用于可压缩流动的高效高阶基于梯度的重构

Amareshwara Sainadh Chamarthi

Faculty of Mechanical Engineering, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel

arXiv:2305.00762v1 [physics.flu-dyn] 1 May 2023

摘要

本文将 Chamarthi [1]的基于梯度的重构方法拓展至真正的高阶精度，适用于涉及光滑流动的无黏测试算例。本文沿用参考文献 [1], 提出的显式四阶格式的同一模板，推导出一种七阶精度格式，该格式同样具有低耗散特性。假设单元中心处的变量为点值，所提出的方法可达到七阶精度。本文采用与问题无关的间断探测器来获得高阶精度。因此，在间断区域附近进行原始变量或守恒变量重构，而在解光滑的区域则采用通量重构。所提出的方法仍可在无黏通量和黏性通量之间共享导数，这正是基于梯度的重构方法的核心思想。本文给出了若干标准基准测试算例。对于本文考察的测试算例，所提出的方法比七阶加权紧致非线性格式（WCNS）效率更高。

关键词 ： 基于梯度的重构，激波捕捉，可压缩流动，高阶 der

1. 引言

本文所研究的黏性可压缩流动的物理行为由纳维–斯托克斯方程 [2]进行数学建模。笛卡尔坐标系下的二维形式可表示为：

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F^c}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G^c}}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{F^v}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G^v}}{\partial y}=0, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{Q}$为守恒变量向量（$\rho, \rho u, \rho v, E$），其中 ρ为密度， u和 v分别为 $x-$ 和 $y-$ 方向上的速度分量。流体的单位体积总能量表示为$E=\rho(e+(u^2+v^2)/2)$，其中 e 为比内能。通过理想气体状态方程，将热力学压力 p 与总能量联系起来，从而封闭该方程组：

$$p=(\gamma-1)(E-\rho\frac{(u^2+v^2)}{2}), \tag{2}$$

其中 γ 为比热比，本文取 γ 为 **1.4**。通量 $\mathbf{F}^c$、$\mathbf{G}^c$以及$\mathbf{F}^v$、$\mathbf{G}^v$分别为各坐标方向上的对流（上标 c）和黏性（上标 v）通量向量，其定义如下：

$$\mathbf{F^c}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ u(E+p)\end{pmatrix}, \mathbf{G^c}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ v(E+p)\end{pmatrix}, \mathbf{F^v}=\begin{pmatrix}0\\ -\tau_{xx}\\ -\tau_{yx}\\ -\phi_x+q_x\end{pmatrix}, \mathbf{G^v}=\begin{pmatrix}0\\ -\tau_{xy}\\ -\tau_{yy}\\ -\phi_y+q_y\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中， $\phi_x=\tau_{xx}u+\tau_{xy}v$ 和 $\phi_y=\tau_{yx}u+\tau_{yy}v$。黏性应力张量 τ和热流 q 的分量如下：

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}, \quad T = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)C_p\rho}, \tag{4}$$

其中， μ 为动力黏度， T 为温度，热导率通过 $\kappa = C_p\mu/Pr$计算，其中 Pr 为普朗特数， C_p 为定压比热。

纳维–斯托克斯方程 (1) 使用守恒数值方法在网格尺寸为 Δx 和 Δy的均匀笛卡尔网格上离散。研究区域由互不重叠的网格单元离散，计算网格的示意图如图 1 所示。守恒变量 $\mathbf{Q}$ 存储在网格单元 $I_{j,i} = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}]$的中心，索引 i和 j分别表示$x-$ 方向上的第 $j-$ 个网格单元和 $y-$ 方向上的第 $i-$ 个网格单元。 $x-$ 方向上的单元界面记为 $j+\frac{1}{2}$， $y-$ 方向上的单元界面记为 $i+\frac{1}{2}$。

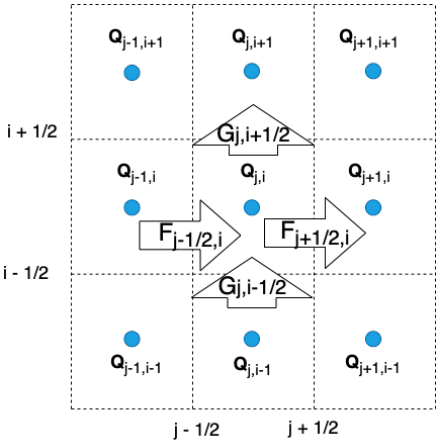


图 1: 二维计算网格示意图，显示网格单元中心点（蓝色）以及所关注网格单元的相关通量。

单元中心守恒变量$\mathbf{Q_{j,i}}$ 随时间的演化由以下半离散方程给出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{Q}_{j,i} = \mathbf{Res}_{j,i} = -\frac{d\mathbf{F}}{dx}_{j,i} - \frac{d\mathbf{G}}{dy}_{j,i}, \tag{5}$$

其中， $\frac{d\mathbf{F}}{dx}_{j,i}$ 和$\frac{d\mathbf{G}}{dy}_{j,i}$ 是单元中心处通量导数的近似值，我们寻求其守恒形式的高阶近似:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx}_{j,i} = \left[(\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{v}})_{j+\frac{1}{2},i} - (\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{v}})_{j-\frac{1}{2},i}\right]\frac{1}{\Delta x}, \quad \frac{d\mathbf{G}}{dy}_{j,i} = \left[(\hat{\mathbf{G}}^{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{G}}^{\mathbf{v}})_{j,i+\frac{1}{2}} - (\hat{\mathbf{G}}^{\mathbf{c}}+\hat{\mathbf{G}}^{\mathbf{v}})_{j,i-\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{\Delta y}, \tag{6}$$

其中， $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$、 $\Delta y = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$、 $\mathbf{F}^{\mathbf{c}}$、 $\mathbf{G}^{\mathbf{c}}$ 以及$\mathbf{F}^{\mathbf{v}}$、 $\mathbf{G}^{\mathbf{v}}$ 分别表示在 $x-$和 $y-$ 方向上的对流通量和黏性通量的数值近似。黏性通量采用 α阻尼方法进行离散 [1, 3, 4]，，具体细节将在后文介绍。方程（5）中对流通量$\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{c}}$的空间离散由黎曼求解器 [5, 6, 7, 8, 9]确定，其典范形式可表示如下:

$$\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{c}}_{j+1/2} = \mathbf{F}^{\text{Riemann}}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}^{c}_{L} + \mathbf{F}^{c}_{R}\right] - \frac{1}{2}|\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2}}|(\mathbf{Q}^{R}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{Q}^{L}_{j+\frac{1}{2}}), \tag{7}$$

其中，“L”和“R”分别表示单元界面左侧和右侧重构或插值得到的状态，$|\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2}}|$ 表示欧拉方程的无黏雅可比矩阵。本文使用 HLLC 黎曼求解器 [8] 计算通量。

本文的目标是以一种新颖的方式，求得方程（7）中单元界面 $x_{j+\frac{1}{2}}$、$\forall j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ 两侧的通量值 $\mathbf{F}_L^c$ 和 $\mathbf{F}_R^c$，以及守恒变量 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 和 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^R$。

这种新方法包含两个部分。第一部分涉及 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 和 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^R$ 的计算。该过程使用单元中心处的守恒变量值及其梯度（相关变量的导数），如参考文献 [1] 所述。相关变量不仅可以是守恒变量（$\mathbf{Q}$），也可以是单元中心处的原始变量（$\mathbf{U} = (\rho,\ u,\ v,\ p)$）。如果使用原始变量进行重构，则分别根据 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 和 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$ 求得 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 和 $\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^R$。

该过程的第二个组成部分涉及计算 $\mathbf{F}_L^c$ 和 $\mathbf{F}_R^c$。这些值可以表示为守恒变量的函数，记作左侧界面的 $\mathbf{F(Q_L)}$；也可以表示为原始变量的函数，记作左侧界面的 $\mathbf{F(U_L)}$；或者表示为单元中心通量本身的函数，记作 $\mathbf{F(f_L)}$（其中 $\mathbf{f_L}$ 是由单元中心处求得的 F^c、f_{j-1}、f_j、f_{j+1} 等，将对流通量 F^c 从左侧重构到界面处所得的值。更多细节将在第2.4节介绍）。对单元进行差分后，整个过程将得到一个七阶精度格式，具体内容将在后续章节中说明。

1.1. 文献综述

获得界面值有两种常用方法：插值和重构 [10]。作者过去既使用过重构 [11], ，也使用过插值多项式 [12] ，了解这两种方法的差异、优点和缺点。Van Leer的MUSCL格式采用三阶重构多项式 [13, 14] ，可用勒让德基表示。Balsara等人给出了高于三阶的多项式，同样采用勒让德基 [15]。这些多项式的详细推导见 [16]。这些重构多项式有时也称为本质无振荡（ENO）重构。根据参考文献 [18]第9章的记载，这类方法最初由Harten等人提出 [17], 。对于间断流动，ENO和WENO（加权ENO）方法受到广泛关注，因为它们能够在光滑流动区域附近实现高阶精度（高于二阶）。界面处可重构的变量可以是守恒变量，如Harten等人最初提出的ENO格式 [17], ；也可以是通量本身，如 [19]所示。WENO格式的核心思想是将一个高阶多项式表示为多个低阶多项式的组合。Jiang和Shu将五阶多项式表示为三个三阶多项式的组合，即WENO-JS [20]。他们提出基于梯度的光滑度指标，用于识别间断和光滑流动区域。尽管该格式取得了巨大成功，文献中仍提出了若干改进方法。Henrick等人的WENO-M格式 [21] 通过映射过程提高了临界点处的精度阶数。Borges等人提出的WENO-Z格式 [22] 采用全局光滑度指标，提高了WENO格式的精度和整体分辨率特性。Hu和Adams [23]进一步改进了这一方法，提出了一种中心迎风WENO格式，能够捕捉激波和小尺度湍流特征。文献中有许多对WENO方法进行渐进式改进的工作，其发展脉络也日益难以追踪 [24, 25, 26]。这些重构多项式也可以在空间上采用隐式形式，从而具有更优的谱性质，但需要进行三对角矩阵求逆 [27, 28, 29]。除了WENO之外，Suresh和Hyunh [30] 提出的五阶保单调（MP）格式也能有效抑制间断处的数值振荡并保持精度。极高阶WENO格式通常缺乏鲁棒性，因此往往与Suresh和Hyunh [31, 32, 33]提出的保单调方法结合使用。

另一方面，插值格式基于拉格朗日多项式。Lele 提出了显式和隐式插值多项式 [34]。使用插值多项式的相应激波捕捉格式称为加权紧致非线性格式（WCNS），最早由 [35, 36] 提出。WCNS 与 WENO格式也类似，因为它采用多模板加权技术。插值多项式与重构多项式的关键区别在于，插值多项式使用高阶精度通量导数，而非方程（6）；读者可参阅 [36, 37, 38, 39]。若干

作者提出了 WCNS格式的多种高阶变体 [37, 40, 41, 42]。与 WENO 相比，WCNS 方法的主要优势在于，即使采用原始变量和守恒变量插值，也能达到高阶精度。另一方面，为保持格式的形式阶数，重构多项式需要在单元界面上进行耗时的积分计算，其中包含多个重构值 [43]。对于三维模拟，采用原始变量重构的 WENO 方法，其计算成本可能是 WCNS 方法的 3 至 20 倍 [44]。Liao 和 He [45]提出了适配格式，可将重构格式与插值格式相互转换。尽管如此，重构格式的应用仍比插值格式更为广泛。

1.2. 本文的创新之处

与插值多项式和重构多项式不同，Chamarthi [1] 提出了一种略有不同的方法来求取界面值，称为基于梯度的重构（GBR）。使用梯度进行重构的主要优势在于，梯度可用于黏性通量计算、激波捕捉、计算涡量平方等湍流统计量，因此该格式效率较高。基于梯度的重构与Sengupta等人于2005年提出的 FV^2S 格式相似 [46] 。关于 FV^2S 格式，读者还可参阅 [47] 的第12章。Sengupta等人使用迎风紧致有限差分格式计算一阶导数，因此这些导数可能无法用于黏性通量计算。对于一维情形，GBR方法采用在 $x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}$上求得的勒让德多项式 [13]的前两个矩进行插值。假设采用原始变量重构，可写为：

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{U}_j + \frac{1}{\Delta x}(x - x_j)\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_j + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_j \left[(x - x_j)^2 - \frac{\Delta x^2}{12}\right], \tag{8}$$

其中，$\mathbf{U}_j$是原始变量向量，$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_j$，$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_j$ 分别是单元 j内对应的一阶和二阶导数。由于我们只关注单元界面处的值，通过设定 $x = x_j \pm \Delta x/2$ 并在单元内令 $\overline{j}$ 和 $\kappa = \frac{1}{3}$，可得以下表达式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^L_{j+\frac{1}{2}} &= \mathbf{U}_j + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_j + \frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_j \\
\mathbf{U}^R_{j+\frac{1}{2}} &= \mathbf{U}_{j+1} - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right)_{j+1} + \frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}\right)_{j+1}
\end{aligned} \tag{9}$$

通过代入高阶差分公式（六阶显式格式和四阶优化隐式[34] 格式），Chamarthi 在文献 [1]中得到了四阶格式。文献 [1] 受到 Van Leer [13] 的工作以及 Nishikawa [48]近期论文的启发。本文将该方法推广并改进如下：

1. 提出了一种双参数基于梯度的重构，可达到七阶精度。 [1] 中给出的四阶格式可视为当前方法的一个子集。2. 对于非线性测试算例， [1] 中所提出的格式仅具有二阶精度。采用与问题无关的间断探测器来获得高阶精度。因此，在间断区域附近进行原始变量或守恒变量重构，而在光滑解区域采用通量重构。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍黏性通量的离散方法以及用于对流通量的七阶基于梯度的重构。第 3 节介绍若干针对 Euler 方程和 Navier–Stokes方程的一维和二维测试算例，第 4 节给出结论。

2. 数值离散

本节介绍数值离散的细节。第 2.1 小节介绍黏性通量离散。第 2.2 和第 2.4 小节介绍七阶基于梯度的重构

以及实现高阶精度的算法。最后，第 2.5 小节讨论时间离散。

2.1. 黏性通量的空间离散

本小节介绍黏性通量的空间离散。为简便起见，这里考虑一维情形，因为通过逐维方法将其扩展到多维问题十分直接。一维情形下界面处的黏性通量可表示如下：

$$\hat{\mathbf{F}}^{\mathbf{v}}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{j+\frac{1}{2}} \\ -\tau_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}} + q_{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$\tau_{j+1/2} = \frac{4}{3}\mu_{j+1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2}, \quad q_{j+1/2} = -\frac{\mu_{j+1/2}}{\mathrm{Pr}(\gamma-1)}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{j+1/2}. \tag{11}$$

为计算单元界面 $j+\frac{1}{2}$ 处的黏性通量，应求出方程（11）中的界面速度梯度和温度梯度，即 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2}$ 和 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{j+1/2}$。这些梯度采用 Nishikawa[3]的 α-阻尼方法计算。Chamarthi等人[4] 近期已证明， α-阻尼方法能够避免奇偶解耦，并提高数值模拟的解质量。速度的界面梯度按如下方式计算：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1}\right) + \frac{\alpha_v}{2\Delta x}\left(u_{j+1} - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1} - u_j - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j\right), \tag{12}$$

其中，将 α_v 取为 4，并通过以下六阶有限差分公式计算单元中心处的速度梯度 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{60}\left[45\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{\Delta x} - 9\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{\Delta x} + \frac{u_{j+3}-u_{j-3}}{\Delta x}\right]. \tag{13}$$

已有研究表明，使用上述六阶公式（公式（13））并取 $\alpha_v = 4$，将得到一种四阶黏性格式，其谱性质优于 [4] 中提出的六阶 α-阻尼格式。单元界面处的温度梯度 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{j+1/2}$ 也采用与速度梯度类似的 α-阻尼方法进行计算。参数 α_v 不仅是与黏性格式的阻尼特性相关的关键参数，也是黏性时间步计算中的关键参数；参见 [3, 4] 以及第 2.5 小节中的时间离散。如引言中所述，基于梯度的重构的主要优势在于梯度的重复利用，而通过公式（13）计算得到的这些速度梯度将在下文介绍的对流通量离散中重复使用。

注 2.1. 需要指出，本文考虑的黏性通量离散对于非线性测试案例并非“真正”的高阶精度。 [1, 4, 49]中介绍的黏性通量离散也存在同样的情况。对于本文考虑的测试算例，$\mu_{j+\frac{1}{2}}$ 的值为常数，不随空间变化。如果 $\mu_{j+\frac{1}{2}}$ 的值由 Sutherland定律（作为温度的函数）计算得出，那么所提出的方法仅具有二阶精度。不过，读者需要注意，所提出的 $\bar{\alpha}$-阻尼格式相较于谱性质较差的真正高阶精度格式，仍然取得了更好的结果。读者可参阅参考文献 [1, 4, 49]中的相关结果。

2.2. 对流通量的空间离散

这里，我们介绍采用基于梯度的重构方法对流通量进行空间离散。为清晰起见，我们再次写出勒让德多项式 [13],方程（8）的前两个矩，其适用于 $x_{j-1/2} \le x \le x_{j+1/2}$

$$\mathbf{\Phi}(x)=\mathbf{\Phi}_j+\frac{1}{\Delta x}(x-x_j)\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j+\frac{3\kappa}{2\Delta x^2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j\left[(x-x_j)^2-\frac{\Delta x^2}{12}\right], \tag{14}$$

其中， $\mathbf{\Phi}_j$是单元中心处的点值， $\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j$、 $\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j$分别是单元 j 内的一阶和二阶导数；令 $x=x_j\pm\Delta x/2$，并在单元 j 内取 $\kappa=\frac{1}{3}$，即可得到以下表达式

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^L_{j+\frac{1}{2}}&=\mathbf{\Phi}_j+\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j+\frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j,\\ \mathbf{\Phi}^R_{j+\frac{1}{2}}&=\mathbf{\Phi}_{j+1}-\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1}+\frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_{j+1}.\end{aligned} \tag{15}$$

方程（9）中的一阶导数 $\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j$ 采用以下六阶有限差分公式计算

$$\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{60}\left[45\frac{\mathbf{\Phi}_{j+1}-\mathbf{\Phi}_{j-1}}{\Delta x}-9\frac{\mathbf{\Phi}_{j+2}-\mathbf{\Phi}_{j-2}}{\Delta x}+\frac{\mathbf{\Phi}_{j+3}-\mathbf{\Phi}_{j-3}}{\Delta x}\right], \tag{16}$$

该公式本质上与方程（13）相同。变量 $\mathbf{\Phi}$ 可以是单元中心处的守恒变量（**Q**），也可以是原始变量（**U**）。文献中既使用守恒变量[43]，也使用原始变量 [50] 进行重构。本文同时考虑原始变量重构和守恒变量重构。根据所选变量，应计算相应的变量梯度。为简洁起见，下面仅给出 $x-$ 方向上的梯度：

$$\begin{aligned}\textbf{Primitive variable reconstruction}&\rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial x}\\ \textbf{Conservative variable reconstruction}&\rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial\rho u}{\partial x},\frac{\partial\rho v}{\partial x},\frac{\partial E}{\partial x}.\end{aligned}$$

如果使用原始变量重构无黏通量，则可直接获得计算黏性通量所需的速度梯度。另一方面，如果使用守恒变量进行重构，则可通过以下关系计算速度梯度：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho\frac{\partial\rho u}{\partial x}-\rho u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right],\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho\frac{\partial\rho v}{\partial x}-\rho v\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]. \tag{17}$$

本文为利用方程（15）并结合六阶一阶导数获得七阶精度，所做的关键修改在于 $\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j$ 的计算。二阶导数可显式写为：

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j=\frac{\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1/2}-\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j-1/2}}{\Delta x} \tag{18}$$

受文献 [4] 的启发，界面处的梯度 $\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1/2}$写为如下形式

$$\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j+\left(\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1}\right]+\frac{\alpha}{2\Delta x}\left(\mathbf{\Phi}_R-\mathbf{\Phi}_L\right), \tag{19}$$

其中， $\mathbf{\Phi}_L$ 和 $\mathbf{\Phi}_R$ 由以下方程给出

$$\mathbf{\Phi}_L = \mathbf{\Phi}_j + \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j \frac{\Delta x}{2} + \beta\left(\mathbf{\Phi}_{j+1} - 2\mathbf{\Phi}_j + \mathbf{\Phi}_{j-1}\right), \tag{20}$$

$$\mathbf{\Phi}_R = \mathbf{\Phi}_{j+1} - \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_{j+1} \frac{\Delta x}{2} + \beta\left(\mathbf{\Phi}_{j+2} - 2\mathbf{\Phi}_{j+1} + \mathbf{\Phi}_j\right), \tag{21}$$

并且 α 和 β 是自由参数。通过对线性对流方程进行傅里叶分析 [34] ，还可以帮助分析格式的色散和耗散特性，从而测定或计算格式的精度阶数。通过进行傅里叶分析发现，当 $\alpha = 38/7$和 $\beta = 3/190$时，可以得到七阶迎风格式。七阶主导误差如下方程所示

$$\Delta x\left(i + \frac{\Delta x^7}{280} - \frac{i\Delta x^8}{360} - \frac{\Delta x^9}{560} + O\left(\Delta x^{10}\right)\right). \tag{22}$$

傅里叶分析的详细内容可参见文献 [1, 4, 34, 48, 51] ，用于推导七阶格式的 MATHEMATICA 工作簿见附录A。将 $\alpha = 38/7$ 和$\beta = 3/190$ 代入方程（20），即可得到以下二阶导数表达式，并将其代入方程（15）

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial x^2}\right)_j = \frac{1}{70}(60\mathbf{\Phi}'_{j-1} - 60\mathbf{\Phi}'_{j+1} - 362\mathbf{\Phi}_j + 178\mathbf{\Phi}_{j-1} + 3\mathbf{\Phi}_{j-2} + 178\mathbf{\Phi}_{j+1} + 3\mathbf{\Phi}_{j+2}), \tag{23}$$

其中 $\mathbf{\Phi}'_j = \Delta x\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j$。可以选择根据方程（23）计算并存储二阶导数，再将这些值代入方程（15）以得到迎风格式。也可以使用以下表达式进行重构，这些表达式无需计算二阶导数，仅依赖变量的一阶导数和单元中心值:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}^{L,GRB} &= \frac{1}{840}(420\mathbf{\Phi}'_j + 60\mathbf{\Phi}'_{j-1} - 60\mathbf{\Phi}'_{j+1} + 478\mathbf{\Phi}_j + 178\mathbf{\Phi}_{j-1} + 3\mathbf{\Phi}_{j-2} + 178\mathbf{\Phi}_{j+1} + 3\mathbf{\Phi}_{j+2}), \\
\mathbf{\Phi}^{R,GRB} &= \frac{1}{840}(60\mathbf{\Phi}'_j - 420\mathbf{\Phi}'_{j+1} - 60\mathbf{\Phi}'_{j+2} + 178\mathbf{\Phi}_j + 3\mathbf{\Phi}_{j-1} + 478\mathbf{\Phi}_{j+1} + 178\mathbf{\Phi}_{j+2} + 3\mathbf{\Phi}_{j+3}).
\end{aligned} \tag{24}$$

上述方程（24）在一个单元上进行差分 后，将得到七阶基于梯度的重构格式（记为 GRB），至此格式的推导完成。

注2.2. 参考文献 [1] 中提出的四阶线性显式格式是本文格式的一个子集。在方程（20）中令 $\alpha = 4$ 和 $\beta = 0$ ，即可得到四阶格式。

注2.3. 如果采用 Lele [34] 的六阶隐式梯度（通常称为紧致格式）格式计算方程（15）中的一阶导数 $\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}\right)_j$，则对于相同的参数值 $\alpha = 38/7$ 和 $\overline{\beta = 3/190}$，也可得到七阶格式。这种格式具有更优的谱性质，但需要进行三对角矩阵求逆。

注2.4. 与插值多项式和重构多项式不同，本文基于梯度的重构更加灵活，因为改变梯度的阶数即可得到不同的格式。这些梯度也用于计算黏性通量。改变方程（15）中的梯度或许也能得到新的格式，这留待读者探索。

注释 2.5。 本文提出的方法不同于 van Leer [13]的三阶重构方法。Van Leer 的方法是一种有限体积格式，而本文的方法是一种有限差分格式。尽管两种方法使用相同的勒让德多项式（方程（8））， 但它们在本质上彼此不同。

2.3. 激波捕捉

上一小节提出的迎风格式是线性的，因此在存在激波和材料界面时会产生振荡。本文采用 Suresh 和 Hyunh [30]的 MP 格式来抑制此类振荡。利用方程（24）给出的基于梯度的重构构造迎风格式后，将检查以下条件，以确定是否需要应用 MP 限制器:

$$\left(\mathbf{\Phi}_{j+1/2}^{L,GRB}-\mathbf{\Phi}_{j}\right)\left(\mathbf{\Phi}_{j+1/2}^{L,GRB}-\mathbf{\Phi}^{MP}\right)\leq 10^{-40}, \tag{25}$$

其中， $\mathbf{\Phi}^{MP}$ 由以下方程给出:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^{MP}&=\mathbf{\Phi}_{j}+\operatorname{minmod}\left[\mathbf{\Phi}_{j+1}-\mathbf{\Phi}_{j},\xi\left(\mathbf{\Phi}_{j}-\mathbf{\Phi}_{j-1}\right)\right]\ ,\\ \text{and},\operatorname{minmod}(a,b)&=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sign}(a)+\operatorname{sign}(b)\right)\min(|a|,|b|)\ ,\end{aligned} \tag{26}$$

其中， $\xi=7$ 与 [28]中的相同。如果线性格式不满足方程（25），则采用以下方程组所描述的 MP 限制器步骤

$$\begin{aligned}d_{j}&=2\left(\mathbf{\Phi}_{j+1}-2\mathbf{\Phi}_{j}+\mathbf{\Phi}_{j-1}\right)-0.5\left(\mathbf{\Phi}_{j+1}^{\prime}-\mathbf{\Phi}_{j-1}^{\prime}\right).\\ \mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{MD}&=\frac{1}{2}\left(\mathbf{\Phi}_{j}+\mathbf{\Phi}_{j+1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{minmod}\left(d_{j},d_{j+1}\right)\\ \mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{UL}&=\mathbf{\Phi}_{j}+\xi\left(\mathbf{\Phi}_{j}-\mathbf{\Phi}_{j-1}\right)\\ \mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{LC}&=\frac{1}{2}\left(3\mathbf{\Phi}_{j}-\hat{\mathbf{\Phi}}_{j-1}\right)+\frac{4}{3}\operatorname{minmod}\left(d_{j},d_{j-1}\right)\\ \mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{\min}&=\max\left[\min\left(\mathbf{\Phi}_{j},\mathbf{\Phi}_{j+1},\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{MD}\right),\min\left(\mathbf{\Phi}_{j},\mathbf{\Phi}_{j+1/2}^{UL},\mathbf{\Phi}_{j+1/2}^{LC}\right)\right]\\ \mathbf{\Phi}_{i+\frac{1}{2}}^{\max}&=\min\left[\max\left(\mathbf{\Phi}_{j},\mathbf{\Phi}_{j+1},\Phi_{j+\frac{1}{2}}^{MD}\right),\max\left(\mathbf{\Phi}_{j},\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{UL},\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{LC}\right)\right]\\ \mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{MEG7}}&=\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{L,GRB}+\operatorname{minmod}\left(\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{\min}-\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{L,GRB},\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{\max}-\mathbf{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}^{L,GRB}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

通过上述步骤得到的格式称为单调性保持显式梯度重构，本文将其记为 **MEG7** 。若使用守恒变量进行重构，则该格式记为 MEG7-cons；若使用原始变量进行重构，则相应格式记为 MEG7-prim。必须使用特征变量进行激波捕捉，这一过程相当直接。将选定的变量及其对应的梯度变换到特征空间，具体细节见参考文献 [1, 28]。

2.4. 实现真正高阶精度的算法

按照文献中的常见做法，对线性对流方程进行傅里叶分析 [1, 14,50]。通过傅里叶分析，前一小节已证明新推导的基于梯度的重构具有七阶精度。遗憾的是，将所提出的格式用于欧拉方程，尤其是非线性测试案例时，其精度仅为二阶 [14]。如引言所述，对流通量通过黎曼求解器计算，通用方程写作如下

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{Riemann}}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{F}_{L}^{c}+\mathbf{F}_{R}^{c}\right]-\frac{1}{2}|\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2}}|(\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{R}-\mathbf{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{L}), \tag{28}$$

上式特意写成上述形式。通常，界面通量 $\mathbf{F}_{L}^{c}$ 和 $\mathbf{F}_{R}^{c}$由相应的 $\mathbf{Q_L}$ 和 $\mathbf{Q_R}$ 计算得到（如果重构时使用原始变量，则由 $\mathbf{U_L}$ 和 $\mathbf{U_R}$ 计算得到）。然而，由此得到的界面通量会导致高阶精度损失，对于重构型多项式 [14], ，其精度仅为二阶精度，见方程（29）。

$$\mathbf{F}_{L}^{c}\quad\text{computed as}\quad\mathbf{F}(\mathbf{Q_L})\quad\text{or}\quad\mathbf{F}(\mathbf{U_L})\rightarrow\text{Second-order accurate} \tag{29}$$

如果直接利用单元中心处的通量计算界面通量，就能达到所需的精度阶数，见方程（30）。

$$\mathbf{F}_L^c \quad \text{computed as} \quad \mathbf{F}(\mathbf{f_L}) \rightarrow \text{High-order accurate} \tag{30}$$

需要注意的是，为了获得真正的高阶精度，$\mathbf{F}_L^c$、$\mathbf{F}_R^c$、$\mathbf{Q_L}$ 和$\mathbf{Q_R}$ 必须独立计算。一种简单的方法是利用单元中心处的通量计算$\mathbf{F}_L^c$，但当流动存在间断时，这种方法并不相容，并会导致振荡。当流动中存在间断时，将采用 MP 格式计算$\mathbf{Q}_L$，以防止振荡。因此，适宜将由 MP限制器获得的$\mathbf{Q}_L$ 作为$\mathbf{F}_L^c$ 的函数来计算。为解决这一问题，本文采用了如下混合方法:

$$\mathbf{F}_L^c = \sigma_{j+1/2}\mathbf{F}(\mathbf{f_L}) + (1-\sigma_{j+1/2})\mathbf{F}(\mathbf{Q_L}) \tag{31}$$

$$\mathbf{F}_R^c = \sigma_{j+1/2}\mathbf{F}(\mathbf{f_R}) + (1-\sigma_{j+1/2})\mathbf{F}(\mathbf{Q_R}) \tag{32}$$

其中

$$\mathbf{F}(\mathbf{f_L}) = \frac{1}{840}(568\mathbf{f}_j - 146\mathbf{f}_{j-1} + 22\mathbf{f}_{j-2} + 2\mathbf{f}_{j-3} - \mathbf{f}_{j-4} + 484\mathbf{f}_{j+1} - 104\mathbf{f}_{j+2} + 16\mathbf{f}_{j+3} - \mathbf{f}_{j+4}), \tag{33}$$

and

$$\mathbf{F}(\mathbf{f_R}) = \frac{1}{840}(-\mathbf{f}_{i+5} + 2\mathbf{f}_{i+4} + 22\mathbf{f}_{i+3} - 146\mathbf{f}_{i+2} + 568\mathbf{f}_{i+1} + 484f_i - 104\mathbf{f}_{i-1} + 16\mathbf{f}_{i-2} - \mathbf{f}_{i-3}), \tag{34}$$

且$\sigma_{j+1/2}$ 是一个间断探测器，在间断附近接近于零，在光滑区域内为 1。也可以使用方程（15），通过单元中心的通量计算界面通量。方程（33）是将一阶和二阶导数代入方程（24）后得到的简化形式，仅用于通量重构。这种方法能够在光滑区域附近实现高阶精度，同时捕捉间断而不产生振荡。本文使用 Li等人提出的间断探测器 [52]，其形式如下:

$$\psi_j = \frac{2}{\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{35}$$

$$\begin{aligned} a &= |\rho_j - \rho_{j-1}| + |\rho_j - 2\rho_{j-1} + \rho_{j-2}|, \\ b &= |\rho_j - \rho_{j+1}| + |\rho_j - 2\rho_{j+1} + \rho_{j+2}|. \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\psi_{j+1/2} = \min\left(\psi_{j-2}, \psi_{j-1}, \psi_j, \psi_{j+1}, \psi_{j+2}, \psi_{j+3}\right), \\ &\varepsilon = \frac{0.9\psi_c}{1-0.9\psi_c}\xi^2, \quad \xi = 10^{-3}, \quad \psi_c = 0.5, \\ &\sigma_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \psi_{j+1/2} < \psi_c \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{37}$$

本文所采用的间断探测器与Li等人的原始论文 [53]存在两点不同。首先，Li等人将单元中心处的通量作为方程（36）中的变量，而本文仅使用密度。其次，Li等人为混合格式提出了该间断探测器，而本文使用该探测器以获得高阶精度。此外，TENO方法中也采用了类似的间断探测器，以提高格式的效率和分辨率特性 [26, 54]。

将密度用作间断探测器变量的原因是，仅监测密度即可识别接触间断和激波。相比之下，监测压力或速度只能探测激波。为使该方法适用于广泛的测试算例，需要使用足够数量的缓冲点；如方程（37）所示，单元界面的两侧各取三个缓冲点 $\psi_{j+1/2}$。所提出的方法适用于守恒变量和原始变量重构。最后，增大

将 ψ_c 值提高到 0.5 以上会降低精度，而降低该值则会导致振荡。所提出的方法也可用于 [1]中介绍的显式四阶格式。与 [1]中介绍的隐式格式相比，当前方法更适用于显式格式，因为隐式格式具有全局性，因此计算代价较高。所提出的混合算法仍可在无黏通量和黏性通量之间共享导数，这正是基于梯度的重构的核心思想。

2.5. 时间离散

最后，守恒变量采用三阶TVD Runge–Kutta格式[20]进行时间积分：

$$\mathbf{Q}_{j,i}^{(1)} = \mathbf{Q}_{j,i}^{n} + \Delta t \mathbf{Res}\left(\mathbf{Q}_{j,i}^{n}\right) \tag{38}$$

$$\mathbf{Q}_{j,i}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{Q}_{j,i}^{n} + \frac{1}{4}\mathbf{Q}_{j,i}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathbf{Res}\left(\mathbf{Q}_{j,i}^{(1)}\right) \tag{39}$$

$$\mathbf{Q}_{j,i}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{j,i}^{n} + \frac{2}{3}\mathbf{Q}_{j,i}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathbf{Res}\left(\mathbf{Q}_{j,i}^{(2)}\right), \tag{40}$$

其中，**Res**分别表示由方程 (5) 右端给出的残差。上标 n和 $n+1$ 分别表示当前和下一个时间步长，上标 (1) – (2) 表示中间步骤。时间步长 Δt 的计算方式为：

$$\Delta t = \mathrm{CFL} \cdot \min\left(\frac{1}{\alpha_v}\min_{j,i}\left(\frac{\Delta x^2}{\nu_{j,i}}, \frac{\Delta y^2}{\nu_{j,i}}\right), \min_{j,i}\left(\frac{\Delta x}{|u_{j,i}| + c_{j,i}}, \frac{\Delta y}{|v_{j,i}| + c_{j,i}}\right)\right), \tag{41}$$

其中， c 为声速，由 $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ 给出； α_v 与黏性格式的阻尼特性有关（见公式 (12)）； ν 为运动黏度，定义为 $\nu = \mu/\rho$。所有数值模拟中的 CFL数均取 0.2。

3. 数值结果

本节展示了针对 Euler 方程和 Navier–Stokes方程的一些基准测试的数值结果，以说明上述七阶基于梯度的重构的性能。对于 MEG7 格式，分别考虑原始变量重构和守恒变量重构。将本文格式 MEG7 与七阶加权非线性紧致格式（WCNS7） [44, 55]进行比较。下面介绍 WCNS7 的细节。WCNS 中的插值由四点子模板构造如下：

$$\begin{aligned}
Q_{j+1/2}^{L,1} &= -\frac{5}{16}Q_{j-3} + \frac{21}{16}Q_{j-2} - \frac{35}{16}Q_{j-1} + \frac{35}{16}Q_j \\
Q_{j+1/2}^{L,2} &= \frac{1}{16}Q_{j-2} - \frac{5}{16}Q_{j-1} + \frac{15}{16}Q_j + \frac{5}{16}Q_{j+1} \\
Q_{j+1/2}^{L,3} &= -\frac{1}{16}Q_{j-1} + \frac{9}{16}Q_j + \frac{9}{16}Q_{j+1} + \frac{1}{16}Q_{j+2} \\
Q_{j+1/2}^{L,4} &= \frac{5}{16}Q_j + \frac{15}{16}Q_{j+1} - \frac{5}{16}Q_{j+2} + \frac{1}{16}Q_{j+3}
\end{aligned} \tag{42}$$

接下来， $Q_{j+1/2}^{L}$ 按如下方式计算加权平均值：

$$Q_{j+1/2}^{L} = w_1 Q_{j+1/2}^{L,1} + w_2 Q_{j+1/2}^{L,2} + w_3 Q_{j+1/2}^{L,3} + w_4 Q_{j+1/2}^{L,4} \tag{43}$$

其中， w_k 是按如下方式计算的非线性权重：

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_l \alpha_l} \tag{44}$$

$$\alpha_{k,m} = \frac{C_k}{\left(IS_k + \varepsilon\right)^2} \tag{45}$$

在上述方程中，(C1, C2, C3, C4) = (1/64, 21/64, 35/64, 7/64) 称为理想权重，而IS_k 称为光滑指示器，其计算方式如下。

$$IS_k = \sum_{n=1}^{4} \left(\sum_{l=1}^{4} c_{n,k,l} Q_{j+k+l-5} \right) \tag{46}$$

由于 WCNS7 中的非线性权重在光滑区域内并非总是合适，因此采用 [21, 55] 的映射技术，并将该格式记为 WCNS7M。映射技术能有效恢复格式的形式精度阶数。使用映射技术计算得到的 $Q^L_{j+1/2}$ 如下:

$$Q^L_{j+1/2} = w^M_1 Q^{L,1}_{j+1/2} + w^M_2 Q^{L,2}_{j+1/2} + w^M_{3,m} Q^{L,3}_{j+1/2} + w^M_4 q^{L,4}_{j+1/2} \tag{47}$$

$$w^M_k = \frac{w_k \left(C_k + \left(C_k\right)^2 - 3C_k w_k + \left(w_k\right)^2 \right)}{\left(C_k\right)^2 - \left(1 - 2C_k\right) w_k} \tag{48}$$

此外，WCNS7M 格式采用守恒变量插值，并使用八阶格式计算通量导数，如参考文献 [37] 所示。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dx}_j = & \frac{1}{\Delta x}\frac{1225}{1024}\left(F^{C,WCNS}_{j+1/2} - F^{C,WCNS}_{j-1/2}\right) \\ & -\frac{1}{\Delta x}\frac{245}{3072}\left(F^{C,WCNS}_{j+3/2} - F^{C,WCNS}_{j-3/2}\right) \\ & +\frac{1}{\Delta x}\frac{49}{5120}\left(F^{C,WCNS}_{j+5/2} - F^{C,WCNS}_{j-5/2}\right) \\ & -\frac{1}{\Delta x}\frac{5}{7168}\left(F^{C,WCNS}_{j+7/2} - F^{C,WCNS}_{j-7/2}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

需要指出的是，本文格式出于两个原因与 WCNS7M 方法进行比较：a) WCNS7M 是一种真正具有高阶精度的方法；b) WCNS7 方法的优势在于可以使用任意近似黎曼求解器，而 WENO格式 [56] 则不同。第二项优势很重要，因为这样可以使用同一个一致的黎曼求解器进行比较。所有测试算例的边界条件均采用虚单元方法实现，具体如参考文献 [57] 所示。

例3.1. 精度阶数

在这个首个测试算例中，展示所提出格式的精度阶数。为此，考虑二维涡旋演化问题 [31, 58] 。该测试算例的计算区域为 [-5, 5] × [-5, 5] ，所有边界均采用周期边界。在平均流中叠加一个等熵涡旋，初始流场定义如下:

$$p = \rho^\gamma, T = 1 - \frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{\left(1-r^2\right)}, u = 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)} y, v = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)} x, \tag{50}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$ 且涡旋强度 ϵ 取为 5。计算一直进行到终止时间 t =10。表1列出了采用原始变量和守恒变量时 MEG7 格式的 L_2 密度误差及收敛率。可以看出，MEG7-cons 和 MEG7-prim 均达到了七阶精度。对于此测试算例，WCNS7M 格式也表现出相似的收敛率。

表1：精度阶数　　度适用于各种格式，例3.1。 L_2 密度误差范数和收敛率如下所示　　n.

N	WCNS7M	阶数	MEG7-cons	阶数	MEG7-prim	阶数
25^2	2.45E-03	-	2.55E-03	-	2.38E-03	-
50^2	9.34E-05	4.71	6.68E-05	5.25	6.77E-05	5.13
100^2	1.14E-06	6.35	1.02E-06	6.03	1.06E-06	6.00
200^2	1.51E-08	6.24	1.06E-08	6.59	1.03E-08	6.68

既然已经证明，得益于第 2.4 节提出的混合方法，所提出的格式能够在非线性测试算例中达到高阶精度，那么接下来的测试算例将展示它也能够在不产生振荡的情况下捕捉间断。

例 3.2. 激波管问题

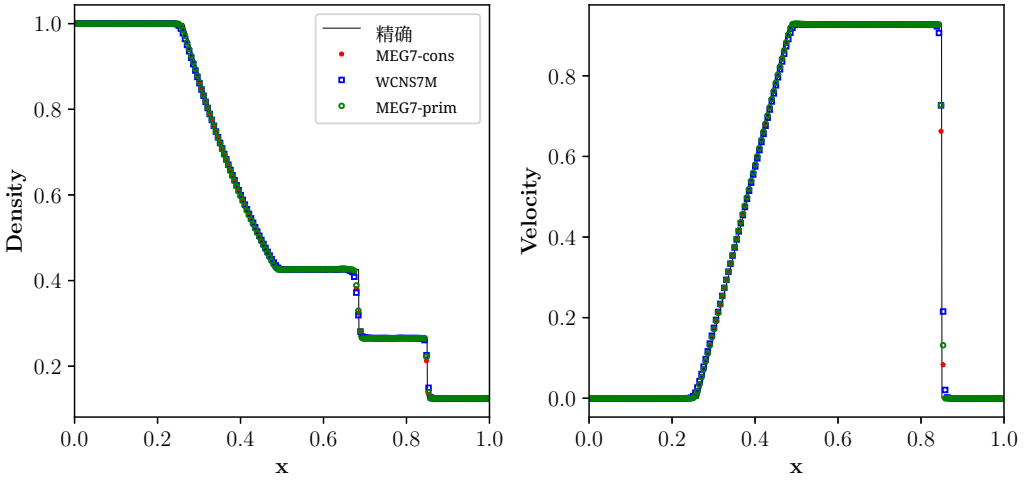
首先，我们展示所提出的格式 MEG7 能够通过 Sod [59] 和 Lax [60] 激波管问题。对于 Sod 问题，初始条件如下：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & \text{if } 0 \le x < 0.5, \\ (0.125, 0, 0.1), & \text{if } 0.5 \le x \le 1, \end{cases} \tag{51}$$

数值模拟持续进行至终止时间 $t = 0.2$。对于 Lax 激波管问题，初始条件为

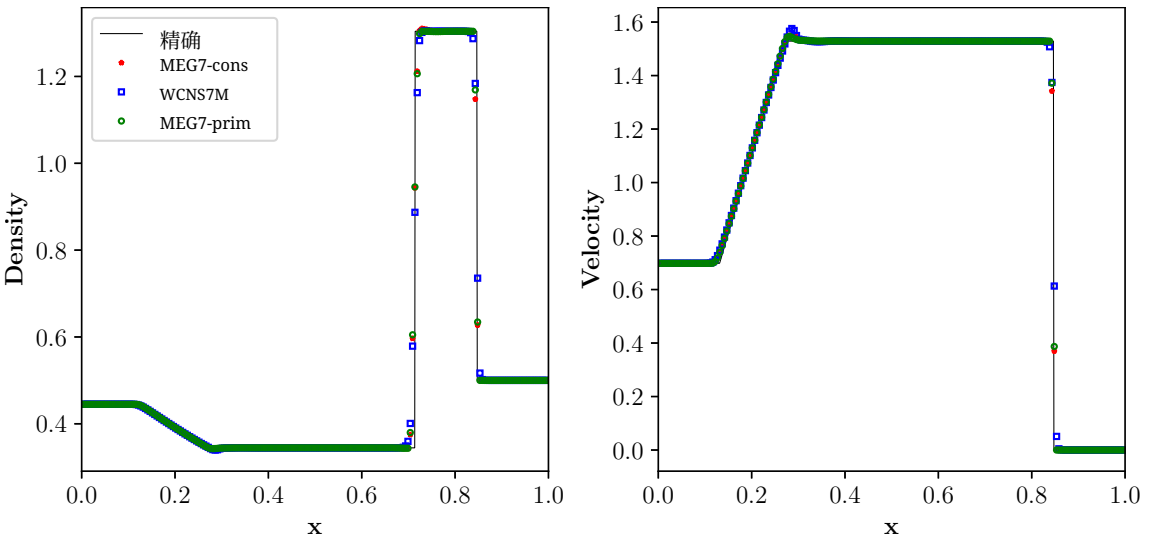
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & \text{if } 0 \le x < 0.5, \\ (0.5, 0, 0.571), & \text{if } 0.5 \le x \le 1, \end{cases} \tag{52}$$

以及终止时间为 $t = 01$。4. 两个算例的计算域均为 $x = [0, 1]$ ，数值模拟采用 $N = 200$ 均匀分布的网格点进行。此测试算例的精确解由精确黎曼求解器 [61] 计算得到。图 2 展示了 Sod 问题的结果，所有采用的格式均捕捉到了稀疏波、接触间断和激波，且没有明显的振荡。图 3 展示了 Lax 问题的结果，所有格式同样捕捉到了间断，且没有振荡。



(a) 计算得到的密度分布。　　(b) 计算得到的速度分布。

图 2：对于示例 3.2 的 Sod 测试算例，使用 $N = 200$ 个网格点在 $t = 0.2$时得到的 Sod 激波管问题数值解，其中实线表示精确解；蓝色方块表示 WCNS7M；红色星号表示 MEG7-cons，绿色圆圈表示 MEG7-prim。



(a) 计算得到的密度分布。 (b) 计算得到的速度分布。

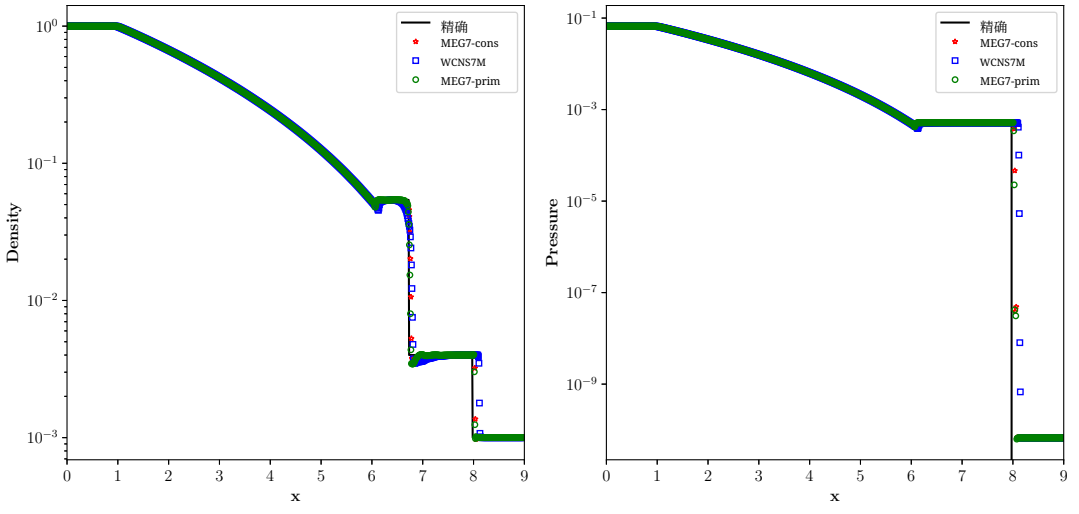
图 3：对于例 3.2 的拉克斯测试算例，使用 $N = 200$ 个网格点在 $t = 0.14$ 时刻求得的拉克斯问题数值解，其中实线：精确解；蓝色方块：WCNS7M；红色星形：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

例 3.3. 极端测试算例

这里，我们考虑 Le Blanc [62] 和 Sedov [63] 测试算例，它们被视为极端激波管问题。Le Blanc 问题的初始条件如下：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0 \ , \ 0, \ \frac{2}{3} \times 10^{-1} \ ), & 0 < x < 3.0, \\ (10^{-3}, \ 0, \ \frac{2}{3} \times 10^{-10}), & 3.0 < x < 9, \end{cases} \tag{53}$$

数值模拟的终止时间为 t=6。该测试算例的比热比取为 $_5$ $_3$。在网格规模为 $N = 900$ 时，采用 WCNS7M、MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式得到的密度和压力数值结果如图 4 所示。与 MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式分别得到的密度分布相比，WCN7M 格式得到的密度分布耗散性略强。在密度和压力分布中，MEG7 格式得到的间断位置 $x = 8$ 比 WCNS7M 格式更接近精确解，如图 4(a) 和图 4(b) 所示。



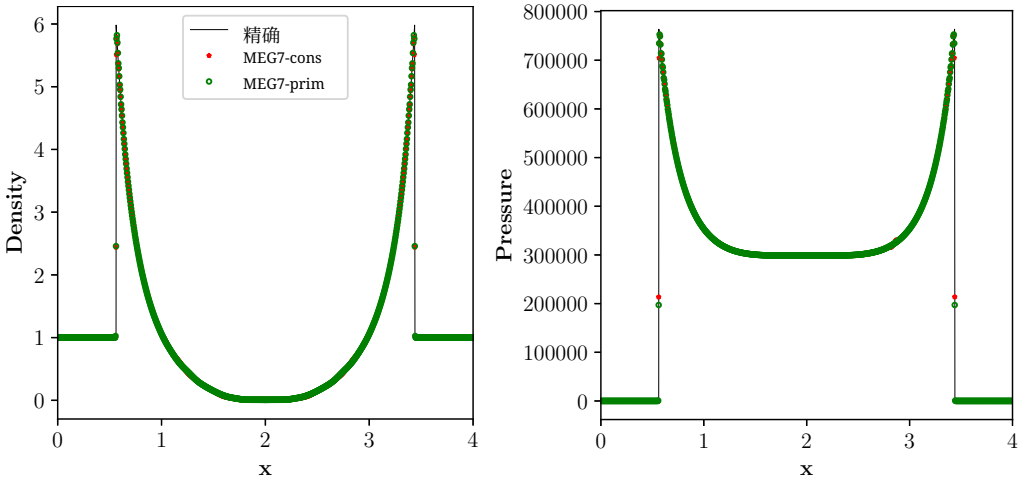
(a) 密度　　(b) 压力

图 4：采用方程（53）给出的初始条件求解 Le Blanc 问题的数值解，例（3.3）。实线：精确解；蓝色方块：WCNS7M；红色星形：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

Sedov 问题的初始条件如下：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(1,0,4.0\mathrm{e}-13), & x<2-0.5\Delta x, x>2+0.5\Delta x\\ \left(1,0,\frac{1.28\mathrm{e}6}{\Delta x}\right), & 2-0.5\Delta x\le x\le 2+0.5\Delta x\end{cases}, \tag{54}$$

且计算域为 $[0,4]$，终止时间为 $t=1.0\mathrm{e}\text{-}3$。该测试算例同样采用 900 个网格点进行计算，结果如图 5 所示。图 5(a) 和图 5(b) 分别展示了密度和压力分布。可以看出，采用守恒变量重构和原始变量重构的 MEG7 格式均通过了该测试算例，且没有明显的振荡。WCNS7M 格式未能通过该测试。MEG7-cons 方法需要采用 [63]的保正方法。这些结果表明，所提出的高阶算法能够模拟极端测试算例，且具有良好的鲁棒性。



(a) 密度　　(b) 压力

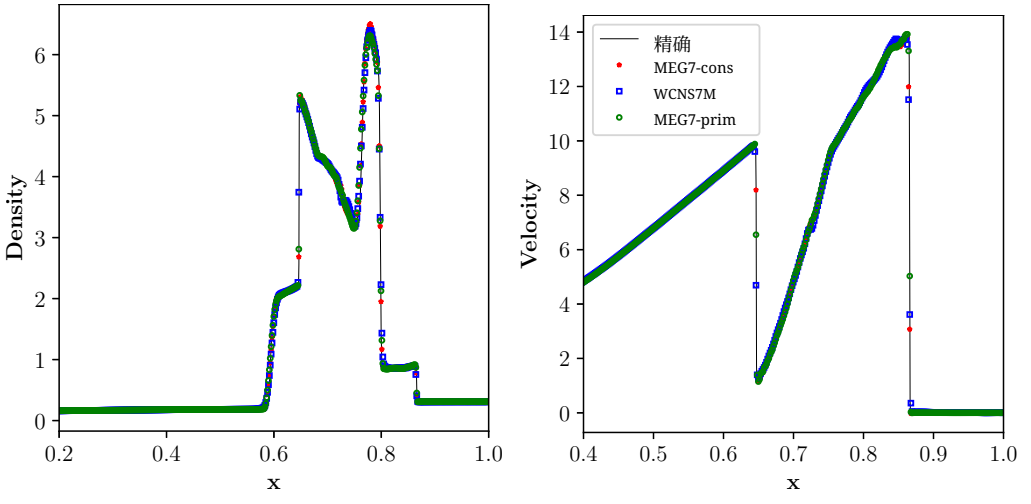
图 5：采用方程（54）给定的初始条件求解 Sedov 问题的数值解，例 3.3。实线：精确解；红色星号：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

示例 3.4. 爆炸波问题

在此测试算例中，参考文献 [64]，中的爆炸波问题具有以下初始条件

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & \text{if } 0.0 \le x < 0.1, \\ (1, 0, 0.01), & \text{if } 0.1 \le x < 0.8, \\ (1, 0, 100), & \text{if } 0.8 \le x \le 1.0, \end{cases} \tag{55}$$

考虑该算例。此测试算例的计算域为 $x = [0, 1]$，终止时间为 $t = 0.038$。数值模拟采用 $N = 600$ 个均匀分布的网格点进行，结果如图 6 所示。从图 6(a)可以看出，所有考察的格式表现良好，且没有振荡。观察图 6(a)中的局部密度分布可知，MEG7-prim 对密度极值的预测最佳。



(a) 全局密度剖面。　　(b) 全局速度分布。

图 6：在 $N = 600$ 个网格点上、 $t = 0.038$ 时使用 $N = 600$ 网格点求解爆炸波问题的数值结果，例 3.4。实线：精确解；蓝色方块：WCNS7M；红色星形：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

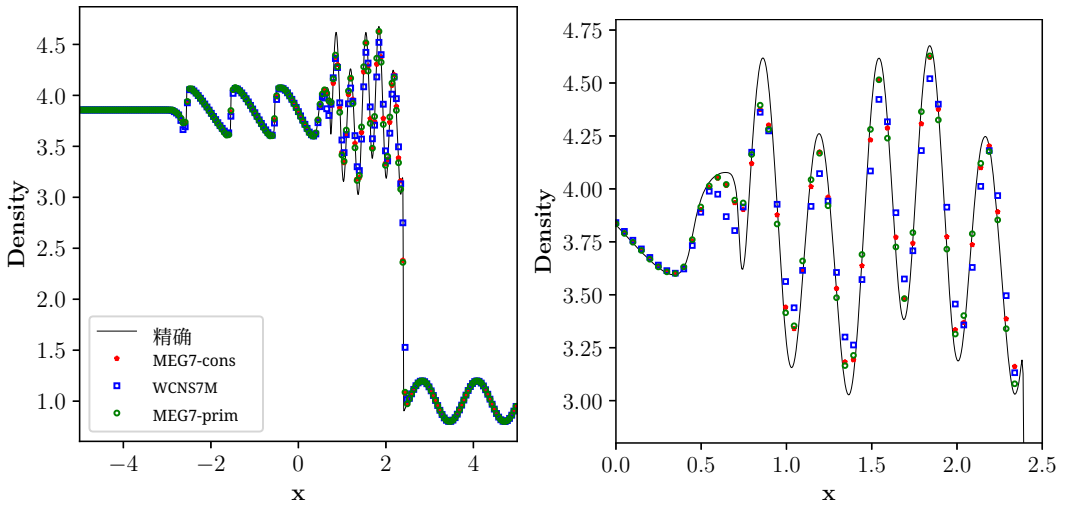
使用 MEG7 格式时，只需较少的网格单元即可捕捉 $x \approx 0.87$ 处的速度分布间断（图 6(b)）；而 WCNS7M 格式则需要更多网格单元，这表明当前方法具有低耗散特性。

例 3.5。 一维激波-熵波问题

在此测试中，我们考虑 Shu 和 Osher 的激波-熵波问题 [19]，，以及 Titarev 和 Toro 对其所作的修改版本 [43]。该测试算例研究激波与高频振荡正弦波的相互作用。这些算例用于评估格式同时捕捉激波和高频振荡的能力。Shu 和 Osher 的初始条件如下：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, 2.629, 10.333), & \text{if } -5 \le x < -4, \\ (1 + 0.2\sin(5(x-5)), 0, 1), & \text{if } -4 \le x \le 5. \end{cases} \tag{56}$$

该测试算例的计算域为 $x = [-5, 5]$，终止时间为 $t = 1.8$。数值模拟在网格规模为 $N = 200$ 的网格上进行。使用 MP5 格式在包含 2000 个点的高分辨率网格上获得精确解。如图 7(a) 所示，所提出的格式与参考解吻合良好。观察图 7(b) 可知，在捕捉密度极值方面，MEG7-cons 和 MEG7-prim 的表现优于 WCNS7M 格式。



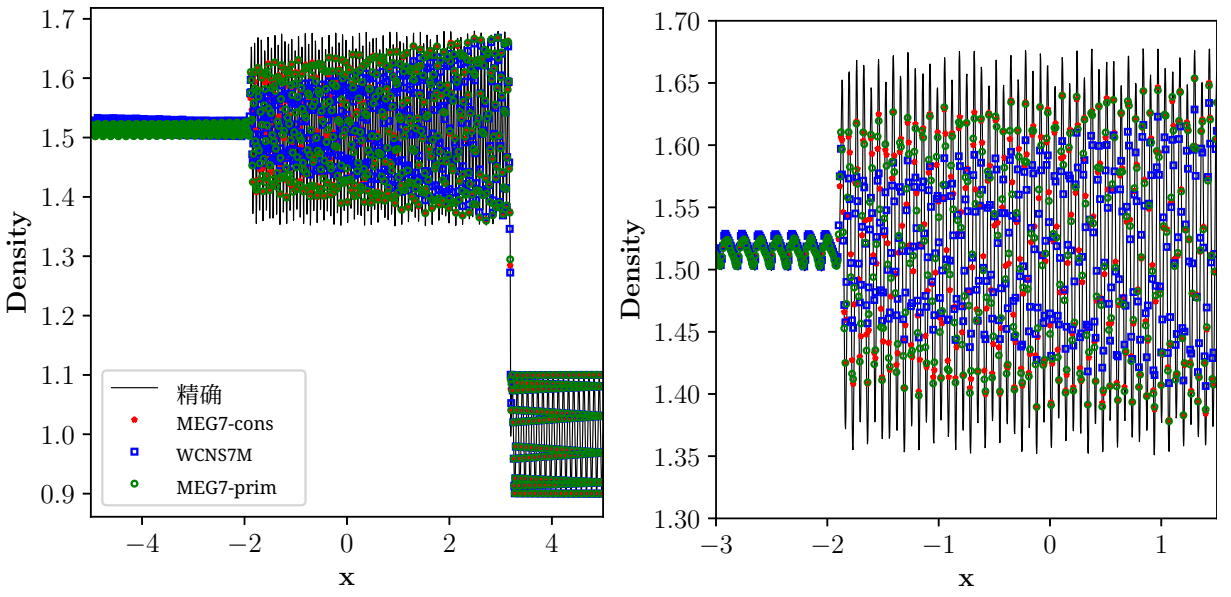
(a) 全局密度剖面。 (b) 局部密度剖面。

图 7 $N = 200$ 3 5 $exact$： 采用位于 $t = 1.8$ 的网格点 $solution$ 求解 Shu-Osher 问题的数值解，示例.....实线：；蓝色方块：WCNS M；红色星形：MEG -cons；绿色圆圈：MEG -prim。

初始条件 Titarev 和 Toro 对上述测试算例的修改版本如下：

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.515695, 0.523346, 1.805), & \text{if } 0 \le x < 0.5, \\ (1 + 0.1\sin(20\pi(x-5)), 0, 1), & \text{if } 0.5 \le x \le 10. \end{cases} \tag{57}$$

该测试算例的计算域为 $x = [0, 10]$，终止时间为 $t = 5$。对于该测试算例，采用 $N = 1000$的均匀网格进行数值模拟。使用 MEG7 格式和 WCNS7M 获得的数值结果如图 8 所示。可以观察到，与 WCNS7M 格式相比，MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式在高频波处捕捉解的精细尺度结构方面具有更高的分辨率，如图 8(b) 所示。在下面的示例中，将考虑二维测试算例。



（a）全局密度剖面。　　（b）局部密度剖面。

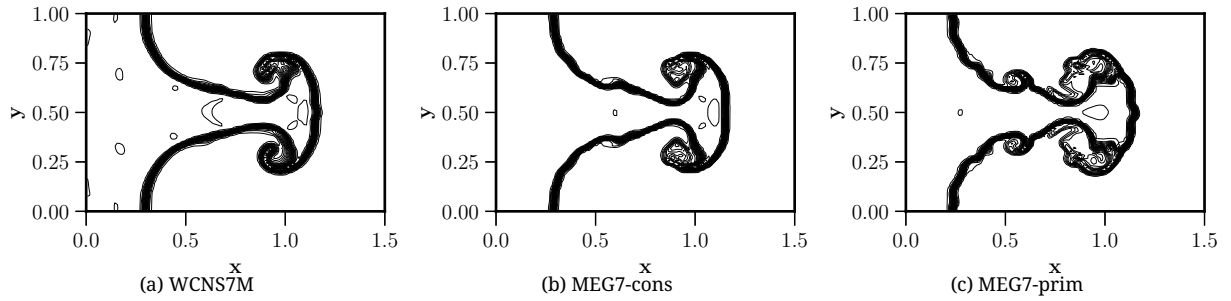
图 8：使用 $N = 1000$ 个网格点在 $t = 5$ 时刻求得的 Titarev-Toro问题数值解。实线： *exact solution*；蓝色方块：WCNS7M；红色星形：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

示例 3.6. *Richtmyer–Meshkov* 不稳定性

在第一个二维测试算例中，我们考虑单模瑞利–泰勒不稳定性问题[50, 65]。当入射激波加速两个不同密度流体之间的扰动界面时，就会发生这种不稳定性。该测试算例的计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$，数值模拟进行至 $t = 9$。该测试算例采用以下初始条件初始化：

$$(\rho,\ u,\ v,\ p) = \begin{cases} (5.04,\ 0,\ 0,\ 1)\,, & \text{若 x } < 2.9 - 0.1\sin(2\pi(\text{y}+0.25)), \\ \text{扰动界面}, & \\ (1,\ 0,\ 0,\ 1)\,, & \text{若 x } < 3.2, \\ (1.4112,\ -665/1556,\ 0,\ 1.628)\,, & \text{否则}。 \end{cases}$$

数值模拟采用网格尺寸为 320×80 的均匀网格，上下边界使用周期性边界条件。左右边界值固定为初始条件。图 9 展示了采用不同格式计算得到的密度分布等值线。与 WCNS7M 格式相比，MEG7-cons 格式的物质界面更薄，表明其数值耗散更低。另一方面，与其他格式相比，MEG7-prim 格式的数值耗散更低，还能产生小尺度的卷起涡旋。



(a) WCNS7M　　(b) MEG7-cons　　(c) MEG7-prim

图 9：示例 3.6 中所述 Richtmyer–Meshkov 不稳定性的各格式数值结果。图中绘制了 24 条等值线。

例3.7。 二维激波-熵波测试

在此二维测试算例中，使用所提出的格式对激波-熵波相互作用问题 [28, 50, 66]进行数值模拟。该测试算例可视为例 3.5 中一维测试算例的扩展。此测试算例的计算域为 $[-5,5]\times[-1,1]$，最终数值模拟时间为 $t=1.8$。此测试算例的初始条件如下：

$$(\rho,u,p)=\begin{cases}(3.857143,\ \ 2.629369,\ \ 10.3333), & x<-4,\\ (1+0.2\sin(10x\cos\theta+10y\sin\theta),\ \ 0,\ \ 1), & otherwise.\end{cases}\tag{58}$$

θ的取值为 $\pi/6$。数值模拟在网格尺寸为 400×80（对应$\Delta x=\Delta y=1/40$）的网格上进行。对于该测试算例，采用Fleischmann等人的激波稳定型HLLC黎曼求解器[67] ，以避免 [1]中观察到的马蹄效应。该测试算例的参考解采用MIG4格式 [11] 在尺寸为 1600 × 320的细网格上计算得到。图10(a)、10(b)和10(c)分别展示了使用WCNS7M、MEG7-cons和MEG7-prim进行数值模拟得到的密度等值线。这些图表明，尽管它们均具有七阶精度，与WCNS7格式相比，MEG7格式能更好地捕捉流动结构。

图 10(d) 展示了沿 $y=0$ 高频区域的局部密度分布。从图中可以看出，与 WCNS7M 格式相比，MEG7方法预测密度振幅时的数值耗散更低。此外，在弱激波与熵波相互作用区域附近，MEG7 的色散误差更小，表明其分辨率特性更优。

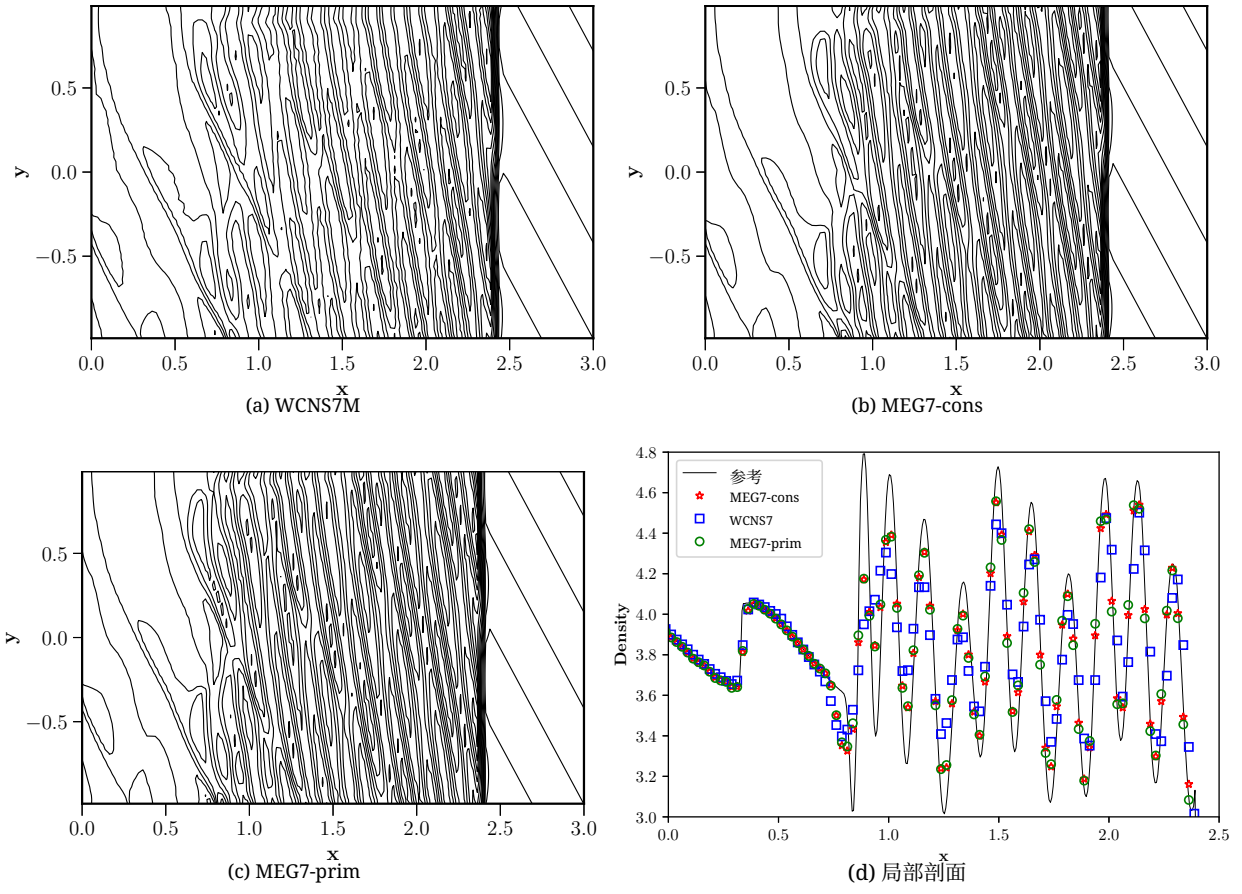


图10：图(a)、(b)和(c)展示了例3.7中二维激波-熵波测试在 $t=1.8$时，不同格式得到的15条密度等值线。实线： *Reference solution*；蓝色方块：WCNS7M；红色星号：MEG7-cons；绿色圆圈：MEG7-prim。

示例 3.8。双马赫反射

Woodward and Collela 的双马赫反射测试算例进一步用于评估所提出的格式[64]。在此测试算例中，马赫数 10 的非定常平面激波撞击一个倾斜 30 度的表面。该测试算例的计算域为 $[x, y] = [0, 4] \times [0, 1]$，计算运行至终止时间 $t = 0.2$。此测试算例的初始条件如下：

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (8,\ 8.25\cos 30^\circ,\ -8.25\sin 30^\circ,\ 116.5), & x < 1/6 + \frac{y}{\tan 60^\circ}, \\ (1.4,\ 0,\ 0,\ 1), & x > 1/6 + \frac{y}{\tan 60^\circ}. \end{cases} \tag{59}$$

边界条件与 Woodward and Collela [64]的相同。使用所有所考虑的格式，在均匀网格 1024×256 上进行数值模拟。作为比较，该测试算例的参考结果采用 HOUCS6 格式 [28] 在约为 4096×1024 的网格规模上计算得到，并显示于图 11(d) 中。观察图 11 可见，所提出的格式能够捕捉到由 Kelvin–Helmholtz 不稳定性和近壁射流在滑移线上产生的涡旋。与 WCNS7 方法相比，MEG7-cons 能够更好地解析滑移线上的涡旋。MEG7-prim 得到的结果未显示滑移线上的涡旋，但近壁射流得到了更好的解析。这表明，对于该测试算例，原始变量重构的耗散性略强。文献 [67] 中的激波稳定 HLLC 黎曼求解器也用于该测试算例。

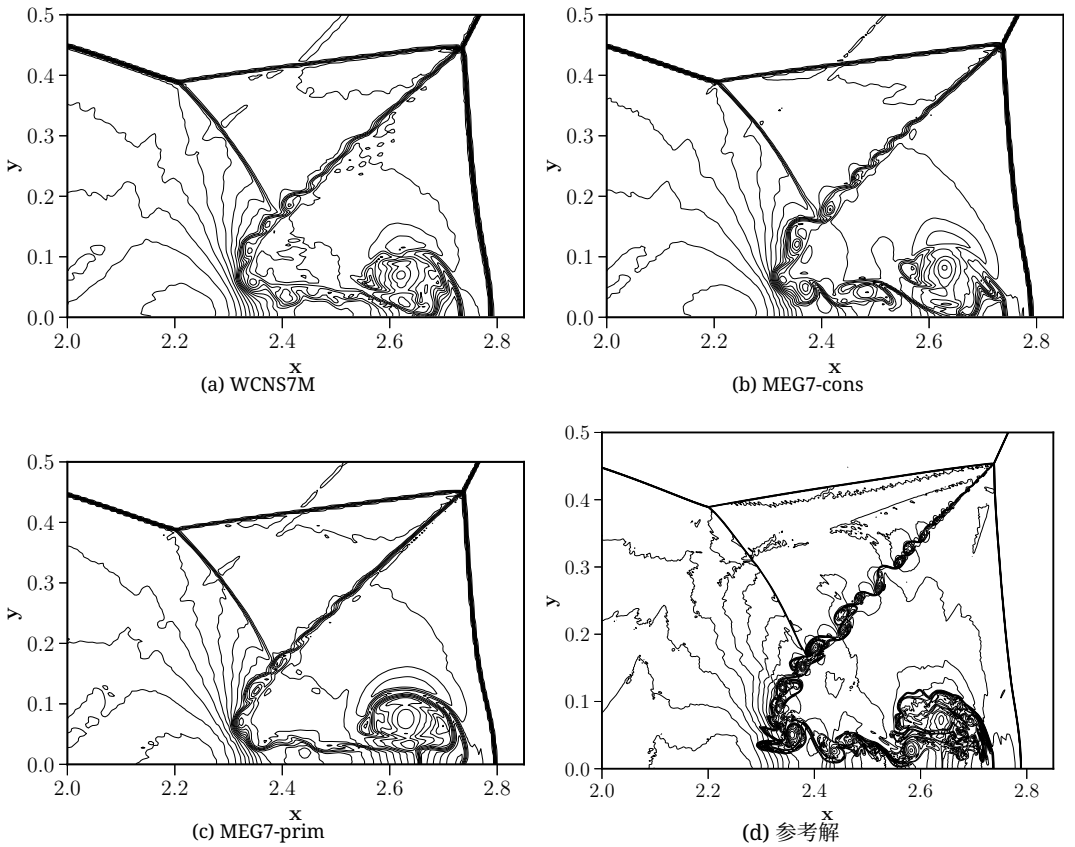


图 11：计算得到的密度　　所考虑的双马赫反射中马赫杆区域放大图的等值线
格式。图中绘制了　　38条等高线。

示例 3.9. 黎曼问题

在这个终止的无黏测试算例中，考虑 Schulz-Rinne等人提出的二维黎曼问题 [68] 。与前一个测试算例类似，滑移线上形成的小尺度结构是由

开尔文-亥姆霍兹不稳定性引起的，表明该数值格式的数值耗散。此测试算例的计算域为 $[x,y]=[0,1]\times[0,1]$，计算持续至终止时间 $t=0.8$。所考虑配置的初始条件如下：

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(1.5,0,0,1.5), & \text{if } x>0.8, y>0.8,\\ (33/62,4/\sqrt{11},0,0.3), & \text{if } x\le 0.8, y>0.8,\\ (77/558,4/\sqrt{11},4/\sqrt{11},9/310), & \text{if } x\le 0.8, y\le 0.8,\\ (33/62,0,4/\sqrt{11},0.3), & \text{if } x>0.8, y\le 0.8.\end{cases} \tag{60}$$

数值模拟在网格规模为 400×400 的均匀网格上进行。图 12 展示了所考察格式得到的密度等值线。

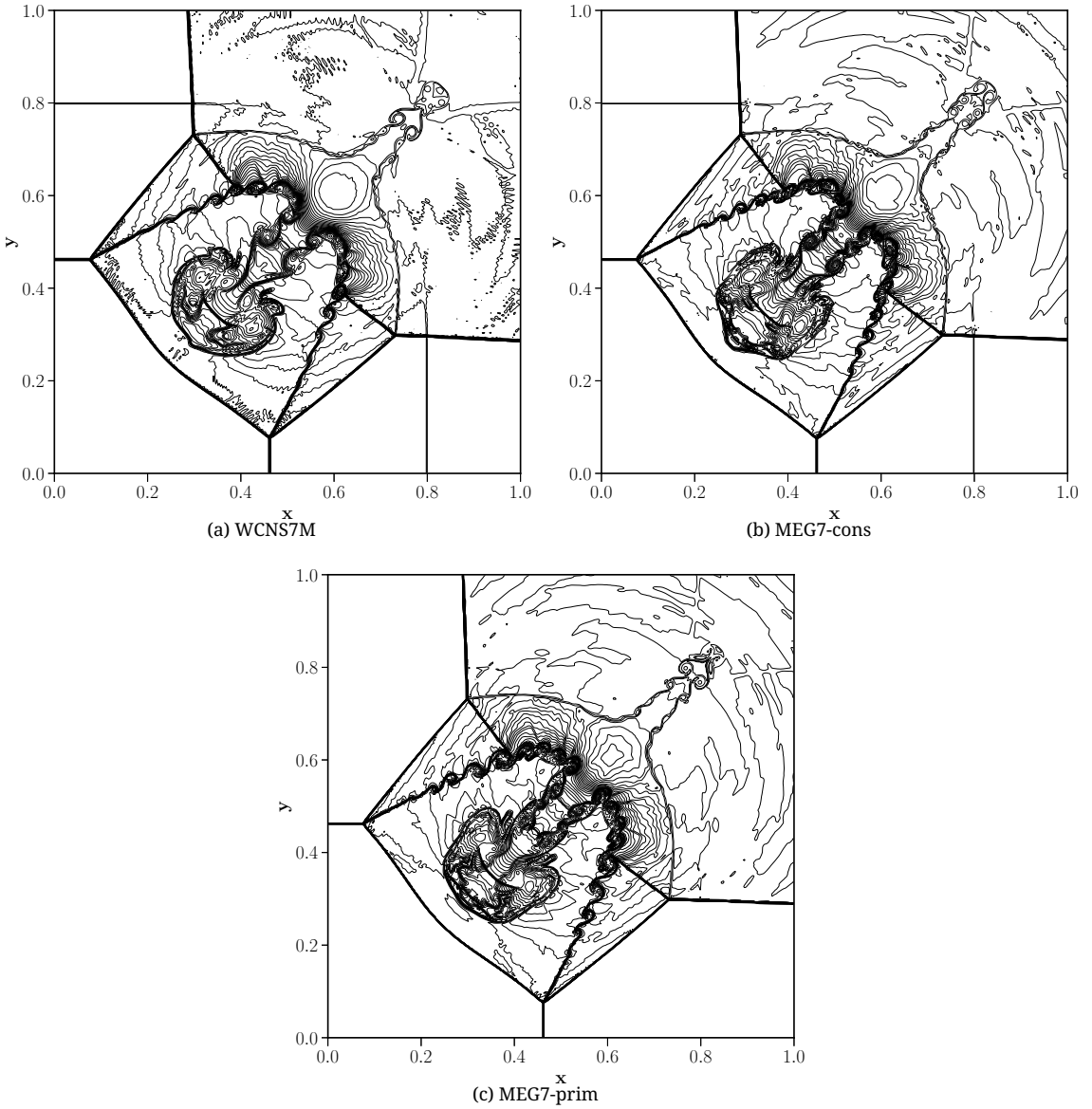


图 12：分别采用 WCNS7M、MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式计算示例 3.9 所述黎曼问题得到的密度等值线。图中绘制了 40 条等值线。

观察图 12(a) 和图 12(b) 可知，与 WCNS7M 格式相比，MEG7-cons 格式能更好地分辨滑移线上的小尺度结构。图 12(c) 展示了使用 MEG7-prim 得到的密度等值线。该格式同样分辨出了小尺度结构，且守恒变量重构与原始变量重构之间的差异很小。这些结果表明，所提出的方法比 WCNS7M 格式具有更低的耗散。

示例 3.10。 黏性激波管

在此测试算例中，我们考虑黏性激波管问题 [69] ，以评估所提出的格式在黏性流动模拟中的表现。此测试算例的计算域为 $[x, y] = [0, 1] \times [0, 0.5]$，计算持续至终止时间 $t = 1.0$。此测试算例的初始条件如下：

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (120, 0, 0, 120/\gamma), & 0 < x < 0.5, \\ (1.2, 0, 0, 1.2/\gamma), & 0.5 \le x < 1. \end{cases} \tag{61}$$

入射激波和接触间断的传播在底壁形成了一层薄边界层，而其在右壁的反射会与该边界层相互作用。这些相互作用会产生 λ 形激波结构、复杂的涡系和分离区，因此这是评估高分辨率格式的理想测试算例。

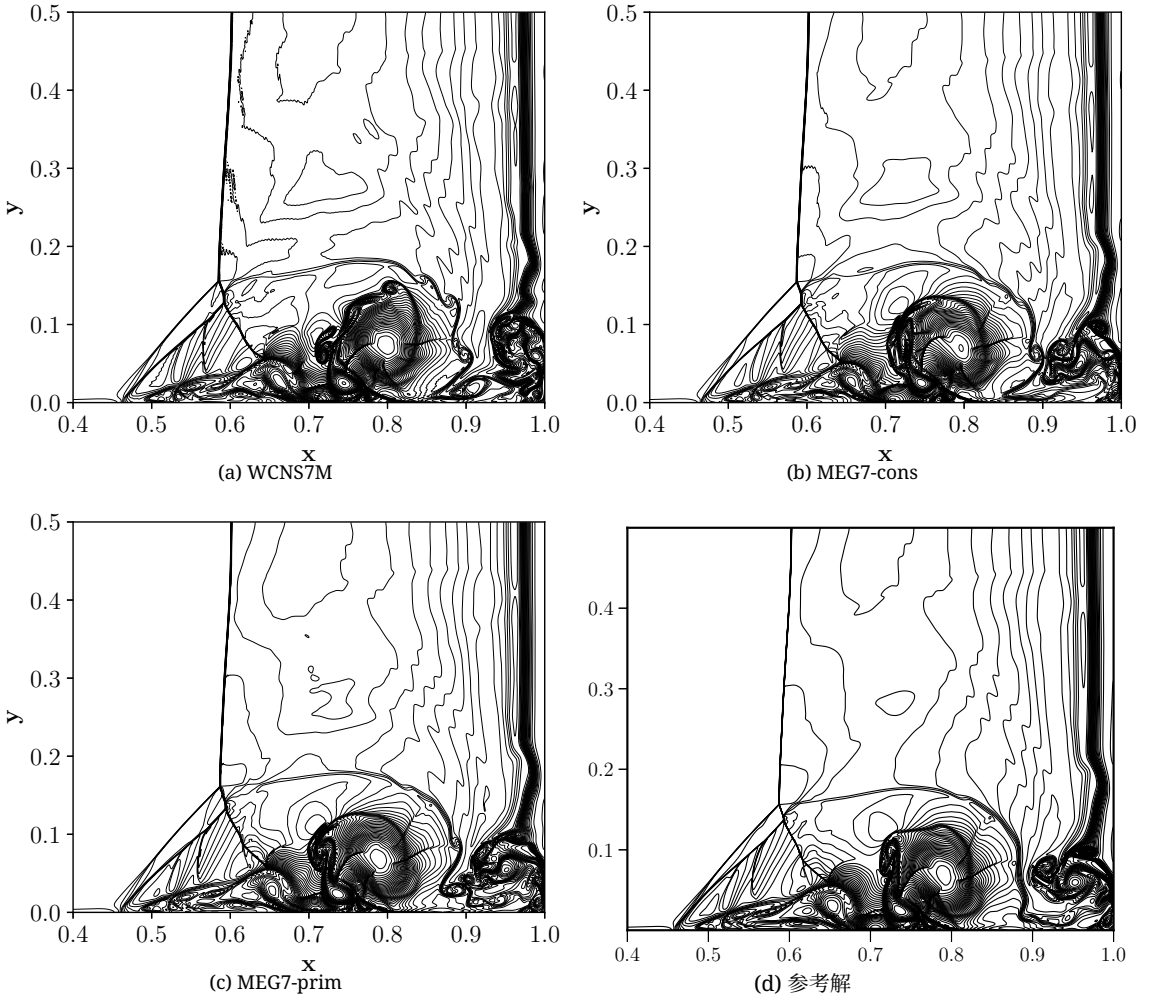
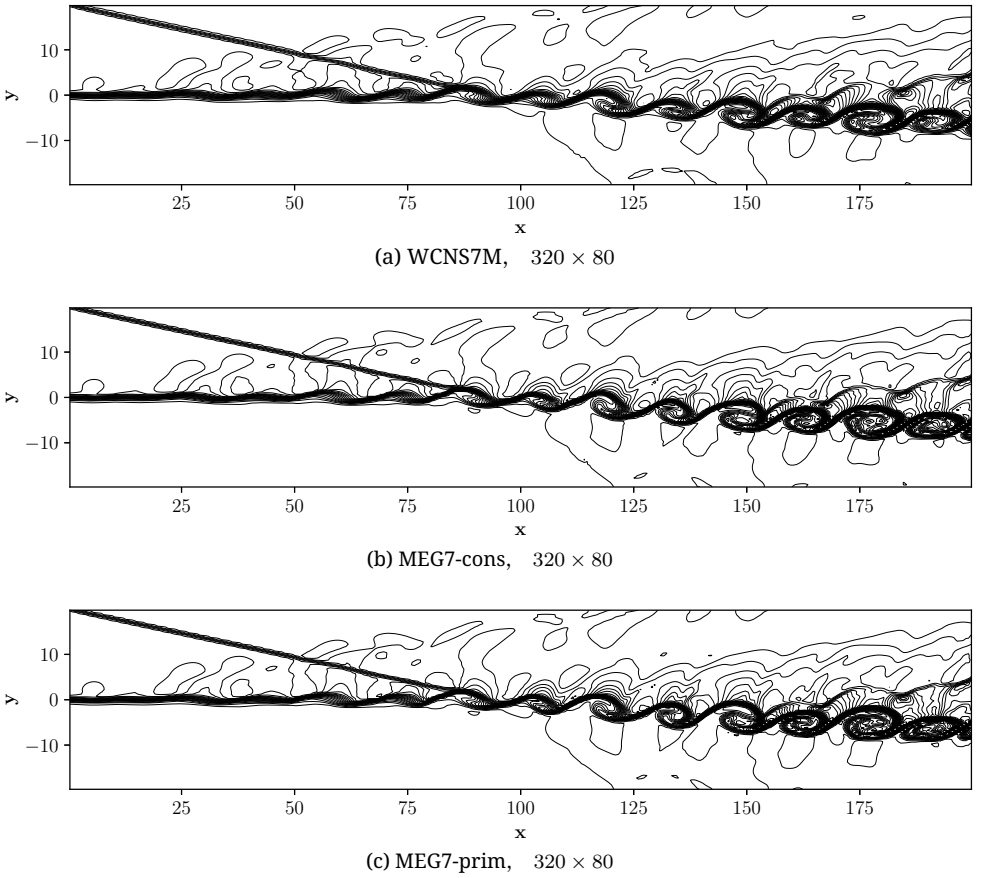


图 13：对于 $Re = 1000$ ，在网格规模为 1280× 640 且 t=1.0 时，使用不同格式得到的密度等值线如图 13(a)、13(b) 和 13(c) 所示。图 13(d) 显示了参考解。

与文献 [4, 69] 一样，数值模拟采用雷诺数 1000。已有研究表明，用于黏性通量的 α 阻尼方法可以避免奇偶解耦 [4]。图 13 展示了在网格规模为 1280×640 时，采用所提出的格式和无黏通量 WCNS7M 方法得到的密度等值线。该测试算例的参考解是在网格规模为 4000×2000的网格上计算得到的，如图 13(d) 所示。与参考解相比，WCNS7M 的结果在位置 x=0.75 处的主涡以及右壁处的涡系均存在明显偏差。图 13(b) 和图 13(c) 分别展示了采用 MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式得到的密度等值线；这些结果与参考解更为接近，表明当前格式可用于粗网格上的复杂多尺度黏性数值模拟。

例3.11. 激波-剪切层

本例考虑 Yee 等人 [58] 提出的二维黏性激波-剪切层测试算例。计算域为 $[x, y] = [0, 200] \times [-20, 20]$，数值模拟的终止时间为 t =120。一道 12 度斜激波从上边界传播而来，冲击一个随空间演化的混合层，随后从下边界反射。该测试算例的雷诺数为 $Re = 500$，混合层的初始对流马赫数为 $Ma = 0.6$，普朗特数设为 $Pr = 0.72$。



(a) WCNS7M, 320×80

(b) MEG7-cons, 320×80

(c) MEG7-prim, 320×80

图14：所提出的格式和 WCNS7M 在网格规模为 320×80 时，对例3.11所述激波-剪切层相互作用计算得到的密度等值线。

对于初始　　流动条件，初始流向速度设定为双曲正切型分布。　　e:

$$u = 2.5 + 0.5 \tanh(2y) \tag{62}$$

在入口处向壁法向速度添加扰动：

$$v' = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \cos(2\pi k t/T + \phi_k) \exp(-y^2/b) \tag{63}$$

其中，周期为 $T = \lambda/u_c$，波长为 $\lambda = 30$，对流速度为 $u_c = 2.68$，且 $b = 10$。当$k = 1$、 $\alpha_1 = 0.05$ 和 $\phi = 0$ 时。当 $k = 2$、 $\alpha_2 = 0.05$ 和 $\phi = \pi/2$时。该测试算例的边界条件与 Yee 等人所采用的相同。 [58] ，数值模拟在网格规模为 320×80 的网格上进行。图 14 展示了激波剪切层算例的密度等值线，所有格式都能在无任何振荡的情况下解析斜激波。然而，仔细观察可以发现，与 WCNS7M 相比，采用 MEG7-cons 和 MEG7-prim 格式能够更好地解析剪切层中的涡旋。这表明，当前方法和用于实现高阶精度的混合算法可应用于各种复杂测试算例。

3.1. 计算效率

表2展示了所提出的格式与WCNS7M格式相比的计算效率。括号中给出了相对于MEG7-prim 的归一化值。所有数值模拟均使用同一台计算机和相同的编译器标志进行。结果表明，所提出的格式平均而言至少比WCNS7M格式节省 40% 的计算成本，并且在所有测试算例中都能产生相似或更优的结果。此外，对于黏性激波管算例，在对流通量和黏性通量之间可以共享梯度的情况下，所提出的格式速度提高了一倍。鉴于该格式在梯度共享和真正的高阶精度方面所表现出的优越性能与灵活性，相信所提出的方法是一种具有竞争力的格式，可用于许多应用。

表 2：所提出的格式在前述测试算例中的计算效率 .

测试算例	MEG7-prim	MEG7-cons	WCNS7M
Richtmyer–Meshkov 不稳定性	224 秒 (1)	205 秒 (0.915)	345 秒 (1.54)
黎曼问题	1025 秒 (1)	1031 秒 (1.005)	1502 秒 (1.46)
双马赫反射	1806 秒 (1)	1946 秒 (1.07)	2493 秒（1.38）
黏性激波管	35455 秒（1）	38062 秒（1.076）	70082 秒（1.97）

3.2. 四阶与七阶 *GRB* 格式的比较

在参考文献 [1], 中，Chamarthi 提出了一种四阶 GRB 格式。该格式通过分别在方程 (19) 和 (20) 中假设 α=4 和 β=0 推导得出，梯度仍通过六阶导数计算。代入各值并化简后，可得到以下公式

$$\mathbf{F}(\mathbf{f_L}) = \frac{1}{1440}(1050\mathbf{f}_j - 309\mathbf{f}_{j-1} + 64\mathbf{f}_{j-2} - 3\mathbf{f}_{j-3} - \mathbf{f}_{j-4} + 771\mathbf{f}_{j+1} - 152\mathbf{f}_{j+2} + 21\mathbf{f}_{j+3} - \mathbf{f}_{j+4}), \tag{64}$$

可以看出，上述公式的模板与本文前面提出的七阶方法相同，唯一的区别在于公式中的系数取值。高阶格式的谱性质可能较差，从而导致结果不理想。图 15 展示了四阶和七阶格式的色散与耗散图。可以看出，七阶格式的耗散低于四阶格式。与四阶格式相比，七阶格式有两项优势：精度阶数更高，且耗散更低。四阶格式的色散性质略好。

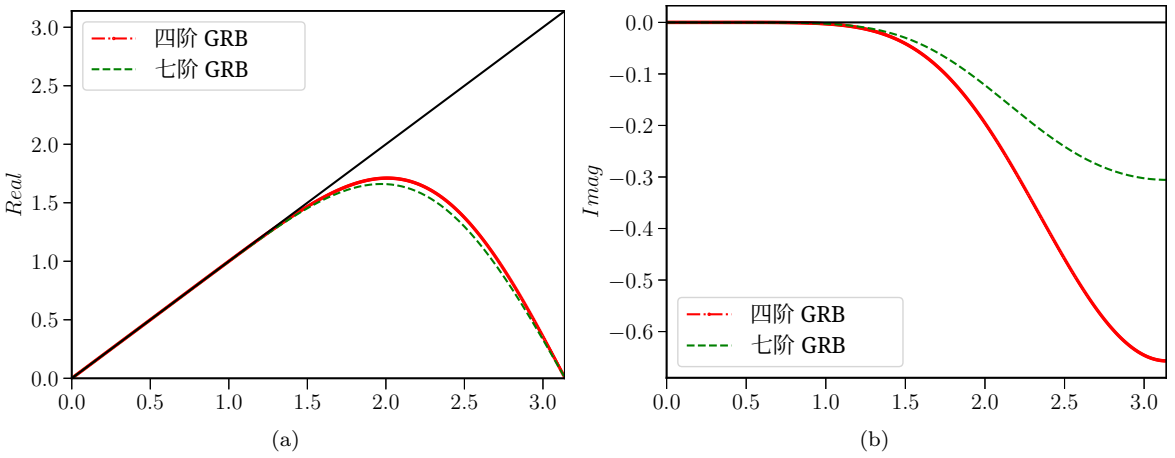


图 15：无约束格式的色散和耗散特性。

为了数值分析四阶和七阶格式的耗散性质，我们考虑具有以下初始条件的无黏 Taylor–Green 涡问题：

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \cos y \cos z \\ -\cos x \sin y \cos z \\ 0 \\ 100 + \frac{(\cos(2z)+2)(\cos(2x)+\cos(2y))-2}{16} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

该测试算例用于评估不同格式保持动能以及涡量平方随时间增长的能力。在大小为 $x, y, z \in [0, 2\pi)$ 的区域上进行数值模拟，所有边界均采用周期性边界条件，直至时间 $t = 10$。两种数值格式的动能演变和涡量平方演变分别如图 16(a) 和图 16(b) 所示。

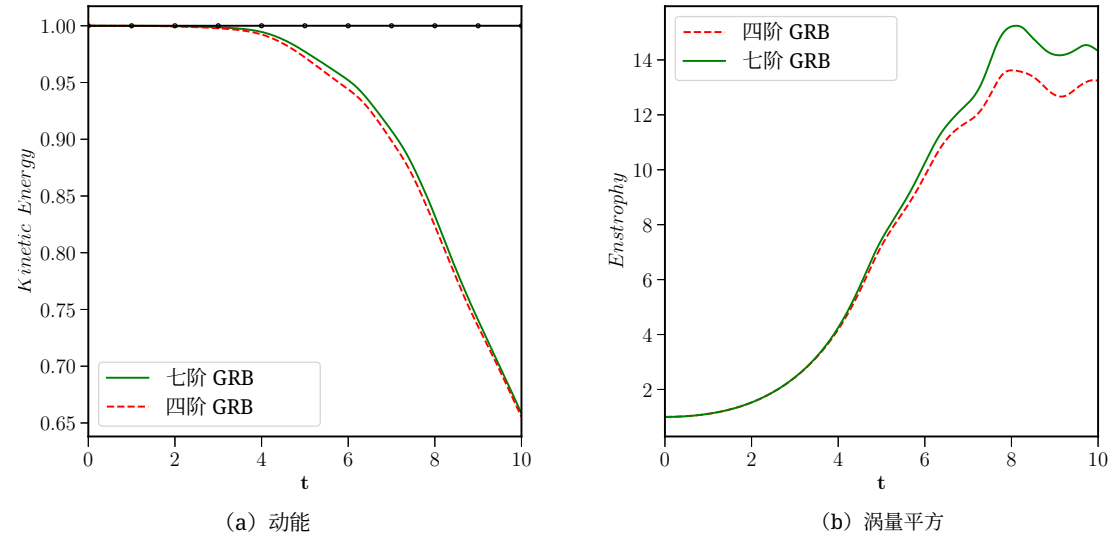


图 16：网格规模为 64^3时，四阶和七阶 GRB 格式的归一化动能和涡量平方。带圆圈的实线：精确解；绿色实线：七阶 GRB；红色虚线：四阶 GRB。

从这些图中可以观察到，七阶格式更好地保持了动能，涡量平方的数值也优于四阶格式。因此，所提出的格式并不逊于参考文献 [1] 中提出的格式。

4. 结论与未来工作

本文的贡献如下：

- 假设所有单元中心值均为点值，结果表明，使用公式（8）不仅可以获得四阶精度（如参考文献 [1], 所示），还可以获得七阶精度。与参考文献 [1] 中的四阶格式相比，七阶格式还具有低耗散特性。

- 不同于早期工作 [1]（其中该格式对非线性问题仅具有二阶精度），本文获得了真正的高阶精度，即七阶精度。通过通量重构可以实现这种高阶精度，而通量重构仅在光滑区域内进行，并使用与问题无关的间断探测器。

- 在无黏通量与黏性通量之间共享梯度——这正是基于梯度的重构的主要目标——仍然可行，因此所提出的格式效率很高。

本文所考虑的黏性通量离散对于非线性测试案例并未真正达到高阶精度，未来可以推导出此类格式，并分析其优点。GRB 方法的初衷是在黏性通量和无黏通量中重复利用梯度。在当前方法中，黏性通量与无黏通量是分别处理的，但也可以对二者进行联合优化，以进一步改进离散。将本文方法拓展至曲线坐标系十分直接，可用于复杂几何形状的数值模拟，相关内容另文介绍。此外，基于梯度的重构有望用于多组分反应流数值模拟 [70, 71]。通过在对流通量与黏性通量之间共享梯度，组分质量分数的梯度只需计算一次，因此这种方法在反应流数值模拟中效率很高。

附录A

图 17 展示了 MATHEMATICA 工作簿，其中详细推导了七阶基于梯度的重构。对于 $\alpha = 4$ 和 $\beta = 0$，可得到参考文献 [1] 中介绍的四阶基于梯度的重构。作者将在收到合理请求后提供原始 MATHEMATICA 工作簿。

```
(*Point values*)
ui = u0 * Exp[I * 0 * k]; uip1 = u0 * Exp[I * 1 * k]; uip2 = u0 * Exp[I * 2 * k]; uip3 = u0 * Exp[I * 3 * k]; uip4 = u0 * Exp[I * 4 * k];
uip5 = u0 * Exp[I * 5 * k]; uim1 = u0 * Exp[I * -1 * k];|uim2 = u0 * Exp[I * -2 * k]; uim3 = u0 * Exp[I * -3 * k]; uim4 = u0 * Exp[I * -4 * k]; uim5 = u0 * Exp[I * -5 * k];
(*Derivatives*)
gi = g0 * Exp[I * 0 * k]; gip1 = g0 * Exp[I * 1 * k]; gip2 = g0 * Exp[I * 2 * k]; gip3 = g0 * Exp[I * 3 * k]; gim1 = g0 * Exp[I * -1 * k]; gim2 = g0 * Exp[I * -2 * k];
pd = Plot[k, {k, 0, Pi}];
(*First order derivatives*)
gi = (-1 / 60) * uim3 + (3 / 20) * uim2 + (-3 / 4) * uim1 + (3 / 4) * uip1 + (-3 / 20) * uip2 + (1 / 60) * uip3;
gip1 = (-1 / 60) * uim2 + (3 / 20) * uim1 + (-3 / 4) * ui + (3 / 4) * uip2 + (-3 / 20) * uip3 + (1 / 60) * uip4;
gip2 = (-1 / 60) * uim1 + (3 / 20) * ui + (-3 / 4) * uip1 + (3 / 4) * uip3 + (-3 / 20) * uip4 + (1 / 60) * uip5;
gim1 = (-1 / 60) * uim4 + (3 / 20) * uim3 + (-3 / 4) * uim2 + (3 / 4) * ui + (-3 / 20) * uip1 + (1 / 60) * uip2;
gim2 = (-1 / 60) * uim5 + (3 / 20) * uim4 + (-3 / 4) * uim3 + (3 / 4) * uim1 + (-3 / 20) * ui + (1 / 60) * uip1;

β = 3 / 190; α = 38 / 7;

uR = uip1 - (1 / 2) * gip1 + β * (ui - 2 * uip1 + uip2); uL = ui + (1 / 2) * gi + β * (uim1 - 2 * ui + uip1);
uRm = ui - (1 / 2) * gi + β * (uim1 - 2 * ui + uip1); uLm = uim1 + (1 / 2) * gim1 + β * (uim2 - 2 * uim1 + ui);
duiph = (gi + gip1) / 2 + α / 2 * (uR - uL); duimh = (gim1 + gi) / 2 + α / 2 * (uRm - uLm);
d2p = duiph - duimh;

uR = ui - (1 / 2) * gi + β * (uim1 - 2 * ui + uip1); uL = uim1 + (1 / 2) * gim1 + β * (uim2 - 2 * uim1 + ui);
uRm = uim1 - (1 / 2) * gim1 + β * (uim2 - 2 * uim1 + ui); uLm = uim2 + (1 / 2) * gim2 + β * (uim3 - 2 * uim2 + uim1);
duiph = (gim1 + gi) / 2 + α / 2 * (uR - uL); duimh = (gim2 + gim1) / 2 + α / 2 * (uRm - uLm);
d2m = duiph - duimh;
(*Upwind scheme*)
seventh = (-1 / 2) * gim1 + (+1 / 2) * gi + (1 / 1) * (ui - uim1) + (1 / 12) * (d2p - d2m);
(*Accuracy*)
new = FullSimplify[seventh] / u0;
FullSimplify[Series[new, {k, 0, 10}]]
(*Dispersion plot*)
p17 = Plot[Im[new], {k, 0, Pi}, PlotStyle → Red];
Show[pd, p17]
(*Dissipation plot*)
p27 = Plot[Re[new], {k, 0, Pi}, PlotStyle → Red]
```

Out[579]= $i\,k + \frac{k^8}{280} - \frac{i\,k^9}{360} - \frac{k^{10}}{560} + O[k]^{11}$

图 17：展示七阶格式精度阶数的 Mathematica 工作簿。

致谢

A.S. 感谢妻子和孩子在过去八年中给予他的支持，尽管他们经历了种种艰难处境（与结核病抗争、随后缺乏医疗护理、无法上学、濒临贫困、食物短缺、家人去世等）。A.S. 向任何觉得本文任何部分令人不适或苦恼的人致歉。

参考文献

[1] A. S. Chamarthi，《基于梯度的重构：无黏与黏性通量离散、激波捕捉及其在单组分与多组分流动中的应用》，《计算机与流体》250（2023）105706。[2] R. H. Pletcher，J. C. Tannehill，D. Anderson，《计算流体力学与传热》，CRC Press，2012。[3] H. Nishikawa，《超越界面梯度：构造扩散格式的一般原理》，载于：第40届AIAA 流体动力学会议与展览论文集，AIAA 论文 2010-5093，美国伊利诺伊州芝加哥，2010。[4] A. S. Chamarthi，S. Bokor，S. H. Frankel，《黏性通量高阶守恒有限差分格式中高频阻尼的重要性》，计算物理学杂志（2022）111195。[5] M. Ivings，D. Causon，E. Toro，《关于可压缩液体的黎曼求解器》，International Journal for Numerical Methods in Fluids 28（3）（1998）395–418。

[6] P. L. Roe，《近似黎曼求解器、参数向量与差分格式》，计算物理学杂志43（2）（1981）357–372。[7] B. Einfeldt，《关于气体动力学中的Godunov型方法》，《SIAM数值分析杂志》25（2）（1988）294–318。[8] E. F. Toro，M. Spruce，W. Speares，《HLL黎曼求解器中接触面的恢复》，《冲击波》4（1）（1994）25–34。[9] S. Osher，F. Solomon，《双曲守恒律系统的迎风差分格式》，Mathematics of computation 38（158）（1982）339–374。[10] C.-W. Shu，《对流主导问题的高阶加权本质无振荡格式》，《SIAM评论》51（1）（2009）82–126。doi:10.1137/070679065。[11] A. S. Chamarthi，K. Komurasaki，R. Kawashima，《稳态扩散、平流–扩散的高阶迎风与无振荡方法及其在磁化电子中的应用》，计算物理学杂志374（2018）1120–1151。[12] A. S. Chamarthi，H. Nishikawa，K. Komurasaki，《各向异性扩散方程的一阶双曲方法》，计算物理学杂志396（2019）243–263。[13] B. Van Leer，《迈向终极守恒差分格式。IV. 数值对流的新方法》，计算物理学杂志23（3）（1977）276–299。[14] B. van Leer，H. Nishikawa，《迈向对MUSCL的终极理解：实现三阶精度时的陷阱》，计算物理学杂志（2021）110640。[15] D. S. Balsara，S. Garain，C.-W. Shu，《具有自适应阶数的高效WENO格式》，计算物理学杂志326（2016）780–804。[16] C. W. Shu，《由大学空间研究协会实施的双曲守恒律本质无振荡与加权本质无振荡格式》，ICASE报告（97-65）（1997）1–78。[17] A. Harten，B. Engquist，S. Osher，S. R. Chakravarthy，《一致高阶精确的本质无振荡格式，III》，载于：《迎风与高分辨率格式》，Springer，1987，第218–290页。[18] C. B. Laney，《计算气体动力学》，剑桥大学出版社，1998。[19] C. W. Shu，S. Osher，《本质无振荡激波捕捉格式的高效实现》，计算物理学杂志77（2）（1988）439–471。doi:10.1016/0021-9991(88)90177-5。[20] G.-S. Jiang，C.-W. Shu，《加权ENO格式的高效实现》，计算物理学杂志126（126）（1995）202–228。[21] A. K. Henrick，T. D. Aslam，J. M. Powers，《映射加权本质无振荡格式：在临界点附近实现最优阶数》，计算物理学杂志207（2）（2005）542–567。doi:10.1016/j.jcp.2005.01.023。[22] R. Borges，M. Carmona，B. Costa，W. S. Don，《一种改进的双曲守恒律加权本质无振荡格式》，计算物理学杂志227（6）（2008）3191–3211。[23] X. Y. Hu，Q. Wang，N. A. Adams，《一种自适应中心迎风加权本质无振荡格式》，计算物理学杂志229（23）（2010）8952–8965。doi:10.1016/j.jcp.2010.08.019。[24] M. P. Mart´ın，E. M. Taylor，M. Wu，V. G. Weirs，《一种带宽优化WENO格式，用于可压缩湍流的高效直接数值模拟》，计算物理学杂志220（1）（2006）270–289。

[25] P. Fan, 《双曲守恒律的高阶加权本质无振荡 WENO-η 格式》，计算物理学杂志 269 (2014) 355–385。doi:10.1016/j.jcp.2014.03.033。[26] L. Fu, X. Y. Hu, N. A. Adams, 《一类用于双曲守恒律的自适应高阶目标 ENO 格式》，计算物理学杂志 374 (2018) 724–751。[27] S. Pirozzoli, 《用于激波-湍流相互作用的守恒型混合紧致 WENO 格式》，计算物理学杂志 178 (1) (2002) 81 – 117。[28] A. S. Cha marthi, S. H. Frankel, 《采用边界变差递减（BVD）算法的高阶中心迎风激波捕捉格式》，计算物理学杂志 427 (2021) 110067。[29] D. Ghosh, J. D. Baeder, 《用于可压缩湍流直接数值模拟的加权非线性紧致格式》，科学计算杂志 61 (1) (2014) 61–89。doi:10.1007/ s10915-014-9818-0。[30] A. Suresh, H. Huynh, 《采用龙格-库塔时间推进的高精度保单调格式》，计算物理学杂志 136 (1) (1997) 83–99。[31] D. S. Balsara, C.-W. Shu, 《精度阶数不断提高的保单调加权本质无振荡格式》，计算物理学杂志 160 (2) (2000) 405–452。[32] Y. Li, L. Fu, N. A. Adams, 《具有灵活非线性耗散控制的低耗散激波捕捉框架》，计算物理学杂志 428 (2021) 109960。[33] G. Zhao, M. Sun, A. Memmolo, S. Pirozzoli, 《激波捕捉格式评估的通用框架》，计算物理学杂志 376 (2019) 924–936。[34] S. K. Lele, 《具有类谱分辨率的紧致有限差分格式》，计算物理学杂志 103 (1) (1992) 16–42。[35] X. Deng, H. Maekawa, 《紧致高阶精度非线性格式》，计算物理学杂志 130 (1997) 77–91。doi:10.1006/jcph.1996.5553。[36] X. Deng, H. Zhang, 《高阶加权紧致非线性格式的开发》，计算物理学杂志 165 (1) (2000) 22–44。[37] T. Nonomura, K. Fujii, 《加权紧致非线性格式的稳健显式形式》，计算机与流体 85 (2013) 8–18。[38] S. Nagarajan, S. K. Lele, J. H. Ferziger, 《一种用于大涡模拟的稳健高阶紧致方法》，计算物理学杂志 191 (2) (2003) 392–419。[39] X. Deng, Y. Jiang, M. Mao, H. Liu, S. Li, G. Tu, 《满足几何守恒律的一族混合单元边与单元节点耗散紧致格式》，《计算机与流体》116 (2015) 29–45。[40] S. Zhang, S. Jiang, C. W. Shu, 《精度阶数不断提高的非线性加权紧致格式的开发》，计算物理学杂志 227 (15) (2008) 7294–7321。[41] M. L. Wong, S. K. Lele, 《用于可压缩流动中激波与界面捕捉的高阶局部耗散加权紧致非线性格式》，第 339 卷，爱思唯尔公司，2017。doi:10.1016/j.jcp.2017. 03.008。[42] T. Nonomura, K. Fujii, 《差分格式类型对高阶加权紧致非线性格式的影响》，计算物理学杂志 228 (10) (2009) 3533–3539。doi:10.1016/j.jcp.2009. 02.018。[43] V. A. Titarev, E. F. Toro, 《用于三维守恒律的有限体积 WENO 格式》，计算物理学杂志 201 (1) (2004) 238–260。

[44] T. Nonomura, S. Morizawa, H. Terashima, S. Obayashi, K. Fujii, 《采用高阶差分格式计算可压缩多组分流动时的数值（误差）问题：加权紧致非线性格式》，计算物理学杂志 231 (8) (2012) 3181–3210。[45] F. Liao, G. He, 《用于单元中心有限差分法的高阶适配格式》，计算物理学杂志 403 (2020) 109090。[46] T. Sengupta, R. Jain, A. Dipankar, 《一种新的通量矢量分裂紧致有限体积格式》，计算物理学杂志 207 (1) (2005) 261–281。[47] T. Sengupta, 《高精度计算方法：流体流动与波现象》，剑桥大学出版社，2013。[48] H. Nishikawa, 《从双曲扩散格式到梯度方法：非结构网格的隐式格林–高斯梯度》，计算物理学杂志 372 (2018) 126–160。[49] A. S. Chamarthi, 《基于梯度的重构：无黏与黏性通量离散、激波捕捉及其在单组分与多组分流动中的应用》，arXiv 预印本 arXiv:2205.01034 (2022)。[50] X. Deng, Y. Shimizu, F. Xiao, 《采用两阶段边界变差递减算法的五阶激波捕捉格式》，计算物理学杂志 386 (2019) 323–349。[51] P. Moin, 《工程数值分析基础》，剑桥大学出版社，2010。[52] Z. Li, F. A. Jaberi, 《一种用于超声速湍流数值模拟的高阶有限差分方法》，International Journal for Numerical Methods in Fluids 68 (6) (2012) 740–766。[53] Y. Li, C. Chen, Y.-X. Ren, 《一类用于求解可压缩流动的色散最小化与自适应耗散高阶有限差分格式》，计算物理学杂志 448 (2022) 110770。[54] J. Peng, S. Liu, S. Li, K. Zhang, Y. Shen, 《一种用于可压缩流动模拟的高效目标 ENO 格式及局部自适应耗散》，计算物理学杂志 425 (2021) 109902。[55] Y. Jin, F. Liao, J. Cai, 《优化的低耗散低色散格式》，计算物理学杂志 371 (2018) 820–849。[56] T. Nonomura, N. Iizuka, K. Fujii, 《曲线网格上高阶 WENO 与 WCNS 的自由流和涡保持特性》，《计算机与流体》39 (2) (2010) 197–214。[57] L. Fu, 《具有自适应精度阶数和自适应耗散控制的超高阶 TENO 格式》，《计算力学与工程方法》387 (2021) 114193。[58] H. C. Yee, N. D. Sandham, M. J. Djomehri, 《采用基于特征的滤波器的低耗散高阶激波捕捉方法》，计算物理学杂志 150 (1) (1999) 199–238。[59] G. A. Sod, 《若干用于非线性双曲守恒律方程组的有限差分方法综述》，计算物理学杂志 27 (1) (1978) 1–31。[60] P. D. Lax, 《非线性双曲方程的弱解及其数值计算》，《纯粹与应用数学通讯》7 (1) (1954) 159–193。[61] E. Toro, 《黎曼求解器与流体动力学数值方法：实用导论》，施普林格·柏林·海德堡，2009。[62] R. Loub`ere, M. J. Shashkov, 《一种用于任意拉格朗日–欧拉方法的交错多边形网格子单元重映射方法》，计算物理学杂志 209 (1) (2005) 105–138。[63] X. Zhang, C.-W. Shu, 《用于可压缩欧拉方程的保正高阶有限差分 WENO 格式》，计算物理学杂志 231 (5) (2012) 2245–2258。

[64] P. Woodward、P. Colella, 《强激波二维流体流动的数值模拟》, 计算物理学杂志 54 (1) (1984) 115–173。[65] H. Terashima、G. Tryggvason, 《可压缩流动中流体界面的前沿追踪/虚拟流体方法》, 计算物理学杂志 228 (11) (2009) 4012–4037。[66] F. Acker、R. d. R. Borges、B. Costa, 《改进的WENO-Z格式》, 计算物理学杂志 313 (2016) 726–753。[67] N. Fleischmann、S. Adami、N. A. Adams, 《具有低数值耗散的激波稳定 HLLC 黎曼求解器改进》, 计算物理学杂志 423 (2020) 109762。[68] C. W. Schulz-Rinne、J. P. Collins、H. M. Glaz, 《二维气体动力学黎曼问题的数值解》, SIAM科学计算杂志 14 (6) (1993) 1394–1414。[69] V. Daru、C. Tenaud, 《使用高分辨率单调性保持格式对黏性激波管问题进行数值模拟》, 《计算机与流体》38 (3) (2009) 664–676。[70] J. L. Ziegler、R. Deiterding、J. E. Shepherd、D. I. Pullin, 《具有详细化学反应机理的压缩性黏性流动自适应高阶混合格式》, 计算物理学杂志 230 (20) (2011) 7598–7630。[71] X. Cai、R. Deiterding、J. Liang、Y. Mahmoudi、M. Sun, 《超声速模型燃烧室中的爆轰稳定机制》, 流体力学杂志 910 (2021)。