arXiv:2305.00748v1 [math.AG] 1 May 2023

复杂度一T-簇*的等变 Chow 群

Pavankumar Dighe† 维韦克·莫汉·马利克‡

2023年5月2日

摘要

本文计算了一个有理、完备的复杂度一 T-簇的等变 Chow 群。

1 引言

一个 T-簇是配备了代数环面 T 的有效作用的代数簇。本文研究这类簇的 T 等变 Chow 群。

簇的等变不变量研究历史悠久；例如，参见 Timashev [Tim97, Tim08]。本文关注 T-簇，研究方法沿用 Altmann、Hausen 和 Suss 的工作 [AH06, AHS08]。在这种方法中， T-簇用 pp-除子来描述。pp-除子是通常除子的推广，其系数是满足某些性质的多面体。关于这些空间已有大量研究，尤其是当 T-簇的复杂度为一时，即环面的维数比 T-簇的维数小一。文章 [AIP+12] 全面总结了关于 T-簇几何的已知成果，包括除子、线丛上同调、交叉理论等。文献 [LLM20] 研究了它们的拓扑性质，包括霍奇-德利涅数、上同调环和基本群的计算。Ilten 和 Suß [IS15] 也研究了具有相容环面作用的 T-簇上的向量丛。描述 T- 簇的代数 - 组合数据使其成为一类天然的例子，可望借此计算各种性质。

一个自然的问题是，能否计算这些簇的各种不变量。其中一个重要的不变量是 Chow 群，它也为诸如陈类之类的特征类提供了一个自然的容身之所。这是

*数学主题分类：14C15（1973年至今）（等变）Chow 群与环；动机；14M25（1991年至今）托里克簇、牛顿多面体、Okounkov 体；52B20（1991年至今）凸几何中的格多面体（包括与交换代数和代数几何的关系）

†*Email:* pavankumardighe@gmail.com
‡*Email:* vmallick@iiserpune.ac.in

一个老问题（例如，参见 Moser-Jauslin [MJ92], 和 Gonzales [Gon15] 关于 SL(2) 嵌入的 Chow 群的研究）。在某些条件下，Nødland 计算了 T-簇的 Chow 群 [Nød21]。Botero [Bot22] 进一步研究了这一问题。

由于我们处于等变情形，一个自然的问题是：能否计算这些不变量的等变版本？Edidin 和 Graham [EG98] 借鉴 Borel 的等变上同调，并在 Briney、Gillet 和 Vistoli 先前工作的基础上定义了等变 Chow 群。我们将介绍一种计算这些群的方法。

本文结构如下。第 2 节概述本文所需的概念。第 2.1 小节回顾 T-簇理论，随后第 2.2 小节简要回顾等变 Chow 群。第 3 节给出主要结果，并运用 Ilten 和 Vollmert 的降维技术 [IV13] 推导等变 Chow 群的计算方法。这将问题简化为计算某些 T-簇的通常 Chow 群。第 4 节遵循 Nødland 的方法 [Nød21] 完成这项工作。第 5 节中，我们将 Nødland 的一个结果 [Nød21, Proposition 6.3] 推广到等变 Chow 群（见 5.0.3）。最后，我们计算一个例子中涉及的等变版本的数量；Nødland 已在非等变情形下研究过这个例子。

致谢

第一作者感谢 UGC（UGC-Ref.No: 1213/(CSIR-UGC NET JUNE 2017)）资助本研究，并感谢 IISER Pune 提供研究设施。第二作者感谢 IISER Pune 提供开展本研究的优良环境。

2 一些预备知识

本节回顾有关 T-簇和等变 Chow 群的一些事实。

2.1 T-簇

T-簇是带有有效环面作用的正规代数簇。这些簇可以由代数几何与组合数据相结合来描述。任意多面体 $\Delta \subset N_{\mathbb{Q}}$ 的尾锥 tail(Δ)定义为

$$\operatorname{tail}(\Delta) := \{v \in N_{\mathbb{Q}} \,|\, v + \Delta \subseteq \Delta\}.$$

固定一个强凸整多面体锥 σ 属于 $N_{\mathbb{Q}}$。以 σ 为尾锥的多面体在 Minkowski 和下构成一个半群，其加法单位元为 σ。我们将此半群记为 $\mathrm{Pol}^+(N,\sigma)$。令 $\mathrm{Pol}(N,\sigma)$ 为相应的 Grothendieck 群。在正规簇 Y 上，尾锥为 σ 的多面体除子是一个形式和 $\mathfrak{D} = \sum_i \Delta_i \otimes D_i$，其中 D_i 遍历 Y 的所有素除子

且系数 $\Delta_i \in$ 属于 Pol(N,σ)；也就是说， $\mathfrak{D} \in$ 属于 Pol$(N,\sigma) \otimes$ WDiv(Y)，其中 WDiv(Y) 是 Y上的魏尔除子群。

每个多面体除子都定义一个评价映射

$$\mathfrak{D}\colon \sigma^\vee \to \mathrm{WDiv}_{\mathbb{Q}}(Y) \tag{2.1.1}$$

其中 WDiv$_{\mathbb{Q}}(Y)$ $=$ WDiv$(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。其定义为

$$\mathfrak{D}(u) := \sum_i \left(\min_{v \in \Delta_i} \langle u,\, v \rangle \right) D_i.$$

评价映射 $\mathfrak{D}$ 是一个分段线性凸函数。事实上，尾锥固定为 σ 的多面体除子与凸分段线性映射 $\sigma^\vee \to$ WDiv$_{\mathbb{Q}}(Y)$ 之间存在双射（参见 [AH06，命题 1.5]）。

定义 2.1.2. 多面体除子 $\mathfrak{D}$ 是半丰沛的，当且仅当对所有 $u \in \sigma^\vee$， $\mathfrak{D}(u)$ 都是半丰沛的。

定义 2.1.3. 设 Y 为正规簇， $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ 为尖锥。关于 σ，在 (Y, N) 上的适当多面体除子或 pp-除子，是半丰沛多面体除子 $\mathfrak{D} = \sum_i \Delta_i \otimes D_i$，满足 D_i 是有效魏尔除子， $\Delta_i \in$ Pol$^+(N,\sigma)$ 中仅有限多个不同于 σ，并且对每个 $u \in \sigma^\vee$， $\mathfrak{D}(u)$ 都是 Y上的有理卡蒂埃除子；当u 属于 $\sigma^\vee$的相对内部时，该除子是大除子。

定义 2.1.4. 对于 pp-除子 $\mathfrak{D}$，可以按如下方式构造一个仿射概形。令，对于 $u \in \sigma^\vee \cap M$, $\mathcal{A}_u = \mathscr{O}_Y(\mathfrak{D}(u))$。那么， $\mathcal{A} = \bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \mathcal{A}_u$ 是一个 $\mathscr{O}_Y$ 代数层。定义与 $\mathfrak{D}$ 相关联的仿射概形为

$$X(\mathfrak{D}) = \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma\left(Y,\, \mathcal{A}_u\right) \right) = \operatorname{Spec} \Gamma\left(Y,\, \mathcal{A}\right).$$

定理 2.1.5. *[AH06，定理 3.1 和 3.4]* 令 Y 为一个正规半射影簇。固定一个格 N、其对偶 M，并令 σ 为 $N_{\mathbb{Q}}$ 中的一个强凸多面体锥。给定 (Y, N) 上的 pp-除子 $\mathfrak{D}$，考虑与 $\mathfrak{D}$ 相关联的仿射概形 $X = X(\mathfrak{D})$。此外，定义

$$T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[M] \qquad \textit{and} \qquad \tilde{X} = \tilde{X}(\mathfrak{D}) = \mathbf{Spec}_Y \mathcal{A}$$

其中，Spec$_Y\mathcal{A}$ 是代数层 $\mathcal{A}$ 在 Y上的相对谱。于是$\tilde{}$（参见 *[AH06，定理 3.1 和 3.4]*）， X 和 X 都是维数为 dim $Y +$ dim T的正规簇，并具有有效的 T-作用。存在两个典范映射： π： $X \longrightarrow Y$，它是一个良商；以及一个适当的双有理 T-$\tilde{}$等变收缩态射 r： $X \longrightarrow X$。簇 Y 是 X 在 T作用下的 Chow 商（参见 *[KSZ91]*）。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\ r\ } & X \\ & \searrow^{\pi} & \\ & & Y. \end{array}$$

仿射 T-簇及占优的 T-等变态射构成的范畴，与 pp-除子及适当定义的态射构成的范畴等价（参见 *[*AH06，定理 8.8 和推论 8.*14]*）。

根据 [AHS08], ，我们将回顾复杂度为一的仿射 T-簇的粘合。为描述非仿射 T-簇的组合数据，我们允许 $\mathfrak{D}$中出现空系数。对于曲线 Y上的多面体除子 $\mathfrak{D} = \sum \Delta_D \otimes D$ ，其中 D 表示曲线 Y上的魏尔除子，某些 Δ_D可以为空。若 $\mathfrak{D}|_{\mathrm{Loc}(D)}$ 是 Loc($\mathfrak{D}$) 上的 pp-除子，其中 Loc($\mathfrak{D}$) $= Y \setminus \bigcup_{\Delta_D=\phi} D$，则称这样的$\mathfrak{D}$ 在 Y 上是 pp-除子。

定义 2.1.6. 设 $\mathfrak{D} = \sum_p \Delta_P \otimes P$和 $\mathfrak{D}' = \sum_P \Delta'_P \otimes P$是 Y上的两个多面体除子，其尾锥分别为 σ 和 σ'。

- 多面体除子的交定义为

$$\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' = \sum_P (\Delta_P \cap \Delta'_P) \otimes P.$$

- 对于 $p \in Y$，与 p 相关联的切片定义为 $\mathfrak{D}_p = \sum_{p \in P} \Delta_P.P$:
- 我们称 $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ ，若对于每个 $P \in Y$都有 $\Delta'_P \subset \Delta_P$

对于适当多面体除子 $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ ，我们有一个支配态射$X(\mathfrak{D}') \to X(\mathfrak{D})$。如果这个映射是开嵌入，我们称 $\mathfrak{D}'$ 是$\mathfrak{D}$ 的面，并记作 $\mathfrak{D}' \prec \mathfrak{D}$。

定义 2.1.7. 除子扇是在 Y上的适当多面体除子的有限集合 $\mathcal{S}$，满足对于 $\mathfrak{D}'$、$\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$，有 $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' \in \mathcal{S}$和 $\mathfrak{D}' \succ \mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' \prec \mathfrak{D}$。

定义 2.1.8. 若适当多面体除子 $\mathcal{S}$ 满足 Loc($\mathfrak{D}$) 是仿射的，则称其为无收缩；若除子扇 $\mathcal{S}$ 对所有 $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$均满足 Loc($\mathfrak{D}$) 是仿射的，则称其为无收缩。这等价于收缩映射 r 是一个同构。

定义 2.1.9. 假设一个 T-簇由 $(Y, \mathcal{S})$ 描述。我们将 Y称为 pp-除子的空间。

由于我们关注复杂度一的 T-簇，因此回顾一下 [IS11] 中的一些概念。对于完备的复杂度一 T-簇，其组合描述完全由切片决定。

定义 2.1.10. 曲线 Y 上的带标记扇式除子是一个形式和$\Xi = \sum \Xi_P.P$，配有一个扇 Σ 以及某个子集 $C \subset \Sigma$，使得

1. Ξ_P 是 $N_{\mathbb{Q}}$ 的完备多面体剖分，并且对于所有$P \in Y$，tail(Ξ_P) $= \Sigma$ 。
2. 对于满维 $\sigma \in C$，多面体除子$D^\sigma = \sum \Delta_P^\sigma \otimes P$是适当的，其中 Δ_P^σ 是 Ξ_P 中尾锥为 σ的唯一元素。

3. 对于满维的 $\sigma \in C$ 和 $\tau \prec \sigma$ ，当且仅当$\deg D^\sigma \cap \tau \neq \phi$时，我们有 $\tau \in \Sigma$ 。

当锥集 C 满足 $\tau \prec \sigma$ 并且 $\tau \in C$ 时，称其为标记的。 C 的元素也称为收缩锥。对于任意完备除子扇，都可以与之关联一个带标记扇式除子。对于一个 $\mathcal{S}$ 除子扇，对每个$P \in Y$，我们都有一个切片 $\mathcal{S}_P$。那么相应的带标记扇式除子为$\Xi = \sum \mathcal{S}_P.P$。

备注 2.1.11。若 $\mathcal{S}$ 无收缩，则 C 为空；反之，对于给定的带标记扇式除子 Ξ ，若其 C 为空，则相应的 $\mathcal{S}$ 是无收缩的 [IS11，命题 1.6]。

注 2.1.12. 复杂度一 T-簇 $X(\mathcal{S})$ 是完备的，当且仅当它的每个切片 $\mathcal{S}_p$ 都是 $N_{\mathbb{Q}}$ 的完备细分，且 Y 是完备的。

在下文中，我们简要回顾如何从除子多面体构造除子扇（[IV13，第 4] 节）。

定义 2.1.13. 设 Y 是一条光滑曲线，除子多面体由一对 (L □) 构成，其中 □ 是 $M_{\mathbb{Q}}$ 中的一个多面体，且 L 是从 □ 到 $\mathrm{CaDiv}_{\mathbb{Q}}Y$ 的分片仿射凹映射，其取值为半丰除子。

回顾一下如何为复杂度一 T-簇关联除子多面体。对于任意 $u \in \square$，Lin_P: $\mathrm{tail}(\square) \to \mathbb{Q}$ 定义为

$$\mathrm{Lin}_P(v) = \lim_{\lambda \to \infty} L_P(u + \lambda.v)/\lambda$$

并且我们设

$$\square_P^* = \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid (v, w) \geq \mathrm{Lin}_P(w)\ \forall w \in \square\}; \quad \text{and } \mathrm{L}_P^* : \square_P^* \to Q$$

$$\mathrm{L}_P^*(v) = \min_{u \in \square}\Big(\langle u, v\rangle - \mathrm{L}_P(u)\Big)$$

那么，对于任意 P, $\Xi(\mathrm{L}_P^*)$ 是 $\square_P^*$ 的一个由尖多面体构成的细分。现在，利用上述构造，我们可以关联一个除子扇。定义集合 $K = \{P \in Y |\ \mathrm{L}_P \neq 0\}$ 和 $E = \sum P$。那么，除子扇 $\mathcal{S}$ 由 $P \in K$ 生成

$$C_{\mathrm{L}} = \{\Delta_P \otimes P + \phi \otimes (E - P) |\ P \in K,\ \Delta_P \in \Xi(\mathrm{L}_P^*)\}.$$

注 2.1.14。由 [IV13，命题 4.2] $\mathcal{S}$ 是一个无收缩除子扇。

我们关注两个 T-簇的乘积。与乘积相关的组合数据由以下引理给出。

引理 2.1.15. *[AIP+12，命题 5]* 对于在 $(Y', \sigma' \subset N')$ 上的两个 pp-除子 $\mathfrak{D}' = \sum \Delta_i' \otimes D_i'$ 和在 $(Y, \sigma \subset N)$ 上的 $\mathfrak{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i$，定义 $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}' = \sum(\Delta_i \times \sigma') \otimes (D_i \times Y') + \sum(\sigma \times \Delta_i') \otimes (Y \times D_i')$ 为 $(Y \times Y', N \oplus N')$ 上的 pp-除子。于是 $X(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}') = X(\mathfrak{D}) \times X(\mathfrak{D}')$。

2.2 等变 Chow 群

对于带有群 G 作用的概形，Totaro [Tot99] 以及 Edidin 和 Graham[EG98] 定义了等变 Chow 群，下面我们回顾其定义。对于任意群 G，我们有一个 Δ-复形 EG，群 G 通过左乘在其上自由作用。我们记作 $BG = EG/G$。空间 EG和 BG通常是无限维空间。对于 $G = \mathbb{C}^*$，我们有 $EG = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$，群 G 在其上自由作用，且 $BG = \mathbb{P}^\infty$。然而，这些空间在代数几何中难以理解。尽管如此，我们有代数簇 $E_m = \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$和 $B_m = \mathbb{P}^{m-1}$，它们为 $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{m-1}$ 提供了近似。对于两个群 G 和 H， $E(G \times H)$ $\equiv EG \times EH$。对于维数为d 的代数环面，我们有 $ET = (\mathbb{A}^\infty \setminus \{0\})^d$ 和 $E_T^N = (\mathbb{A}^N \setminus \{0\})^d$。因此，我们将商簇 $(X \times (\mathbb{A}^N \setminus \{0\})^d)/T$ 记为 X_T。

定义 2.2.1（k^{th} 等变 Chow 群）。对于 X，一个复杂度一的 $n+1$ 维T簇，以及 $k \leq d+1$，第 k 个等变 Chow 群定义为空间 X_T 的通常 Chow 群，即 $A_k(X_T)$。

3 估算 T-簇的等变 Chow 群

3.1 对 E_T^N 的描述

.

在我们的情形中，幸运的是，维数为 d 的环面 T 的近似空间（$\mathbb{A}^N \setminus \{0\}$）^{d} 是一个托里克簇。下一个引理将用扇来描述这个簇。该扇的锥按如下方式构造。

注意，对于一个 d 维环面 T，分类空间的有限维近似由下式给出

$$E_T^N = \left(\mathbb{A}^N \setminus \{0\}\right)^d.$$

E_T^N是一个维数为 Nd的托里克簇，其稠密环面记作T_E。描述 E_T^N作为托里克簇的扇可按如下方式构造。

考虑具有标准基 e_1，.....， e_N的 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathbb{Q}^N$。设 θ为由 $\{e_1, \ldots, e_N\}$ 生成的锥。设 $\mathscr{T}_I$为由介于 1 和 N之间的数组成的元组集合:

$$\mathscr{T}_I = \left\{(i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d \,\middle|\, 1 \leq i_j \leq N, \text{ for each } 1 \leq j \leq d\right\}. \tag{3.1.1}$$

对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$，定义 σ^i为面 $\theta \cap \rho_i^\perp$，其中 ρ_i是由 e_i生成的射线。锥 σ^i 由 e_1、.....、$\widehat{e_i}$、.....、e_N生成，即除 e_i之外的所有基向量。对于 $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, N\}$，令

$$\sigma_I = \sigma_{i_1,\ldots,i_r} = \delta_1 \times \cdots \times \delta_d; \tag{3.1.2}$$

其中，当 $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$时 $\delta_i = \sigma^i$；否则为 $\delta_i = 0$。令 Σ_E为这些锥在 $\mathbb{Q}^{Nd}$ 中生成的扇。以下引理显然成立。

引理 3.1.3. 按照上述记号，对应于 Σ_E 的托里克簇恰好是 $E_T^N = \big(\mathbb{A}^N \setminus \{0\}\big)^d$。

T-簇与 E_T^N 的乘积

设 Y 是一条曲线，且 $\mathcal{S}$ 是 Y 上的一个除子扇。设 $X = X(\mathcal{S})$是相应的仿射 T-簇（复杂度为 1）。我们希望将 $X(\mathcal{S}) \times E_T^N$ 描述为一个 T-簇。注意，E_T^N 是一个在环面 T_E 作用下的托里克簇。作为分类空间的一个近似，E_T^N 带有 T 的自然作用。因此，我们得到 T 在 $X(\mathcal{S}) \times E_T^N$ 上的对角作用。我们希望计算几何商

$$(X(\mathcal{S}) \times E_T^N)/T$$

我们的想法是，几何商将与表示 $X(\mathcal{S}) \times E_T^N$ 的任意 pp-除子（见定义 2.1.9）的空间双有理，其中 $\times E_T^N$ 被视为在 T 作用下的一个 T-簇。我们首先将 $X(\mathcal{S}) \times E_T^N$ 描述为在 $T \times T_E$ 作用下的复杂度 1 T-簇。

命题 3.2.1. 设 Y 是一条曲线，T 是一个环面，E_T^N 是相应的近似分类空间。

1.（仿射情形）设 $\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^n \Delta_i \otimes \{p_i\}$ 是 Y 上的一个 pp-除子，且 $X(\mathfrak{D})$ 是相应的仿射 T-簇。对于 $I \in \mathscr{I}_I$ （见方程 (3.1.1)），定义

$$\mathfrak{D}_I = \sum_{i=1}^n \big(\Delta_i \times \sigma_I\big) \otimes \{p_i\}$$

其中 σ_I 是方程 (3.1.2) 中定义的锥。设 $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ 为由 $\{\mathfrak{D}_I \mid I \in \mathscr{I}_I\}$ 生成的除子扇。那么，$X(\mathfrak{D}) \times E_T^N$ 作为在 $T \times T_E$ 作用下的复杂度为 1 T 的簇，由 $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ 描述。

2.（一般情形）对于由曲线 Y 上的除子扇 $\mathcal{S}$ 描述的 T-簇 $X = X(\mathcal{S})$，$X \times E_T^N$ 由 $\{\mathcal{S}_{\mathfrak{D}} \mid \mathfrak{D} \in \mathcal{S}\}$ 生成的除子扇描述，其中对于每个 $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$，$\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ 按照仿射情形（第 1 项）定义。

证明。这是关于将 T-簇的乘积描述为一个 T-簇的直接推论（例如参见 [AIP+12，第 2.4] 节）；而这一描述又由 K¨unneth 公式 [Gro63, 6.7.8] 推出。□

3.3 计算降阶

设 Y 是一条光滑曲线，$\mathcal{S}$ 是一个除子扇。设 $X = X(\mathcal{S})$ 是一个余维为 1 的 T-簇。注意，$T \times T_E$ 在 $X(\mathcal{S}) \times E_T^N$ 上有效作用。根据

命题 2.1.15，可以写出这个 T-簇的如下描述。为计算环面等变 Chow 群，我们研究 $\left(X(\mathcal{S})\times E_T^N\right)/\!/\,T$。我们知道，在 T 的作用下，将 $X(\mathcal{S})\times E_T^N$ 描述为一个 T-簇时，pp-除子的底空间与这个商双有理等价，即 $\left(X(\mathcal{S})\times E_T^N\right)/\!/\,T$ 与 $\widetilde{Y_C}$ 双有理等价。

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{X\times E_T^N} & \xrightarrow{r_E} & X\times E_T^N\\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \\ \widetilde{Y_C} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ Y, & & \end{array}$$

我们按照 [IV13] 中的方法，通过降维来计算这一点。对于 $X=X(\mathcal{S})$，一个 T 维簇，其上有环面作用，且如上所述环面维数为 d，令 M 为 T 的特征格，令 N 为 M 的对偶。令 M_E 及其对偶 N_E 分别对应于作用在 E_T^N 上的环面 T_E。为了更容易描述降维后的 T 维簇，我们先介绍几个映射。考虑短正合列

$$0\longrightarrow M_E\xrightarrow{\iota} M\oplus M_E\xrightarrow{\pi} M\longrightarrow 0$$
$$\qquad\qquad\quad\ \ t\nwarrow\!\!\cdots\!\!\nearrow$$

其中，ι 和 π 根据映射 $I\colon\ M_E\longrightarrow M$ 来描述，该映射相对于标准基由矩阵给出

$$I=\begin{pmatrix}I_1 & \cdots & I_d\end{pmatrix}$$

其中，对于 $i=1$，...，d，每个 I_i 都是由下式给出的 $d\times N$ 矩阵

$$I_i=\begin{pmatrix}e_i & \cdots & e_i\end{pmatrix},\qquad i\in\{1,\dots,d\}$$

其中，e_i 是 $\mathbb{Z}^d$ 的标准基中的第 i 个向量，在第 i 个位置为 1，其余位置为 0。现在，

$$\iota(b)=(-I(b),b)\qquad\text{and}\qquad\pi(a,b)=a+I(b).$$

对偶化后，我们还得到一个短正合列

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{\alpha} N\oplus N_E\xrightarrow{\rho} N_E\longrightarrow 0 \tag{3.3.1}$$

其中，映射可用 J 来描述：$N\longrightarrow N_E$ 其定义为

$$J=\begin{pmatrix}J_1\\ \vdots\\ J_d\end{pmatrix}.$$

这里，每个 J_i, $i \in \{1,\dots,d\}$ 都是形式如下的 $N \times d$ 矩阵

$$J_i^T = \begin{pmatrix} e_i & \cdots & e_i \end{pmatrix}$$

其中，如上所述， e_i 是 $\mathbb{Z}^d$标准基中的第 i个元素。采用此记号，我们有

$$\alpha(a) = (a, J(a)) \qquad \text{and} \qquad \rho(a,b) = b - J(a).$$

与前文一样，设 Y为一条曲线， T 为一个环面， E_T^N为相应的近似空间，且 $X = X(\mathcal{S})$为一个复杂度为 1 T的簇，其中除子扇$\mathcal{S}$ 定义在曲线 Y上。将命题 3.2.1 中计算得到的描述 $X := X \times E_T^N$的除子扇记为 $\mathcal{S}_{\tilde{X}}$。本节中，我们旨在用半射影簇 Y_C和定义在 Y_C上的除子扇 $\mathcal{S}_{\widetilde{Y_C}}$来描述 $X = X(\mathcal{S}_{\tilde{X}})$作为一个 T-簇在 T作用下的情形。该构造与 [IV13 第 5 节1] 紧密相仿。回忆一下， T_E 是 E_N^T中的稠密开环面（见 3.1）。记 $T \times T_E$为 $\tilde{T}$ $T \hookrightarrow \tilde{T} = T \times T_E$。该包含关系诱导出相应特征格之间的满同态 $\pi\colon M \longrightarrow M$。令 $M_E \equiv$ 为π ，并通过以下图表定义格短正合列的截面与余截面的选取。

$$0 \longrightarrow M_E \underset{\iota}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \tilde{M} \underset{\pi}{\overset{\sigma^*}{\rightleftarrows}} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow N_E \underset{\rho}{\overset{\tau^*}{\rightleftarrows}} \tilde{N} \overset{\sigma}{\rightleftarrows} N \longleftarrow 0$$

考虑一个 pp-除子 $\mathfrak{D} = \sum \Delta_p \otimes p \in \mathcal{S}$。令 $\omega_{\mathfrak{D}} \times \sigma_I^\vee \subset M_{\mathbb{Q}}$ 为不变开子集 $X(\mathfrak{D}) \times U_{\sigma_I}$的权锥；该开子集被描述为一个 T-簇 X，并注意到 $\pi(\omega_{\mathfrak{D}} \times \sigma_I^\vee) = M$。对于 $u = 0 \in M$，定义如下（比较 [IV13，第 5.1] 节）。

$$\square_u = \tau\big(\pi^{-1}(u) \cap \tilde{\omega}\big) \qquad \text{and} \qquad \Psi_u\colon \square_u \longrightarrow \mathrm{CaDiv}_{\mathbb{Q}}(Y)$$

由 $\Psi_u(u') = \mathfrak{D}(u' + \sigma^*(u))$ 给出。每个 Ψ_u 都是一个除子多面体。对于 $\mathfrak{D} \times \sigma_I$ 的每个线性区域 $\tilde{\omega}_i = \omega_{\mathfrak{D}\,i} \times \sigma_I \subset \omega_{\mathfrak{D}} \times \sigma_I$，选取 $u_i = 0 \in \operatorname{rel\,int} \pi(\tilde{\omega}_i) = M$，使其位于像的相对内部。设 $\mathcal{S}_{\mathfrak{D} \times \sigma_I}$为对应于 $\sum \Psi_{u_i}$的除子扇。令 $Y_{\mathfrak{D} \times \sigma_I}$为 T-簇 $X(\mathcal{S}_{\mathfrak{D} \times \sigma_I})$。参见 [IV13，定理 5.2]。我们取 Ξ_p 为 $\rho(\Delta_p \times \sigma_I)$的最粗多面体剖分，使其包含任意面 $\Delta \prec \Delta_p \times \sigma_I$对应的 $\pi(\Delta)$的剖分。

命题 3.3.2. ([IV13, 命题 5.1]) $\Xi_p = \mathcal{S}_{\mathfrak{D} \times \sigma_I\, p}$

在继续之前，我们先回顾 [Zie95] 中的一些结果。给定一个多面体 Δ，我们用 $L(\Delta)$ 表示一个多面体的面集。

引理 3.3.3. 对于多面体 Δ 和锥 σ, $L(\Delta \times \sigma) = L(\Delta) \times L(\sigma)$，其中$L(\Delta) \times L(\sigma)$ $= \{\Delta' \times \sigma' \mid \Delta' \prec \Delta \text{ 且 } \sigma' \prec \sigma\}$.

证明。设 F 是 $\Delta \times \sigma \subset N_{\mathbb{Q}} \oplus N'_{\mathbb{Q}}$ 的面。考虑典范投影映射 $P\colon\ N_{\mathbb{Q}} \oplus N'_{\mathbb{Q}} \to N_{\mathbb{Q}}$ 和 $P'\colon\ N_{\mathbb{Q}} \oplus N'_{\mathbb{Q}} \to N'_{\mathbb{Q}}$。则 $F = P(F) \times P'(F)$ 以及 $P(F) \prec \Delta$, $P'(F) \prec \sigma$ 是显然的。 □

引理 3.3.4. 对于 $\Delta_p \in \mathcal{S}_p$和 $\sigma_I \in \Sigma_E$, $L(\rho(\Delta_p \times \sigma_I)) = \{\rho(\Delta) \mid \Delta \prec \Delta_p \times \sigma_I)\}$证明。映射 $\rho|_{N\times\sigma_I}\colon\ N \times \sigma_I \longrightarrow N_E$ 是单射。多面体 $\rho|_{\Delta_p\times\sigma_I}\colon\ \Delta_p \times \sigma_I \longrightarrow \rho(\Delta_p \times \sigma_I)$ 的投影是双射，且 ρ 是线性的。由 [Zie95, 引理 7.10]，面的逆像是面。 □

引理 3.3.5. 如果 $\mathcal{S}_p$ 是完备多面体复形，则

$$\{\rho(\Delta_p \times \sigma_I) \mid \Delta_p \in \mathcal{S}_p \text{ and } \sigma_I \in \Sigma_E\}$$

是完备多面体复形。

证明。设 $(a, b) \in N$，其中 $a = (a_1, a_2 \dots a_d) \in N$ 且 $b = (b_1, \dots b_{Nd})$，则 $(a, b) \mapsto b - J(a)$。给定元素 $z = (z_1 \dots z_N, z_{N+1}, \dots z_{2N} \dots z_{Nd}) \in N_E$，我们选择 a_i，使其在 N-元组 $(z_{(i-1)N+1}, \dots z_{iN})$ 中取最小值，其中 $0 \le i \le d$。存在 $b \in \sigma_I$，对于某个 I，使得 $(-a, b) \mapsto z$（或 $z = b - J(-a)$），并选择适当的 $\Delta_p \in \mathcal{S}_p$，使得 $-a \in \Delta_p$。 □

我们将粘合 $X(\mathcal{S}_{\mathfrak{D}\times\sigma_I})$，以构造 $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}$和 $\sigma_I \in \Sigma_I$ Y_C。映射 ρ 是线性的，且在每个 $\Delta_p \times \sigma_I$上都是单射，面映到面（3.3.4）。考虑集合 $P_{\mathfrak{D}\times\sigma_I} = \{p \in Y \mid \Delta_p \neq 0, \phi\}$和 $E_{\mathfrak{D}\times\sigma_I} = \sum_{p\in P_{\mathfrak{D}\times\sigma}} p.$ 那么， $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}\times\sigma_I}$ 是由以下集合中各元素的交集构成的除子扇

$$C_{\mathfrak{D}\times\sigma_I} = \{\rho(\Delta_p \times \sigma_I) \otimes p + \phi \otimes (E_{\mathfrak{D}\times\sigma_I} - p)\}.$$

根据 [IV13, 第 4] 节， $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}\times\sigma_I}$ 是无收缩的。考虑除子扇$\mathcal{S}_C$，它由该集合中各元素的交集构成

$$C_{\mathcal{S}\times\Sigma_E} = \bigcup_{\mathfrak{D}\times\sigma_I\in\mathcal{S}\times\Sigma_E} C_{\mathfrak{D}\times\sigma_I}$$

and

记号 3.3.6。设 $Y_C = X(\mathcal{S}_C)$, 且 $\pi_C\colon\ X \times E_T^N \to Y_C$ 为典范良商映射。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X \times E_T^N} & \xrightarrow{r_E} & X \times E_T^N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \\ \widetilde{Y_C} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ Y. & & \end{array}$$

由上述讨论，我们得到以下引理。

$\widetilde{\text{引理 3.3.7. 上面构造的除子扇 }}\mathcal{S}_C$ 在 Y 上，给出了
$\widetilde{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}T_E$-簇 Y_C，该簇对应于
$\widetilde{X \times E_T^N}$关于 T作用的良商。

考虑如下设定。设 Ξ 是定义在 $\mathbb{P}^1$上的带标记扇式除子，且C 表示一组带标记或收缩锥。对于 Ξ，存在一个完备除子扇 $\mathcal{S}$，使得对所有 $p \in \mathbb{P}^1$都有 $\Xi_p = \mathcal{S}_p$。考虑完备的复杂度一 T-簇， $X = X(\mathcal{S}) = X(\Xi)$。考虑除子扇

$$\mathcal{S} \times \Sigma_E = \{\mathfrak{D} \times \sigma_I \,|\, \mathfrak{D} \in \mathcal{S} \text{ and } \sigma_I \in \Sigma_E\}$$

其中 $\mathfrak{D} = \sum \Delta_p \otimes p \in \mathcal{S}$，我们定义 pp-除子，

$$\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) = \sum \rho(\Delta_p \times \sigma_I) \otimes p.$$

引理 3.3.8. 集合 $\mathcal{S}_{Y_C} = \{\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) \,|\, \mathfrak{D} \in \mathcal{S}$和 $\sigma_I \in \Sigma_E\}$是一个除子扇，而且它是完备的。

证明。首先，我们将证明 $\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)$ 是曲线$\mathbb{P}^1$上的 pp-除子。注意到 $\mathfrak{D} \times \sigma_I$ 是 pp-除子。对于复杂度一的情形，根据 [AH06 第 2], 节，我们有 pp-除子的一个等价定义，并且有 $\deg(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) = \rho(\deg(\mathfrak{D} \times \sigma_I))$。以下条件成立。

- $\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) = \sum \rho(\Delta_p \times \sigma_I) \otimes p$，其中 $\Delta_p \times \sigma_I$是尾锥为 $\mathrm{tail}(\mathfrak{D})$ 的多面体 $\times \sigma_I$，求和遍历所有互不相交的 p。
- 由于 $\deg(\mathfrak{D} \times \sigma_I)$ 是 $\mathrm{tail}(\mathfrak{D}) \times \sigma_I$ 的真子集，因此 $\deg(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I))$ 是 ρ(tail($\mathfrak{D}$) $\times \sigma_I$) 的真子集。
- 对于 $u \in (\mathrm{tail}(\mathfrak{D}) \times \sigma_I)^\vee$，我们有 $\mathrm{eval}_u(\deg(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I))) = \mathrm{eval}^{u \circ \rho}(\deg(\mathfrak{D} \times \sigma_I))$，且 $\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)(u) = (\mathfrak{D} \times \sigma_I)(u \circ \rho)$ 是主的。

要证明 $\mathcal{S}_{Y_C}$ 是除子扇，我们取两个 pp-除子 $\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)$ 和 $\rho(\mathfrak{D}' \times \sigma_J)$。由于 $\sigma_J \succ \sigma_J \cap \sigma_I \prec \sigma_I$、 $\mathfrak{D}' \succ \mathfrak{D}' \cap \mathfrak{D} \prec \mathfrak{D}$，并根据 3.3.3、3.3.4 和 3.3.5，我们可以得出结论:

$$\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) \succ \rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I) \cap \rho(\mathfrak{D}' \times \sigma_J) \prec \rho(\mathfrak{D}' \times \sigma_J).$$

根据完备性判据和上述引理， $\mathcal{S}_{Y_C}$ 是完备的。 □

现在考虑将 $\mathcal{S}_{Y_C}$ 描述为带标记扇式除子 $\Xi_{Y_C} = \sum \mathcal{S}_{Y_C,\ p} \cdot p$ 其中，$\mathcal{S}_{Y_C,\ p} = \{\rho(\Delta_p \times \sigma_I) \,|\, \Delta_p \in \mathcal{S}_p$ 以及 $\sigma_I \in \Sigma_E\}$，标记锥为 $C_{Y_C} = \{\sigma \times \sigma_I \mid \sigma \in C\}$.

引理 3.3.9. 根据上述引理，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X(\mathcal{S}_{Y_C})} & \xrightarrow{r} & X(\mathcal{S}_{Y_C}) \\ \downarrow \pi & & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array},$$

$\widetilde{\qquad\qquad\qquad\qquad}$其中 $X(\mathcal{S}_{Y_C}) = Y_C$.

证明。注意到 $X(\mathcal{S}_{Y_C})$ 和 Y_C 都相对于 $\mathcal{S}_{Y_C p} = \mathcal{S}_{C p}$ 无收缩。这里，簇无收缩是指相应的除子扇无收缩。因此，只需证明它们具有相同的切片。于是，根据 [AHS08，命题 1.6]，$X(\mathcal{S}_{Y_C}) = Y_C$. □

记号3.3.10. $Y_C := X(\mathcal{S}_{Y_C})$

注释3.3.11. 注意，$X \times E_T^N$ 在 $T \times T_E$ 的作用下是一个复杂度一 T-簇，但并非完备。不过，Y_C 是一个完备的复杂度一 T-簇。

命题3.3.12. 考虑由三元组 $(i, \rho, 1)$ 给出的 pp-除子态射 $\mathfrak{D} \times \sigma_I \to \rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)$，其中 i 是 $\mathbb{P}^1$ 上的恒等态射，而 1 是单位多函数。由该 pp-除子态射诱导的映射 $q : X \times E_T^N \to Y_C$ 是一个几何商。

证明. 态射 $(i, \rho, 1)$ 给出如下环同态

$$q^{\#}_{\mathfrak{D} \times \sigma_I} : \bigoplus_{u \in \rho(\sigma \times \sigma_I)^\vee} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)(u)) \to \bigoplus_{v \in (\sigma \times \sigma_I)^\vee} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\mathfrak{D} \times \sigma_I)(v)).$$

其中

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\rho(D))(u)) \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D(u \circ \rho)))$$

是恒等映射，因为 $\min\langle \rho(\Delta_P \times \sigma_I)\ u \rangle = \min\langle \Delta_p \times \sigma_I, u \circ \rho \rangle$。映射 $q^{\#}_{\mathfrak{D} \times \sigma_I}$ 是包含映射，事实上

$$\bigoplus_{u \in \rho(\sigma \times \sigma_I)^\vee} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I)(u)) = \bigoplus_{v \in (\sigma \times \sigma_I)^\vee} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\mathfrak{D} \times \sigma_I)(v))^T.$$

由于 T 在 $X \times E_T^N$ 上自由作用，诱导映射 $q_{\mathfrak{D} \times \sigma_I} \colon X(\mathfrak{D} \times \sigma_I) \to X(\rho(\mathfrak{D} \times \sigma_I))$ 是一个几何商；因此映射 q 是一个几何商。 □

综上所述，我们得到以下引理。

引理3.3.13. 上述构造的 T-簇 Y_C 是完备的，并且适合纳入一个图表。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X \times E_T^N} & \xrightarrow{r_E} & X \times E_T^N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_C} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \widetilde{Y_C} & \longrightarrow & Y_C \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathbb{P}^1, & & \end{array}$$

其中 r_E 是一个 T-等变的双有理适当态射，而映射 q 和 π_C 是几何商。

4 环面等变 Chow 群 T-簇

继续上述设定，令 tail($\mathcal{S}$) 为 $= \Sigma$。将满足 slice $\mathcal{S}_p \neq \Sigma$ 的点集 $p \in \mathbb{P}^1$ 记为 P。必要时，我们会添加额外的点，以确保 P 的大小至少为 2。对于一个非负整数 $k \leq d+1$，为求得复杂度一 T-簇的 k^{th} Chow 群，考虑以下集合

- R_k = 与未被 r 压缩的子簇相对应的 $d+1-k$ 维锥。
- V_k = 与 P 中点的纤维相对应的多面体剖分的 $d-k$ 维面。
- T_k = 与被 r 压缩的子簇相对应的 $d-k$ 维锥。

定理 4.0.1。（*[*Nød21，定理 4.*1]*）给定一个完备的、复杂度一的有理 T-簇 X，对于 $0 \leq k \leq \dim(X)$，有如下正合序列:

$$K \longrightarrow \mathbb{Z}^{V_k} \oplus \mathbb{Z}^{R_k} \oplus \mathbb{Z}^{V_k} \longrightarrow A_k(X) \longrightarrow 0$$

其中，箭头和格 K 在 *[*Nød21，定理 4.*1]* 中定义。

注意，在我们的情形中， Y_C 是一个由 $\mathbb{P}^1$上的 pp-除子定义的 T-簇。因此，它包含一个开子集，该开子集是 $\mathbb{P}^1$ 的一个开子集与环面的乘积，故 Y_C 是有理的。利用上述结果，我们将给出 $X(\mathcal{S})$的等变 Chow 群的一个表示，或者等价地，给出 Y_C的 Chow 群的一个表示。对于非负整数 $k \leq Nd+1$，定义以下集合:

- $R'_k =$ Σ_E中维数为 k 的面。
- r_k = 维数为 $Nd+1-k$ 且对应于未被 r收缩的子簇的锥。
- v_k = 多面体剖分中维数为 $Nd-k$ 、对应于 P中点的纤维的面。
- t_k = 维数为 $Nd-k$ 且对应于被 r收缩的子簇的锥。

集合 r_k、 v_k、 t_k 的基数由以下数给出:

- $|r_k| = R'_{Nd-d}.|R_k| + R'_{Nd-d-1}.|R_{k-1}| \ldots R'_{Nd-d-(k-1)}.|R_1| + R'_{Nd-d-k}.|R_0|$。
- $|v_k| = R'_{Nd-d}.|V_k| + R'_{Nd-d-1}.|V_{k-1}| \ldots R'_{Nd-d-(k-1)}.|V_1| + R'_{Nd-d-k}.|V_0|$。
- $|t_k| = R'_{Nd-d}.|T_k| + R'_{Nd-d-1}.|T_{k-1}| + \ldots R'_{Nd-d-(k-1)}.|T_1| + R'_{Nd-d-k}.|T_0|$.

5 $|r_k|+|v_k|+|t_k|$ 是常数

由 [Nød21，命题 6.3] 以及上述计算，我们可以得出以下结果。

For

$$S_i=|R_i|+|V_i|+|T_i|=\begin{cases}\#\Sigma(d-i+1)+2\#\Sigma(d-i), & \text{if } i<d;\\ \#\Sigma(1)+\#P, & \text{if } i=d;\\ 0, & \text{if } i>d;\end{cases} \tag{5.0.1}$$

and

$$S'_i=\begin{cases}R'_{Nd-d-i}=\Sigma_T(Nd-d-i), & \text{if } i\le Nd-d;\\ 0, & \text{if } i>Nd-d.\end{cases} \tag{5.0.2}$$

命题 5.0.3. 对于光滑托里克簇 X_Σ 上的任意秩二托里克向量丛 $\mathscr{E}$，我们有 $X=P(\mathscr{E})$ 和 $X_{\mathscr{E}}=X\times\mathscr{E}_T^N/T$，数值 $|r_k|$、$|v_k|$ 和 $|t_k|$ 与 $X_{\mathscr{E}}$ 相关，然后

$$|r_k|+|v_k|+|t_k|=\sum_{i=0}^{i=k}S'_iS_{k-i}.$$

证明。由 5.0.1、5.0.2 以及 [Nød21，命题 6.3] 可得。 □

例 5.0.4. 考虑 [Nød21，例 5.3]，中关于向量丛 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 的例子，它们来自 [Nød21，注记 6.5] S_j 与 $\mathscr{E}$ 或 $\mathscr{F}$ 无关。我们还固定一个足够大的值 N，于是有一个整数 $|r_k|+|v_k|+|t_k|$ 与 $\mathscr{E}$ 或 $\mathscr{F}$ 无关。注意，对应于 $\mathscr{E}$，我们有空间 $\mathbb{P}(\mathscr{E})\times(\mathbb{A}^N\setminus\{0\})^d/T$；对于 $\mathscr{F}$，我们有 $\mathbb{P}(\mathscr{F})\times(\mathbb{A}^N\setminus\{0\})^d/T$。考虑带有由扇所诱导的环面作用的 $\mathbb{P}^2$，该扇由射线 $\rho_1=(1,0)$、$\rho_2=(0,1)$ 和 $\rho_0=(-1,-1)$ 给出，并将相应的除子记为 D_i，分别对应于 $i=1$、2、0。考虑由 $\mathscr{E}=D_1\oplus 0$ 和 $\mathscr{F}=(D_1+D_2)\oplus D_0$ 给出的秩二向量丛。于是我们有，$\mathbb{P}(\mathscr{E})$ 和 $\mathbb{P}(\mathscr{F})$ 是维数为 3 的复杂度一 T-簇。

下表展示了本例中 $|r_1|$、$|v_1|$、$|t_1|$、$|r_2|$、$|v_2|$ 和 $|t_2|$ 的取值。

	$\lvert r_2\rvert$	$\lvert v_2\rvert$	$\lvert t_2\rvert$	$\lvert r_1\rvert$	$\lvert v_1\rvert$	$\lvert t_1\rvert$
$(\mathbb{P}(\mathscr{E})\times E_2^3)/T$	213	48	36	135	45	9
$(\mathbb{P}(\mathscr{F})\times E_2^3)/T$	132	165	0	54	135	0

参考文献

[AH06] Klaus Altmann 和 J¨urgenHausen，《多面体除子与代数环面作用》，Math. Ann. 334 (2006)，第 3 期，557–607。MR 2207875 (2006m:14062)[AHS08] Klaus Altmann、J¨urgen Hausen 和 Hendrik S¨uss，《通过除子扇粘合仿射环面作用》，Transform. Groups 13 (2008)，第 2 期，215–242。MR 2426131 (2009f:14107)

[AIP+12] Klaus Altmann、Nathan Owen Ilten、Lars Petersen、Hendrik S¨uß 和 Robert Vollmert， T-簇的几何，代数几何文集，EMS 会议报告系列，欧洲数学会，苏黎世，2012年，第 17–69 页。MR 2975658[Bot22] Ana Mar´ıa Botero，广义 Minkowski 权重与 t-簇的 Chow 环，2022年。[EG98] Dan Edidin 和 William Graham，等变交理论，《发明数学》131 (1998年)，第 3 期，595–634。MR 1614555[Gon15] Richard P. Gonzales， T-线性概形的等变运算 Chow 环，《文献数学》20 (2015年)，401–432。MR 3398717[Gro63] A. Grothendieck， ´El ´éments de g ´éom ´étrie alg ´ébrique. III. ´Étude coho- ´mologique des faisceaux coh ´érents. II，《高等科学研究所数学出版物》(1963年)，第 17 期，91。MR MR0163911 (29 #1210)[IS11] Nathan Owen Ilten 和 Hendrik S¨uß，极化的复杂度 1 t-簇，《密歇根数学杂志》60 (2011年)，第 3 期，561–578。[IS15] Nathan Ilten 和 Hendrik S¨uss， T-簇上的等变向量丛，《变换群》20 (2015年)，第 4 期，1043–1073。MR 3416439[IV13] Nathan Owen Ilten 和 Robert Vollmert，环面作用的升维与降维，《纯粹与应用代数杂志》217 (2013年)，第 9 期，1583–1604。[KSZ91] M. M. Kapranov、B. Sturmfels 和 A. V. Zelevinsky，环面簇的商，《数学年刊》290 (1991年)，第 4 期，643–655。MR 1119943[LLM20] Antonio Laface、Alvaro Liendo 和 Joaqu´ın Moraga，关于复杂度一的有理 $\mathbb{T}$-簇的拓扑，《莫斯科数学杂志》20 (2020年)，第 2 期，405–422。MR 4088800[MJ92] Lucy Moser-Jauslin，光滑完备 SL(2)-嵌入的 Chow 环，《组合数学》82 (1992年)，第 1 期，67–106。MR 1154162[Nød21] Bernt Ivar Utstøl Nødland，复杂度一 t-簇的 Chow 群与伪有效锥，《数学手稿》169 (2021年)，141–165。[Tim97] D. A. Timash¨ev，复杂度为 1 的 G-流形分类，《俄罗斯科学院消息：数学系列》61 (1997年)，第 2 期，127–162。MR 1470147[Tim08] Dmitri Timashev，复杂度一的环面作用，环面拓扑，当代数学，第 460 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008年，第 349–364 页。MR 2428367

[Tot99] Burt Totaro, 《分类空间的乔环》，代数 K理论（华盛顿州西雅图，1997年），《纯数学研讨会论文集》，第67卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年，第249–281页。MR 1743244[Zie95] G¨unter M. Ziegler, 《多胞体讲义》，施普林格出版社，纽约，1995年。