arXiv:2305.00765v1 [math.NT] 1 May 2023

分圆多项式的奇妙同余 II

Toshiki Matsusaka 和 Genki Shibukawa

Abstract. 我们推广了 Akiyama 和 Kaneko 关于分圆多项式高阶导数值 $\Phi_n^{(k)}(1)$ 的近期研究。本文聚焦于 Lehmer 关于 $\Phi_n^{(k)}(1)/\Phi_n(1)$ 的显式公式，该公式将其表示为 $\mathbb{Q}$ 上欧拉函数与 Jordan 托特函数的多项式。随后，我们证明了 Akiyama–Kaneko 的猜想，即这些多项式具有一个特定的简单因子。

1. 引言

分圆多项式的系数和高阶导数长期以来一直吸引着数学家的兴趣。第 n个分圆多项式

$$\Phi_n(x) := \prod_{\substack{0<k\le n\\(k,n)=1}} \left(x - e^{2\pi i k/n}\right)$$

它是在 $\mathbb{Q}$ 上关于 n 次本原单位根的最小多项式。由于收集所有 n 次单位根可得 $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$，莫比乌斯反演给出等价表达式

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)},$$

其中 μ 是莫比乌斯¨函数。对 $\Phi_n(x)$ 在$x = 1$处的高阶导数值的研究是本文的主题，其历史可追溯至 V.-A. Lebesgue 于 1859 [6] 和 H¨older 于 1936 [5]。该主题的一般基础由 Lehmer 于 1966 [7]奠定。此后，相关研究持续而广泛地开展，综述见 [4] 和 [8]。

最近，Akiyama 和 Kaneko [1, 定理 3] 发现了分圆多项式奇数阶导数的“奇妙同余”。设 $\phi(n) = \deg \Phi_n(x)$ 为欧拉函数。则 $2\Phi_n^{(3)}(1)$ 可被 $\phi(n) - 2$ 整除。此外，对于 $k > 1$， $\Phi_n^{(2k+1)}(1)$ 可被 $\phi(n) - 2k$ 整除。

根据 Lehmer [7], ，确实存在多项式 $F_k(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$，使得 $\Phi_n^{(k)}(1)/\Phi_n(1) = F_k(\phi(n)/2, J_2(n)/4, \dots, J_k(n)/2k)$，其中 $J_k(n)$ 是 Jordan 的欧拉函数。这些多项式将在第 3 节中详细讨论。随后，Akiyama 和 Kaneko 提出了以下猜想，作为上述同余的类比。

猜想 1.1 ([1, 猜想 1]) 。对于任意非负整数 k， $F_{2k+1}(x_1, \dots, x_{2k+1})$ 可被 $x_1 - k$ 整除于 $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{2k+1}]$。

在本文中，我们证明了这一猜想。整除性表明它与 Akiyama–Kaneko 同余存在直接关系，但需要注意的是猜想 1.1 并不能立即推出这些同余。在第 4 节中，我们深入研究多项式 F_k的某种整性，并以此作为推论，为奇妙同余给出一种新的证明。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：11A25；次要分类：11R18。

2. 预备知识

我们回顾本文中使用的基本函数。约当欧拉函数 $J_k(n)$ 是欧拉函数的推广。我们给出它的两个等价定义，

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n}(1-p^{-k}) = \sum_{d|n} \mu(n/d)d^k, \tag{2.1}$$

其中 p 遍历 n 的所有素因子，且 d 遍历 n的所有因子。容易看出，对于任意 $J_k(n)$， $k \geq 1$ 均为偶数，且 $n \geq 3$。特殊情形 $\phi(n) = J_1(n)$ 即为欧拉函数。详情请参见 [9,第五章。3]

伯努利数 B_n 由生成级数定义为

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.2}$$

or

$$\log\left(\frac{\sinh(t/2)}{t/2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n}\frac{t^n}{n!} \tag{2.3}$$

其中 $B_0 = 1$ 且 $B_1 = -1/2$。

阶乘记号 $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 的系数定义了（无符号）第一类斯特林数 $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$，其定义为

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \tag{2.4}$$

它是 还已知，斯特林数的指数生成级数由 y

$$\frac{(-\log(1-t))^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} \tag{2.5}$$

给出，其中 $k \geq 0$。阶乘记号的生成函数如下（二项式定理）：

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x)_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n, \tag{2.6}$$

其中 $\binom{x}{n} := \frac{(x)_n}{n!}$ 是二项式系数。

文献 [2] 对斯特林数的基本性质作了详尽阐述。

3. Lehmer 的观察与猜想 1.1的证明

对于任意 $k \geq 1$，我们分别通过以下方式引入多项式 $s_k(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ 和 $F_k(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) := \frac{2(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{k} B_m \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} x_m, \tag{3.1}$$

and

$$F_k(x_1, \ldots, x_k) := k! \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + k\lambda_k = k}} \prod_{j=1}^{k} \frac{(-s_j(x_1, \ldots, x_j))^{\lambda_j}}{\lambda_j! j^{\lambda_j}}, \quad F_0 := 1, \tag{3.2}$$

前几个例子 $s_k(x_1,\dots,x_k)$ 和 $F_k(x_1,\dots,x_k)$ 分别如下

$$\begin{aligned}
s_1(x_1) &= -x_1,\\
s_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}(3x_1-x_2),\\
s_3(x_1,x_2,x_3) &= -\frac{1}{2}(2x_1-x_2),\\
s_4(x_1,\dots,x_4) &= \frac{1}{90}(90x_1-55x_2+x_4),\\
s_5(x_1,\dots,x_5) &= -\frac{1}{36}(36x_1-25x_2+x_4),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
F_1(x_1) &= x_1,\\
F_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}(3x_1^2-3x_1+x_2),\\
F_3(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-1)(x_1^2-2x_1+x_2),\\
F_4(x_1,\dots,x_4) &= \frac{1}{15}(15x_1^4-90x_1^3+(30x_2+165)x_1^2-(90x_2+90)x_1+5x_2^2+55x_2-x_4),\\
F_5(x_1,\dots,x_5) &= \frac{1}{3}(x_1-2)(3x_1^4-24x_1^3+(10x_2+57)x_1^2-(40x_2+36)x_1+5x_2^2+25x_2-x_4).
\end{aligned}$$

我们注意到，除 x_1 以外的奇数编号变量都不会出现，因为伯努利数满足 $B_n=0$，对任意奇数 $n\geq 3$ 均如此。

由生成函数（2.5），以及多项式 $s_k(x_1,\dots,x_k)$ 和 $F_k(x_1,\dots,x_k)$ 的定义，我们得到以下生成函数。

引理 3.1。我们定义函数 $Q(\boldsymbol{x},t)$ 和 $P(\boldsymbol{x},t)$ 如下：

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{x},t) &:= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-\log(1+t))^n x_n\\
&= -\log(1+t)x_1-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}(-\log(1+t))^{2\nu}x_{2\nu}\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_4,x_6,\dots][\![t]\!]
\end{aligned}\tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{x},t) &:= \exp\left(-Q(\boldsymbol{x},t)\right)\\
&= (1+t)^{x_1}\exp\left(2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}(-\log(1+t))^{2\nu}x_{2\nu}\right)\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_4,x_6,\dots][\![t]\!].
\end{aligned}\tag{3.4}$$

于是，我们有

$$Q(\boldsymbol{x},t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s_j(x_1,\dots,x_j)t^j}{j},\tag{3.5}$$

$$P(\boldsymbol{x},t)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(x_1,\dots,x_k)\frac{t^k}{k!}.\tag{3.6}$$

1966 年，Lehmer [7, 定理 3] 证明，对于 $n\geq 2$，导数值 $\Phi_n^{(k)}(1)/\Phi_n(1)\in\mathbb{Z}$ 可表示为 Jordan 示性函数 $J_1(n)\dots,J_k(n)$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的多项式（另见 [1]）。

引理 3.2. 对任意 $n\geq 2$，我们有

$$\frac{\Phi_n^{(k)}(1)}{\Phi_n(1)}=F_k\left(\frac{\phi(n)}{2},\frac{J_2(n)}{4},\dots,\frac{J_k(n)}{2k}\right).$$

除了 Lehmer 的原始证明外，Herrera-Poyatos–Moree 的另一种证明 [4] 最近也已为人所知。

为证明猜想 1.1，我们首先证明[7, 第 7]节中给出的尚未证明的 Lehmer 观察。首先，对于 Lehmer 仅观察到前几项的多项式 Ω_m，其一般形式如下确定。

定义 3.3。我们通过生成级数定义多项式 $\Omega_m(x_2, x_4, \dots, x_{2m}) \in \mathbb{Q}[x_2, x_4, \dots, x_{2m}]$

$$1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\Omega_m(x_2, \dots, x_{2m})u^{2m} := \exp\left(2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right)^{2\nu} x_{2\nu}\right).$$

多项式 Ω_m 的前几个例子为

$$\begin{aligned}
\Omega_1(x_2) &= x_2, \\
\Omega_2(x_2, x_4) &= x_4 - 5x_2(x_2 - 1), \\
\Omega_3(x_2, x_4, x_6) &= x_6 - 7x_4(x_2 - 1) + \frac{35}{3}x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) + \frac{14}{3}x_2,
\end{aligned}$$

这与[7]中的表格一致。

定理 3.4。我们有

$$F_k(x_1, \dots, x_k) = (x_1)_k + 2\sum_{m=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} B_{2m}\binom{k}{2m}(x_1 - m)_{k-2m}\Omega_m(x_2, \dots, x_{2m}).$$

Proof. 由于

$$\log(1 + t) = 2\sinh^{-1}\left(\frac{t}{2\sqrt{1 + t}}\right)$$

成立，对比较 Ω 的定义$_m$ 以及 F_k (3.4), (3.6) 的生成函数可得 s

$$P(\boldsymbol{x}, t) = (1 + t)^{x_1} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\Omega_m(x_2, \dots, x_{2m})t^{2m}(1 + t)^{x_1 - m}.$$

最后，(2.6) 给出

$$P(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((x_1)_k + 2\sum_{m=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} B_{2m}\binom{k}{2m}(x_1 - m)_{k-2m}\Omega_m(x_2, \dots, x_{2m})\right)\frac{t^k}{k!},$$

由此完成证明。 □

推论 3.5 (猜想 1.1). 对于任意非负整数 k, $F_{2k+1}(x_1, \dots, x_{2k+1})$ 能被整除 $x_1 - k$ 于 $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{2k+1}]$。

Proof. 在 $F_{2k+1}(x_1, \dots, x_{2k+1})$ 中的表达式定理 3.4中，阶乘记号 $(x_1)_{2k+1}$ 和 $(x_1 - m)_{2k+1-2m}$ 可被整除 $x_1 - k$。 □

4. Akiyama–Kaneko 同余

Akiyama–Kaneko 发现了关于奇数阶导数值 $\Phi_n^{(2k+1)}(1) \in \mathbb{Z}$ 的同余。

定理 4.1（[1, 定理 3]）。如下所示。

(1) $2\Phi_n^{(3)}(1)$ 可被 $\phi(n) - 2$ 整除。(2) 假设 $k \geq 2$。那么 $\Phi_n^{(2k+1)}$

(1) 可被 $\phi(n) - 2k$ 整除。

更进一步，他们观察到 $\Phi_n^{(2k+1)}(1)/\Phi_n(1)$ 可能可以被 $\phi(n) - 2k$当 $k \geq 2$。他们的同余表明，这与上一节所示的整除性存在直接关系，但需要注意，推论 3.5 并不能直接推出定理 4.1。我们的第二个定理（定理 4.5）给出了一个关于

多项式 $F_k(x_1,\dots,x_k)$ 的某种整性性质，从而将它们直接联系起来。我们先准备一系列有用的引理。

引理 4.2. 对任意整数 $n\geq 1$，我们定义多项式 $V_n(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 为

$$V_n(x):=\prod_{1\leq k<n/2}\left(x^2+4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right) \tag{4.1}$$

其中 $V_1(x)=V_2(x)=1$。于是 $V_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$，并且有

$$\sinh(n\theta)=\begin{cases}\sinh\theta V_n(2\sinh\theta) & if\ n:odd,\\ \sinh 2\theta V_n(2\sinh\theta) & if\ n:even.\end{cases} \tag{4.2}$$

Proof. 我们首先回顾两类切比雪夫多项式 $T_n(x)$ $U_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$，它们分别由 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ 和 $U_{n-1}(\cos\theta)=\sin n\theta/\sin\theta$ 刻画。由这些刻画立即得到如下结论。

$$\sinh(n\theta)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+1}{2}}iT_n(i\sinh\theta) & \text{if } n:\text{odd},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}i\cosh\theta U_{n-1}(i\sinh\theta) & \text{if } n:\text{even}.\end{cases}$$

~定义多项式 $V_n(x)$ 为

$$\widetilde{V}_n(x):=\begin{cases}\dfrac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}i}{x}T_n\left(\dfrac{ix}{2}\right) & \text{if } n:\text{odd},\\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}i}{x}U_{n-1}\left(\dfrac{ix}{2}\right) & \text{if } n:\text{even}.\end{cases}$$

~ ~于是只需证明 $V_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$以及 $V_n(x)=\widetilde{V}_n(x)$。根据切比雪夫多项式的已知显式公式（见 [3, 第 10.11 节（22）、（23）]），有

$$\widetilde{V}_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}x^{n-2m-1} & \text{if } n:\text{odd},\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n-m-1}{m}x^{n-2m-2} & \text{if } n:\text{even}.\end{cases} \tag{4.3}$$

由于 $\frac{n}{(n-m-1)!\,m!(n-2m)!}=\binom{n-m}{m}+\binom{n-m-1}{m-1}$，我们看到 $\widetilde{V}_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$。至于二者相同，这是因为 ~$V_n(x)$ 和 $V_n(x)$ 都是首一多项式，因此只需考察它们零点的位置即可。对于奇数 n，$\widetilde{V}_n(x)$ 的零点集合为 $\{2i\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\in\mathbb{C}\mid 0\leq k<n\}\setminus\{0\}$，这与 $\{2i\sin\frac{\pi k}{n}\in\mathbb{C}\mid 0<|k|\leq\frac{n-1}{2}\}$ 所给出的 $V_n(x)$ 的零点集合相同。对于偶数 n，类似的论证同样成立。□

引理 4.3. 对任意整数 $n\geq 1$，我们将多项式 $W_n(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 定义为

$$W_n(x):=\prod_{\substack{1\leq k<n/2\\(k,n)=1}}\left(x^2+4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right)$$

其中 $W_1(x)=W_2(x)=1$。那么对于任意 $n\geq 3$，有

$$\frac{1}{\Phi_n(1)}W_n(x)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\omega_m(n)x^{2m},$$

其中我们令 $\omega_m(n)=\Omega_m(J_2(n)/4,\dots,J_{2m}(n)/2m)\in\mathbb{Q}$。

Proof. 根据定义 3.3 和 (2.1)，我们有

$$1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\omega_m(n)x^{2m}=\exp\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m!}\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^m\frac{J_m(n)}{m}\right)$$
$$=\prod_{d|n}\exp\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{m\cdot m!}\left(2d\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^m\right)^{\mu(n/d)}.$$

此外，应用（2.3）、（4.2）以及以下事实，

$$\sum_{\substack{d|n\\ d\equiv j\ (2)}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=0,\quad \prod_{d|n}d^{\mu(n/d)}=\Phi_n(1)$$

对于 $n\geq 3$ 和 $j\in\{0,1\}$（见 [1, 备注 2]），我们得到简洁的表达式

$$1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\omega_m(n)x^{2m}=\frac{1}{\Phi_n(1)}\prod_{d|n}\left(\sinh\left(d\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)^{\mu(n/d)}$$
$$=\frac{1}{\Phi_n(1)}\prod_{d|n}V_d(x)^{\mu(n/d)}.$$

对 $V_n(x)=\prod_{d|n}W_d(x)$ 应用莫比乌斯反演公式，得到

$$\prod_{d|n}V_d(x)^{\mu(n/d)}=W_n(x), \tag{4.4}$$

由此完成证明。 □

引理 4.4. 对任意整数 $n\geq 3$ 和 $1\leq m<\phi(n)/2$，有

$$\frac{2B_{2m}}{(2m)!}\omega_m(n)\in\mathbb{Z}.$$

Proof. 由 $V_n(x)=\prod_{d|n}W_d(x)$ 和 $V_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$，高斯引理推出 $W_n(x)\in\mathbb{Z}[x]$。因此，只需证明 $W_n(x)$ 的所有系数（最高次项 $x^{\phi(n)}$除外）均能被 $\Phi_n(1)$ 整除。我们回顾一下，$\Phi_n(1)$ 的值可明确表示为

$$\Phi_n(1)=\begin{cases}p & \text{if } n=p^r,\ p \text{ is prime},\\ 1 & \text{if otherwise.}\end{cases}$$

因此，我们现在假设 $n=p^r$ 是某个素数 p的幂。由（4.4），我们有$W_{p^r}(x)V_{p^{r-1}}(x)=V_{p^r}(x)$。根据显式公式（4.3），当$p$为奇数时，$V_{p^r}(x)\equiv x^{p^{r-1}}$(模 p)；而 $V_{2^r}(x)\equiv x^{2^{r-2}}$(模 2)。因此，对于奇素数 p，有 $W_{p^r}(x)x^{p^{r-1}-1}\equiv x^{p^{r-1}}$(模 p)，这意味着 $W_{p^r}(x)\equiv x^{\phi(p^r)}$ (模 p)。对于 $p=2$，同样的论证也成立。□

定理 4.5。对于任意整数 $n\geq 3$ 和 $1\leq k<\phi(n)$，由$F_{k,n}(x)=F_k(x,J_2(n)/4,\ldots,J_k(n)/2k)$定义的多项式 $F_{k,n}(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$。

Proof. 根据定理 3.4，多项式 $F_{k,\ n}(x)$ 可表示为

$$F_{k,n}(x)=(x)_k+\sum_{m=1}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{k!}{(k-2m)!}\frac{2B_{2m}}{(2m)!}\omega_m(n)(x-m)_{k-2m}. \tag{4.5}$$

引理 4.4 表明，对于任意 $1\leq k<\phi(n)$，$F_{k,\ n}(x)\in\mathbb{Z}[x]$。 □

最后，我们将证明 Akiyama–Kaneko 的观察结果，它是定理 4.1 的一个强化版本，并将其作为定理 4.5的推论。

推论 4.6。我们有以下结论。

(1) $2\Phi_n^{(3)}(1)/\Phi_n(1)$ 可被 $\phi(n)-2$ 整除。

(2) 假设 $k \geq 2$。那么 $\Phi_n^{(2k+1)}(1)/\Phi_n(1)$ 可被 $\phi(n) - 2k$ 整除。

PROOF. 由于对于 $n \geq 3$，$\deg \Phi_n(x) = \phi(n)$ 为偶数，因此只需考虑 $n \geq 3$ 和 $3 \leq 2k+1 < \phi(n)$ 的情形。由推论 3.5 和定理 4.5 可知，$F_{2k+1,n}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 可被 $x-k$ 整除。因此，$F_{2k+1,n}(\phi(n)/2) = \Phi_n^{(2k+1)}(1)/\Phi_n(1)$ 可被 $\phi(n)/2-k$ 整除。特别地，若 $k \geq 2$，则由表达式 (4.5) 可得，$F_{2k+1,n}(\phi(n)/2)$ 可被 $2(\phi(n)/2-k)$ 整除。□

致谢

谨向 Shigeki Akiyama 和 Hajime Kaneko 致以谢意，感谢他们将作者引入这一课题并进行宝贵的讨论。本研究得到 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP20K14292、JP21K18141（Matsusaka）和 JP21K13808（Shibukawa）。

参考文献

[1] S. Akiyama 和 H. Kaneko, *Curious congruences for cyclotomic polynomials*, 《数论研究》8（2022），第 4 期，论文编号 102，共 10 页。[2] T. Arakawa、T. Ibukiyama 和 M. Kaneko, *Bernoulli numbers and zeta functions*, Springer 数学专著丛书，Springer，东京，2014。附录由 Don Zagier 撰写。[3] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vols. I, II*，麦格劳-希尔图书公司，纽约-多伦多-伦敦，1953。部分内容依据 Harry Bateman 留下的笔记编写。[4] A. Herrera-Poyatos 和 P. Moree, *Coefficients and higher order derivatives of cyclotomic polynomials: old and new* **39** 2021 3, 309 343 , 《数学展望》（），第 – 期。[5] O. H¨older, *Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$*, 《数学与物理学报》43（1936），13–23。[6] V.-A. Lebesgue, *Démonstration de l'irréductibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité*, 《纯粹与应用数学杂志》第 2 辑，第 4 卷第 1 期（1859），105–110。[7] D. H. Lehmer, *Some properties of the cyclotomic polynomial*, 《数学分析及其应用杂志》15（1966），105–117。[8] C. Sanna, *A survey on coefficients of cyclotomic polynomials*, 《数学展望》40（2022），第 3 期，469–494。[9] R. Sivaramakrishnan, *Classical theory of arithmetic functions*, 《纯粹与应用数学专著与教材丛书》第 126 卷，Marcel Dekker 公司，纽约，1989。

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, MOTOOKA 744, NISHI-KU, FUKUOKA 819-0395, JAPAN
Email address: matsusaka@math.kyushu-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KOBE UNIVERSITY, 1-1, ROKKODAI, NADA-KU KOBE 657-8501, JAPAN*Email address*: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp