arXiv:2305.00749v2 [math.NA] 7 May 2023

采用优化切片/特征选择的离散经验插值法进行稳健的低管秩张量恢复

Salman Ahmadi-Asl[a]、Anh-Huy Phan[a]、Cesar F. Caiafa[b]、Andrzej Cichocki[a]

[a]人工智能技术中心，斯科尔科沃科学技术研究院，俄罗斯莫斯科，s.asl@skoltech.ru，[b]阿根廷射电天文研究所—拉普拉塔科技中心，国家科学技术研究委员会/布宜诺斯艾利斯省科学研究委员会/拉普拉塔国立大学，埃莉萨镇1894，阿根廷，

摘要

本文基于 t-乘积将离散经验插值法（DEIM）扩展至三阶张量情形，并利用该方法选择重要/显著的侧向与水平切片/特征。本文从理论和数值两个方面研究了所提出的管状离散经验插值法（TDEIM）。实验结果表明，与现有方法相比，TDEIM 能够提供更准确的近似。本文还介绍了所提出方法在监督分类任务中的应用。

关键词：交叉张量近似、DEIM采样、管积 2000年数学学科分类：15A69、46N40、15A23

1. 引言

对于大规模数据矩阵的低秩近似，奇异值分解（SVD） [1, 2, 3, 4] 的计算代价较高。为解决这一问题，研究者提出了矩阵CUR（MCUR）或交叉近似方法，通过选取部分列和行 [5, 6]来快速计算数据矩阵的低秩近似。MCUR近似不仅在时间复杂度方面具有优势，还能提供具有可解释性的近似结果，因为因子矩阵保留了原始数据矩阵的性质，例如非负性、稀疏性或元素为整数 [7]。目前有多种方法可用于对矩阵的列和行进行采样。通常，可以将这些采样方法分为随机化方法和确定性方法。均匀分布、平方长度分布和杠杆分数概率分布 [7]

作为随机化算法，已被广泛用于大规模数据矩阵的列/行采样。另一方面，最大体积法 [8]和离散经验插值法（DEIM） [9] 是两种广为人知的确定性采样算法。第一种方法通过最大化交叉矩阵的体积[1] 来采样列/行。研究表明，该方法能够提供近乎最优的近似。DEIM方法使用一个基，例如顶层左奇异向量，来对矩阵的行进行采样。矩阵$\mathbf{X}^T$ 的列被采样，并作为矩阵X的行处理。DEIM实际上是一种插值型MCUR方法，因为该方法得到的近似在采样索引处与原始数据矩阵的实际列/行相匹配。需要指出的是，Cross2D [10, 5] 也是一种确定性采样方法[2] ，它通过依次在新的采样列和行中对给定矩阵进行插值来实现采样。然而，与Cross2D不同，后者在不同运行中可以得到不同的MCUR近似，而对于给定的固定基矩阵，DEIM方法始终得到相同的MCUR近似。DEIM方法的另一个优点是，对于给定的两个数据矩阵X、Y，如果能够为它们找到一个共享基矩阵，例如通过广义奇异值分解（GSVD）[11, 12], ，则可以利用该基矩阵对所述矩阵的列进行采样。由于DEIM方法对两个数据集使用相同的基矩阵，因此矩阵X、Y的采样列具有相同的索引。事实上，文献 [13, 14]中的作者利用这一技巧将MCUR推广到了张量情形。

MCUR方法在 [15, 16, 17, 18, 19]中推广到了张量。 [15, 17, 18] 中的方法与 Tucker 模型 [20, 21], 有关，[16] 中的方法针对 Tensor Train 模型 [22] ，而 [19] 提出的方法则针对张量/管状 SVD（t-SVD） [23]。本文聚焦于张量奇异值分解（t-SVD），该分解基于管积（t-乘积）定义。t-SVD具有与经典 SVD 相似的性质。特别是，与 Tucker 分解 [20, 21] 或典型多元组分解 [24, 25], 不同，其截断形式在最小二乘意义下给出了最佳的低管秩近似。 [19] 和 [26, 27],分别采用管杠杆分数采样和均匀采样，对侧切片和水平切片进行采样。据我们所知，基于 t-乘积的 DEIM方法尚未推广到张量情形，而其更高的近似精度以及对秩变化的鲁棒性已在矩阵中得到证明。

[1]方阵的体积定义为矩阵行列式的绝对值，而矩形矩阵的体积定义为其奇异值的乘积。
[2]除算法的第一阶段随机地选择第一列外，其他所有阶段均以确定性方式执行。

在矩阵中 [9]。需要注意的是， [28] 采用 DEIM采样对纤维进行采样，以计算低 Tucker 秩近似；但我们的工作与之不同，因为我们的工作针对 t-SVD模型。此外，目前还没有论文比较针对侧切片/水平切片的不同采样方法。本文旨在更深入地研究这些问题，并受 [9], 中工作的启发，将 DEIM方法扩展到 t-乘积，并将其称为管状离散经验插值法（TDEIM）。TDEIM选择重要侧切片和水平切片的索引。所提出的方法优于所有基线采样算法，包括最高杠杆分数法、杠杆分数采样和无放回均匀采样。

本工作的主要贡献如下：

- 将基于 t-乘积的离散经验插值法（DEIM）扩展至张量管状情形，并利用该方法选择重要或优化的侧向切片/特征和水平切片/特征。

- 提出一种新的混合 TDEIM 算法，利用管状杠杆分数对侧向切片/水平切片进行采样。
- 在合成数据集和真实世界数据集上进行了大量模拟，并将其应用于监督分类任务，以评估所提出算法的性能和效率。

本文组织如下。第 2 节介绍一些基本的张量概念。第 3 节介绍 t-SVD，并阐述该模型背后的一些直观思想。第 4 节概述矩阵交叉近似方法和张量交叉近似方法。第 5 节介绍离散经验插值法（DEIM），第 6 节研究其在张量上的扩展。第 7 节展示计算机模拟结果，第 8 节给出结论。

2. 预备知识

为介绍主要内容，我们首先需要引入基本符号和定义。带下划线的粗体大写字母、粗体大写字母和粗体小写字母分别表示张量、矩阵和向量。固定除两个模态之外的所有模态所生成的子张量称为切片。对于三阶张量 $\underline{\mathbf{X}}$ 这一特殊情形，我们将切片 $\underline{\mathbf{X}}(:,:,k)$、$\underline{\mathbf{X}}(:,j,:)$ 和 $\underline{\mathbf{X}}(i,:,:)$ 分别称为正面切片、侧向切片和水平切片。为简洁起见，有时

对于正面切片 $\mathbf{X}(:,:,i)$，我们使用记号 $\mathbf{X}_i$。类似地，固定除一个模态之外的所有模态所生成的对象称为纤维。对于三阶张量 $\mathbf{X}$，通过固定第一和第二模态所生成的一种特殊纤维，例如 $\mathbf{X}(i,j,:)$，称为管。记号“conj”表示矩阵的逐分量复共轭。记号 $\|.\|_F$ 表示张量/矩阵的弗罗贝尼乌斯范数，$|.|$ 表示一个数的绝对值。符号 $\|.\|_2$ 表示矩阵的谱范数或向量的欧几里得范数。摩尔－彭若斯逆记作 $\dagger$。我们使用 MATLAB 记法表示矩阵或张量的子集。例如，对于给定的数据矩阵 $\mathbf{X}$，$\mathbf{X}(:,\mathcal{J})$ 和 $\mathbf{X}(\mathcal{I},:)$ 表示两个矩阵，它们分别从矩阵 $\mathbf{X}$ 中抽取部分行和列，其中 $\mathcal{I} \subset \{1,2,\ldots,I_1\}$ 和 $\mathcal{J} \subset \{1,2,\ldots,I_2\}$。

定义 1.（t-乘积）设 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 和 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_4 \times I_3}$，t-乘积 $\mathbf{X} * \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_4 \times I_3}$ 定义如下

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{X}} * \underline{\mathbf{Y}} = \text{fold}\left(\text{circ}\left(\underline{\mathbf{X}}\right) \text{unfold}\left(\underline{\mathbf{Y}}\right)\right), \tag{1}$$

其中

$$\text{circ}\left(\underline{\mathbf{X}}\right) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}(:,:,1) & \underline{\mathbf{X}}(:,:,I_3) & \cdots & \underline{\mathbf{X}}(:,:,2) \\ \underline{\mathbf{X}}(:,:,2) & \underline{\mathbf{X}}(:,:,1) & \cdots & \underline{\mathbf{X}}(:,:,3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{X}}(:,:,I_3) & \underline{\mathbf{X}}(:,:,I_3-1) & \cdots & \underline{\mathbf{X}}(:,:,1) \end{bmatrix},$$

and

$$\text{unfold}(\underline{\mathbf{Y}}) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}(:,:,1) \\ \underline{\mathbf{Y}}(:,:,2) \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{Y}}(:,:,I_3) \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Y}} = \text{fold}\left(\text{unfold}\left(\underline{\mathbf{Y}}\right)\right).$$

如 [29, 23], 所述，t-乘积通过离散傅里叶变换（DFT）实现；而 [30] 建议使用任意可逆变换，而非DFT。后来，[31] 和 [32], 分别采用了不可逆变换, 甚至非线性变换。使用此类酉变换的优点在于，能够计算管状秩较低的数据张量的t-SVD[33, 31] （稍后讨论）。MATLAB命令$\text{fft}(\mathbf{X}, [], 3)$计算数据张量$\mathbf{X}$所有管的DFT。t-乘积的快速版本总结于算法1中，其中只需对前 $\lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil$ 个正面切片进行DFT，而原始版本则处理所有正面切片 [29, 23]。

定义2.（转置）张量$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 的转置记为$\mathcal{X}^T \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_1 \times I_3}$，其通过对张量$\mathcal{X}$的所有正面切片进行转置，并将转置后的正面切片从第二个到最后一个逆序排列而得到。

定义 3.（单位张量）单位张量 $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$ 的第一个正面切片是大小为 $I_1 \times I_1$ 的单位矩阵，其余正面切片均为零。易证，对于所有尺寸相容的张量，$\mathcal{I} * \mathcal{X} = \mathcal{X}$，且 $\mathcal{X} * \mathcal{I} = \mathcal{X}$。

定义 4.（正交张量）若张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$ 满足 $\mathcal{X}^T * \mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{X}^T = \mathcal{I}$，则称其为正交张量。

定义 5.（f-对角张量）若张量的所有正面切片均为对角矩阵，则称该张量为 f-对角张量。

定义 6.（张量的逆）张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$ 的逆记作 $\mathcal{X}^{-1} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$，它是满足以下方程的唯一张量：

$$\mathcal{X}^{-1} * \mathcal{X} = \mathcal{X} * \mathcal{X}^{-1} = \mathcal{I},$$

其中，$\mathcal{I}$ 是大小为 $I_1 \times I_1 \times I_3$ 的单位张量。根据算法2所示，张量的逆可以在傅里叶域中快速计算。

算法1：两个张量的快速 t-乘积 [29, 34]

输入：两个数据张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$，$\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_4 \times I_3}$

输出：t-乘积 $\mathcal{C} = \mathcal{X} * \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_4 \times I_3}$

$\widehat{\mathcal{X}} = $ 快速傅里叶变换 $(\mathcal{X}, [], 3)$;

$\widehat{\mathcal{Y}} = $ 快速傅里叶变换 $(\mathcal{Y}, [], 3)$;

对于 $i = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil$ 执行

  $\widehat{\mathcal{C}}(:, :, i) = \widehat{\mathcal{X}}(:, :, i)\, \widehat{\mathcal{Y}}(:, :, i)$;

结束

对 $i = \lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil + 1, \ldots, I_3$ 执行

  $\widehat{\mathcal{C}}(:, :, i) =$ 共轭$(\widehat{\mathcal{C}}(:, :, I_3 - i + 2))$;

结束

$\mathcal{C} =$ 逆快速傅里叶变换 $\left(\widehat{\mathcal{C}}, [], 3\right)$;

算法2：张量 X 的快速求逆计算

Input : The data tensor $\underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$
Output: Tensor Inverse $\underline{\mathbf{X}}^{-1} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$

$\widehat{\underline{\mathbf{X}}} = \text{fft}\left(\underline{\mathbf{X}}, [], 3\right)$;
for $i = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil$ **do**
  $\widehat{\underline{\mathbf{C}}}\left(:, :, i\right) = \text{inv}\left(\widehat{\underline{\mathbf{X}}}(:, :, i)\right)$;
end
for $i = \lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil + 1, \ldots, I_3$ **do**
  $\widehat{\underline{\mathbf{C}}}\left(:, :, i\right) = \text{conj}(\widehat{\underline{\mathbf{C}}}\left(:, :, I_3 - i + 2\right))$;
end
$\underline{\mathbf{X}}^{\dagger} = \text{ifft}\left(\widehat{\underline{\mathbf{C}}}, [], 3\right)$;

以下恒等式

$$\|\underline{\mathbf{X}}\|_F^2 = \frac{1}{I_3} \sum_{i=1}^{I_3} \|\widehat{\underline{\mathbf{X}}}(:, :, i)\|_F^2, \tag{2}$$

在我们的误差分析中很有用，其中 $\underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 是给定的数据张量，$\widehat{\mathbf{X}}(:, :, i)$ 是张量 $\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{X}, [], 3)$ 的第 i 个正面切片，见 [35]。我们将在理论分析中使用这个恒等式。

3。基于 t-乘积和管状杠杆分数的张量分解 **es**

张量奇异值分解（t-SVD）是一种可行的张量分解方法，可将一个张量表示为三个张量的 t-乘积。首尾两个张量是正交的，而中间张量是 f-对角张量。t-SVD 向三阶以上张量的推广见 [36]。设 $\underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$，则 t-SVD 给出以下模型

$$\underline{\mathbf{X}} \approx \underline{\mathbf{U}} * \underline{\mathbf{S}} * \underline{\mathbf{V}}^T,$$

其中 $\underline{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$、$\underline{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{R \times R \times I_3}$ 和 $\underline{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{I_2 \times R \times I_3}$。张量 U 和 V 是正交的，而张量 S 是 f-对角的。我们还将 U 和 V 分别称为张量 X 的 R 主左、右奇异侧向切片。t-SVD 的计算过程见算法 3。如图所示，算法 3 只需对傅里叶

域中的前 [37, 34] 个切片进行 SVD。考虑到离散傅里叶变换的特殊结构，这一思路在 [29, 23] 中被提出；而最初在 [29, 23] 中开发的 t-SVD 算法则需要对所有正面切片进行 SVD。请注意，这一技巧仅适用于实张量；对于复张量，我们需要在傅里叶域中计算所有正面切片的 SVD。显然，我们应利用这一思路跳过冗余计算。

对于三阶张量 [19]，可以定义横向切片和水平切片的管状杠杆分数。U 的水平切片的管状杠杆分数定义如下：$l_i = \|\mathsf{U}(i,:,:)\|_F^2,\ i = 1, 2, \ldots, I_1$. V 的横向切片的管状杠杆分数也可以用类似的方法计算。这里，我们考虑$l'_j = \|\mathsf{V}(j,:,:)\|_F^2,\ j = 1, 2, \ldots, I_2$. 可以根据较高的管状杠杆分数或使用概率分布来选择重要的横向/水平切片

$$P_i = \frac{l_i}{R},\ i = 1, 2, \ldots, I_1, \quad P_j = \frac{l'_j}{R},\ j = 1, 2, \ldots, I_2, \tag{3}$$

其中，分数 P_i 和 P_j 分别是选择第 i 个水平切片和第 j 个横向切片的概率。显然，

$$\sum_{i=1}^{I_1} \|\underline{\mathbf{U}}(i,:,:)\|_F^2 = \sum_{j=1}^{I_2} \|\underline{\mathbf{V}}(j,:,:)\|_F^2 = R,$$

而且，式 (3) 中的分数确实定义了概率分布。文献 [19] 的作者使用管状杠杆分数对水平切片和横向切片进行采样，以实现低管秩近似。我们将在第 7 节中使用管状杠杆分数作为水平切片和横向切片采样的基线方法。

4. 矩阵和张量 CUR近似方法

矩阵CUR或交叉近似是一种广泛用于快速低秩矩阵近似的方法，它具有可解释的因子矩阵和线性计算复杂度 [6]。该方法对数据矩阵的个别列和行进行采样，因此能够保留原始数据矩阵的非负性或稀疏性等属性。设 $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ 为给定的数据矩阵。CUR近似旨在构造如下形式的近似：$\mathsf{X} \approx \mathsf{CUR}$，其中 $\mathsf{C} = \mathsf{X}(:, \mathcal{J})$，$\mathsf{R} = \mathsf{X}(\mathcal{I}, :)$，且$\mathcal{I} \subset \{1, 2, \ldots, I_1\}$ and $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \ldots, I_2\}$。最优的中间矩阵为

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{R}^{\dagger}. \tag{4}$$

算法 3：截断 t-SVD 分解

输入：数据张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 和目标管秩 R

输出：张量 $\mathcal{X}$ 的截断 t-SVD，即 $\mathcal{X} \approx \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T$

$\overline{\mathcal{X}} =$ 快速傅里叶变换 $(\mathcal{X}, [], 3)$;

对 $i = 1$、2、...、$\lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil$ 执行

  $[\widehat{\mathcal{U}}(:,:,i), \widehat{\mathcal{S}}(:,:,i), \widehat{\mathcal{V}}(:,:,i)] =$ 截断 - svd $(\widehat{\mathcal{X}}(:,:,i), R)$;

结束

对于 $i = \lceil \frac{I_3+1}{2} \rceil + 1, \ldots, I_3$，执行

  $\widehat{\mathcal{U}}(:,:,i) =$ 共轭$(\widehat{\mathcal{U}}(:,:,I_3 - i + 2))$;

  $\widehat{\mathcal{S}}(:,:,i) = \widehat{\mathcal{S}}(:,:,I_3 - i + 2)$;

  $\widehat{\mathcal{V}}(:,:,i) =$ 共轭$(\widehat{\mathcal{V}}(:,:,I_3 - i + 2))$;

结束

$\mathcal{U}_R =$ 逆快速傅里叶变换 $\left(\overline{\mathcal{U}}, [], 3\right)$; $\mathcal{S}_R =$ 逆快速傅里叶变换 $\left(\overline{\mathcal{S}}, [], 3\right)$; $\mathcal{V}_R =$ 逆快速傅里叶变换 $\left(\overline{\mathcal{V}}, [], 3\right)$

这一过程需要对数据矩阵 $\mathbf{X}$ 扫描一到两遍，具体取决于索引的采样方式。例如，采用均匀采样时，无需查看整个数据矩阵；而采用杠杆分数或离散经验插值法（DEIM）时，则需要访问整个数据矩阵。然而，要计算式 (4) 中的中间矩阵 $\mathbf{U}$，这两种方法都需要访问整个数据矩阵 $\mathbf{X}$，这对于超大规模矩阵来说代价过高。为降低计算复杂度，有人提出使用由采样列与采样行交叉得到的交叉矩阵的 Moore–Penrose 伪逆，即 $\mathbf{U} = (\mathbf{X}(\mathcal{J}, \mathcal{I}))^{\dagger}$，并考虑 CUR 近似

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{CUR}. \tag{5}$$

已证明 [9]，后一个近似确实在采样的列索引和行索引处插值数据矩阵 $\mathbf{X}$。更准确地说，如果 $\mathbf{W} = \mathbf{X} - \mathbf{CUR}$，那么 $\mathbf{W}(\mathcal{I}, :) = 0$ 且 $\mathbf{W}(:, \mathcal{J}) = 0$。如果使用通过（4）计算得到的中间矩阵 $\mathbf{U}$，则这一性质不一定成立。此外，文献[38] 证明，对于具有精确秩 R 的数据矩阵 $\mathbf{X}$，只要 $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}(\mathcal{J}, \mathcal{I}))$，则（5）中的 CUR近似是精确的。

列和行可以通过确定性或随机方式选取，从而获得加性或相对近似误差。在确定性情形下，已知最大体积的列或行能够提供近乎最优的解 [8]。离散经验插值法

（DEIM）是另一种确定性方法，它依赖于顶端奇异向量来选取矩阵的列和行[9]。基于先验概率分布的采样方法在文献中也得到广泛应用，所采用的概率分布包括均匀分布、长度平方分布或杠杆分数概率分布；有关这些采样方法的综述，参见 [7], 。研究表明，基于杠杆分数概率分布对列进行采样能够获得具有相对误差精度的近似，这在实践中更受关注 [39]。
MCUR已扩展到张量情形，适用于不同类型的张量分解。例如， [7] 中的作者提出，随机采样展开矩阵中的若干列，以近似Tucker分解的因子矩阵。此外，也有研究建议使用Cross2D方法确定性地采样纤维，而非随机采样。DEIM方法和杠杆分数采样方法也用于[28] 中，对展开矩阵的列进行采样，以近似因子矩阵。 [16] 中使用MCUR计算展开矩阵的低秩近似，进而计算TT近似。 [19], 基于t-乘积推广了交叉近似，其中选取若干水平切片和侧向切片。这里，切片的选取依据管状杠杆分数。 [26, 27] 中使用无放回均匀采样进行图像/视频补全和压缩。然而，关于管状CUR近似的研究仅有这些，该问题尚未得到深入探讨。本文基于t-乘积将DEIM方法扩展到张量情形，并将其与已知采样算法进行了广泛比较。结果表明，与基线方法相比，本文提出的采样方法能够获得更精确的近似，这一点此前在矩阵情形的研究中也有报道。

5. 用于列/行采样的离散经验插值法（DEIM）

DEIM是我们方法中的一个构建模块。它是连续形式的经验插值法的一种离散形式， [40, 41] 用于非线性动力系统的降阶。DEIM方法能够捕捉底层动力系统中的重要变量。随后，它被用于对矩阵中的重要列/行进行采样，以计算低秩矩阵近似 [9]。首先，为了介绍DEIM方法，我们先引入插值投影算子，它在我们的分析中发挥着重要作用。

定义 7. 假设 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R}$ 是一个满秩矩阵，且 $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^R$ 是一个不同索引的集合。插值投影算子 $\mathcal{P}$ 是投影到 $\mathbf{U}$ 的

值域上的斜投影算子，其定义如下

$$\mathcal{P} = \mathbf{U}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{P}^T \tag{6}$$

其中 P = I(:, p)，I 是大小为 $I_1 \times I_1$ 的单位矩阵。

令 y = $\mathcal{P}$x，则如 [9], 所示，算子 $\mathcal{P}$ 的一个重要性质是：它保留 x 中索引为 p 的元素，即

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{P}^T\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{U}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}). \tag{7}$$

这说明该算子 $\mathcal{P}$ 被称为插值是有原因的，因为它可以在索引集 p 上对向量 x 进行插值。

DEIM 算法根据给定矩阵基的列迭代地采样列/行。该方法总结于算法 4。对于给定的数据矩阵 X $\in \mathbb{R}^{I_1\times I_2}$，DEIM 算法使用基 U =[$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_R$] $\in \mathbb{R}^{I_1\times R}$ 来采样 X 中重要行的索引。它首先从第一列 $\mathbf{u}_1$ 开始，并选择绝对值最大的元素所对应的索引，即

$$\mathbf{u}_1(p_1) = \|\mathbf{u}_1\|_\infty,$$

并令 p = $[p_1]$。然后，通过先计算残差来选择一个新的索引 p_2。

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathcal{P}_1\mathbf{u_1},$$

其中，$\mathcal{P}_1 = \mathbf{u}_1\left(\mathbf{P}_1^T\mathbf{u}_1\right)^{-1}\mathbf{P}_1^T$是将 p 插值投影到 $\mathbf{u}_1$的值域上的插值投影算子。选择 $\mathbf{r}_1$ 中绝对值最大的索引，即 $\mathbf{r}_1(p_2) = \|\mathbf{r}_1\|_\infty$，并将索引集更新为 p = $[p_1, p_2]$。通过从下一个向量中消去前面基向量中所谓插值投影的方向，并再次寻找残差向量中幅值最大的元素索引，继续执行该过程。更准确地说，假设我们已经将 $(j-1)$ 个行索引采样为 $\mathbf{p}_{j-1} = [p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}]$，现在需要选择第 j 个行索引。残差项 $\mathbf{r}_{j-1}$ 计算如下

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{u}_j - \mathcal{P}_{j-1}\mathbf{u}_j. \tag{8}$$

其中

$$\mathcal{P}_{j-1} = \mathbf{U}_{j-1}\left(\mathbf{P}_{j-1}^T\mathbf{U}_{j-1}\right)^{-1}\mathbf{P}_{j-1}^T, \tag{9}$$

$$\mathbf{U}_{j-1} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}], \tag{10}$$

$$\mathbf{P}_{j-1} = \mathbf{I}(:, \mathbf{p}_{j-1}). \tag{11}$$

现在，第 j 个索引，即选作 $\mathbf{r}_j(p_j) = \|\mathbf{r}_j\|_\infty$. 的索引。可以观察到，DEIM采样方法要求矩阵 $\mathbf{P}_{j-1}\mathbf{U}_{j-1}$ 在每次迭代中均为非奇异矩阵。在 U 满秩这一假设条件下， [9] 对此进行了说明。请注意，DEIM方法依赖基；但是，对于两个不同的基 Q 和 U，若值域 Range(U) = Range(Q)，则 DEIM 方法会给出相同的索引 [41]

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{P}^T = \mathbf{Q}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{P}^T,$$

注1。 [9] 在第 j次迭代中，$\mathbf{r}_{j-1}(\mathbf{p}_{j-1}) = 0$，因为 $\mathbf{P}_{j-1}\mathbf{u}_j$在索引 $\mathbf{p}_{j-1}$处与 $\mathbf{u}_j$ 匹配。这保证了每次迭代采样的索引各不相同。

离散经验插值法得到的近似的误差界将在下一个引理中给出。

引理2。 [9, 28] 假设 $\mathbf{P}^T\mathbf{U}$ 可逆，并令 $\mathcal{P}$ 为插值投影算子 $\mathcal{P} = \mathbf{U}(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{P}^T$。若 $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$，则任意 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ 满足

$$\|\mathbf{X} - \mathcal{P}\mathbf{X}\|_F^2 \le \|(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\|_2^2 \|(\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{X}\|_F^2, \tag{12}$$

此外，如果 U 由 X 的 R 主左奇异向量组成，则

$$\|\mathbf{X} - \mathcal{P}\mathbf{X}\|_F^2 \le \|(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\|_2^2 \|(\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{X}\|_F^2 \le \|(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\|_2^2 \sum_{t>R} \sigma_t^2. \tag{13}$$

列选择过程也可以表述为如下形式

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathcal{W}\|_F^2 \le \|(\mathbf{V}^T\mathbf{Q})^{-1}\|_2^2 \|\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T)\|_F^2 \le \|(\mathbf{V}^T\mathbf{Q})^{-1}\|_2^2 \sum_{t>R} \sigma_t^2, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{W} = \mathbf{V}(\mathbf{Q}^T\mathbf{V})^{-1}\mathbf{Q}^T$，且 $\mathbf{Q} = [\mathbf{e}_{q_1}、\mathbf{e}_{q_2}、\ldots\ldots、\mathbf{e}_{q_j}]$是与行索引集 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_j]$ 对应的一组标准单位向量，V 是矩阵 X 的行空间的一组基。由此可见，以下量

$$\eta_p = \|(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\|_2^2, \quad \eta_q = \|(\mathbf{V}^T\mathbf{Q})^{-1}\|_2^2, \tag{15}$$

在误差上界中发挥重要作用。因此，问题的条件性很大程度上取决于这些量，我们希望采用使这些量尽可能小的采样算法。有关上述各量的上界，请参见 [9]。下面的引理给出了利用离散经验插值法进行行/列选择所得到的 CUR近似的上界。

引理 3. [9] 假设 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ 对于行索引 p 和列索引 q，矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{X}(:,q) = \mathbf{XQ}$ 和 $\mathbf{R} = \mathbf{X}(p,:) = \mathbf{PX}$ 均为满秩，其中

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \ldots, \mathbf{e}_{p_j}], \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{e}_{q_2}, \ldots, \mathbf{e}_{q_j}],$$

其中有限误差常数 η_p 和 η_q 在式 (15) 中定义，并令 $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{R}^{\dagger}$，其中 $1 \leq R < \min(I_1, I_2)$。那么

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{CUR}\|_2^2 \leq (\eta_p + \eta_q)\sigma_{R+1}^2. \tag{16}$$

利用弗罗贝尼乌斯范数的次乘性，我们有

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{CUR}\|_F^2 \leq (\eta_p + \eta_q) \sum_{t>R} \sigma_t^2. \tag{17}$$

6. 用于横向切片采样的管状离散经验插值法（TDEIM）

已有实证结果表明，[9], DEIM 算法优于杠杆分数采样法，是表现最佳的采样方法之一。这促使我们基于 t-乘积将其推广到张量情形。本节将讨论如何恰当地进行这一推广。我们还研究管状离散经验插值法与管杠杆分数采样之间的联系。我们将推广后的方法称为管状离散经验插值法（TDEIM）。与 DEIM 类似，TDEIM 的一个关键概念是插值投影算子，现将其定义如下。对于给定的一组 R 索引 $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^R$、一个满管秩张量[3] $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$，考虑 $\mathbf{S} = \mathbf{I}(:, \mathbf{s}, :) \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$，将其作为选择张量，其中 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1 \times I_3}$ 是单位张量。张量斜投影算子定义如下

$$\underline{\mathcal{P}} = \underline{\mathbf{U}} * (\underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{U}})^{-1} * \underline{\mathbf{S}}^T. \tag{18}$$

定义 8.（水平切片采样）设 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 为给定张量，$\mathbf{s} \in \mathbb{N}^R$ 为索引集。收集张量 X 的部分水平切片所得的子张量 $\mathbf{X}(\mathbf{s}, :, :) \in \mathbb{R}^{R \times I_2 \times I_3}$ 称为水平切片采样张量。假设 $\mathbf{S} = \mathbf{I}(:, \mathbf{s}, :) \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$，则水平切片采样等价于 $\mathbf{X}(\mathbf{s}, :, :) = \mathbf{S}^T * \mathbf{X}$。

[3] 具有线性无关侧向切片的张量，例如由 t-SVD 得到的张量 U，可以用于此处。

给定任意张量 $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 且 $\mathcal{X} = \underline{\mathcal{P}} * \mathcal{G}$，我们有

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s}, :, :) &= \underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{U}} * (\underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{U}})^{-1} * \underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{G}} \\ &= \underline{\mathbf{S}}^T * \underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}, :, :). \end{aligned} \tag{19}$$

这意味着投影算子 $\underline{\mathcal{P}}$ 保留了由索引集 $\mathbf{s}$ 指定的 $\mathcal{G}$ 的水平切片。

下面介绍如何使用 TDEIM 对给定张量的水平切片进行采样。TDEIM 首先从基张量的第一个横向切片开始，即 $\mathcal{U}(:, 1, :)$，然后在其所有管中选择欧几里得范数最大的索引，例如 $s_1 = \arg\max_{1 \le i \le I_1} \|\mathcal{U}(i, 1, :)\|$。第一个采样水平切片的索引为 s_1。随后，根据残差横向切片的管的欧几里得范数最大所对应的索引来选择后续索引；该残差横向切片是通过从后续基水平切片中移除前一个基水平切片的插值投影方向计算得到的。更具体地说，设已选索引为 $\mathbf{s}_{j-1} = \{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}\}$，现在希望选择新的索引 s_j。为此，我们计算残差切片

$$\underline{\mathbf{R}}(:, j, :) = \underline{\mathbf{U}}(:, j, :) - \underline{\mathcal{P}}_{j-1} * \underline{\mathbf{U}}(:, j, :),$$

其中 $\underline{\mathcal{P}}_{j-1} = \mathcal{U}^{j-1} * (\mathcal{S}^{j-1^T} * \mathcal{U}^{j-1})^{-1} * \mathcal{S}^{j-1^T}$，$\mathcal{S}^{j-1} = \mathcal{I}(:, \mathbf{s}_{j-1}, :)$，且 $\mathcal{U}^{j-1} = \mathcal{U}(:, \mathbf{s}_{j-1}, :)$。然后，计算管的欧几里得范数最大的一个新采样水平切片索引 s_j，或者

$$s_j = \arg\max_{1 \le i \le I_1} \|\underline{\mathbf{R}}(i, j, :)\|_2.$$

选择使用基张量 $\mathcal{V}$ 的侧向切片时，也可以采用相同的过程。用于采样水平切片的 TDEIM 方法总结于算法 5 中。对算法 5 稍作修改，即可用于侧向切片采样。与引理2类似，下面的定理给出了 TDEIM 方法所得近似的误差界。

引理4. 假设 $\underline{\mathcal{P}} = \mathcal{U} * (\mathcal{S}^T * \mathcal{U})^{-1} * \mathcal{S}^T$ 且 $\mathcal{S}^T * \mathcal{U}$ 可逆。若 $\mathcal{U}^T * \mathcal{U} = \mathcal{I}$，则任意张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 满足

$$\|\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathcal{P}} * \underline{\mathbf{X}}\|_F^2 \le \frac{1}{I_3} \max_i \left(\|(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i)^{-1}\|_2^2 \right) \sum_{i=1}^{I_3} \|(\mathbf{I} - \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i^T) \widehat{\mathbf{X}}_i\|_F^2, \tag{20}$$

其中 $\widehat{\mathcal{X}} = \text{快速傅里叶变换}(\mathcal{X}, [], 3)$，$\widehat{\mathcal{U}} = \text{快速傅里叶变换}(\mathcal{U}, [], 3)$，$\widehat{\mathcal{S}} = \text{快速傅里叶变换}(\mathcal{S}, [], 3)$。此处，$\mathcal{X}_i = \mathcal{X}(:, :, i)$，$\mathcal{S}_i = \mathcal{S}(:, :, i)$，$\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(:, :, i)$。此外，若 $\mathcal{U}$ 包含张量 $\mathcal{X}$ 的 R 个领先左奇异侧向切片，则

$$\|\underline{\mathcal{X}} - \underline{\mathcal{P}} * \underline{\mathcal{X}}\|_F^2 \leq \frac{1}{I_3} \max_i \left(\|(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i)^{-1}\|_2^2 \right) \sum_{i=1}^{I_3} \sum_{t>R} (\sigma_t^i)^2, \tag{21}$$

其中，σ_t^i 是正面切片 $\widehat{\mathcal{X}}_i = \widehat{\mathcal{X}}(:, :, i)$ 的第 t 大奇异值。

证明。由恒等式 (2)，可得

$$\|\underline{\mathcal{X}} - \underline{\mathcal{P}} * \underline{\mathcal{X}}\|_F^2 = \frac{1}{I_3} \sum_{i=1}^{I_3} \|\widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i - \widehat{\underline{\mathcal{P}}}_i \widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i\|_F^2, \tag{22}$$

其中，$\underline{\mathcal{P}} = \text{fft}(\mathcal{P}, [], 3)$，且 $\underline{\mathcal{P}}_i = \underline{\mathcal{P}}(:, :, i)$。利用引理2，可得

$$\begin{aligned}
\|\underline{\mathcal{X}} - \underline{\mathcal{P}} * \underline{\mathcal{X}}\|_F^2 &= \frac{1}{I_3} \sum_{i=1}^{I_3} \|\widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i - \widehat{\underline{\mathcal{P}}}_i \widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i\|_F^2 \\
&\leq \frac{1}{I_3} \sum_{i=1}^{I_3} \|(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i)^{-1}\|_2^2 \|(\mathbf{I} - \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i^T) \widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i\|_F^2 \\
&\leq \frac{1}{I_3} \max \left(\|(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i)^{-1}\|_2^2 \right) \sum_{i=1}^{I_3} \|(\mathbf{I} - \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i^T) \widehat{\underline{\mathbf{X}}}_i\|_F^2,
\end{aligned}$$

考虑到 $\widehat{\underline{\mathcal{P}}}_i = \widehat{\underline{\mathcal{U}}}_i (\widehat{\mathcal{S}}_i^T \widehat{\underline{\mathcal{U}}}_i)^{-1} \widehat{\mathcal{S}}_i^T$，其中 $\widehat{\mathcal{S}} = \text{fft}(\mathcal{S}, [], 3)$，且 $\widehat{\mathcal{S}}_i = \widehat{\mathcal{S}}(:, :, i)$。至此，第一部分的证明完成。只需考虑 $\|(\mathbf{I} - \widehat{\mathcal{U}}_i \widehat{\underline{\mathcal{U}}}_i^T) \widehat{\mathcal{X}}_i\|_F^2 = \sum_{t>R} (\sigma_t^i)^2$ 并将其代入最后一个方程，即可得到定理的第二部分。

□

与矩阵情形类似，我们引入以下两个量

$$\tilde{\eta}_p = \frac{1}{I_3} \max_i \left(\|(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i)^{-1}\|_2^2 \right), \quad \tilde{\eta}_q = \frac{1}{I_3} \max_i \left(\|(\widehat{\underline{\mathbf{V}}}_i^T \widehat{\underline{\mathbf{Q}}}_i)^{-1}\|_2^2 \right), \tag{23}$$

将在下一个定理中使用。这里，$\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{I_2 \times R \times I_3}$ 是原始数据张量的侧向切片子空间的一组张量基，$\mathcal{Q} = \mathcal{I}(:, s_{j-1}, :)$ 是由索引集 $\widehat{s}_{j-1} = \{s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}\}$ 指定的单位张量的若干采样侧向切片构成的张量，$\underline{\mathcal{Q}} = \text{fft}(\mathcal{Q}, [], 3)$，$\underline{\mathcal{V}} = \text{fft}(\mathcal{V}, [], 3)$，且 $\underline{\mathcal{Q}}_i = \underline{\mathcal{Q}}(:, :, i)$，$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}(:, :, i)$。

定理 5. 设 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 且 $1 \leq R < \min(I_1, I_2)$。假设水平切片和侧向切片索引 p 和 q 得到满管状秩张量 $\mathcal{C} = \mathcal{X}(:, q, :) = \mathcal{X} * \mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{R} = \mathcal{X}(p, :, :) = \mathcal{P} * \mathcal{X}$，其中 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 分别是用于水平切片采样和侧向切片采样的张量插值投影算子，其对应的有限误差常数为 $\tilde{\eta}_p$, $\tilde{\eta}_q$，定义见式 (23)，并令 $\mathcal{U} = \mathcal{C}^{\dagger} * \mathcal{X} * \mathcal{R}^{\dagger}$。则

$$\|\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{C}} * \underline{\mathbf{U}} * \underline{\mathbf{R}}\|_F^2 \leq (\tilde{\eta}_p + \tilde{\eta}_q) \sum_{i=1}^{I_3} \sum_{t>R} (\sigma_t^i)^2, \tag{24}$$

其中，σ_t^i 是正面切片 $\widehat{\mathbf{X}}_i = \widehat{\mathbf{X}}(:, :, i)$ 的第 t 大奇异值。

证明。利用恒等式 (2)，可得

$$\|\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{C}} * \underline{\mathbf{U}} * \underline{\mathbf{R}}\|_F^2 = \frac{1}{I_3} \sum_{i=1}^{I_3} \|\widehat{\underline{\mathbf{X}}} - \widehat{\underline{\mathbf{C}}}_i \, \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_i \, \widehat{\underline{\mathbf{R}}}_i\|_F^2,$$

其中，$\widehat{\mathcal{C}} = \text{fft}(\mathcal{C}, [], 3)$、$\widehat{\mathcal{U}} = \text{fft}(\mathcal{U}, [], 3)$、$\widehat{\mathcal{R}} = \text{fft}(\mathcal{R}, [], 3)$，且 $\widehat{\mathcal{C}}_i = \widehat{\mathcal{C}}(:, :, i)$、$\widehat{\mathcal{U}}_i = \widehat{\mathcal{U}}(:, :, i)$、$\widehat{\mathcal{R}}_i = \widehat{\mathcal{R}}(:, :, i)$。然后，可由引理 3 直接得出该结果。 □

定理 5 表明，采用上述中间张量的 TDEIM 近似，其误差不超过最佳管状秩 R 近似误差的 $\tilde{\eta}_p + \tilde{\eta}_q$ 倍。该定理还指出，问题的条件性取决于这两个量，因此应以能够控制这两个量的方式选择侧向/水平切片。在模拟部分（7）中，我们将展示，所提出的 TDEIM 得到的这两个量 $\tilde{\eta}_p$ 和 $\tilde{\eta}_q$ 较低，且变化平滑。

6.1. 更快的 TDEIM 算法

尽管 TDEIM 可用于选择侧向和水平切片的索引，但它的主要限制是，所选索引的最大数量必须与张量 $\mathcal{X}$ 的指定管状秩 R 相匹配。若使用更大的 R，就需要计算更大的张量基 $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$，这会增加计算复杂度和内存需求，使该算法不适用于大型数据张量。[42]，建议将离散经验插值法与杠杆分数方法相结合，以找到多于 R 个列/行索引。设给定 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$。其思路是从一个较小的秩 R 开始，其中

算法 4：用于行选择的离散经验插值法索引选择 [9]

输入：$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R}$（具有 $R \leq I_1$（线性无关的列））

输出：$\in \mathbb{N}^R$ 中元素各不相同的索引 s $\{1, 2, \ldots, I_1\}$

$\mathbf{u} = \mathrm{U}(:, 1)$;

$s_1 = \arg\max_{1 \leq i \leq I_1} |\mathrm{u}_i|$

对于 $j = 2, 3, \ldots, R$，执行

  $\mathrm{u} = \mathrm{U}(:\ j)$;

  $\mathrm{c} = \mathrm{U}(s, 1:\ j-1)^{-1}\mathrm{u}(s)$;

  $\mathrm{r} = \mathrm{u} - \mathrm{U}(:, 1:\ j-1)\mathrm{c}$;

  $s_j =$ 参数最大值$_{1 \leq i \leq I_1} |\mathrm{r}_i|$

结束

算法 5：用于水平切片选择的管状离散经验插值法（TDEIM）索引选择方法 输入：$\mathrm{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$，其中 $R \leq I_1$（线性无关的侧向切片） 输出：索引 s $\in \mathbb{N}^R$，其元素在 $\{1, 2, \ldots, I_1\}$ $s_1 = \arg\max_{1 \leq i \leq I_1} \|\mathrm{U}(i, 1, :)$ 中互不相同对于 $j = 2, 3, \ldots, R$，执行 $\mathrm{C} = \mathrm{U}(\mathrm{s}, 1:\ j-1, :)^{-1} * \mathrm{U}(\mathrm{s}\ j, :)$; $\mathrm{R} = \mathrm{U}(:\ j, :) - \mathrm{U}(:, 1:\ j-1, :) * \mathrm{C}$; ~~$s_j = \arg\max_{1 \leq i \leq I_1} \|\mathrm{R}(i, j, :)\|_2$~~ 结束

$R < R' < \min(m, n)$，并应用 DEIM 选取矩阵 X 的 R 行。随后，根据残差的杠杆分数再选取更多 $R' - R$ 索引。由于 $R < R'$，我们只需计算较小集合的左奇异向量 R，而非 R'，因此可以加快计算。我们可以将这一思路直接推广到张量，并在算法6中总结了该方法。事实上，我们只需计算大小为 $I_1 \times R \times I_3$的左奇异张量 U，而非 $I_1 \times R' \times I_3$；其余索引则根据算法6第5至7行中残差张量 U 的管状杠杆分数进行采样。

注6。算法4和算法5所需的基张量 U 和 V，可以通过随机截断 t-SVD [35, 43, 44]快速计算。此版本可视为 TDEIM 算法的随机化版本。

算法6：提出的混合管状杠杆分数与TDEIM（HT-DEIM）

输入：U $\in \mathbb{R}^{I_1 \times R \times I_3}$ 和 V $\in \mathbb{R}^{I_2 \times R \times I_3}$，目标管状秩为 R
其中 $R \leq R' \leq \min\{I_1, I_2\}$

输出：索引集 s $\in \mathbb{N}^R$ 和 p $\in \mathbb{N}^R$，其中元素互不相同，位于 $\{1, 2, \ldots, I_1\}$ 和 $\{1, 2, \ldots, I_2\}$ 中，分别对应选定的水平和侧向切片

1 对于 $j = 1$、2、.....、R，执行
2 $\quad s(j) = \max_{1 \leq i \leq I_1} \|U(i, j, :)\|$;
3 $\quad U = U - U(s, 1 : j-1, :)^{-1} * U(s\ j, :)$;
4 结束
5 计算管状杠杆分数 $l_i = \|U(i, :, :)\|^2$，$i = 1$、2、.....、I_1，并按非递增顺序对 l 进行排序;
6 删除 l 中与 s 中索引对应的分量;
7 采样与 l中 $R' - R$ 个最大元素对应的 $s' = R' - R$ 索引;
8 s $= [s;\ s']$;
9 在 V 上执行 1–8，以获得索引集 p

7. 实验

本节展示数值结果，以说明我们提出的算法的性能。我们使用 MATLAB 在一台配备 2.60 GHz Intel(R) Core(TM) i7-5600U 处理器的计算机上实现并运行了所提出的算法

和 8GB 内存。我们进行了四项实验。在第一个模拟中，我们使用合成张量和基于优化的张量。第二个和第三个示例分别用于图像和视频近似。在最后一项实验中，我们使用所提出的管状采样方法，为 MNIST 数据集上的监督分类任务计算一个轻量级模型。我们主要将所提出的 TDEIM 的结果与以下三种采样算法进行比较:

- 最高管状杠杆分数 [19]
- 管杠杆分数采样 [19]
- 无放回均匀采样 [26]

最高杠杆分数方法首先按照第 3 节所述，计算水平切片和侧向切片的管状杠杆分数，然后选择对应于 R 最高水平杠杆分数和侧向杠杆分数的索引。管杠杆分数采样方法构建概率分布 (3)，并据此对水平切片和侧向切片进行采样。无放回均匀采样则通过均匀采样来选取水平切片和侧向切片。我们采用不放回的方式执行此过程，因为无需多次选择同一个水平切片或侧向切片。实验报告表明，无放回均匀采样的效果优于有放回采样。我们使用如下定义的“绝对弗罗贝尼乌斯误差”指标

$$\text{Error} = \|\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{C}} * \underline{\mathbf{U}} * \underline{\mathbf{R}}\|_F,$$

以比较所提出的采样方法与所考虑的三种基线方法的性能。

示例 1。（合成张量和基于优化的张量）在本实验中，我们在模拟中使用合成张量和基于优化的张量。首先考虑以下尺寸为 $300 \times 400 \times 300$ 的合成数据张量

$$\underline{\mathbf{X}}(i,j,k) = \frac{1}{(i^p + j^p + k^p)^{1/p}}, \quad 1 \le i,k \le 300,\ 1 \le j \le 400. \tag{25}$$

在模拟中，我们主要使用 $p = 3$ 和 $p = 5$，并使用管状秩为 $R = 15$ 的顶级奇异张量来构建管状杠杆分数，同时将其作为使用 TDEIM 算法的基础。与数据

张量 (25) 对应的 $p = 5$ 和 $p = 3$ 的管状杠杆分数分别显示在图1和图2中。这里，我们还展示了使用 TDEIM 进行水平和侧向切片选择时选取的索引。所提出方法和三种基线方法的误差见图3。可以看出，所提出的算法误差更低，并且随着管状秩增加，误差单调下降。该实验清楚地表明，所提出的算法具有稳健性，且结果优于基准采样算法。我们发现，TDEIM 采样的大多数索引具有较高的管状杠杆分数，但并非全部都如此，这与最高管状杠杆分数的情况不同。这说明，一些管状杠杆分数较低的索引对于获得更准确的结果也至关重要。该实验还表明，均匀采样或选取最高管状杠杆分数可能不稳定，而管杠杆分数采样则能取得更好的结果。 [9] 中也报告了类似的数值结果。不同管状秩对应的误差常数 $\tilde{\eta}_p$ 和 $\tilde{\eta}_q$显示在图4中。该图表明，所述误差常数平稳递增，从而带来更低的误差界和更好的条件性。

在第二组实验中，我们考虑指数函数、拉斯特里金函数、布斯函数、马蒂亚斯函数和伊索姆函数，它们分别是定义如下的二维函数

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -\exp(-0.5(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)), && (26)\\
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 20+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2-10(\cos(2\pi\mathbf{x})+\cos(2\pi\mathbf{y}))), && (27)\\
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (\mathbf{x}+2\mathbf{y}-7)^2+(2\mathbf{x}+\mathbf{y}-5), && (28)\\
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0.26(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)-0.48\mathbf{x}\mathbf{y}, && (29)\\
f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -\cos(\mathbf{x})\cos(\mathbf{y})\exp(-((\mathbf{x}-\pi)^2+(\mathbf{y}-\pi)^2)). && (30)
\end{aligned}
$$

这些函数在优化中被广泛用作基线函数。我们在 $[0, 1000] \times [0, 1000]$ 上对上述函数进行离散化，生成大小为 $1000 \times$1000 的矩阵，然后将其重塑为大小为 $100 \times 100 \times 100$ 的三阶张量。接下来，我们将所提出的 TDEIM 算法和基线方法应用于生成的数据张量，其管状秩为 $R = 10$。各算法取得的误差如表1所示。在大多数情况下，所提出的 TDEIM 方法取得了最佳结果。

现在比较 HTDEIM（算法6）与 TDEIM（算法 5）的运行时间。正如我们在第（6.1）节中所讨论的，对于给定的管状秩 R，TDEIM 需要基张量 U 和 V，以选择 R 个侧向切片和水平切片。对于较大的 R，计算这些数据张量可能代价高昂。为避免这一问题，我们可以采用较小的管状秩 $R' < R$，并使用 TDEIM 来

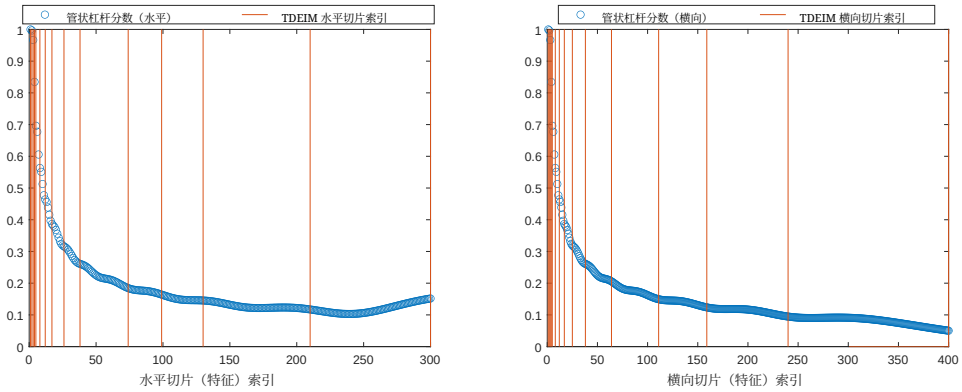


图 1：（左）选定的水平切片索引；（右）针对 $p = 5$ 选定的横向切片索引。示例 1 使用了管状秩为 $R = 15$ 的最高奇异张量。

采样 R' 个水平切片和侧向切片。其余切片（$R - R'$）则根据残差张量的最高管状杠杆分数选取（见第 6.1 小节）。表 2 比较了 HTDEIM 和 TDEIM 算法在数据张量（25）上的运行时间。可以看出，与 TDEIM 方法相比，HTDEIM 算法所需的执行时间更短。表 3 比较了 HTDEIM 和 TDEIM 达到的误差。因此，HTDEIM 算法能更快地得到与 TDEIM 方法相当的结果。

例 2（图像近似）。在此实验中，我们考虑了两幅尺寸为 $256 \times 256 \times 3$ 的彩色图像“Lena”和“Peppers”。我们使用左上和右上、管状秩为 $R = 20$ 的管状奇异张量来构建管状杠杆分数，并将其作为 TDEIM 算法的基底。图 5 和图 6 展示了管状杠杆分数以及 TDEIM 选取的索引。图 7 还报告了所提出算法和三种基准算法所得近似结果的误差。与合成数据的情况类似，所提出算法的较好性能显而易见。在此实验中，所提出的 TDEIM 方法和最高管状杠杆分数方法的误差均单调递减，而管杠杆分数采样和均匀采样方法的误差则没有单调递减。由于管状杠杆分数几乎均匀分布，TDEIM 对横向切片和水平切片的索引进行近似均匀采样。

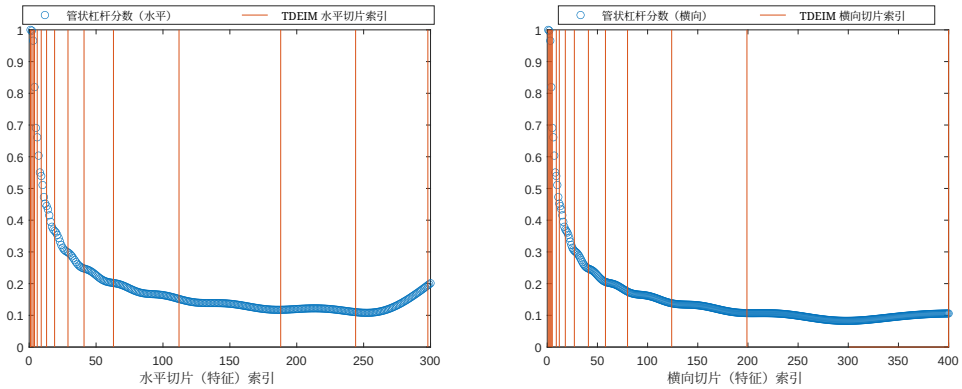


图 2：（左）选定的水平切片索引（右）选定的横向切片索引，针对 $p = 3$。示例 1 使用了管状秩为 $R = 15$ 的最高奇异张量。

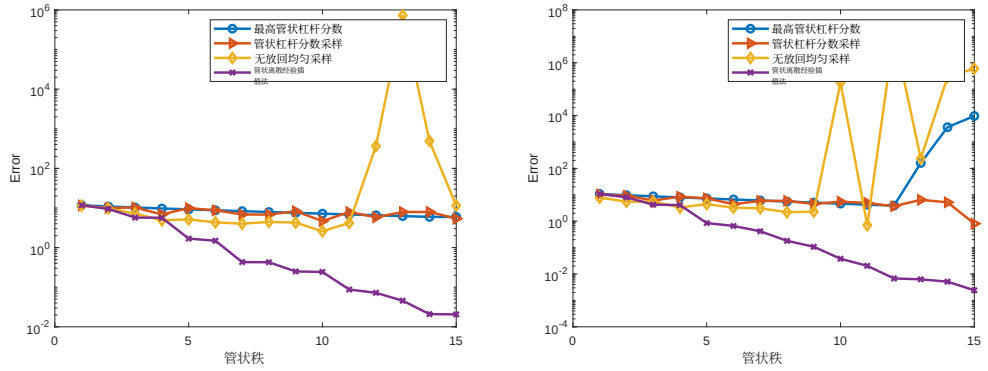
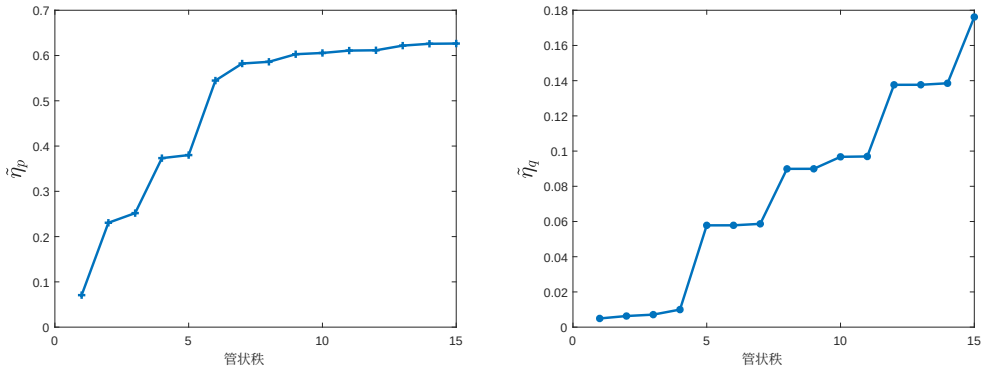


图 3：不同采样算法的误差，（左） $p = 5$ （右） $p = 3$。示例 1 使用了管状秩为 $R = 15$ 的最高阶奇异张量。



Figu图4：数据张量（25）的误差常数 $\tilde{\eta}_p$ 和 $\tilde{\eta}_q$，以及示例 1 中的 $p = 3$.

表1：针对示例 1，使用基于优化的张量得到的管状秩为 $R = 10$ 的低管状近似，通过 TDEIM（算法 5）和基线方法获得的近似误差比较。

张量	最高杠杆值分数	最高杠杆值分数采样	均匀采样不放回	TDEIM
指数函数	2.42e-17	1.38e-17	2.26e-16	2.35e-16
拉斯特里金函数	4.20e-05	1.06e-04	7.88e-05	4.13e-05
布斯函数	1.41e-03	2.22e-04	1.04e-03	2.10e-04
马蒂亚斯	3.70e-06	9.47e-07	1.10e-06	4.09e-07
Easom 函数	7.67e-16	4.96e-16	5.70e-16	7.16e-17

表 2：比较示例 1 的数据张量 (25) 中 HTDEIM（算法6）与 TDEIM（算法 5）的运行时间（秒）。

	$R = 2$	$R = 5$	$R = 10$	$R = 15$
HTDEIM	**12.52**	**14.354**	**17.15**	**20.90**
TDEIM	16.01	23.29	25.31	32.19

表 3：比较示例 1 中 HTDEIM（算法6）和 TDEIM（算法 5）的误差。

	$R = 2$	$R = 5$	$R = 10$	$R = 15$
HTDEIM	0.3102	0.0403	0.0015	0.0014
TDEIM	0.2902	0.0308	0.0014	0.0012

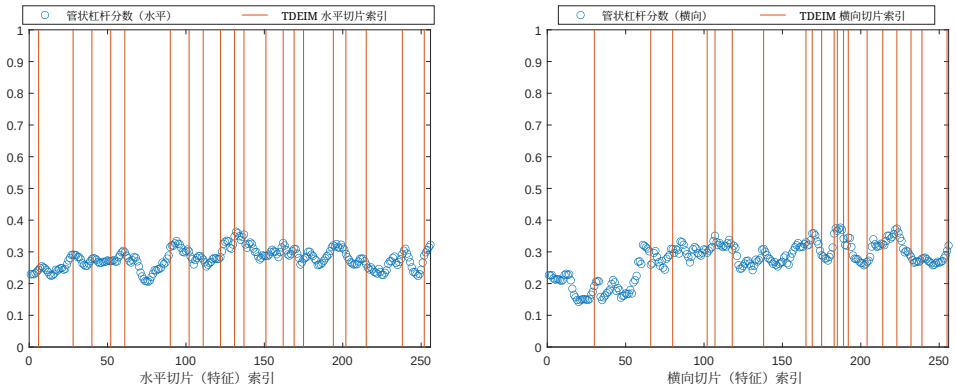


图 5：（左）选取的水平切片索引；（右）Lena 图像选取的横向切片索引。例 2 使用了管状秩为 $R = 20$ 的顶部奇异张量。

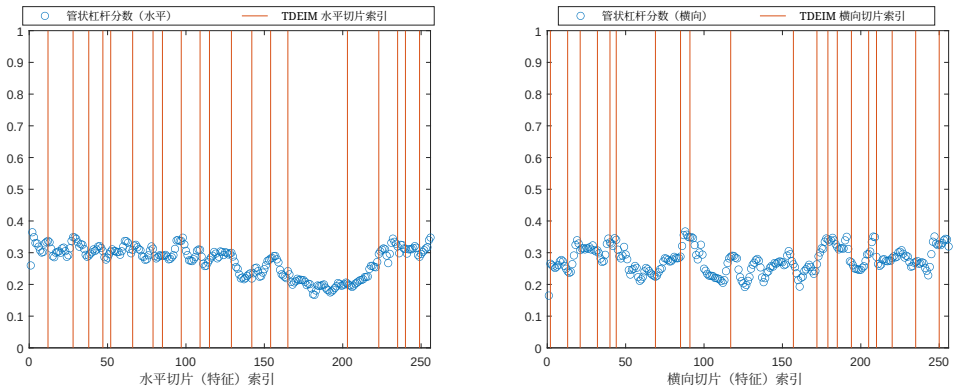


图 6：Peppers 图像的（左）所选水平切片索引（右）所选横向切片索引。例 2 使用了管状秩为 $R = 20$ 的顶端奇异张量。

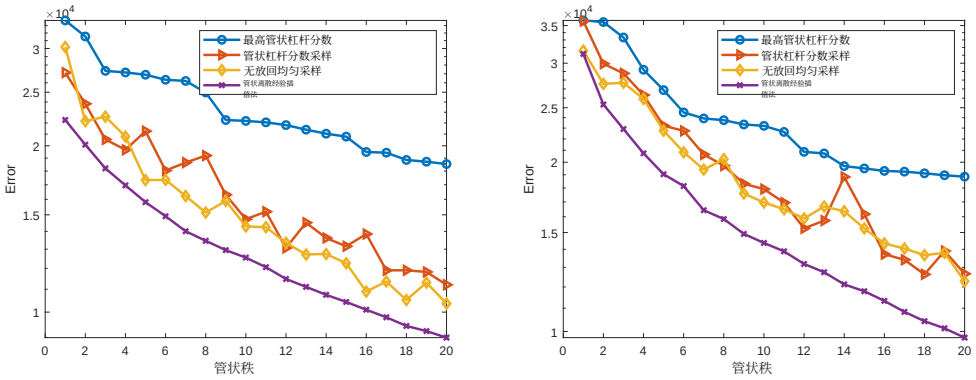


图 7：不同采样算法的误差，（左）Lena（右）Peppers。例 2 使用了管状秩为 $R = 20$ 的最高奇异张量。

例 3。（视频近似）在本实验中，我们考虑了来自 http://trace.eas.asu.edu/yuv/ 的两个视频：“Foreman”和“Suzie 视频”。Foreman 视频的大小为 $176 \times 144 \times 300$，Suzie 视频的大小为 $176 \times 144 \times 150$。对于这两个视频，我们均采用管状秩 $R = 40$，并计算最高奇异张量，以构造管状杠杆分数（水平和横向），同时将其用作 TDEIM 算法中的基。Foreman 和 Suzie 视频数据集的管状杠杆分数，以及由 TDEIM 选出的索引，分别如图 8 和图 9 所示。算法的准确率如图 10 所示。结果验证了所提出的采样方法优于三种广泛使用的基准采样算法。值得注意的是，由于管状杠杆分数并不服从均匀分布，TDEIM 再次选择了高管状杠杆分数区域中的大多数索引，但并非全部索引。

例 4.（分类问题）在本实验中，我们展示所提出的 TDEIM 方法在 MNIST 手写图像子集上的分类任务中的应用。该子集[4], 由数字 1 和 7 的前 1000 张图像组成。每张大小为 28×28 的图像经 Gabor 小波 [45]变换后，得到大小为 $28 \times 28 \times 8$（方向）$\times 4$（尺度）的四阶张量，或大小为 784×8（方向）$\times 4$（尺度）的三阶张量。拼接三阶 Gabor

[4]http://yann.lecun.com/exdb/mnist /

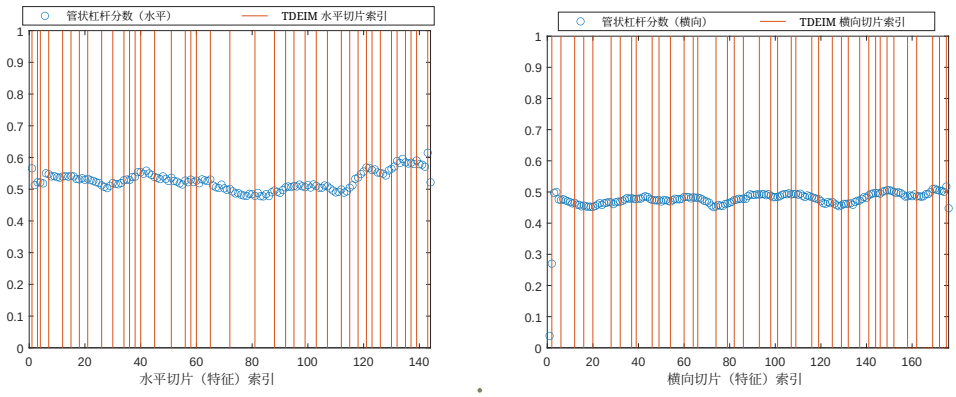


图 8：（左）选取的水平切片索引。（右）Foreman 视频选取的横向切片索引。例 3 使用了管状秩为 $R = 40$ 的顶端奇异张量。

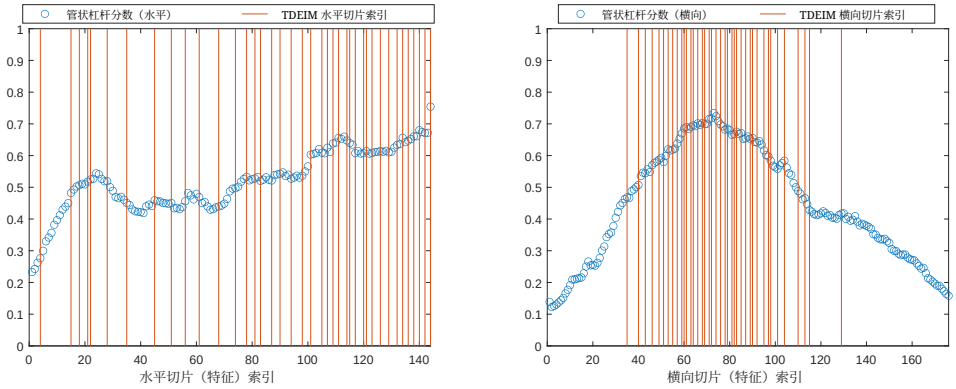


图 9：（左）选定的水平切片索引（右）Suzie 视频选定的横向切片索引。例 3 使用了管状秩为 $R = 40$ 的顶级奇异张量。

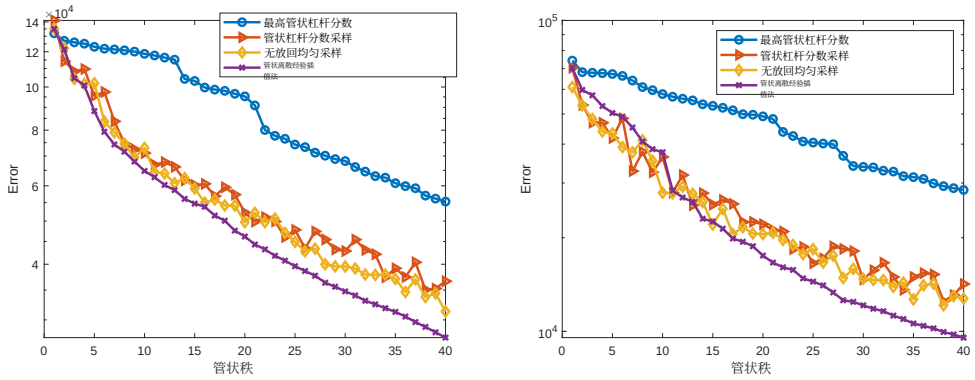


图 10：不同采样算法的误差，（左）Foreman 视频（右）Suzie 视频。例 3 使用了管状秩为 $R = 40$ 的最高阶奇异张量。

将所有图像中的张量合并，得到一个新的张量 $\underline{\mathrm{Y}}$，其维度为 $784 \times 8 \times 4 \times N$，其中 N 为图像数量。

按照10折交叉验证的方法，我们将数据随机分成10折。每轮测试时，使用其中一折数据进行测试，其余数据用于训练。我们在上述数据集[46, 47]上训练了一个线性判别分析分类器（LDA）。众所周知，尽管LDA是一种简单的方法，但它能够提供可靠、易于解释且稳健的分类结果[46, 47]。经LDA训练得到的权重张量是一个大小为 $32 \times 32 \times 28$ 的三阶张量。为了构建参数数量更少的轻量级模型，我们使用所提出的TDEIM方法对部分侧向切片和水平切片进行采样，从而计算权重张量的低管秩近似。这使底层模型的推断速度更快。

我们还计算了采样不同数量的侧向切片和水平切片时，低管秩近似所达到的相应准确率。图 11（上）报告了对数字（1，7）进行分类时，采样不同数量的侧向切片/水平切片所获得的分类准确率。可以看出，采样15个水平切片和侧向切片时，准确率达到0.98，表明该分类器能够较为准确地识别数字1和7。所有不同数字组合的10折交叉验证结果见图 11（下）。结果清楚地表明，该轻量级模型能够正确分类任意数字组合。

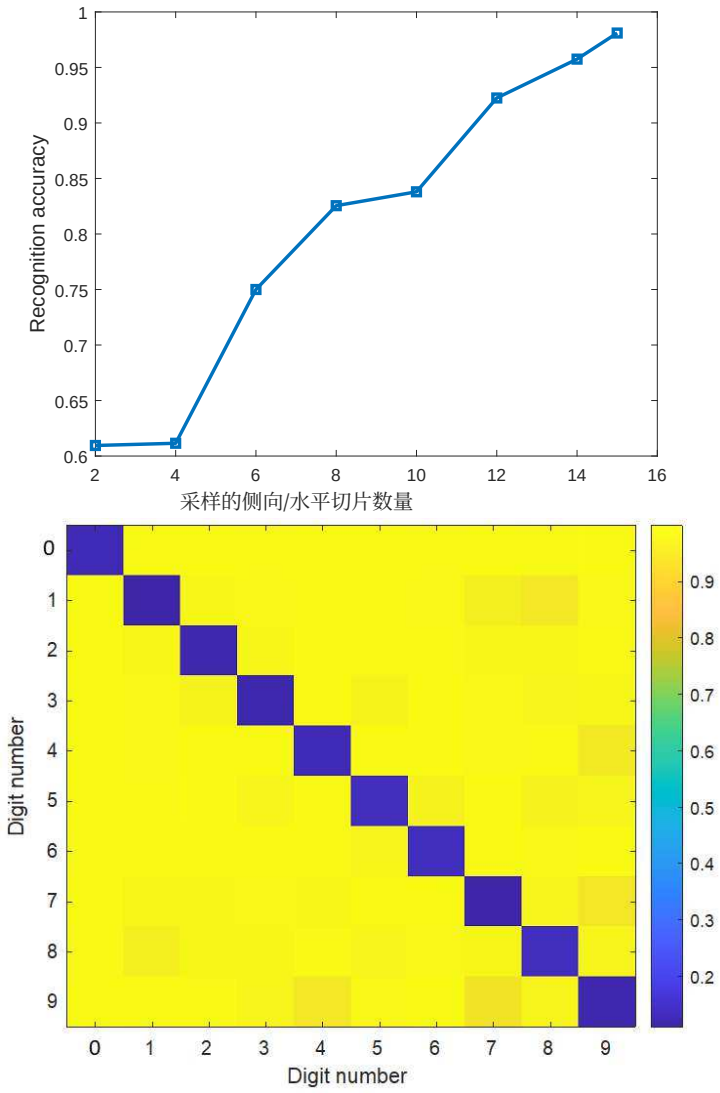


图 11：（上）使用所提出的 TDEIM 方法对权重张量进行低管秩近似时，轻量级数字分类模型（数字 1、7）在不同采样侧向切片和水平切片数量下的准确率。（下）在例 4 中，使用所提出的 TDEIM方法对权重张量进行低管秩近似（管状秩为 $R = 15$）时，轻量级模型对不同数字组合的分类准确率。

8. 结论

本文将离散经验插值法（DEIM）扩展至基于 t-乘积的张量。管状离散经验插值法（TDEIM）用于选取给定三阶张量的重要水平切片和侧向切片。我们研究了 TDEIM 的理论性质，并在合成数据集和真实数据集上进行了模拟。结果表明，与最高管状杠杆分数、管状杠杆分数采样以及 Inform 无放回采样等其他采样算法相比，本文提出的算法具有更高的准确性。

9. 利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] E. Beltrami, 《关于双线性函数》, Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita 11 (2) (1873) 98–106。[2] C. Jordan, 《关于双线性形式的回忆录》, Journal de math´é matiques pures et appliqu´ées 19 (1874) 35–54。[3] C. Jordan, 《关于 n 维几何的论文》, Bulletin de la Soci´été math´ématique de France 3 (1875) 103–174。[4] G. W. Stewart, 《奇异值分解的早期历史》, SIAM Review 35 (4) (1993) 551–566。[5] E. Tyrtyshnikov, 《马赛克骨架方法中的不完全交叉近似》, Computing 64 (4) (2000) 367–380。[6] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtyshnikov, N. L. Zamarashkin, 《伪骨架近似理论》, 线性代数及其应用 261 (1-3) (1997) 1–21。[7] M. W. Mahoney 等, 《矩阵与数据的随机化算法》, Foundations and Trends® in Machine Learning 3 (2) (2011) 123–224。[8] S. A. Goreinov, I. V. Oseledets, D. V. Savostyanov, E. E. Tyrtyshnikov, N. L. Zamarashkin, 《如何找到一个好的子矩阵》, 载于：矩阵方法：理论、算法与应用：纪念 Gene Golub，World Scientific，2010，第 247–256 页。

[9] D. C. Sorensen, M. Embree, 《由离散经验插值法诱导的 CUR 分解》, SIAM Journal on Scientific Computing 38 (3) (2016) A1454–A1482。[10] D. Savostyanov, 《矩阵与积分方程的多线性近似》, 博士论文, 数学系, INM RAS, 莫斯科, 俄罗斯（2006）。[11] C. F. Van Loan, 《奇异值分解的推广》, SIAM Journal on Numerical Analysis 13 (1) (1976) 76–83。[12] C. C. Paige, M. A. Saunders, 《迈向广义奇异值分解》, SIAM Journal on Numerical Analysis 18 (3) (1981) 398–405。[13] P. Y. Gidisu, M. E. Hochstenbach, 《矩阵对的广义 CUR 分解》, SIAM数据科学数学期刊 4 (1) (2022年) 386–409。[14] P. Y. Gidisu, M. E. Hochstenbach, 《矩阵三元组的受限 SVD 型 CUR 分解》, arXiv 预印本 arXiv:2204.02113（2022年）。[15] I. V. Oseledets, D. Savostianov, E. E. Tyrtyshnikov, 《线性时间内三维数组的 Tucker 维数约简》, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 30 (3) (2008) 939–956。[16] I. Oseledets, E. Tyrtyshnikov, 《多维数组的 TT-cross 近似》, 线性代数及其应用 432 (1) (2010) 70–88。[17] C. F. Caiafa, A. Cichocki, 《将列–行矩阵分解推广到多路数组》, 线性代数及其应用 433 (3) (2010) 557–573。[18] P. Drineas, M. W. Mahoney, 《奇异值分解的张量型推广的随机化算法》, 线性代数及其应用 420 (2-3) (2007) 553–571。[19] D. A. Tarzanagh, G. Michailidis, 《基于 t-乘积的张量运算与分解的快速随机化算法及其在成像数据中的应用》, SIAM Journal on Imaging Sciences 11 (4) (2018) 2629–2664。[20] L. R. Tucker 等, 《因子分析向三维矩阵的扩展》, 数学心理学文集 110119 (1964)。

[21] L. R. Tucker, 《三模因子分析的一些数学笔记》, Psycho metrika 31 (3) (1966) 279–311。[22] I. V. Oseledets, 《张量列车分解》, SIAM Journal on Scientific Computing 33 (5) (2011) 2295–2317。[23] M. E. Kilmer, K. Braman, N. Hao, R. C. Hoover, 《作为矩阵算子的三阶张量：一个用于成像的理论与计算框架》, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 34 (1) (2013) 148–172。[24] F. L. Hitchcock, 《张量或多元组表示为乘积之和》, 数学与物理学杂志 6 (1-4) (1927) 164–189。[25] F. L. Hitchcock, 《p路矩阵或张量的多重不变量与广义秩》, 数学与物理学杂志 7 (1-4) (1928) 39–79。[26] S. Ahmadi-Asl, C. F. Caiafa, A. Cichocki, A. H. Phan, T. Tanaka, I. Oseledets, J. Wang, 《用于压缩和降维的交叉张量近似方法》, IEEE Access 9 (2021) 150809–150838。[27] S. Ahmadi-Asl, M. G. Asante-Mensah, A. Cichocki, A.-H. Phan, I. Oseledets, J. Wang, 《用于图像和视频补全的交叉张量近似》, arXiv 预印本 arXiv:2207.06072 (2022年)。[28] A. K. Saibaba, 《Hoid：基于 Tucker 表示的张量高阶插值分解》, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 37 (3) (2016) 1223–1249。[29] M. E. Kilmer, C. D. Martin, 《三阶张量的因式分解策略》, 线性代数及其应用 435 (3) (2011) 641–658。[30] E. Kernfeld, M. Kilmer, S. Aeron, 《具有可逆线性变换的张量-张量乘积》, 线性代数及其应用 485 (2015) 545–570。[31] T.-X. Jiang, M. K. Ng, X.-L. Zhao, T.-Z. Huang, 《三阶张量补全中张量核范数的框架小波表示》, IEEE 图像处理汇刊 29 (2020) 7233–7244。[32] B.-Z. Li, X.-L. Zhao, T.-Y. Ji, X.-J. Zhang, T.-Z. Huang, 《非线性变换诱导的张量补全张量核范数》, Journal of Scientific Computing 92 (3) (2022年) 83。

[33] G. Song, M. K. Ng, X. Zhang, 《使用变换张量奇异值分解的鲁棒张量补全》, Numerical Linear Algebra with Applications 27 (3) (2020) e2299。[34] C. Lu, J. Feng, Y. Chen, W. Liu, Z. Lin, S. Yan, 《具有新张量核范数的张量鲁棒主成分分析》, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 42 (4) (2019) 925–938。[35] J. Zhang, A. K. Saibaba, M. E. Kilmer, S. Aeron, 《基于 t-乘积的随机张量奇异值分解》, Numerical Linear Algebra with Applications 25 (5) (2018) e2179。[36] C. D. Martin, R. Shafer, B. LaRue, 《一种 p 阶张量分解及其在成像中的应用》, SIAM Journal on Scientific Computing 35 (1) (2013) A474–A490。[37] N. Hao, M. E. Kilmer, K. Braman, R. C. Hoover, 《使用张量-张量分解进行人脸识别》, SIAM Journal on Imaging Sciences 6 (1) (2013) 437–463。[38] K. Hamm, L. Huang, 《关于 CUR 分解的观点》, Applied and Computational Harmonic Analysis 48 (3) (2020) 1088–1099。[39] P. Drineas, M. W. Mahoney, S. Muthukrishnan, 《相对误差 CUR 矩阵分解》, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 30 (2) (2008) 844–881。[40] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, A. T. Patera, 《一种“经验插值”方法：其在偏微分方程高效降阶基离散化中的应用》, Comptes Rendus Mathematique 339 (9) (2004) 667–672。[41]S. Chaturantabut, D. C. Sorensen, 《通过离散经验插值进行非线性模型降阶》, SIAM Journal on Scientific Computing 32 (5) (2010) 2737–2764。[42] P. Y. Gidisu, M. E. Hochstenbach, 《一种用于 CUR 索引选择的基于混合 DEIM 和杠杆分数的方法》, 载于：Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021，Springer，2022年，第147–153页。

[43] S. Ahmadi-Asl，一种用于张量奇异值分解的高效随机定精度算法，《应用数学与计算》 (2022年) 1–20。[44] S. Ahmadi-Asl，一种使用任意次数遍历的张量奇异值分解随机化算法，arXiv 预印本 arXiv:2207.12542 (2022年)。[45] T. S. Lee，使用二维Gabor小波进行图像表示，IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 18 (10) (1996年) 959–971。[46] T. Hastie、R. Tibshirani、J. H. Friedman、J. H. Friedman，《统计学习要素：数据挖掘、推断与预测》，第2卷，Springer，2009年。[47] R. A. Fisher，在分类学问题中使用多重测量，《优生学年鉴》7 (2) (1936年) 179–188。