arXiv:2305.00755v1 [math.RA] 1 May 2023

关于幂零李超代数的 Schur 乘子维数

Rudra Narayan Padhan 和 Ibrahem Yakzan Hasan

Abstract. 我们给出了有限维幂零李超代数的 Schur 乘子维数的一个界，该界比此前关于李超代数 Schur 乘子维数的界更精确。

1. 引言 Introduction

李超代数理论在数学和理论物理的许多领域都有应用，因为它可用于描述超对称性。Kac [1] 全面阐述了李超代数的数学理论，并对代数闭域上零特征情形下所有有限维单李超代数进行了分类。过去十年间，李超代数理论取得了显著发展，在表示论和分类方面获得了许多成果。其中大多数成果是李代数中著名结果的推广。1904年，I. Schur 在研究射影表示时引入了群的 Schur 乘子和覆盖。Batten [15] 引入并研究了李代数的 Schur 乘子和覆盖，随后多位作者对此进行了研究，参见 [4, 13, 14, 16–23, 25–27]。对于域 $\mathbb{F}$ 上的有限维李代数 L ， L 的自由表示为 $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$，其中 F是自由李代数， R 是 F的理想。于是，Schur 乘子 $\mathcal{M}(L)$ 与 $F^2 \cap R/[F, R]$同构。Niroomand 和 Russo [25] 证明，对于一个 c步幂零李代数 L，若 $\dim\ L = n$ 且 $\dim\ L^2 = m \geq 1$，则 $\dim(\mathcal{M}(L)) \leq \frac{1}{2}[(n + m - 2)(n - m - 1) + 1.$。最近，Rai [24]改进了这一界，即，

$$\dim(\mathcal{M}(L)) \leq \frac{1}{2}[(n+m)(n-m-1) - \sum_{i=2}^{\min\{c,n-m\}} (n-m-i). \tag{1.1}$$

我们在此指出，这一上界也可由 [6, 定理 1], 推出，其中 Gholami 和 Saeedi 给出了幂零 n-李代数的 Schur 乘子维数上界。关于李超代数 Schur 乘子的研究最近才开始 [2, 5–8, 10–12]。最近，Nayak 对 Niroomand 和 Russo 的上界进行了分析，得到：对于维数为$(m \mid n)$且 $\dim L^2 = (r \mid s)$ 满足$r + s \geq 1$的幂零李超代数，$\dim(\mathcal{M}(L)) \leq \frac{1}{2}[(n + m + r + s - 2)(n + m - r - s - 1)] + n + 1$。本文给出了与（1.1）类似的上界，并改进了 Nayak 的上界。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 为一个域。$\mathbb{Z}_2$ 分次向量空间 V 就是向量空间 $V_{\bar{0}}$ 与 $V_{\bar{1}}$ 的直和，即 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$。它也称为超空间。我们考虑的所有向量超空间和超代数都定义在域 $\mathbb{F}$ 上（ $\mathbb{F} \neq 2$ 的特征为 3）。$V_{\bar{0}}$ 中的元素（分别为 $V_{\bar{1}}$ 中的元素）称为偶元素（分别称为奇元素）。$V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$ 中的非零元素称为齐次元素。对于齐次元素 $v \in V_\sigma$，当 $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ 时，我们令 $|v| = \sigma$ 为 v 的次数。V 的一个子超空间（或子空间） U 是一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次向量子空间，其中 $U = (V_{\bar{0}} \cap U) \oplus (V_{\bar{1}} \cap U)$。我们约定

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 17B10，次要分类号 17B01。

Key words and phrases. 幂零李超代数，Schur 乘子，可实现性。

当次数函数出现在公式中时，相应的元素均被视为齐次元素。

李超代数（见 [1,3]）是一个超空间 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$，配备一个双线性映射 $[.,.]: L \times L \to L$，满足以下恒等式：

（1） $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$，对于 α、$\beta \in \mathbb{Z}_2$（$\mathbb{Z}_2$-分次）；（2） $[x,y] = -(-1)^{|x||y|}[y,x]$（分次反对称性）；（3） $(-1)^{|x||z|}[x,[y,z]] + (-1)^{|y||x|}[y,[z,x]] + (-1)^{|z||y|}[z,[x,y]] = 0$（分次雅可比恒等式），对所有 x、y、$z \in L$。显然，分次雅可比恒等式等价于方程

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + (-1)^{|z||x+y|}[[z,x],y]. \tag{2.1}$$

显然，$L_{\bar{0}}$ 是一个李代数，$L_{\bar{1}}$ 是一个$L_{\bar{0}}$-模。若$L_{\bar{1}} = 0$，则 L 就是一个李代数，但一般而言，李超代数并非李代数。若对所有 x、$y \in L$都有 $[x,y] = 0$，则称李超代数 L 为阿贝尔的。没有偶部的李超代数，即$L_{\bar{0}} = 0$，都是阿贝尔的。 L 的子超代数（或子代数）是一个在括号运算下封闭的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量子空间。 L的分次子代数 $[L,L]$称为 L的导出子代数。若 $[I,L] \subseteq I$，则 L 的 $\mathbb{Z}_2$-分次子空间 I是一个分次理想。该理想

$$Z(L) = \{z \in L : [z,x] = 0 \text{ for all } x \in L\}$$

是一个分次理想，称为 L的中心。超空间之间的次数为 $|f| \in \mathbb{Z}_2$的同态 $f: V \to W$是满足对 $\alpha \in \mathbb{Z}_2$有 $f(V_\alpha) \subseteq W_{\alpha+|f|}$的线性映射。特别地，若$|f| = \bar{0}$，则称同态 f 为偶次数齐次线性映射。李超代数同态 $f: L \to M$ 是一个偶次数齐次线性映射，并且对所有 x、$y \in L$都满足$f([x,y]) = [f(x), f(y)]$。若 L的理想 I，则商李超代数L/I 继承典范李超代数结构，使得自然投影映射成为一个同态。满同态、同构和自同构的概念含义显然。李超代数$L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的下降中心序列定义为$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L]$，其中对所有 $k \geq 1$均成立。若存在某个 $k+1$使得 $L^{k+1} = \{0\}$，且 $L^k \neq 0$，则称 L 为幂零的，其幂零类为 k。用 $\gamma_i(L)$表示 L^k。

本文中，对于李超代数 L 的超维数，我们简记为 $\dim L = (m \mid n)$，其中 $\dim L_{\bar{0}} = m$ 和 $\dim L_{\bar{1}} = n$。超维数为 $\dim A = (m \mid n)$ 的阿贝尔李超代数记为 $A(m \mid n)$。现在我们陈述一些有用的已知结果，以供后续使用。

引理 2.1. *[9,见定理 3.4]*

$$\dim \mathcal{M}(A(m \mid n)) = \big(\frac{1}{2}(m^2 + n^2 + n - m) \mid mn\big).$$

引理 2.2. 设 L 是一个有限维 c 步幂零李超代数，并设 $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 是李超代数 L 的一个自由表示。那么

$$\dim(\gamma_c(L)) + \dim(\mathcal{M}(L)) = \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_c(L))) + \dim \frac{[\gamma_c(F) + R, F]}{[R,F]} \tag{2.2}$$

.

证明. 见 [[6], 定理 3.6]) 的证明。 □

现在，与李代数的情形类似，我们也可以在这里定义满同态

$$\lambda_c : \gamma_c(L) \otimes \frac{L}{\gamma_2(L)} \longrightarrow \frac{[\gamma_c(F) + R, F]}{[R,F]},$$

以及满同态

$$\lambda_i : \frac{\gamma_i(L)}{\gamma_{i+1}(L)} \times \frac{L}{\gamma_2(L)} \longrightarrow \frac{[\gamma_i(F) + R, F]}{[\gamma_{i+1}(F) + R, F]}$$

对于 $2 \leq i \leq c-1$. 因此

$$\dim \frac{[\gamma_c(F)+R,F]}{[R,F]} = \dim(\gamma_c(L) \otimes \frac{L}{\gamma_2(L)}) - \dim(ker(\lambda_c)),$$

and

$$\dim \frac{[\gamma_i(F)+R,F]}{[\gamma_{i+1}(F)+R,F]} = \dim(\frac{\gamma_i(L)}{\gamma_{i+1}(L)} \otimes \frac{L}{\gamma_2(L)}) - \dim(ker(\lambda_i)),$$

对于 $2 \leq i \leq c-1.$，由等式 2.2 可得

$$\dim(\mathcal{M}(L)) = \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_c(L))) - \dim(\gamma_c(L)) + \dim(\gamma_c(L) \otimes \frac{L}{\gamma_2(L)}) - \dim(ker(\lambda_c))$$

即,

$$\dim(\mathcal{M}(L)) = \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_c(L))) + \dim(\gamma_c(L))(\dim(\frac{L}{\gamma_2(L)}) - 1) - \dim(ker(\lambda_c)). \tag{2.3}$$

对于 $2 \leq i \leq c-1$，注意到 $0 \longrightarrow \gamma_i(L) + R \longrightarrow F \longrightarrow L/\gamma_i(L) \longrightarrow 0$ 是 $L/\gamma_i(L)$ 的自由表示，而 $L/\gamma_i(L)$ 是一个 $(i-1)$-步幂零李超代数。因此，重复使用等式 2.2 并相加可得

$$\dim(\mathcal{M}(L)) = \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_2(L))) + \dim(\gamma_2(L))(\dim(\frac{L}{\gamma_2(L)}) - 1) - \sum_{i=2}^{c} \dim(ker(\lambda_i)). \tag{2.4}$$

3. The Main Results

引理 3.1. 设 L 为一个李超代数。则对于任意齐次元素 x_1、x_2、.....、$x_{i+1} \in L$,

$$(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)|x_{i+1}|}[[x_1,\ldots,x_i]_l,x_{i+1}] + (-1)^{|x_{i+1}||x_i|}[[x_{i+1},[x_1,\ldots,x_{i-1}]_l],x_i]$$

$$+(-1)^{(|x_{i+1}|+|x_i|)|x_{i-1}|}[[[x_i,x_{i+1}]_r,[x_1,\ldots,x_{i-2}]_l],x_{i-1}]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_{i-1}|}[[[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]_r,[x_1,\ldots,x_{i-3}]_l],x_{i-2}]$$

$$+ (-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-3}|)\ (|x_{i-2}|+|x_{i-1}|)\ +\ (|x_{i+1}|+|x_i|)\ |x_{i-2}|}[[[x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1}]_r,[x_1,\ldots,x_{i-4}]_l],x_{i-3}]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-4}|)(|x_{i-3}|+|x_{i-2}|+|x_{i-1}|)+(|x_{i+1}|+|x_i|)(|x_{i-3}|+|x_{i-2}|)}[[[x_{i-3},\ldots,x_{i+1}]_r,[x_1,,\ldots,x_{i-5}]_l],x_{i-4}]$$

$$+\ldots+(-1)^{|x_1|(|x_2|+\ldots+|x_{i-1}|)+(|x_{i+1}|+|x_i|)(|x_2|+\ldots|x_{i-2}|)}[[x_2,,\ldots,x_{i+1}]_r,x_1]$$

$$+\{(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_i|}-(-1)^{|x_{i-1}||x_{i+1}|}\}(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_{i+1}|}[[x_1,\ldots,x_{i-1}]_l,[x_i,x_{i+1}]]=0$$

对于 $i \geq 3$, 其中

$$[x_1,x_2,\ldots x_i]_r = [x_1,[\ldots[x_{i-2},[x_{i-1},x_i]]\ldots]$$

and

$$[x_1,x_2,\ldots x_i]_l = [\ldots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_i].$$

证明。F 首先，我们证明关于 $i = 3$ 的引理。考虑分次雅可比恒等式

$$(-1)^{|a||c|}[a, b, c]_l + (-1)^{|b||a|}[b, c, a]_l + (-1)^{|c||b|}[c, a, b]_l = 0$$

与 $a = [x_1, x_2]$, $b = x_3$, $c = x_4$。于是我们得到

$$(-1)^{(|x_1|+|x_2|)|x_4|}[[x_1, x_2], x_3, x_4]_l + (-1)^{|x_3|(|x_1|+|x_2|)}[x_3, x_4, [x_1, x_2]]_l + (-1)^{|x_3||x_4|}[x_4, [x_1, x_2], x_3]_l = 0.$$

再次利用 $a = x_1$, $b = x_2$, $c = [x_3, x_4]$的分次雅可比恒等式，得到

$$(-1)^{|x_1|(|x_3|+|x_4|)}[x_1, x_2, [x_3, x_4]]_l + (-1)^{|x_2||x_1|}[x_2, [x_3, x_4], x_1]_l + (-1)^{(|x_3|+|x_4|)|x_2|}[[x_3, x_4], x_1, x_2]_l = 0.$$

将前两个方程相加，得到

$$(-1)^{(|x_1|+|x_2|)|x_4|}[[x_1, x_2], x_3, x_4]_l + (-1)^{|x_3||x_4|}[x_4, [x_1, x_2], x_3]_l + (-1)^{(|x_3|+|x_4|)|x_2|}[[x_3, x_4], x_1, x_2]_l$$

$$+(-1)^{|x_2||x_1|}[x_2, [x_3, x_4], x_1]_l + (-1)^{|x_3|\ (|x_1|+|x_2|)\ }[x_3, x_4, [x_1, x_2]]_l + (-1)^{|x_1|\ (|x_3|+|x_4|)\ }[x_1, x_2, [x_3, x_4]]_l = 0.$$

现在，根据分次反对称性，我们有

$$(-1)^{|x_3|(|x_1|+|x_2|)}[x_3, x_4, [x_1, x_2]]_l + (-1)^{|x_1|(|x_3|+|x_4|)}[x_1, x_2, [x_3, x_4]]_l =$$

$$\{(-1)^{|x_1||x_3|} - (-1)^{|x_2||x_4|}\}(-1)^{|x_1||x_4|}[x_1, x_2, [x_3, x_4]]_l = 0.$$

因此，引理对 $i = 3$ 成立。假设引理对某个 $i = j \geq 3$ 成立，即取 a_1、 a_2、 $\ldots$ $a_{j+1} \in L$ 时，结论成立。现在，代入 $a_1 = [x_1, x_2]$、 $a_2 = x_3$、 $a_3 = x_4$、 $\cdots$ $a_{j+1} = x_{j+2}$，得到

$$(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_j|)|x_{j+2}|}[[x_1, \ldots, x_{j+1}]_l, x_{j+2}] + (-1)^{|x_{j+1}||x_{j+2}|}[[x_{j+2}, [x_1, \ldots, x_j]_l], x_{j+1}]$$

$$+(-1)^{(|x_{i+2}|+|x_{j+1}|)|x_j|}[[[x_{j+1}, x_{j+2}]_r, [x_1, \ldots, x_{j-1}]_l], x_j]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{j-1}|)|x_j|}[[[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]_r, [x_1, \ldots, x_{j-2}]_l], x_{j-1}]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{j-2}|)(|x_{j-1}|+|x_j|)+(|x_{j+2}|+|x_{j+1}|)|x_{j-1}|}[[[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]_r, [x_1, \ldots, x_{j-3}]_l], x_{j-2}]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{j-3}|)(|x_{j-2}|+|x_{j-1}|+|x_j|)+(|x_{j+2}|+|x_{j+1}|)(|x_{j-2}|+|x_{j-1}|)}[[[x_{j-2}, \ldots, x_{j+2}]_r, [x_1, , \ldots, x_{j-4}]_l], x_{j-3}]$$

$$+\ldots+(-1)^{(|x_1|+|x_2|+|x_3|)(|x_4|+|x_5|+\ldots+x_j)+(|x_{j+2}|+|x_{j+1}|)(|x_4|+\ldots+|x_{j-1}|)}[[x_4, \ldots, x_{j+2}]_r, [x_1, x_2]_l, x_3]$$

$$+(-1)^{(|x_1|+|x_2|)(|x_3|+\ldots+|x_j|)+(|x_{j+2}|+|x_{j+1}|)(|x_3|+\ldots|x_{j-1}|)}[[x_3, \ldots, x_{j+2}]_r, [x_1, x_2]]$$

$$+\{(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{j-1}|)|x_{j+1}|} - (-1)^{|x_j||x_{j+2}|}\}(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{j-1}|)|x_{j+2}|}[[x_1, \ldots, x_j]_l, [x_{j+1}, x_{j+2}]] = 0.$$

应用 方程 2.1，在前一个方程的倒数第二项中，我们有

$$[[x_3, \ldots, x_{j+2}]_r, [x_1, x_2]] = [[[x_3, \ldots, x_{j+2}]_r, x_1], x_2]] + (-1)^{|x_2|(|x_1|+|x_3|+|x_4|+\ldots+|x_{j+2}|)}[[x_2, [x_3, \ldots, x_{j+2}]]_r, x_1].$$

通过将其应用于前面的方程，我们可以看出引理对于 $j + 1$ 成立。因此，证明可由归纳法得出。□

推论 3.2. 设 $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}\}$ 是李超代数 L 的最小生成集，其中 $i \geq 2$。则

$$\begin{aligned}\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) := (-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)|x_{i+1}|}\overline{[x_1, \ldots, x_i]_l} \otimes \overline{x_{i+1}}\\ +(-1)^{|x_{i+1}||x_i|}\overline{[x_{i+1}, [x_1, \ldots, x_{i-1}]_l]} \otimes \overline{x_i}\\ +(-1)^{(|x_{i+1}|+|x_i|)|x_{i-1}|}\overline{[[x_i, x_{i+1}]_r, [x_1, \ldots, x_{i-2}]_l]} \otimes \overline{x_{i-1}}\\ +(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_{i-1}|}\overline{[[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]_r, [x_1, \ldots, x_{i-3}]_l]} \otimes \overline{x_{i-2}}\\ +(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-3}|)(|x_{i-2}|+|x_{i-1}|)+(|x_{i+1}|+|x_i|)|x_{i-2}|}\overline{[[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]_r,}\\ \overline{[x_1, \ldots, x_{i-4}]_l]} \otimes \overline{x_{i-3}}\\ +(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-4}|)(|x_{i-3}|+|x_{i-2}|+|x_{i-1}|)+(|x_{i+1}|+|x_i|)(|x_{i-3}|+|x_{i-2}|)}\overline{[[x_{i-3}, \ldots, x_{i+1}]_r,}\\ \overline{[x_1, \ldots, x_{i-5}]_l]} \otimes \overline{x_{i-4}}\\ +\ldots+(-1)^{|x_1|(|x_2|+\ldots+|x_{i-1}|)+(|x_{i+1}|+|x_i|)(|x_2|+\ldots|x_{i-2}|)}\overline{[x_2, , \ldots, x_{i+1}]_r} \otimes \overline{x_1} \in ker(\lambda_i).\end{aligned}$$

证明。根据定义 λ_2，结论对 $i = 2$ 成立。现在，对于 $i \geq 3$，由引理 3 可得。 1

$$\begin{aligned}\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) =\\ +\{(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_i|} - (-1)^{|x_{i-1}||x_{i+1}|}\}(-1)^{(|x_1|+\ldots+|x_{i-2}|)|x_{i+1}|}\overline{[[x_1, \ldots\ldots, x_{i-1}]_l, [x_i, x_{i+1}]]}\\ \in \ker(\lambda_i).\end{aligned}$$

□

定理 3.3。设 L 是一个 $(m \mid n)$ 维的 c 步幂零李超代数，满足 $\dim(\gamma_2(L)) = (r \mid s)$ 且 $r + s \geq 1$。则

$$\dim(\mathcal{M}(L)) \leq \frac{1}{2}[(m+n-r-s)(m+n+r+s) + (n-m-r-3s)] - \sum_{i=2}^{l}(m+n-r-s-i),$$

其中 $l = \min\{c, m+n-r-s\}$.

证明。设 $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m-r}; x_{m-r+1}, \ldots, x_{m+n-r-s}\}$ 是 L 的最小生成集，并设 i 是一个任意固定的数，使得 $i \leq \min\{m+n-r-s, c\} = l$。由于 $i \leq c$，空间 $\gamma_i(L)/\gamma_{i+1}(L)$ 非平凡。因此，存在 $\gamma_i(L)$ 的一个非零元素，记为 $z^* = [z_1, z_2, \ldots, z_i]$，使得 $z^* \notin \gamma_{i+1}(L)$。由于 $i \leq m+n-r-s$，集合 $U/\{z_1, z_2, \ldots, z_i\}$ 中存在 $n+m-r-s-i$ 个元素，记为 y_k，其中 $k = 1, \ldots, n+m-r-s-i.$。由于 $z^* \notin \gamma_{i+1}(L)$ 且 $y_k \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_i\}$，我们有 $\phi_i(z_1, z_2, \ldots, z_i, y_k) \neq 0$。由于 ϕ 是一个同态，且集合 U 是 L 的最小生成集，因此集合 $\{\phi_i(z_1, z_2, \ldots, z_i, y_k) \mid k = 1, \ldots, n+m-r-s-i\}$ 是一个线性无关集。由推论 3.2 可得 $\mathrm{Im}(\phi_i) \subseteq \ker(\lambda_i)$，且对所有 $2 \leq i \leq c$，$\ker(\lambda_i) \neq 0$。因此，我们有

$$\dim(ker(\lambda_i)) \geq n+m-r-s-i. \tag{3.1}$$

现在将 (3.1) 代入 (2.4)，可得

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M}(L)) &= \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_2(L))) + \dim(\gamma_2(L))(\dim(\frac{L}{\gamma_2(L)}) - 1) - \sum_{i=2}^{c}\dim(ker(\lambda_i))\\ &\leq \dim(\mathcal{M}(L/\gamma_2(L))) + \dim(\gamma_2(L))(\dim(\frac{L}{\gamma_2(L)}) - 1) - \sum_{i=2}^{l}(m+n-r-s-i).\end{aligned}$$

利用引理 2.1,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M}(L/\gamma_2(L))) &= \frac{1}{2}[(m+n-r-s)^2+n-s-m+r]\\ &= \frac{1}{2}[(m+n-r-s)^2+2(n-s)-(m+n-r-s)]\\ &= \frac{1}{2}[(m+n-r-s)(m+n-r-s-1)+2(n-s)].\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M}(L)) &\leq \frac{1}{2}[(m+n-r-s)(m+n-r-s-1)+2(n-s)]+(r+s)(m+n-r-s-1)\\ &\quad -\sum_{i=2}^{l}(m+n-r-s-i)\\ &\leq \frac{1}{2}[(m+n-r-s-1)(m+n+r+s)+2(n-s)]-\sum_{i=2}^{l}(m+n-r-s-i)\\ &\leq \frac{1}{2}[(m+n-r-s)(m+n+r+s)+(n-m-r-3s)]-\sum_{i=2}^{l}(m+n-r-s-i).\end{aligned}$$

□

披露声明：所有作者均声明，他们不存在与本文内容相关的利益冲突。

References

[1] 1977 1 8 96 10 1016 0001 8708 77 90017 2 Kac, V. G. ( ). 李超代数。
[2] ´ ´ 2015
Adv. Math. 26( ): - . DOI: . / - ( ) - Garcıa-Martınez, X., Khmaladze, E., Ladra, M. ( ). 李超代数的非阿贝尔张量积与同调。
J. Algebra. 440: 464 488 10 1016 2015 05 027 - . DOI: . /j.jalgebra. . . Musson, I. ( ). .
[3] 2012 *Lie superalgebras and enveloping algebras*
数学研究生教材，第 131 卷。密尔沃基，美国数学会。[4] Ellis, G. (1991). 李代数的一个非阿贝尔张量积。 *Glasg. Math. J.* 33(1): 101-120. DOI: 10 1017 0017089500008107 . /S Padhan, R. N., Hasan, I. Y., Pradhan, S. S. (2022). 李超代数非阿贝尔张量平方的维数。arXiv 预印本，arXiv: 2209 09514 。Padhan. R. N., Pati, K. C. ( ). 李超代数
[5]
的二幂零乘子。arXiv 预印本，arXiv.2006.10970.[6] 2020 Hasan, I. Y., Padhan, R. N., Das, M. (
2022 *Indian*). 判定某些幂零
J. Pure Appl. Math. 10 1007 13226 022 00348
李超代数的可实现对。在线优先发表。DOI: . /s - - -
0
[8] 2022 Hasan, I. Y., Padhan, R. N. ( ). 关于秩为
≤ 2 2210 00254 的广义海森堡李超代数的三重张量积。arXiv 预印本，arXiv: . Nayak, S. ( ). 幂零李
[9] 2019
超代数的乘子。 *Comm. Algebra.* 47(2): 689-705. DOI: 10 1080 00927872 2018 1492595 . / . . Padhan, R. N., Nayak, S. ( ). 关
[10] 2022
于某些幂零李超代数的可实现性与 Schur 乘子。 *Linear Multilinear* 70 8 1467 1478 10 1080 03081087 2020 1764902 .
[11] 2021
( ): - . DOI: . / . . Padhan, R. N., Nayak, S., Pati, K. C. ( ). 判定可实现的李超代数。 *Comm. Algebra.* 49(10):
4274 4290 10 1080 00927872 2021 1918135 - . DOI: . / . . Safa, H. ( ). 关于李超代数对的乘子。《数学问题》。45(12):
[12] 2021
1-12. DOI: 10 2989 16073606 2021 1978010 . / . . Karpilovsky, G. (.) *The Schur Multiplier* 。伦敦。DC：伦敦数学会，克拉伦
登出版社。[13] 1987 [14] Moneyhun, K. (1991). 李代数中的等斜同构。博士论文。北卡罗来纳州立大学，北卡罗来纳州[15] Batten, P. (1993). 李代数的乘子与覆盖。博士论文。北卡罗来纳州立大学，北卡罗来纳州

[16] Batten, P., Moneyhun, K., Stitzinger, E. (1996). 根据乘子刻画幂零李代数。*Comm. Algebra*.
24 14 4319 4330 10 1080 00927879608825817 ( ): - . DOI: . / Batten, P., Stitzinger, E. ( ). 李代数的覆盖。
[17] 1996
Comm. Algebra. 24(14): 4301-4317. DOI: 10 1080 00927879608825816 . / Ellis, G. ( ). 张量积与 q-交叉模。
J. London Math. Soc. 51(2): 241-258. DOI: [18] 1995 10 1112 51 2 243 . /jlms/ . . Ellis, G. ( ). 群对的可实现性、同调与中心级数。
J. Algebra. 179(1): 31-46. DOI: [19] 1996 10 1006 1996 0002 . /jabr. . Hardy, P., Stitzinger, E. (1998). 根据乘子刻画幂零李代数 $t(L) = 3, 4, 5, 6$。*Comm. Algebra* . [20]
26 11 3527 3539 10 1080 00927879808826357 ( ): - . DOI: . / Hardy,
P. ( ). 根据乘子刻画幂零李代数 III。 *Comm. Algebra* . 33(11): [21] 2005 4205 4210 10 1080 00927870500261512 - . DOI: . / Johari,
F., Parvizi, M., Niroomand, P. ( ). 李代数对的可实现性与 Schur 乘子。 [22] 2017 *Journal*
of Geometry and Physics 114 184 196 10 1016 2016 11 . : - . DOI: . /
016
j.geomphys. . .[23] 2011 Niroomand, P. ( ). 幂零李代数的
Schur 乘子维数。 *Cent. Eur. J. Math.* 9 1 57 64 10 2478 11533 010 0079 3 ( ): - . DOI: . /s - - - Rai, P. K. ( ). 幂零李代
数 Schur 乘子的维数。 *Comm. Algebra*. 47(10): [24] 2019 3982 3986 10 1080 00927872 2019 1572177 - . DOI: . / . . Niroomand,
P., Russo, F. G. ( ). 关于幂零李代数 Schur 乘子的一则注记。 [25] 2011 *Comm. Algebra*.
39 4 1293 1297 10 1080 00927871003652660 ( ): - . DOI: . / Niroomand, P., Russo, F. G. ( ). 对幂零李代数 Schur 乘子的
[26] 2011
一个限制。 *Electron.* . ( ): -
J. Linear Algebra 22 1 1 9 10 13001 1081 3810 1423
. DOI: . / - .[27] 2013 Niroomand, P., Parvizi, M., Russo, F. G. ( ). 判定可实
现李代数的一些准则。 *J. Algebra*. 384: 36-44. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.033

Centre for Data Science,
Institute of Technical Education and Research, Siksha 'O' Anusandhan(A Deemed to be University),
Bhubaneswar-751030, Odisha, India*Email address*: rudra.padhan6@gmail.com, rudranarayanpadhan@soa.ac.in
Centre for Data Science, Institute of Technical Education and Research, Siksha 'O' Anusandhan
(A Deemed to be University), Bhubaneswar-751030, Odisha, India*Email address*: ibrahemhasan898@gmail.com