{p-\tau-1+n}{p}\right\},\quad 0<\tau\le p-2. \tag{3.46}$$

关于　另一方面，将第一个条件代入式（3.23）中的第三个条件可得

$$\frac{n}{r}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2p-1}. \tag{3.47}$$

注意到，(3.37) 与将 ($p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$ 代入 (3.47) 所得的结果完全相同。将 (3.37) 中的 r 消去：把 (3.47) 代入 (3.22) 和 (3.23) 的第二个条件，以及 (3.46) 的第一个条件，便可得到

$$1+\kappa<\frac{n}{2}-\frac{1}{2p-1}<\min\{n,n-\kappa\},\quad \frac{n-2}{2}\le\frac{n}{2}-\frac{1}{2p-1}\le\frac{n}{2}, \tag{3.48}$$

$$p>\frac{n}{2(n-2)},\quad \tau<n-1+\min\Big\{(p-1)\Big(\frac{2p}{2p-1}-\frac{n}{2}\Big),p\Big(\frac{2p}{2p-1}-\frac{n}{2}\Big)\Big\}. \tag{3.49}$$

这里，(3.48) 中的第一个条件可分为两个不等式

$$p>\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2-2\kappa},\quad \max\Big\{-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+\kappa\Big\}<\frac{1}{2p-1}, \tag{3.50}$$

其中第二个条件是多余的，因为其最大值始终为负。由于 $p>2$ 且 $n\ge3$，(3.48) 中的最后一个条件和 (3.49) 中的第一个条件都是多余的。此外，由于 $\frac{2p}{2p-1}-\frac{n}{2}<0$，(3.49) 中的最后一个条件可简化为

$$\tau<n-1+p\Big(\frac{2p}{2p-1}-\frac{n}{2}\Big). \tag{3.51}$$

为了消去 α，将 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$ 代入 (3.23) 中的最后一个条件，还可得到

$$\frac{n}{2}-\frac{(n-2)p}{2}<\tau<n-\frac{(n-2)p}{2}. \tag{3.52}$$

现在，我们使 τ 的下界小于 τ 在（3.46）、（3.51）和（3.52）中的上界，从而得到

$$\max\Big\{2,\frac{5n-4-\sqrt{9n^2+8n-16}}{4(n-2)},\frac{n+4}{n},\frac{n-2}{2(n-1)}\Big\}\le p\le\min\Big\{\frac{2n}{n-2},\frac{5n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}}{4(n-2)}\Big\},$$

这可化简为

$$\max\Big\{2,\frac{n+4}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2-2\kappa}\Big\}<p<\frac{5n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}}{4(n-2)} \tag{3.53}$$

通过使用 $p>2$，$n\ge3$ 并结合（3.50）中的第一个条件。

假设（3.17）可由将 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$ 代入（3.53）得到。事实上，该式可用 τ表示如下:(3.53)

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}}{8}<\tau<\frac{\alpha}{2}-\max\{\frac{n-4}{2},\frac{n-4}{n},\frac{\kappa}{n-2-2\kappa}-\frac{n}{4}\}. \tag{3.54}$$

最后，我们令 τ 小于 τ 的上界，从而推导出

$$2\kappa<\frac{5n-4-\sqrt{9n^2+8n-16}}{2},$$

这意味着 假设（3.16）成立。事实上，为了得到（3.16），我们可以如下计算：

$$\begin{aligned}
&\frac{n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}}{8} > \frac{\kappa}{n-2-2\kappa} - \frac{n}{4} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{n-2-2\kappa}{8} > \frac{\kappa}{3n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}} \times \frac{\sqrt{9n^2+8n-16}-(3n-4)}{\sqrt{9n^2+8n-16}-(3n-4)} \\
\Leftrightarrow\quad &n-2 > \frac{\sqrt{9n^2+8n-16}+5n-4}{4(n-1)}\kappa.
\end{aligned}$$

这等价于

$$\begin{aligned}
\kappa < \frac{4(n-1)(n-2)}{5n-4+\sqrt{9n^2+8n-16}} &= \frac{4(n-1)(n-2)\{5n-4-\sqrt{9n^2+8n-16}\}}{(5n-4)^2-9n^2-8n+16} \\
&= \frac{5n-4-\sqrt{9n^2+8n-16}}{4}.
\end{aligned}$$

证明至此。 ■

3.2. 能量空间中的局部适定性。 根据杜哈梅原理，我们首先将柯西问题（1.1）的解写成函数的不动点

$$\Phi(u) = e^{-it\mathcal{K}_\lambda}u_0 + i\epsilon\int_0^t e^{-i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u](s,\cdot)ds$$

其中 $\mathcal{N}[u] = |x|^{-\tau}|u|^{p-2}(J_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)u$。对于适当的 T、M、$N>0$，我们将证明 Φ 在.....上定义了一个压缩映射

$$X(T,M,N) = \{u \in C_t(I;H^1_\lambda)\cap L^q_t(I;W^{1,r}_\lambda) : \sup_{t\in I}\|u\|_{H^1_\lambda} \le M, \|u\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} \le N\}$$

赋备距离

$$d(u,v) = \|u-v\|_{\Lambda(I)}.$$

这里，$I=[0,T]$ 以及（q，r）如命题2.6中所给出。我们还定义

$$\|u\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} := \|u\|_{\Lambda(I)} + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|_{\Lambda(I)}$$

and

$$\|u\|_{\mathcal{W}'_\lambda(I)} := \|u\|_{\Lambda'(I)} + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|_{\Lambda'(I)}.$$

现在证明 Φ 在 X上定义良好。由命题2.6，可得

$$\|\Phi(u)\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} \le C\|e^{-it\mathcal{K}_\lambda}u_0\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} + C\big\|\mathcal{N}[u]\big\|_{\mathcal{W}'_\lambda(I)} \tag{3.55}$$

and

$$\sup_{t\in I}\|\Phi(u)\|_{H^1_\lambda} \le \|u_0\|_{H^1_\lambda} + \sup_{t\in I}\left\|\int_0^t e^{-i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u](\cdot,s)ds\right\|_{H^1_\lambda}.$$

这里，对于第二个不等式，我们使用了 $e^{it\mathcal{K}_\lambda}$ 在 L^2上是酉算子这一事实。由于 $\|\langle\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\rangle u\| \lesssim \|u\| + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|$，再次利用 $e^{it\mathcal{K}_\lambda}$ 在 L^2 上是酉算子这一事实，然后应用命题2.6中第一个估计的对偶估计，我们得到

$$\sup_{t\in I}\left\|\int_0^t e^{-i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u](\cdot,s)ds\right\|_{H^1_\lambda} \lesssim \|\mathcal{N}[u]\|_{\Lambda'(I)} + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u]\|_{\Lambda'(I)}.$$

因此，

$$\sup_{t\in I}\|\Phi(u)\|_{H^1_\lambda} \le C\|u_0\|_{H^1_\lambda} + C\|\mathcal{N}[u]\|_{\mathcal{W}'_\lambda(I)}.$$

另一方面，利用引理3.1，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}[u]\|_{\mathcal{W}'_\lambda(I)} &\le C\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p-1}_{\Lambda(I)} + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p-2}_{\Lambda(I)}\|u\|_{\Lambda(I)}\\ &\le C\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p-2}_{\Lambda(I)}\|u\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)}\\ &\le CN^{2p-1}\end{aligned} \tag{3.56}$$

if $u \in X$，并且对于之后将选取的某个足够小的 $\varepsilon > 0$，我们得到

$$\|e^{it\mathcal{K}_\lambda}u_0\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} \le \varepsilon \tag{3.57}$$

根据控制收敛定理，当 $T > 0$ 足够小时该结论成立。现在我们得出

$$\|\Phi(u)\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} \le \varepsilon + CN^{2p-1} \quad \text{and} \quad \sup_{t\in I}\|\Phi(u)\|_{H^1_\lambda} \le C\|u_0\|_{H^1_\lambda} + CN^{2p-1}.$$

因此，对于 $u \in X$，若满足条件，则有 $\Phi(u) \in X$

$$\varepsilon + CN^{2p-1} \le N \qquad C\|u_0\|_{H^1_\lambda} + CN^{2p-1} \le M. \tag{3.58}$$

接下来我们证明 Φ 是 X上的压缩映射。采用与（3.55）中相同的论证，可知

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\Lambda(I)} \le C\|\mathcal{N}[u] - \mathcal{N}[v]\|_{\Lambda'(I)}.$$

应用引理3.1 （见（3.19）），可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}[u] - \mathcal{N}[v]\|_{\Lambda'(I)} &\le C\big(\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p-1}_{\Lambda(I)} + \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}v\|^{2p-2}_{\Lambda(I)}\big)\|u - v\|_{\Lambda(I)}\\ &\le CN^{2p-2}\|u - v\|_{\Lambda(I)}\end{aligned}$$

如（3.56）中所述。因此，对于 $u, v \in X$，我们得到 $d(\Phi(u)\ \Phi(v)) \le CN^{2p-2}d(u, v)$。现在取 $M = 2C\|u_0\|_{H^1_\lambda}$ 和 $N = 2\varepsilon$，再将 $\varepsilon > 0$ 取得充分小，使得（3.58）成立且 $CN^{2p-2} \le 1/2$，由此可知 Φ 是 X 上的压缩映射。因此，我们证明了对于任意可容许对 (q, r)，存在唯一的局部解，其满足 $u \in C_t(I;\ H^1_\lambda) \cap L^q_t(I;\ W^{1,r}_\lambda)$。

3.3. 小初值在能量空间中的整体适定性。 利用命题 2.6中的第一个估计，我们注意到，当 $\|u_0\|_{H^1_\lambda}$ 充分小时，(3.57) 也成立，

$$\|e^{-it\mathcal{K}_\lambda}u_0\|_{\mathcal{W}_\lambda(I)} \le C\|u_0\|_{H^1_\lambda} \le \varepsilon$$

来自 whic 在上述论证中可以取 $T = \infty$，从而得到全局唯一解。

解 u 关于初始数据 u_0 的连续依赖性显然可用同样的方法得出：

$$\begin{aligned}d(u, v) &\lesssim d(e^{-it\mathcal{K}_\lambda}u_0, e^{-it\mathcal{K}_\lambda}v_0) + d\Big(\int_0^t e^{-i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u]ds, \int_0^t e^{-i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[v]ds\Big)\\ &\lesssim \|u_0 - v_0\| + \frac{1}{2}d(u, v)\end{aligned}$$

这意味着

$$d(u, v) \lesssim \|u_0 - v_0\|_{H^1_\lambda}.$$

这里， u、 v分别是初始数据 u_0、 v_0所对应的解 .

3.4. 能量空间中小初值的散射。为证明散射性质，我们首先注意到

$$\begin{aligned}\|e^{it_2\mathcal{K}_\lambda}u(t_2)-e^{it_2\mathcal{K}_\lambda}u(t_1)\|_{H^1_\lambda}&=\Big\|\int_{t_1}^{t_2}e^{is\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u]\Big\|_{H^1_\lambda}\\&\lesssim\|\mathcal{N}[u]\|_{\mathcal{W}_\lambda{}'([t_1,t_2])}\\&\lesssim\|u\|^{2p-1}_{\mathcal{W}_\lambda([t_1,t_2])}\quad\to\quad 0\end{aligned}$$

当 $t_1,t_2\to\infty$ 时。这意味着 $\phi:=\lim_{t\to\infty}e^{it\mathcal{K}_\lambda}u(t)$ 在 H^1_λ 中存在。此外，

$$u(t)-e^{-it\mathcal{K}_\lambda}\phi=i\int_t^\infty e^{i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u]ds,$$

因此

$$\begin{aligned}\|u(t)-e^{-it\mathcal{K}_\lambda}\phi\|_{H^1_\lambda}&=\Big\|\int_t^\infty e^{i(t-s)\mathcal{K}_\lambda}\mathcal{N}[u]ds\Big\|_{H^1_\lambda}\\&\lesssim\|\mathcal{N}[u]\|_{\mathcal{W}'_\lambda([t,\infty])}\\&\lesssim\|u\|^{2p-1}_{\mathcal{W}_\lambda([t,\infty])}\quad\to\quad 0\end{aligned}$$

当 $t\to\infty$ 时。散射得证。

4. Ground states and Gagliardo-Nirenberg estimate

在本节中，我们证明定理 1.3，讨论方程（1.7）的基态解的存在性以及加加利亚多–尼伦伯格型估计（1.9）。

4.1. 加加利亚多–尼伦伯格估计。利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式（引理 2.1），我们首先注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\lesssim\big\||x|^{-\tau}|u|^p\big\|^2_{\frac{2n}{\alpha+n}}\tag{4.59}$$

如果 $0<\alpha<n$.将引理 2.2应用于方程（4.59）的右端，其中 $b=-\frac{\tau}{p}$，$q=\frac{2np}{\alpha+n}$，$a=0$ 和 $p=2$，我们得到

$$\big\||x|^{-\tau}|u|^p\big\|^2_{\frac{2n}{\alpha+n}}=\big\||x|^{-\frac{\tau}{p}}u\big\|^{2p}_{\frac{2np}{\alpha+n}}\lesssim\|\nabla u\|^{2p}\tag{4.60}$$

if

$$0<\frac{\alpha+n}{2np}\le\frac12<1,\quad -\frac{\alpha+n}{2p}<-\frac{\tau}{p}\le 0,\quad \frac{\tau}{p}-1=\frac{\alpha+n}{2p}-\frac{n}{2}.\tag{4.61}$$

最后，利用与 Sobolev 范数等价的范数（见引理 2.4），若 $\frac{1+\kappa}{n}<\frac12<\min\{1,1-\frac{\kappa}{n}\}$，即可得到所需估计（1.8），且这不会影响其中的假设。

现在需要推导出（1.8）中的假设。注意，（4.61）中的最后一个等式等价于 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$。利用 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$，（4.61）中的要求可写为

$$\alpha+n>0,\quad \alpha+n\ge n\tau,\quad 0\le 2\tau<\alpha+n,\tag{4.62}$$

由于 $\alpha+n\ge n\tau>2\tau>0$，这些化简为 $0<\tau\le 1+\frac{\alpha}{n}$，正如所期望的那样。

4.2. 基态的存在性。 利用（1.9），我们首先设定 $J(u) = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p}/\|\mathcal{P}[u]\|$并取一个序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 H^1_λ 使得

$$\gamma := \frac{1}{C_{n,\tau,\alpha,\lambda}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u_n\|^{2p}}{\mathcal{P}[u_n]}.$$

通过缩放 $u(x) \mapsto u^{\delta,\mu}(x) = \delta u(\mu x)$，其中 $\delta, \mu \in \mathbb{R}$，我们有

$$\|u^{\delta,\mu}\|^2 = \delta^2\mu^{-n}\|u\|^2$$

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u^{\delta,\mu}\|^2 = \|\nabla u^{\delta,\mu}\|^2 + \lambda\Big\|\frac{u^{\delta,\mu}}{|x|}\Big\|^2$$

$$= \delta^2\mu^{2-n}\Big(\|\nabla u\|^2 + \lambda\Big\|\frac{u}{|x|}\Big\|^2\Big) = \delta^2\mu^{2-n}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|u^{\delta,\mu}|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u^{\delta,\mu}|^p)dx = \delta^{2p}\mu^{2\tau-n-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx,$$

这意味着，根据 $p = 1 + \frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$，$J(u^{\delta,\mu}) = J(u)$。令 $\psi_n = u^{\delta_n,\mu_n}$，其中

$$\delta_n = \frac{\|u_n\|^{\frac{n}{2}-1}}{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u_n\|^{\frac{n}{2}}}, \quad \mu_n = \frac{\|u_n\|}{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u_n\|}.$$

于是，我们有

$$\|\psi_n\| = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\psi_n\| = 1 \quad \text{and} \quad \gamma = \lim_{n\to\infty} J(\psi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathcal{P}[\psi_n]}.$$

现在我们取 $\psi \in H^1_\lambda$，使得 $\psi_n \rightharpoonup \psi$ 属于 H^1_λ，并将证明

$$\frac{1}{\mathcal{P}[\psi_n]} \to \frac{1}{\mathcal{P}[\psi]} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

利用引理2.1 通过（4.60），我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|\psi_n|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|\psi_n|^p) - |x|^{-\tau}|\psi|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|\psi|^p)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|\psi|^p\big(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}(|\psi_n|^p - |\psi|^p)\big)dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}(|\psi_n|^p - |\psi|^p)(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|\psi_n|^p)dx \\
&\lesssim \Big(\big\||x|^{-\tau}|\psi|^p\big\|_{\frac{2n}{\alpha+n}} + \big\||x|^{-\tau}|\psi_n|^p\big\|_{\frac{2n}{\alpha+n}}\Big)\big\||x|^{-\tau}(|\psi_n|^p - |\psi|^p)\big\|_{\frac{2n}{\alpha+n}} \\
&\lesssim \big\||x|^{-\tau}(|\psi_n|^p - |\psi|^p)\big\|_{\frac{2n}{\alpha+n}}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

利用以下简单的不等式

$$|u|^p - |v|^p \lesssim |u-v|(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \quad p \geq 1$$

以及 H¨older 不等式，(4.63) 中的最后一项可估计为

$$\begin{aligned}
\big\||x|^{-\tau}(|\psi_n|^p - |\psi|^p)\big\|_{\frac{2n}{\alpha+n}} &\lesssim (\|\psi_n\|^{p-1}_{(p-1)a_1} + \|\psi\|^{p-1}_{(p-1)a_1})\||x|^{-\tau}|\psi-\psi_n|\|_{a_2} \\
&\lesssim (\|\psi\|^{p-1}_{H^1_\lambda} + \|\psi_n\|^{p-1}_{H^1_\lambda})\||x|^{-\tau}|\psi-\psi_n|\|_{a_2}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

如果 $0 < \tau < 2$ 并且

$$\frac{\alpha+n}{2n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \quad \frac{n-2}{2n} \leq \frac{1}{(p-1)a_1} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.65}$$

事实上，对于最后一个不等式，我们使用了 Sobolev 嵌入， $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$，对于 $2 \le q \le \frac{2n}{n-2}$ 如果 $n \ge 3$。得益于 Sobolev 嵌入的紧性，引理 2.3，在条件

$$\frac{n-2}{2(n-\tau)} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{2}, \tag{4.66}$$

于是我们得到 $1/\mathcal{P}[\psi_n] \to 1/\mathcal{P}[\psi] = \gamma$ 当 $n \to \infty$时。我们需要验证存在 a_1 和a_2 满足（4.65）、（4.66）以及定理 1.3中的假设，但我们将把这一点推迟到证明的最后再处理。

由范数的下半连续性，我们可知

$$\|\psi\| \le 1 \quad \text{and} \quad \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\psi\| \le 1,$$

由此 $J(\psi) < \gamma$，因此$\|\psi\| = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\psi\| = 1$. 因此，

$$\psi_n \to \psi \quad \text{in} \quad H^1_\lambda \quad \text{and} \quad \gamma = J(\psi) = \frac{1}{\mathcal{P}[\psi]}.$$

ψ 满足（1.7），因为极小化子满足欧拉方程

$$\partial_\epsilon J(\psi + \epsilon\eta)_{|\epsilon=0} = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty \cap H^1_\lambda.$$

还需要验证在定理 a_1 和 a_2 满足条件（4.65）、（4.66）的存在性，其中定理 1.3中的假设成立。将（4.65）中的第一个条件代入 4.65）中的第二个条件，并取 $p = 1 + \frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$，可得

$$\frac{\alpha+n}{2n} - \frac{2-2\tau+\alpha}{2(n-2)} \le \frac{1}{a_2} \le \frac{\alpha+n}{2n} - \frac{2-2\tau+\alpha}{2n}. \tag{4.67}$$

为消去 a_2，我们使（ $1/a_2$ 4.66）和（4.67）中的下界小于 $1/a_2$ （4.66）和（4.67）中的上界。事实上，从（4.67）中的下界开始推导，可得 $n\tau < \alpha + n$，这由假设（1.8）满足。类似地，从（4.66）中的下界开始推导，可得 $0 < \tau < \frac{n+2}{2}$，但利用 1.8），并根据 $n \ge 3$ 和 $\tau < 2$，可排除这种情况。

5. Blow-up of the energy solutions

本节中，我们证明定理 1.5，该定理给出了基态阈值以下、能量临界聚焦区域中爆破解现象的判据。由此，我们证明推论 1.7。此外，我们还证明关于能量有界解的命题 1.9 和推论1.10 。

5.1. 爆破判据。 为了证明定理 1.5，我们通过反证法使用下面将要证明的不等式：

$$V_R'' \le 4\mathcal{I}[u] + \frac{C}{R^{2\tau}} + \frac{C}{R^2}, \tag{5.68}$$

其中 $\mathcal{I}[u] = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2 - \mathcal{P}[u]$ 且 $R \gg 1$。事实上，取 $u_0 \in H^1_\lambda$，结合（1.11）并假设 u 是整体的，则对于 $R \gg 1$,

$$V_R'' \le 4\mathcal{I}[u] + \frac{C}{R^{2\tau}} + \frac{C}{R^2} < -c < 0$$

如果不存在满足条件 $t_n \to \infty$ 使得 $\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u(t_n)\| \to \infty$ 的序列，这就产生了矛盾。

在开始证明 (5.68) 之前，我们先定义 $\phi_R(\cdot) := R^2\phi(\frac{\cdot}{R})$，$R>0$，其中径向函数 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\phi(|x|)=\phi(r):=\begin{cases}\frac{r^2}{2}, & \text{if} \quad r\le 1;\\ 0, & \text{if} \quad r\ge 2,\end{cases} \qquad \text{and} \quad \phi''\le 1.$$

那么，ϕ_R 满足

$$\phi_R''\le 1, \quad \phi_R'(r)\le r, \quad \Delta\phi_R\le N$$

并且，对于 $|x|\le R$

$$\nabla\phi_R(x)=x, \quad \Delta\phi_R(x)=N. \tag{5.69}$$

回顾第 2 节中 $V(t)$ 和 $M(t)$ 的定义，我们将局部化方差和莫拉韦茨作用量记为

$$V_R(t):=\int_{\mathbb{R}^n}\phi_R(x)|u(x,\cdot)|^2\,dx, \quad V_R'(t)=M_R(t):=2\Im\int_{\mathbb{R}^n}\bar u\nabla\phi_R\cdot\nabla u dx.$$

根据命题 2.7，我们将 M_R'分为两部分，分别为 A和 B，即 $M_R'(t)=A+B$其中

$$A=4\sum_{k,l=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}\partial_l\partial_k\phi_R\Re(\partial_k u\partial_l\bar u)dx-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\phi_R|u|^2dx+4\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\phi_R\cdot x\frac{|u|^2}{|x|^4}dx$$

and

$$\begin{aligned}B=&-\frac{2(p-2)}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\phi_R|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\\ &-\frac{4\tau}{p}\int_{\mathbb{R}^n}x\cdot\nabla\phi_R|x|^{-\tau-2}|u|^p(I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\\ &-\frac{4(N-\alpha)}{p}\sum_{k=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-\tau}|u|^p\partial_k\phi_R(\frac{x_k}{|\cdot|^2}I_\alpha*|\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\\ =:&\ B_1+B_2+B_3.\end{aligned} \tag{5.70}$$

利用以下径向关系

$$\partial_k=\frac{x_k}{r}\partial_r, \quad \partial_l\partial_k=\Big(\frac{\delta_{lk}}{r}-\frac{x_lx_k}{r^3}\Big)\partial_r+\frac{x_lx_k}{r^2}\partial_r^2 \tag{5.71}$$

并利用 ϕ 的性质及柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}A=&\,4\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\frac{\phi_R'}{r}dx+4\int_{\mathbb{R}^N}|x\cdot\nabla u|^2\big(\frac{\phi_R''}{r^2}-\frac{\phi_R'}{r^3}\big)dx\\ &-\int_{\mathbb{R}^N}\Delta^2\phi_R|u|^2dx+4\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{r^3}\phi_R'dx\\ \le&\,4\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\frac{\phi_R'}{r}\,dx+4\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x\cdot\nabla u|^2}{r^2}\big(1-\frac{\phi_R'}{r}\big)dx\\ &-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\phi_R|u|^2\,dx+4\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{r^3}\phi_R'dx\\ \le&\,4\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\phi_R|u|^2dx+4\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{r^2}dx.\end{aligned} \tag{5.72}$$

另一方面，为了处理 B 部分，我们将 B 中的积分拆分到以下区域$|x|<R$ 和 $|x|>R$中。然后，根据（5.69）， B 中的前两项可写为

$$\begin{aligned} B_1+B_2 &= \frac{2N(2-p)-4\tau}{p}\int_{|x|<R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx \\ &\qquad + O\bigg(\int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\bigg) \\ &= \frac{2(N(2-p)-2\tau)}{p}\mathcal{P}[u] + O\bigg(\int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\bigg). \end{aligned} \tag{5.73}$$

对于第三项 B_3，利用 [28, 引理 4.5], 中的计算可得

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{2(\alpha-N)}{p}\int_{|y|<R}\int_{|x|<R} I_\alpha(x-y)|y|^{-\tau}|u(y)|^p|x|^{-\tau}|u(x)|^p\,dx\,dy \\ &\qquad + O\bigg(\int_{|x|>R}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)|x|^{-\tau}|u|^p dx\bigg) \\ &= \frac{2(\alpha-N)}{p}\int_{|x|<R}|x|^{-\tau}|u(x)|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx \\ &\qquad + O\bigg(\int_{|x|>R}(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)|x|^{-\tau}|u|^p dx\bigg) \\ &= \frac{2(\alpha-N)}{p}\mathcal{P}[u] + O\bigg(\int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx\bigg). \end{aligned} \tag{5.74}$$

结合式（5.72）、（5.70）、（5.73）和（5.74），于是得到

$$\begin{aligned} M_R' &\le -\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\phi_R|u|^2\,dx + 4\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + 4\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{r^2}\,dx - 4\mathcal{P}[u] \\ &\qquad + O\left(\int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)\,dx\right) \\ &\le 4\Big(\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2 - \mathcal{P}[u]\Big) + O\left(\int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)\,dx\right) + O(R^{-2}). \end{aligned}$$

这里，对于最后一个不等式，我们利用了这一事实： $|\partial^\nu\phi_R| \lesssim R^{2-|\nu|}$。

现在，利用引理 2.1和引理 2.2 以及 $b=-\frac{\tau}{p}$， $q=\frac{2Np}{\alpha+N}$， $a=0$和 $p=2$，可得

$$\begin{aligned} \int_{|x|>R}|x|^{-\tau}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)\,dx &\lesssim \||x|^{-\tau}|u|^p\|^2_{\frac{2N}{\alpha+N}} \\ &\lesssim R^{-2\tau}\|u\|^{2p}_{\frac{2Np}{\alpha+N}} \\ &\lesssim R^{-2\tau}\|\nabla u\|^{2p} \end{aligned}$$

if

$$0<\frac{\alpha+n}{2np}\le\frac{1}{2}<1,\quad -\frac{\alpha+n}{2p}<-\frac{\tau}{p}\le 0,\quad \frac{\tau}{p}-1=\frac{\alpha+n}{2p}-\frac{n}{2}. \tag{5.75}$$

这里指出，式（5.75）中的最后一个等式等价于 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$。利用 $p=1+\frac{2-2\tau+\alpha}{n-2}$，条件（5.75）可写为（4.62），进而化简为$0<\tau\le 1+\frac{\alpha}{n}$，因为 $\alpha+n\ge n\tau>2\tau>0$。

因此，当 $R \gg 1$较大时，利用与 Sobolev 范数等价的范数（见引理2.4），可得

$$M_R' \le 4\,\mathcal{I}[u] + \frac{C}{R^{2\tau}}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p} + \frac{C}{R^2},$$

如所需。

5.2. 能量解的有界性。 现在，我们证明命题1.9。具体而言，通过将守恒律与以下引理相结合，可得到能量界；该引理是在假设（1.14）下获得的，称为强制性（或能量陷获）结果。

引理 5.1. 设 $\varphi \in H^1_\lambda$ 是方程 (1.7)的基态解。假设存在$0 < c < 1$ 满足

$$\mathcal{P}[u] < c\mathcal{P}[\varphi], \quad u \in H^1_\lambda.$$

那么存在常数 $c_\varphi > 0$，使得

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2 < c_\varphi \mathcal{E}[u].$$

证明。 由（1.7），我们首先得到

$$\mathcal{P}[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\tau}|\varphi|^p (I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|\varphi|^p)dx = \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2. \tag{5.76}$$

应用 Gagliardo–Nirenberg 不等式和定理 1.3，可得

$$(\mathcal{P}[u])^p \le (\mathcal{P}[u])^{p-1} \cdot C_{N,\tau,\alpha,\lambda}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p} \le \Big(\frac{\mathcal{P}[u]}{\mathcal{P}[\varphi]}\Big)^{p-1}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p}.$$

这里，对于第二个不等式，我们用到了以下事实:

$$C_{N,\tau,\alpha,\lambda} = \frac{\mathcal{P}(\varphi)}{\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^{2p}} = (\mathcal{P}[\varphi])^{1-p} \tag{5.77}$$

利用（5.76），因此可得

$$\mathcal{P}[u] \quad \le \quad \Big(\frac{\mathcal{P}[u]}{\mathcal{P}[\varphi]}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[u] &= \|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2 - \frac{1}{p}\mathcal{P}[u]\\ &\ge \Big(1 - \frac{1}{p}\Big(\frac{\mathcal{P}[u]}{\mathcal{P}[\varphi]}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2\\ &\ge \Big(1 - \frac{c^{(p-1)/p}}{p}\Big)\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2.\end{aligned}$$

证明至此完成。 ∎

5.3. 能量有界／非全局解。 最后，我们证明推论 1.7 和1.10，该推论给出了能量有界／非全局存在解的二分结论。

5.3.1. 能量有界解。 首先，推论 1.10 由（1.12）和（1.15）在（1.1）的流作用下的不变性得出。我们首先定义函数 $f:\ [0,T^*)\ \to\mathbb{R}$ 如下

$$f(t)=t-\frac{C_{N,\tau,\alpha,\lambda}}{p}t^p. \tag{5.78}$$

由于 $p>1$，函数 $f(t)$ 在 $f(t_1)=\frac{p-1}{p}C_{N\tau\alpha}^{-\frac{p-1}{}}$、、、、$\lambda$处 $t_1=(C_N,\ \tau,\ \alpha,\ \lambda)^{-\frac{1}{p-1}}$取得最大值。这里注意到，根据 $t_1=\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2$ 式（5.77）和（5.76）。

利用 Gagliardo–Nirenberg 型不等式、定理1.3，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[u]&=\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2-\frac{1}{p}\mathcal{P}[u]\geq\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2-\frac{C_{N,\tau,\alpha,\lambda}}{p}\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^{2p}\\&=f\big(\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2\big).\end{aligned} \tag{5.79}$$

由假设（1.12）结合（5.77）和（5.76），我们同样得到

$$\mathcal{E}[u_0]<\mathcal{E}[\varphi]=f(t_1), \tag{5.80}$$

这意味着

$$f\big(\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2\big)\leq\mathcal{E}[u]=\mathcal{E}[u_0]<f(t_1). \tag{5.81}$$

由于 $\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u_0\|^2<\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2=t_1$ 满足假设（1.15），并结合（5.81）所体现的时间连续性，我们得到

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u(t)\|^2<t_1,\quad\forall t\in[0,T^*),$$

这等价于

$$\mathcal{MG}[u(t)]<1,\quad\forall t\in[0,T^*).$$

因此，(1.12) 和 (1.15) 在流 (1.1) 下保持不变，这意味着 $T^*=\infty$，从而完成证明。

5.3.2. 爆破。 为证明推论 1.7，我们使用同一个函数 $f(t)$，其定义见 (5.78)。根据假设 (1.13)，结合 (5.77) 和 (5.76)，可得

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u_0\|^2>\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2=t_1.$$

因此，结合（5.81），可得时间连续性

$$\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u(t)\|^2>t_1,\quad\forall\,t\in[0,T^*).$$

Hence, $\mathcal{MG}[u(t)]>1$ 在 $[0,T^*)$，且它与 (1.12) 在流 (1.1).

最后，利用 $\mathcal{E}[u(t)]>1$、$\mathcal{MG}[u(t)]>1$ 以及恒等式 $p\mathcal{E}[\varphi]=(p-1)\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2$，我们得到对所有 $t\in[0,T^*)$。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[u(t)]&=\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2-\mathcal{P}[u]\\&=p\mathcal{E}[u]-(p-1)\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}u\|^2\\&<p\mathcal{E}[\varphi]-(p-1)\|\sqrt{\mathcal{K}_\lambda}\varphi\|^2<0,\end{aligned}$$

这通过使用定理 1.5完成了证明。

6. Appendix: Morawetz estimate

本节给出一个维里尔恒等式（命题（2.7）），它揭示了与广义 Hartree 方程（1.1）的解相关的某些量随时间变化的凸性性质。该恒等式是研究爆破解现象的基础。对于自由非线性 Schr¨odinger 方程，维里尔恒等式最早由 Za- kharov [33] 和 Glassey [11]建立。当自由方程受到电磁势扰动时，Fanelly 和 Vega [7] 推导出了相应的线性 Schr¨odinger 方程和线性波动方程的维里尔恒等式。证明采用了标准的 Morawetz 乘子技术，该技术最初在 [23] 中用于 Klein-Gordon 方程。这里给出的恒等式与 [27], 中的相同，只是增加了一项，用以表示逆平方势所产生的贡献。

命题 (2.7)的证明。 设 $u \in C_t([0,T];H^1_\lambda)$ 是方程 (1.1)聚焦情形下的一个解

$$\begin{aligned} i\partial_t u &= -\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2}u - |x|^{-\tau}|u|^{p-2}\Big(I_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p\Big)u \\ &= -\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2}u - \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{6.82}$$

将 $2\bar{u}$ 乘以 (6.82)，得到

$$-2\Im(\bar{u}\Delta u) = \partial_t(|u|^2)$$

利用这一点，我们可以计算

$$V_\phi'(t) = 2\Im\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}\nabla\phi\cdot\nabla u dx = 2\sum_{k=1}^N \Im\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}\partial_k\phi\cdot\partial_k u dx.$$

为了考虑 V_ξ 的二阶导数，我们需要计算

$$V_\phi''(t) = 2\sum_{k=1}^N\int_{\mathbb{R}^n}\partial_k\phi\cdot\partial_t\Im(\bar{u}\partial_k u)dx. \tag{6.83}$$

利用（6.82），可得

$$\begin{aligned} \partial_t\Im(\bar{u}\partial_k u) &= \Re(i\partial_t u\partial_k\bar{u}) - \Re(i\bar{u}\partial_k\partial_t u) \\ &= \Re\big(\partial_k\bar{u}(-\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2}u - \mathcal{N})\big) - \Re\big(\bar{u}\partial_k(-\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2}u - \mathcal{N})\big) \\ &= \Re\big(\bar{u}\partial_k\Delta u - \Delta u\partial_k\bar{u}\big) + \Re\big(\bar{u}\partial_k\mathcal{N} - \mathcal{N}\partial_k\bar{u}\big) + \lambda\Re\big(\frac{u}{|x|^2}\partial_k\bar{u} - \bar{u}\partial_k(\frac{u}{|x|^2})\big). \end{aligned} \tag{6.84}$$

对于最后一项，我们看到

$$\Re\big(\bar{u}\partial_k(\frac{u}{|x|^2}) - \frac{u}{|x|^2}\partial_k\bar{u}\big) = -2\frac{x_k}{|x|^4}|u|^2. \tag{6.85}$$

对于前两项，我们将应用以下引理，该引理在此省略，可在[27, 命题 2.12]的证明中找到。

引理 6.1. 设 ϕ: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 为一个径向实值乘子，满足 $\phi = \phi(|x|)$。那么，对于定义为 $\mathcal{N} = -|x|^{-\tau}|u|^{p-2}\big(J_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p\big)u$的 $\mathcal{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Re\int_{\mathbb{R}^N}(\bar{u}\partial_k\Delta u - \Delta u\partial_k\bar{u}) + (\bar{u}\partial_k\mathcal{N} - \mathcal{N}\partial_k\bar{u})dx \\
&\qquad = \sum_{l=1}^{N} 2\int_{\mathbb{R}^n}\partial_l\partial_k\phi\,\Re(\partial_k u\partial_l\bar{u})dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\phi|u|^2dx \\
&\qquad\quad - \frac{(p-2)}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\phi|x|^{-\tau}|u|^p(J_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx \\
&\qquad\quad - \frac{2\tau}{p}\int_{\mathbb{R}^n} x\cdot\nabla\phi|x|^{-\tau-2}|u|^p(J_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx \\
&\qquad\quad - \frac{2(N-\alpha)}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_k\phi|x|^{-\tau}|u|^p(\frac{x_k}{|\cdot|^2}J_\alpha * |\cdot|^{-\tau}|u|^p)dx.
\end{aligned}$$

因此，结合（6.83）、（6.84）、引理 6.1 和（6.85），证明完成。 ■

7. Declarations

- 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。
- 作者声明不存在与本文内容相关的竞争性利益。

- 所有作者确认，他们与任何在本稿件所讨论的主题或材料中具有任何财务利益或非财务利益的组织或实体均不存在隶属关系或参与关系。

- 作者对本文讨论的任何材料均无经济或专有利益。

- 支持本研究研究结果的数据可应合理请求向通讯作者索取。

References

[1] M. G. Alharbi 和 T. Saanouni, *Sharp threshold of global well-posedness vs finite time blow-up for a class of inhomogeneous Choquard equations* 60 2019 081514 , 《数学物理杂志》（），[2] H.A. Alkhidhr, *Closed-form solutions to the perturbed NLSE with Kerr law non-linearity in optical fibers* 22, 2021 , 《物理学研究成果》，[3] A.A. Balinsky 和 W.D. Evans, *Some Recent Results on Hardy-Type Inequalities*, 《应用数学与信息科学》4，第 2 期（2010），191-208。[4] N. Burq、F. Planchon、J.G. Stalker 和 A.S. Tahvildar-Zadeh, *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with the inverse-square potential* 203, 2 2003 , 《泛函分析杂志》第 期（），519-549。[5] L. Campos 和 C. M. Guzman, *On the inhomogeneous NLS with inverse-square potential*, 《应用数学与物理学杂志》72，第 143 期（2021）。[6] V.D. Dinh, *A unified approach for energy scattering for focusing nonlinear schrödinger equations*, 《离散与连续动力系统》40，第 11 期（2020），6441-6471。[7] L. Fanelli 和 L. Vega, *Magnetic virial identities, weak dispersion and Strichartz inequalities*, 《数学年刊》344（2009），第 2 期，249–278。[8] D. Foschi, *Inhomogeneous Strichartz estimates*, 《双曲型微分方程杂志》2，第 1 期（2005），1-24。[9] J. Fr¨ohlich 和 E. Lenzmann, *Mean-field limit of quantum Bose gases and nonlinear Hartreeequation*, 《偏微分方程研讨会》2003–2004，´研讨会：´偏微分方程（巴黎综合理工学院，帕莱索，2004），报告编号 XIX，第 26 页。[10] J. Ginibre 和 G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction*。《数学杂志》170，第 2 期（1980），109-136。

On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger
[11] R. T. Glassey, *equations* 18, 9 1977 1794 1797 ,

《数学物理杂志》第 期（ ），–。[12] E. P. Gross 和 E. Meeron, *Physics of Many-Particle Systems*, 第 1 卷, Gordon Breach, 纽约, 231-406, （1966）。[13] J. Holmer 和 S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic non-linear Schrödinger equations* 282, 2008 435 467 , 《数学物理通讯》

（ ），-。[14] H. Kalf、U.-W. Schmincke、J. Walter、R. W¨ust, *On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials*, 载于:《谱理论与微分方程》（邓迪专题讨论会论文集, 1974; 献给 Konrad J¨orgens）, 《数学讲义》第 448 卷, 施普林格, 柏林, （1975）, 182-226。[15] C. Kenig 和 F. Merle, *Global well-posedness scattering and blow-up for the energy-critical focusing* , 《数学发明》（ ），-。*nonlinear Schrodinger equation in the radial case* 166 2006 645 675
[16] R. Killip、C. Miao、M. Visan、J. Zhang 和 J. Zheng, *Sobolev spaces adapted to the Schrödinger operator with inverse- square potential* 288, 3 4 2018 1273 1298 , 《数学杂志》第 - 期

（ ），-。[17] S. Kim, *On well-posedness for inhomogeneous Hartree equations in the critical case* 2212 07195 , [ ]
arXiv: . math.AP[18] S. Kim、Y. Lee 和 I. Seo, *Sharp weighted Strichartz estimates and critical inhomogeneous Hartree equations* 2110 14922 [ ] , arXiv: . math.AP

[19] P.G. Lemari´e-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman and Hall/CRC《数学研究札记》, 431。Chapman and Hall/CRC, 博卡拉顿, 佛罗里达州, 2002。xiv+395 页。[20] E. Lieb, *Analysis*, *2nd ed. Graduate Studies in Mathematics*, 第 14 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2001。[21] C. S. Lin, *Interpolation inequalities with weights*, 《偏微分方程通讯》11（1986）, 1515-1538。[22] P.-L. Lions, *The Choquard equation and related questions*, 《非线性分析》4（1980）, 1063-1072。[23] C. S. Morawetz, *Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equations*, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑》306（1968）, 291–296。[24] I.M. Moroz、R. Penrose 和 P. Tod, *Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations* 15 1998 2733 2742 , 《经典与量子引力》

（ ），-。[25] F. Planchon、J. Stalker 和 A.S. Tahvildar-Zadeh, L^p 波动方程在反平方势下的估计, 《离散与连续动力系统》9（2003）, 427-442。[26] T. Saanouni 和 T. Alharbi, *On the inter-critical inhomogeneous generalized Hartree equation*, 《阿拉伯数学杂志》11（2022）, 557-583。[27] T. Saanouni 和 C. Xu, *C. Scattering Theory for a Class of Radial Focusing Inhomogeneous* 。《势分析》（ ）。*Hartree Equations* 2021
[28] T. Saanouni, *Energy scattering for radial focusing inhomogeneous bi-harmonic Schrödinger equations* 60, 3 2021 ,

《变分法》第 期（ ）。[29] H. Spohn, *On the Vlasov hierarchy*, 《数学方法与应用科学》3（1981）, 445-455。[30] E. M. Stein 和 G. Weiss, *Fractional Integrals on n-Dimensional Euclidean Space*, 《数学与力学杂志》7（1958）, 503-514。[31] E.C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, 牛津大学出版社, 牛津, 1946。[32] C. Xu, *Scattering for the non-radial focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger-choquard equation* 2104 09756 ,

1
http://arxiv.org/abs/ . v[33] V.E. Zakharov, *The Collapse of Langmuir Waves*,

《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》35（1972）, 908-914。[34] J. Zhang 和 J. Zheng, *Scattering theory for nonlinear Schrödinger equations with inverse-square potential* 267, 8 2014 2907 2932 , 《泛函分析杂志》第

期（ ），-。

School of Mathematics Korea Institute for Advanced Study Seoul 02455 Republic of , „ Korea.

Departement of Mathematics College of Science and Arts in Uglat Asugour Qassim , , University Buraydah
„ Kingdom of Saudi Arabia. : *Email address*: *tarek.saanouni@ipeiem.rnu.tn*
Email address *synkim@kias.re.kr*
Email address: *t.saanouni@qu.edu.sa*