arXiv:2305.00772v1 [math.NA] 1 May 2023

弹性动力学的高阶时域边界元——分级网格与hp 版本

Alessandra Ai mi* Giulia Di Credico*† Heiko Gimperlein† Ernst P. Stephan‡

摘要

多面体区域或屏幕外部的弹性动力学方程的解会因角点和边而呈现奇异行为。对奇异性的详细展开可推出针对解的狄利克雷迹和牵引力的分片多项式逼近的准最优估计。研究结果应用于 hp 以及弱奇异和超奇异积分方程的时域边界元方法的分级网格版本。数值算例验证了关于屏幕以及二维多边形区域的狄利克雷问题和诺伊曼问题的理论结果。结果展现了解预期的准最优收敛率及其奇异行为。

数学主题分类： 65M38（主要）；65M15；74S15；35L67（次要）关键词： 时域边界元方法，分级网格， hp 版本，弹性动力学。

1 引言

多面体域中的椭圆型和抛物型边值问题的解在角点和边附近呈现奇异性。采用有限元方法或边界元方法进行数值近似时，会通过局部网格加密或提高多项式次数来处理非光滑行为，从而恢复最优收敛率。由此产生的 h, p 和 hp 方法已被研究数十年，例如，有限元方面见 [53]，边界元方面见 [28]。

自20世纪90年代末以来，Plamenevskiĭ及其合作者阐明了锥形区域或楔形区域中双曲方程解的奇异行为 [33, 35, 40, 50]。M¨uller和Schwab利用显式奇异展开，证明了在多边形区域中采用代数分级网格的有限元方法求解波动方程和弹性动力学方程时可达到最优收敛率 $\mathbb{R}^2$ [42, 43]。对于 $\mathbb{R}^3$ 中的波动方程，两位作者也获得了相应结果，并由此得到了关于分级网格上的边界元方法（时域边界元方法）的近似结果 [21]、 hp版本 [23]，以及后验误差估计用于自适应加密过程的有效性结果 [24]。

本文首次研究弹性动力学多面体区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$, 3 上狄利克雷问题和诺伊曼问题的 h, p 和 hp 时域边界元方法。基于 Plamenevskiĭ 的方法以及时不变 Lam´e 方程的奇异展开式，我们

*帕尔马大学数学、物理与计算机科学系，Parco Area delle Scienze, 53/A, 43124，帕尔马，意大利，电子邮件：alessandra.aimi@unipr.it, giulia.dicredico@unipr.it。意大利 INDAM-GNCS 研究组成员。

†因斯布鲁克大学工程数学系，奥地利因斯布鲁克，电子邮件：heiko.gimperlein@uibk.ac.at。

‡莱布尼茨汉诺威大学应用数学研究所，德国汉诺威 30167，电子邮件：stephan@ifam.uni- hannover.de。

详细描述了楔形域和圆锥这两种三维模型几何，以及二维多边形区域中解的奇异性。这些展开式表明，在分级网格上进行分片多项式逼近，以及采用 hp 版本时，能够达到准最优收敛率。

具体而言，我们针对外部问题来构建问题设定并陈述结果。$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$、 $n = 2$，3 是一个屏幕或闭曲面，并以 Ω 表示其连通外部区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$。本文研究质量密度为 ρ、具有 $Lam\acute{e}$ 参数 λ，$\mu > 0$ 的线弹性体的动力学，其由时变弹性动力学方程描述

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0, T] \ . \tag{1}$$

我们施加齐次初始条件 $\mathbf{u}(0,\ \mathbf{x}) = \partial_t\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x}) = 0$，并考虑狄利克雷边界条件 $\mathbf{u} = \mathbf{g}$，或涉及牵引力的诺伊曼边界条件 $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}$。

为对方程 (1) 进行数值求解，我们将其表述为 Γ 上的等价时变积分方程。对于狄利克雷边界条件，我们研究

$$\mathcal{V}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathcal{K} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T] \ , \tag{2}$$

其中涉及弱奇异积分算子 $\mathcal{V}$ 和双层积分算子 $\mathcal{K}$。$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{K}$ 由方程 (1) 的基本解 $\mathbf{G}$ 及其牵引力 $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{G})$ 定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_\Gamma \mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t, \tau)\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau \ , \\
\mathcal{K}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_\Gamma \mathbf{p}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{G})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t, \tau)^T \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau \ .
\end{aligned}$$

诺伊曼问题同样可表述为超奇异积分算子 $\mathcal{W}$的方程，见式 (13)。这些积分方程的弱形式采用伽辽金边界元 $\mathbf{\Phi}_{h,\ \Delta t} \in \left(V_{\Delta t, q} \otimes X_{h,p}^{-1}\right)^n$ 进行近似，其基于空间中准均匀或分级网格以及时间方向均匀网格上的分片多项式函数的张量积。

误差的收敛率取决于区域 Ω 的非光滑边界点处式 (1) 解的奇异性。在边或边界 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 的锥点附近，我们将解展开为由显式奇异函数构成的主导部分与较光滑的余项之和。楔形域和圆锥中的展开分别见式 (45) 和式 (59)：若将沿边方向的变量视为参数，则楔形域中的展开可化为二维多边形的情形；在顶点邻域内，其形式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \chi(r) r^{\nu^*} \mathbf{a}(t, \phi) + \mathbf{u}_0(t, r, \phi) \ , \\
\mathbf{p}(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) &= \chi(r) r^{\nu^* - 1} \mathbf{b}(t, \phi) + \boldsymbol{\phi}_0(t, r, \phi) \ .
\end{aligned}$$

这里，(r, ϕ) 是以顶点为中心的极坐标，指数 ν^* 由顶点处的开角 ω 和弹性参数决定，而 $\mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\phi}_0$ 是阶数较低的余项。特别地，对于固定的时间 t，方程 (1) 的解具有显式奇异展开，其行为与时不变的 Lam´e 方程相同。

解 $\mathbf{u}$ 和牵引力 $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ 的这一渐近展开带来了时空各向异性索博列夫范数中的准最优收敛率。Sobolev 空间 $H^\tau_\sigma(\mathbb{R}^+, H^s(\Gamma))$ 的定义见 (85)，范数 $\|\cdot\|_{r,s,\Gamma,*}$ 的定义见 (86)。我们在推论 5.4a) 中考察了如 (62) 所定义的分级网格上的解的逼近误差，以及准均匀网格上的 hp 版本，该版本见于

推论 5.8a)。其中，逼近误差由指数 $\tilde{\alpha}$ 决定，该指数取决于几何形状（楔形域、圆锥）和弹性参数，参见（68）：

定理。令 $\varepsilon > 0$ 和 $\sigma > 0$。a) 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 为单层积分方程 (2) 的解，且 $\boldsymbol{\Phi}_{h,\,\Delta t}^{\tilde{\beta}} \in \left(V_{\Delta t,q} \otimes X_{h,0}^{-1}\right)^n$ 是在 $\tilde{\beta}$-分级空间网格上，以 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+,\ \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 范数衡量的 $\boldsymbol{\Phi}$ 的最佳逼近，其中 $\Delta t \lesssim h_1$。那么对于 $p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ $\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_{h,\,\Delta t}^{\tilde{\beta}}\|_{r,\,-\frac{1}{2},\,\Gamma,\,*} \leq C_{\tilde{\beta},\,\varepsilon} h^{\min\{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}-\varepsilon,\frac{3}{2}\}}$。

b) 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 为单层积分方程 (2) 的解，$\boldsymbol{\Phi}_{h,\,\Delta t} \in \left(V_{\Delta t,p} \otimes X_{h,p}^{-1}\right)^n$ 为在准均匀空间网格上，关于 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 范数下的最佳逼近，其中 $\Delta t \lesssim h$。那么对于 $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_{h,\Delta t}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim \left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{\tilde{\alpha}-\varepsilon} + \left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r} + \left(\frac{h}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}+\eta},$$

其中，$r \in [0, p+1)$ 和 $\boldsymbol{\phi}_0 \in H_\sigma^{p+1}$（$\mathbb{R}^+,\ \widetilde{H}^\eta$（$\Gamma$））^{n} 是 $\boldsymbol{p}$（$\mathbf{u}$）$|_\Gamma$ 的奇异展开的正则部分。

二维多边形情形下的相应结果由边问题得出。推论 5.4b) 和 5.8b) 包含了诺伊曼问题超奇异积分方程的类似结果。由于分析在 Γ 上是局部的，推广到内部问题的单层和超奇异积分方程是显而易见的。

本文针对 $\mathbb{R}^2$ 中多边形和裂纹几何下的弱奇异积分算子和超奇异积分算子给出了数值实验。在分级网格和 hp 版本下，实验达到了预测的收敛率。此外，实验验证了解的主导奇异指数，并且 hp 版本在几何分级网格 (82) 上呈现出快于代数收敛的收敛表现。

时变问题的边界元方法近年来受到广泛关注，综述见[14, 20, 29, 51] 。对于无法约化到频域的问题，例如非线性问题或涉及宽频率范围的问题[22]，这类方法尤其重要。尽管工程领域对其在弹性力学中的应用早有研究 [4], ，但针对弹性动力学散射和裂纹问题的分析始于 B´ecache 和 Ha Duong 于 [7, 8]开展的工作。近期进展包括时空伽辽金方法、卷积求积方法、快速离散化 [3,17, 32, 52], ，以及对更复杂弹性行为的研究 [30]。

对于奇异区域中的时不变 Lam´e 方程（例如含有裂纹的区域），人们已对其详细渐近展开进行了广泛研究，部分动机是计算应力强度因子等感兴趣的量，参见例如 [6, 13, 25, 27, 45]。利用此类展开式，von Petersdorff[46] 推导出了分级网格上边界元的准最优误差估计。hp 版本在几何分级网格上的研究见 [39]。关于光滑开曲面上采用准一致网格的尖锐 hp 显式估计由 Bespalov [9], 给出，此前 Bespalov 和 Heuer 已对 Laplace 方程和 Lam´e 方程开展了相关研究 [10, 11]。

本文结构：第 2 节回顾了方程 (1) 的狄利克雷和诺伊曼边值问题，以及分别基于弱奇异算子和超奇异算子的边界积分方程表述。命题 2.1 确立了这些方程的适定性。弹性动力学问题解的正则性在第 3 节中讨论；另见附录 B，其中介绍了用于表述这些结果的理论框架。对这些解取迹后，我们得到积分方程解的相应结果。在第3.2小节中分析了楔形域中的弹性动力学问题解，在第 3.3 小节中分析了圆锥中的情形。第3.1小节特别讨论了二维问题。第 4 节讨论了边界元法离散和时间积分。在第 5 节中，近似

结果已分别针对分级网格上的 h 版本 TDBEM 和 hp 版本推导。研究对象包括圆形楔体和圆锥几何。多边形的二维情形对应于第7节数值结果的理论误差估计。第6节讨论了实现中的算法方面。附录 A 介绍了误差分析所需的 Sobolev空间框架，以及积分算子的映射性质和相应的弱形式。附录 B 介绍了分析楔形域和圆锥中的弹性动力学问题所需的关键理论要素。附录 C 汇集了误差分析所需的一些其他辅助结果。

记号： 对于向量/向量场（以粗体表示），算子和范数均按分量理解，不再另行标记。若存在常数 C 使得 $f \le Cg$，我们记作 $f \lesssim g$ 。若允许常数 C 依赖于参数 σ，则记作 $f \lesssim_\sigma g$。

2 模型问题与边界积分方程

我们考虑Lipschitz域 $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega'}$，该区域位于有界区域 Ω'之外，其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 为分片光滑边界，$n = 2$ 或为 3 维区域。作为极限情形，我们还考虑 $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ 中的屏障问题，即在开弧 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 或开曲面 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$之外的情形。在不存在外部体力时，位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t) = (u_1, \ldots\ldots, u_n)^\top(\mathbf{x}\ t)$，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，满足弹性动力学方程：

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} - \varrho\ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0, T], \tag{3}$$

其中 $\lambda, \mu > 0$ 为拉姆 ´参数，ϱ 表示质量密度。上方的点表示对时间求导，稍后我们将特别考虑 $T = \infty$。利用胡克张量$C_{ih}^{kl} = \lambda\delta_{ih}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{hl} + \delta_{il}\delta_{hk})$，$i, h, k, l = 1, \ldots, n$，我们将方程 (3) 改写为分量形式：

$$\sum_{h,k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(C_{ih}^{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}, t)\right) - \varrho\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,\ t \in (0, T],\ i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

我们还将牵引力定义为 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^\top$ 沿着 Γ，

$$p_i(\mathbf{x}, t) = p_i(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \sum_{h,k,l=1}^{n} C_{ih}^{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}, t)n_{\mathbf{x}h}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,\ t \in (0, T],\ i = 1, \ldots, n,$$

其中，$\mathbf{n_x}$ 是在$\mathbf{x}$处计算得到的、指向 Ω 到 Ω'方向的 Γ 的单位法向量。为强调$\mathbf{p}$ 定义在 Γ上，我们也采用$\mathbf{p}|_\Gamma$这一记号。方程 (3) 配有初始零条件 (5) 和 Γ上的 Dirichlet边界条件，用于描述边界引起的软散射：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{5}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \Sigma := \Gamma \times (0, T]. \tag{6}$$

除了(6)之外，还考虑了硬散射，对应于给定的Neumann边界条件

$$\mathbf{p}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Sigma := \Gamma \times (0, T]. \tag{7}$$

我们注意到，未知量$\mathbf{u}$ 可以写成两个位移$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mathrm{P} + \mathbf{u}_\mathrm{S}$ 之和（ [18]的第五章）： 其中，称为初级波的项$\mathbf{u}_\mathrm{P}$以 $c_\mathrm{P} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\varrho} > 0$的相速度在$\Omega$中传播，而称为次级波的$\mathbf{u}_\mathrm{S}$以 $c_\mathrm{S} = \sqrt{\mu/\varrho} > 0$的相速度在$\Omega$中传播。

2.1 表示公式与直接边界积分方程

如果施加纯狄利克雷条件（6），为描述$\Omega \times (0,T]$中的未知量$\mathbf{u}$，我们考虑以下直接积分表示公式：

$$u_i(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_\Gamma G_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) p_j(\boldsymbol{\xi},\tau) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau - \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_\Gamma \sum_{h,k,l=1}^{n} C_{jh}^{kl} \frac{\partial G_{ik}}{\partial \xi_l}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) u_j(\boldsymbol{\xi},\tau) n_{\boldsymbol{\xi}h} d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau,$$
$$(\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T],\ i = 1,\dots,n, \tag{8}$$

其中，牵引力$\mathbf{p}$在边界Γ上未知。该公式可简洁地写为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathcal{V}\mathbf{p}(\mathbf{x},t) - \mathcal{K}\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T],$$

其中，时空单层积分算子$\mathcal{V} = (V_{ij})_{i,j=1}^n$以及双层积分算子$\mathcal{K} = (K_{ij})_{i,j=1}^n$。

公式 (8) 中的二阶张量$\mathbf{G} = (G_{ij})_{i,j=1}^n$是所考虑微分问题的基本解：在二维中

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) :=& \frac{H[c_{\mathtt{P}}(t-\tau)-r]}{2\pi\varrho c_{\mathtt{P}}} \left\{ \frac{r_i r_j}{r^4} \frac{2c_{\mathtt{P}}^2(t-\tau)^2 - r^2}{\sqrt{c_{\mathtt{P}}^2(t-\tau)^2 - r^2}} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \sqrt{c_{\mathtt{P}}^2(t-\tau)^2 - r^2} \right\} \\ & - \frac{H[c_{\mathtt{S}}(t-\tau)-r]}{2\pi\varrho c_{\mathtt{S}}} \left\{ \frac{r_i r_j}{r^4} \frac{2c_{\mathtt{S}}^2(t-\tau)^2 - r^2}{\sqrt{c_{\mathtt{S}}^2(t-\tau)^2 - r^2}} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \frac{c_{\mathtt{S}}^2(t-\tau)^2}{\sqrt{c_{\mathtt{S}}^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right\}, \quad i,j = 1,2, \end{aligned} \tag{9}$$

而在三维中

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) :=& \frac{t-\tau}{4\pi\varrho r^2} \left(\frac{r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) \left(H[c_{\mathtt{P}}(t-\tau)-r] - H[c_{\mathtt{S}}(t-\tau)-r] \right) \\ & + \frac{r_i r_j}{4\pi\varrho r^3} \left(c_{\mathtt{P}}^{-2} \delta(c_{\mathtt{P}}(t-\tau)-r) - c_{\mathtt{S}}^{-2} \delta(c_{\mathtt{S}}(t-\tau)-r) \right) \\ & + \frac{\delta_{ij}}{4\pi\varrho r c_{\mathtt{S}}^2} \delta(c_{\mathtt{S}}(t-\tau)-r), \qquad i,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{10}$$

此处定义向量$\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)^\top = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = (x_1-\xi_1,\dots,x_n-\xi_n)^\top$, $r = |\mathbf{r}|$, H为Heaviside函数，δ为狄拉克分布。

利用狄里克雷定理的优势 令边界条件 (6) 成立，我们得到以下边界积分方程：

$$\mathcal{V}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x},t) = \left(\mathcal{K} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{g}(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in \Sigma, \tag{11}$$

其解为$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{p}|_\Gamma$。随后可将此解代入表示公式 (8)。

对于硬散射问题，即给定条件 (7) 的情况，可考虑应用 Hooke 张量的表示公式 (8) 在 Ω 中计算未知位移：

$$\begin{aligned} \sum_{h,k,l=1}^{n} C_{ih}^{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x},t) n_{\mathbf{x}h} =& \sum_{j=1}^{n} \sum_{h,k,l=1}^{n} \int_0^t \int_\Gamma C_{ih}^{kl} \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_l}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) p_j(\boldsymbol{\xi},\tau) n_{\mathbf{x}h} d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau \\ & - \sum_{j=1}^{n} \sum_{h,k,l=1}^{n} \sum_{h',k',l'=1}^{n} \int_0^t \int_\Gamma C_{ih}^{kl} C_{jh'}^{k'l'} \frac{\partial G_{kk'}}{\partial x_l \partial \xi_{l'}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t,\tau) u_j(\boldsymbol{\xi},\tau) n_{\boldsymbol{\xi}h'} n_{\mathbf{x}h} d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} d\tau, \\ & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T],\ k = 1,\dots,n, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 d 位移$\mathbf{u}$ 在边界 Γ上未知。相关的紧凑记号为 s

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},t) = \mathcal{K}'\mathbf{p}(\mathbf{x},t) - \mathcal{W}\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T],$$

其中算子 $\mathcal{K}' = (K'_{ij})_{i,\ j=1}^{n}$ 是伴随双层算子 且 $\mathcal{W} = (W_{ij})_{i,\ j=1}^{n}$ 是时空超奇异积分算子。

令 $\mathbf{x} \in \Omega$ 在式 (12) 中趋于 Γ，可得时变边界积分方程

$$\mathcal{W}\mathbf{\Psi}(\mathbf{x},t) = \left(\mathcal{K}' - \frac{1}{2}\right)\mathbf{h}(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in \Sigma, \tag{13}$$

其解 $\mathbf{\Psi} = \mathbf{u}|_\Gamma$ 取决于式 (7) 中规定的诺伊曼条件 $\mathbf{p(u)} = \mathbf{h}$。因此，我们的目的是通过近似 $\mathbf{\Psi}$，求解系统 (13) 的数值解；随后可将其用于表示公式 (8)。

积分方程 (11) 和 (13) 的 Galerkin近似基于其弱形式。式 (11) 在时空柱体 Σ 上的弱形式由以下双线性型给出

$$B_{D,\Sigma}(\mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}}) := \langle \mathcal{V}\partial_t \mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}} \rangle_{L^2(\Sigma)}. \tag{14}$$

求 $\mathbf{\Phi} \in H^1_\sigma((0,T], \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，使得

$$B_{D,\Sigma}(\mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}}) = \langle \partial_t(\mathcal{K} + 1/2)\,\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{\Phi}} \rangle_{L^2(\Sigma)}, \tag{15}$$

对所有 $\tilde{\mathbf{\Phi}} = (\tilde{\Phi}_1, \ldots, \tilde{\Phi}_n)^\top \in H^1_\sigma((0,T], \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$。

类似地，(13) 的弱形式可用双线性型表示为 m

$$B_{N,\Sigma}(\mathbf{\Psi}, \tilde{\mathbf{\Psi}}) := \langle \mathcal{W}\partial_t \mathbf{\Psi}, \tilde{\mathbf{\Psi}} \rangle_{L^2(\Sigma)}. \tag{16}$$

求 $\mathbf{\Psi} \in H^1_\sigma((0,T], \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，使得

$$B_{N,\Sigma}(\mathbf{\Psi}, \tilde{\mathbf{\Psi}}) = \langle \partial_t\big(\mathcal{K}' - 1/2\big)\,\mathbf{h}, \tilde{\mathbf{\Psi}} \rangle_{L^2(\Sigma)}, \tag{17}$$

对所有 $\tilde{\mathbf{\Psi}} = (\tilde{\Psi}_1, \ldots, \tilde{\Psi}_n)^\top \in H^1_\sigma((0,T], \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$。

与以往的研究一样，理论分析要求在内积中使用依赖于 σ 的权重，见 (87)。随后，无限时空柱 $\Gamma \times \mathbb{R}^+$ 上狄利克雷问题的边界积分方程 (15) 是适定的；这一点可由附录 A 中证明的 $\mathcal{V}$ 的强制性和连续性，以及恰当的函数空间设定得出。关于公式 (17) 中超奇异算子 $\mathcal{W}$ 的相应结果可追溯至 [7, 8], ，其中分析了二维情形。这些结果很容易推广到三维，例如可沿用附录 A 中的论证。

命题 2.1。令 $\sigma > 0, \quad r \in \mathbb{R}$。
a) 假设 $\mathbf{g} \in H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$。则存在唯一解 $\mathbf{\Phi} \in H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，满足(15) 且 -

$$\|\mathbf{\Phi}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim_\sigma \|\mathbf{g}\|_{r+1,\frac{1}{2},\Gamma}\,. \tag{18}$$

b) 假设 $\mathbf{h} \in H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$。则存在唯一解 $\mathbf{\Psi} \in H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，满足(17) 且 -

$$\|\mathbf{\Psi}\|_{r,\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim_\sigma \|\mathbf{h}\|_{r+1,-\frac{1}{2},\Gamma}\,. \tag{19}$$

$r = 0$ 的证明由命题 *A.3* 以及 $\mathcal{K}$、$\mathcal{K}'$的映射性质推出，相关结果见 *[12]*。一般 r 的结果则可由 $r = 0$ 的结果对方程 r 次求导得到；对于非整数 r，则使用复插值。

3 狄利克雷问题解的正则性

本节针对两种模型几何——圆锥和楔形域——中满足狄利克雷条件 (4)–(6) 的弹性动力学原始初边值问题的解的奇异行为，给出精确结果。通过取迹，微分方程解的分解结果也会导出积分方程解在奇异项和更规则余项方面的分解。满足诺伊曼条件的问题可以通过适当修改来处理；因此为简洁起见，本文略去相关内容。该分析是局部的，因此同时适用于外部问题和内部问题。虽然我们在 $\mathbb{R}^2$中处理任意多边形区域，但要将其扩展到 $\mathbb{R}^3$ 中的任意多面体域，则需要把附录 B 中回顾的分析扩展到一般角点奇异性情形。目前分析学文献中尚无如此一般性的结果，而且这也超出了本文的范围。

第3.1小节概述了 $\mathbb{R}^2$ 中多边形区域内顶点附近解的渐近性，对应于第7节中的数值实验。其中详细讨论了弹性动力边值问题和标量波动方程的奇异指数。首先，我们考虑时不变情形（命题 3.1）。多边形中时变情形的结果可由 $\mathbb{R}^3$ 中楔形域的分析推出，参见第3.2小节中的推论 3.6；具体而言，是通过显式计算奇异指数和奇异函数得到的。第3.2小节中的定理 3.5 给出了楔形域内解的抽象渐近展开。事实表明，奇异指数与时不变情形中的相同，但奇异函数的系数还依赖于时间。通过沿边并对时间进行偏傅里叶变换，可以得到楔形域内解的行为。随后，所得系统（36）的首项分解为由弹性动力场的平面分量构成的二维弹性系统，以及沿 z 分量的标量非齐次波动方程（40）。因此，在定理 3.3 中，我们回顾楔形域内波动方程的结果。然后，对于带参数 (ξ,τ) 的完整系统（36），我们将时不变椭圆情形的展开式（23）和（30）代入其中，从而应用 Dauge方法 [15] 。这样，我们得到展开式（44），并通过傅里叶逆变换得到时变问题的展开式（45）。

圆锥中的弹性动力学边值问题的解在第 3.3 小节中讨论。我们考虑球坐标下的弹性动力学系统。对于固定时间 t ，我们推导出旋转对称解 (54)。其渐近展开见定理 3.7。

我们用 $\mathbb{D}$ 表示模型几何。为便于参照 Plamenevskiĭ 及其合作者的研究，以及附录 B 和 [23], ，本节采用分析学界的一些记号，而非数值研究中常见的记号。特别是，文章其他章节中的 $\sigma>0$ 在此称为 γ，奇异指数 λ_k 记为 $i\lambda_k$，并且傅里叶变换及其逆变换的定义互换了。

3.1 二维扇形区域中解的行为

在二维情形下，对于多边形内部或外部区域 Ω 中的非齐次弹性动力学方程，我们在内角为 ω 的顶点附近局部引入 $\mathbf{u}$ $u_r=r^{\nu^*}\varphi_r(\phi,t)$ 和 $u_\phi=r^{\nu^*}\varphi_\phi(\phi,t)$ 的径向和切向分量。于是该系统变为

$$\mu\partial_\phi^2\varphi_r+(\lambda+2\mu)((\nu^*)^2-1)\varphi_r+((\lambda+\mu)\nu^*-(\lambda+3\mu))\partial_\phi\varphi_\phi-r^{2-\nu^*}F_r=\varrho r^2\partial_t^2u_r\ , \tag{20}$$

$$(\lambda+2\mu)\partial_\phi^2\varphi_\phi+\mu((\nu^*)^2-1)\varphi_\phi+((\lambda+\mu)\nu^*+(\lambda+3\mu))\partial_\phi\varphi_r-r^{2-\nu^*}F_\phi=\varrho r^2\partial_t^2u_\phi\ . \tag{21}$$

该系统在右端项为 $(F_r,F_\phi)=(0,0)$ 时的定常解为 $(\cos(1+\nu^*)\phi,-\sin(1+\nu^*)\phi)^T$, $(\sin(1+\nu^*)\phi,\cos(1+\nu^*)\phi)^T$, $(\cos(1-\nu^*)\phi,-\bar\nu\sin(1-\nu^*)\phi)^T$, $(\sin(1-\nu^*)\phi,\bar\nu\cos(1-\nu^*)\phi)^T$ ， 其中 $\bar\nu=\frac{3+\nu^*-4\nu}{3-\nu^*-4\nu}$ ， $\nu=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ 为泊松数。

我们简要回顾具有狄利克雷条件 $u_r(\pm\omega/2) = u_\varphi(\pm\omega/2) = 0$ 的定常问题：对于任意常数 A， B， C， D，我们得到

$$A\cos(1+\nu^*)\omega/2 \pm B\sin(1-\nu^*)\omega/2 + C\cos(1-\nu^*)\omega/2 \pm D\sin(1-\nu^*)\omega/2 = 0$$

$$\mp A\sin(1+\nu^*)\omega/2 + B\cos(1+\nu^*)\omega/2 \mp \bar{\nu}C\sin(1-\nu^*)\omega/2 + \bar{\nu}D\cos(1-\nu^*)\omega/2 = 0\ ,$$

因此平面应变条件

$$\sin\nu^*\omega = \pm\frac{\bar{\nu}-1}{\bar{\nu}+1}\sin\omega \quad \text{with} \quad \frac{\bar{\nu}-1}{\bar{\nu}+1} = \frac{\nu^*}{3-4\nu}. \tag{22}$$

由于对于 Neumann 边界条件也可以进行类似推导，因此可得到以下关于时不变问题的定理。

命题 3.1. 设 $\mathbf{f} \in H^{s-1}(\Omega)^2$ 且 $s > 0$, $s \notin \mathrm{Re}\ \nu^*_{jk}$ 满足 (25)、(26)中的条件。则时不变方程 (20)、(21) 的弱解 $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ 在顶点 t_j 附近，借助 C^∞ 截断函数 χ_j，且该顶点的内角为 ω_j ，可分解为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{\mathrm{Re}\ \nu^*_{jk}<s} a^*_{jk}\mathbf{S}^*_{jk}(r,\phi)\chi_j(r) \tag{23}$$

含有正则部分 $\mathbf{u}_0 \in H^{1+s}(\Omega)^2$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$ 以及奇异函数

$$\mathbf{S}^*_{jk}(r,\phi) = \begin{cases} r^{\nu^*_{jk}}\boldsymbol{\varphi}^*_{jk}(\phi) \ \textit{for}\ \nu^*_{jk} \notin \mathbb{N}, \\ r^{\nu^*_{jk}}\ln r\ \boldsymbol{\varphi}^*_{jk}(\phi) + r^{\nu^*_{jk}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^*_{jk}(\phi) \ \textit{for}\ \nu^*_{jk} \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{24}$$

这里的奇异指数 $\nu^*_{jk} \in \mathbb{C}$ 在$\mathrm{Re}\ \nu^*_{jk} > 0$ 中，是以下方程的解，具体取决于在角点 t_j处相交的两侧所采用的边界条件

$$\textit{Dirichlet:}\ \sin\nu^*_{jk}\omega_j = \pm\tfrac{\nu^*_{jk}}{k^*}\sin\omega_j \tag{25}$$

$$\textit{Neumann:}\ \sin\nu^*_{jk}\omega_j = \pm\nu^*_{jk}\sin\omega_j \tag{26}$$

函数 $\boldsymbol{\varphi}_{jk}$ 在 r 方向的分量$(\varphi_{jk})_r$ 以及在 ϕ 方向的分量$(\varphi_{jk})_\phi$ 的形式为

$$(\varphi^*_{jk})_r = A\cos(1+\nu^*_{jk})\phi + B\sin(1+\nu^*_{jk})\phi + C\cos(1-\nu^*_{jk})\phi + D\sin(1-\nu^*_{jk})\phi \tag{27}$$

$$(\varphi^*_{jk})_\phi = -A\sin(1+\nu^*_{jk})\phi + B\cos(1+\nu^*_{jk})\phi - \gamma_{jk}C\sin(1-\nu^*_{jk})\phi + \gamma_{jk}D\cos(1-\nu^*_{jk})\phi \tag{28}$$

其中常数 A、B、C、$D \in \mathbb{C}$取决于角点处的边界条件类型以及常数

$$\gamma_{jk} = \tfrac{3+\nu^*_{jk}-4\nu}{3-\nu^*_{jk}-4\nu},\ k^* = 3-4\nu\ .$$

如 [26], 第 73 页所述，对于狄利克雷边界条件，方程 (25) 在 (0，1) 中存在两个主导实根。

注 3.2。对于裂纹，即 $\omega_j = 2\pi$ 对于狄利克雷和诺伊曼边界条件 $\nu^*_{j1} = 1/2$。

更一般地，我们可以利用 (25) 研究角度 ω 附近狄利克雷问题的解的主导奇异指数，其中 $\omega \to 0$，分别为 $\omega \to 2\pi$。

为此，请注意，对于主导奇异指数 $\nu^* = \nu^*_{j1}$

$$\sin\nu^*\omega = \frac{\nu^*}{k^*}\sin\omega = \frac{\nu^*\omega}{k^*} + o(\omega) \tag{29}$$

对于 $\omega \to 0$，或

$$\frac{\sin \nu^* \omega}{\nu^* \omega} \to \frac{1}{k^*}.$$

由此得到 $\nu^* = \frac{c}{\omega} + \mathcal{O}(1)$，其中 c 满足 $\sin c = \frac{1}{k^*}$。

对于相应的外角，$\omega = 2\pi - \varepsilon$ 在 $\varepsilon \to 0$ 的情况下，我们令 $\nu^* = \frac{1}{2} + \tilde{\nu}(\varepsilon)$。于是正弦 $\nu^* \omega = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + \tilde{\nu}(\varepsilon)\right)(2\pi - \varepsilon)\right)$，对 $\varepsilon, \tilde{\nu}(\varepsilon) \to 0$ 进行泰勒展开可得

$$\sin \nu^* \omega = -2\pi\tilde{\nu}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon) \ .$$

另一方面，由方程 $\sin\left(\nu^* \omega\right) = \sin\left(-\nu^* \varepsilon + o(\varepsilon)\right)$ 可知正弦 $-2\pi\tilde{\nu}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \pm\left(-\frac{1}{2k^*}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)$ 正弦 $\tilde{\nu}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{k^*}\right) + o(\varepsilon)$，因此 $(+)(+)$，或者 $(-)(-)$，并且

$$\nu^* = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(1 + \frac{1}{k^*}\right) + o(\varepsilon) \ .$$

图 10 数值展示了当 $\lambda = 2$、$\mu = 1$ 和 $\rho = 1$ 时，ν^* 随 ω 的变化情况。这证实了上述分析。

在下一节中，我们还需要对标量波动方程 [23] 的奇异性作相应描述

$$\varrho \partial_t^2 u = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u - F \ .$$

在 Ω 中，满足狄利克雷或诺伊曼边界条件。

同样，我们首先描述研究充分的定常问题中的奇异性。在这种情况下，顶点 t_j 附近的内角为 ω_j，弱解 u 可分解为

$$u = u_0 + \sum_{\nu_{jk} < s} a_{jk} S_{jk}(r, \phi)\chi(r) \tag{30}$$

其中 C^∞ 是截断函数 χ_j、正则部分 $u_0 \in H^{1+s}(\Omega)$ $a_{jk} \in \mathbb{C}$ 以及奇异函数

$$S_{jk}(r, \phi) = \begin{cases} r^{\nu_{jk}} \varphi_{jk}(\phi) \text{ for } \nu_{jk} \notin \mathbb{N}, \\ r^{\nu_{jk}} \ln r \ \varphi_{jk}(\phi) + r^{\nu_{jk}} \tilde{\varphi}_{jk}(\phi) \text{ for } \nu_{jk} \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{31}$$

其中 $\nu_{jk} = \frac{k\pi}{\omega_j}$。对于狄利克雷边界条件 $\varphi_{jk,D} = \sin(\nu_{jk}\phi)$，$k \in \mathbb{N}$；而对于诺伊曼边界条件 $\varphi_{jk,N} = \cos(\nu_{jk}\phi)$，$k \in \mathbb{N}_0$。

3.2 楔形域中解的行为

开角为 ω、$\mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}$ 且满足 $\mathbb{K} = \{(r, \ \phi) : \ r > 0, \ \ \phi \in (0, \ \omega)\}$ 的楔形域中解的行为，将第 3.1 节的讨论从维数 $n = 2$ 推广到维数 $n = 3$。只要我们讨论的这种模型几何仅有一个非光滑子集 $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}$ 属于 $\partial\mathbb{D}$，我们就省略非光滑子集的编号（第 3.1 小节中的 j）。

这里我们考虑时空柱体 $\mathcal{Q} = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ 中的弹性动力学系统 (3)，其右端项为 $\mathbf{f}$

$$L(\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t)\mathbf{u} := -(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \varrho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \ . \tag{32}$$

沿着边并在时间方向应用偏傅里叶变换 $\mathcal{F}_{(z,t)\mapsto(\xi,\tau)}$ 后，方程变为

$$L(\partial_x, \partial_y, -i\xi, -i\tau)\hat{\mathbf{u}}(x, y, \xi, \tau) = \hat{\mathbf{f}}(x, y, \xi, \tau), \tag{33}$$

在扇区 $\mathbb{K}$ 中提出。

更准确地说，算子 L 在此处具有如下形式

$$L(\partial_x,\partial_y,\partial_z,\partial_t)=\begin{pmatrix}-(\lambda+2\mu)\partial_x^2-\mu(\partial_y^2+\partial_z^2)+\varrho\partial_t^2 & -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z\\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & -(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\mu(\partial_x^2+\partial_z^2)+\varrho\partial_t^2 & -(\lambda+\mu)\partial_y\partial_z\\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z & -(\lambda+\mu)\partial_y\partial_z & -(\lambda+2\mu)\partial_z^2-\mu(\partial_x^2+\partial_y^2)+\varrho\partial_t^2\end{pmatrix}. \tag{34}$$

傅里叶变换 $\mathcal{F}_{(z,t)\mapsto(\xi,\tau)}$ 将系统转换为

$$L(\partial_x,\partial_y,-i\xi,-i\tau)=\begin{pmatrix}-(\lambda+2\mu)\partial_x^2-\mu\partial_y^2+\mu\xi^2-\varrho\tau^2 & -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & i(\lambda+\mu)\xi\partial_x\\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & -(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\mu\partial_x^2+\mu\xi^2-\varrho\tau^2 & i(\lambda+\mu)\xi\partial_y\\ i(\lambda+\mu)\xi\partial_x & i(\lambda+\mu)\xi\partial_y & -\mu(\partial_x^2+\partial_y^2)+(\lambda+2\mu)\xi^2-\varrho\tau^2\end{pmatrix}. \tag{35}$$

令 $\zeta^2=(\mu\xi^2-\varrho\tau^2)^{-1}$，可得

$$\begin{aligned}M(\partial_x,\partial_y,\xi,\tau)&=\zeta^2L(\zeta^{-1}\partial_x,\zeta^{-1}\partial_y,-i\xi,-i\tau)=L_0+L_1+L_2\\&=\begin{pmatrix}-(\lambda+2\mu)\partial_x^2-\mu\partial_y^2 & -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & 0\\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & -(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\mu\partial_x^2 & 0\\ 0 & 0 & -\mu(\partial_x^2+\partial_y^2)\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}0 & 0 & i(\lambda+\mu)\xi\zeta\partial_x\\ 0 & 0 & i(\lambda+\mu)\xi\zeta\partial_y\\ i(\lambda+\mu)\xi\zeta\partial_x & i(\lambda+\mu)\xi\zeta\partial_y & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \zeta^2[(\lambda+2\mu)\xi^2-\varrho\tau^2]\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{36}$$

式 (36) 中算子 M 的主部 L_0 为

$$L_0:=-\begin{pmatrix}\Delta_{x,y}^* & 0\\ 0 & \mu\Delta_{x,y}\end{pmatrix}, \tag{37}$$

于是 (33) 变为

$$M\mathbf{v}=\zeta^2\hat{\mathbf{f}}=:\mathbf{k}_{(\zeta)}\ . \tag{38}$$

我们用重新缩放的变量 $\mathbf{v}(\tilde{x},\tilde{y})=\hat{\mathbf{u}}(x,y,\xi,\tau)$研究该方程，其中 $(\tilde{x},\tilde{y})=\zeta^{-1}(x,y)$，且 $\tilde{r}=|(\tilde{x},\tilde{y})|=r/\zeta$，由此得到关于下文中 $\hat{\mathbf{u}}$ 的统一结论。

首项 L_0 分解为拉普拉斯算子 $\Delta_{x,y}$ （沿边的方向）以及横截面 $\mathbb{K}$上的二维弹性力学算子 $\Delta_{x,y}^*$ 。L_0 将分量 (v_x,v_y) 和 v_z 的方程解耦为一个关于$\mathbf{v}$的平面分量二维弹性系统（见第 3.1 节），以及一个关于 z分量的标量问题；二者均位于扇区 $\mathbb{K}$中。

M 的奇异性源自 L_0 的奇异性，以及由低阶微分算子产生的、正则性更高的修正项。对于与时间无关的问题，这一点在命题 16.8 和 [15],中的方程 (5.9) 以及 [46]中均有证明。

对于狄利克雷问题， L_0 的奇异性可直接由命题 3.1 得出，从而得到 $\hat{\mathbf{u}}$关于 $p=0$ 的展开 (43)。这里的奇异性 $\mathbf{S}_{k,0}=(0,\ 0,\ S_k)$、$\mathbf{S}_{k,0}^*$ 分别对应 (31) 和 (24) 中的奇异性。（请回忆，在第3.1小节中，我们省略了对顶点编号的索引 j 。）

整个算子 M 的奇异性可按如下方式得到。首先，将算子中的低阶项移至微分方程右端，然后重复这一过程。

附加修正项 $\mathbf{S}_{k,\ell}$、$\mathbf{S}_{k,\ell}^*$ 对于 $\ell>0$ 递归定义为

$$\mathbf{S}_{k,1}=-RL_1\mathbf{S}_{k,0},\qquad \mathbf{S}_{k,\ell}=-RL_2\mathbf{S}_{k,\ell-2}-RL_1\mathbf{S}_{k,\ell-1}\qquad(\ell>1), \tag{39}$$

以及相应地 对于 $\mathbf{S}^*_{k,\ell}$。其中， $R=(R^*_\Delta,R_\Delta)$ 分别是 Δ 和 Δ^* 的解算子

更明确地说，我们得到

$$L_1\mathbf{S}_{k,0}=\begin{pmatrix} i(\lambda+\mu)\xi\zeta\nabla S_k \\ 0\end{pmatrix},$$

并作如下设定：$\mathbf{S}_{k,1}=(\mathbf{B}_{k,1},A_{k,1})$，其中标量函数 $A_{k,1}$ 沿边的方向，二维向量 $\mathbf{B}_{k,1}$ 表示横截面中的分量。

Then

$$A_{k,1}=-(\lambda+\mu)R_\Delta 0=0,\qquad \mathbf{B}_{k,1}=-(\lambda+\mu)\xi\zeta R^*_\Delta\nabla\mathbf{S}_k\ .$$

对于更高阶的奇异函数 $\mathbf{S}_{k,\ell}$，可以推导出相应的公式。它们分别满足 $\mathbf{S}^*_{k,\ell}(r,\phi)\sim r^{\nu^*_k+\ell}\boldsymbol{\varphi}^*_{k,\ell}(\phi)$ 和 $\mathbf{S}_{k,\ell}(r,\phi)\sim r^{\nu_k+\ell}\boldsymbol{\varphi}_{k,\ell}(\phi)$，其中 $\boldsymbol{\varphi}_{k,0}=(0,0,\varphi_k)$ 来自 (31)。文献 [40], 第 495 页对其进行了抽象描述，该描述依赖于其中的命题 3.9，且对于楔形域不易推导出显式公式。虽然这里只明确给出了首项，并在我们的数值实验中得到了验证，但奇异函数的一般结构已足以支持第 5 节中的误差分析。

对于含时情形，我们首先考虑 (34) 中关于 u_z 的第三个方程。除去关于 x 和 y 的低阶算子后，该方程就是楔形几何 $\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ 中的波动方程。如上所述，$\mathbb{D}=\mathbb{K}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{K}$ 是扇区 $\{(r,\ \phi):\ r>0,\ \ \phi\in(0,\ \omega)\}$。在柱坐标中使用 (35) 并进行傅里叶变换 $\mathcal{F}_{(z,t)\mapsto(\xi,\tau)}$，得到

$$-\Delta_{x,y}\hat{u}_z(r,\phi,\xi,\tau)+\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\xi^2-\frac{\varrho}{\mu}\tau^2\right)\hat{u}_z(r,\phi,\xi,\tau)=\mu^{-1}\hat{k}\ , \tag{40}$$

除低阶项外。这里 k 是 $\mathbf{k}^{(\zeta)}$ 的第三个分量。为求出 (40) 的解的行为，经过重新缩放 τ，ξ 后，只需研究波动方程

$$-\Delta_{x,y}\hat{u}_z-(\tau^2-\xi^2)\hat{u}_z=\hat{k}\ . \tag{41}$$

[23] 中采用的方法设定如下形式

$$\hat{u}_z=r^{i\lambda_{-k}}\varphi_{-k}(\phi)\rho_{-k}(r\eta)=r^{i\lambda_{-k}}\sin(i\lambda_{-k}\phi)\,\rho_{-k}(r\eta)$$

其中 $\eta^2=\xi^2-\tau^2$，并将 (40) 关于 $\hat{}k=0$ 的方程化为贝塞尔微分方程：

$$r^2\eta^2\rho''_{-k}(r\eta)+(2i\lambda_{-k}+1)\,r\eta\rho'_{-k}(r\eta)+r^2\eta^2\rho_{-k}(r\eta)=0\ .$$

对于具有狄利克雷或诺伊曼边界条件的边 $i\lambda_{-k}=\frac{\pi k}{\omega}$。贝塞尔微分方程的解可以像 [23] 中那样，用贝塞尔函数显式表示：

$$\rho_{-k}(t\tau)=c\ (r\tau)^{i\lambda_{-k}}K_{i\lambda_{-k}}(ir\tau).$$

定理14中针对 $\rho_{-k}(t\tau)$ 得到的渐近展开，与 $\hat{}u_z$ 的展开相对应。定理 B.10 描述了时空柱体 $\mathcal{Q}=\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ 中的一般奇异行为。上述论证导出了定理 3.3 中关于楔形域$\mathbb{D}=\mathbb{K}\times\mathbb{R}$的以下更精确的展开，其中涉及以下特殊解 $w_{-k,\ B}$ 它们是带有 $\varphi_{k,\ B}$ 的 Dirichlet ($B=D$) 或 Neumann ($B=N$) 问题的解，如第 3.1 节末尾所述（分别参见 [36,(3.5)], 和 [33,(4.4)]）：

$$w_{-k,B}(r,\phi,\xi,\overline{\tau})=\frac{2^{1-i\lambda_{k,B}}}{\Gamma(i\lambda_{k,B})}(ir\sqrt{-|\xi|^2+\overline{\tau}^2})^{i\lambda_{k,B}}K_{i\lambda_{k,B}}(ir\sqrt{-|\xi|^2+\overline{\tau}^2})r^{-i\lambda_{k,B}}\varphi_{k,B}(\phi)\ .$$

我们回顾楔形域中波动方程的以下定理，该定理给出了用奇异函数表示解的展开（按 [21], $n=3$, $d=1$ 中的记号为定理14）。

定理 3.3（[21]）。设 $\beta \le 1$ 和 $\gamma > 0$，$(f,g) \in \mathcal{R}H_{\beta,\,q}(\Omega,\gamma)$，并假设直线 $\operatorname{Im}\ \lambda = \beta - 1$ 不与式（107）中的 $\mathcal{A}_B$ 的谱相交。此外，定义

$$J_{\beta,B} = \{k : 0 > \operatorname{Im}\ \lambda_{k,B} > \beta - 1\} \cup A\ ,$$

当 $A = \{0\}$ 时适用于 $\beta \le 0$，否则适用于 $A = \emptyset$。

若 u 是满足齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件（分别为 $B = D$、N）的非齐次波动方程强解，则在边 u 附近，其形式为

$$\sum_{j\in J_{\beta,B}} \Gamma(1+\nu_{j,B}) r^{i\lambda_{j,B}} \varphi_{j,B}(\phi) \sum_{m=0}^{N_j} \frac{(\partial_t^2 - \Delta_z)^m (ir)^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m+\nu_{j,B}+1)} \left(\mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\tau)\to(z,t)} c_{j,B}(r,\phi,\xi,\tau) \right) + \check{u}_0(r,\phi,z,t)\ ,$$

假设 $i\lambda_{j,\,B} = \nu_{j,\,B} = \frac{\pi}{\omega} \notin \mathbb{N}_0$。这里 N_j 足够大，且取决于边界条件

$$c_{j,D}(\xi,\tau) = \langle \hat{f}(\cdot,\xi,\tau), w_{-j,D}(\cdot,\xi,\overline{\tau}) \rangle_{L^2(\mathbb{K})} + (\hat{g}(\cdot,\xi,\tau), \partial_\nu w_{-j,D}(\cdot,\xi,\overline{\tau}))_{L^2(\partial\mathbb{K})};$$

$$c_{j,N}(\xi,\tau) = \langle \hat{f}(\cdot,\xi,\tau), w_{-j,N}(\cdot,\xi,\overline{\tau}) \rangle_{L^2(\mathbb{K})} + (\hat{h}(\cdot,\xi,\tau), w_{-j,N}(\cdot,\xi,\overline{\tau}))_{L^2(\partial\mathbb{K})}.$$

$c_{j,\,B}$ 的正则性由右端项决定，而余项 $\check{u}_0$ 的奇异性弱于 u，其含义是：对于狄利克雷问题，$\|\check{u}_0\|_{DV_\beta,q(\Omega;\gamma)} \lesssim \|(f,g)\|_{\mathcal{R}H_{\beta,q}(\Omega,\gamma)}$；诺伊曼情形也有类似结果。加权空间 $DV_\beta(\Omega,\gamma)\mathcal{R}H_{\beta,q}(\Omega,\gamma)$ 的定义参见附录 B。若 $i\lambda_{j,B} \in \mathbb{N}_0$，则会出现附加项 $r^{i\lambda_{j,B}} \log(r)$。

虽然定理 3.3 针对的是齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件，但很容易将其推广到非齐次边界条件，如椭圆问题 [48, 节 5]所示：对于狄利克雷边界条件 $u = g$，在区域内选取一个延拓函数 $\widetilde{g}$，使其具有狄利克雷迹 g。于是函数$U = u - \widetilde{g}$满足齐次狄利克雷边界条件 $U = 0$。定理 3.3 进而保证 U具有渐近展开，因此 $u = U + \widetilde{g}$也具有渐近展开。

对于诺伊曼边界条件，也可采用类似论证，使用一个具有给定诺伊曼迹的延拓函数 $\widetilde{g}$。

特别是，我们给出狄利克雷问题展开的首项：

推论 3.4. 设 $\gamma > 0$、$\beta < 1$，并假设 $i\lambda_1 = \frac{\pi}{\omega}$ 是条带 $\beta - 1 \le$虚部 $\lambda \le 0$中的唯一特征值。那么对于 $(f,g) \in \mathcal{R}V_\beta(\Omega,\gamma)$，非齐次边值问题的解 $u \in DV_1(\Omega,\gamma)$ 可表示为

$$u(r,\phi,z,t) = \chi(r) r^{\pi/\omega} \varphi(\phi) X c(r,\phi,z,t) + u_0(r,\phi,z,t),$$

其中 $u_0 \in DV_\beta$（Ω,γ），$\gamma > \gamma_0$，χ 是一个截断函数，X 如（123）所示，且

$$c(r,\phi,z,t) = \int \left\{ \langle f(t'), W(t-t') \rangle_{\mathbb{D}} + \langle g(t'), \partial_\nu W(t-t') \rangle_{\partial\mathbb{D}} \right\} dt'\ . \tag{42}$$

这里，

$$W(r,\phi,z,t) = \mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\tau)\to(z,t)} w(r,\phi,\xi,\tau)$$

且 w 满足（41），其 *Dirichlet*边界条件为 $w|_{\partial\mathbb{K}} = 0$。

在边附近，函数 w的表现类似于 (113) 中的$-r^{\frac{\pi}{\omega}}\varphi(\phi)$。

现在可以将展开式 (23) 和 (30) 应用于$\mathbf{v}$ in (38)，得到 $(\tilde{x},\tilde{y}) = \zeta^{-1}(x,y)$ 和$\tilde{r} = |(\tilde{x},\tilde{y})| = r/\zeta$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \chi(\tilde{r}) \Big(\sum_{\operatorname{Re}\ \nu_k < s} a_{k,(\zeta)} \sum_{0\le \ell < s - \operatorname{Re}\ \nu_k} \mathbf{S}_{k,\ell}(\tilde{r},\phi) + \sum_{\operatorname{Re}\ \nu_k^* < s} a^*_{k,(\zeta)} \sum_{0\le \ell < s - \operatorname{Re}\ \nu_k^*} \mathbf{S}^*_{k,\ell}(\tilde{r},\phi) \Big) \tag{43}$$

其中，对于固定的 ζ，有 $\mathrm{v}_0 \in H^{s+1}(K)^n$, $a_{k,(\zeta)}, a^*_{k,(\zeta)} \in \mathbb{C}$ 。这里，与前面一样，奇异函数 $\mathrm{S}_{k,\ell}$ 在主导阶上是波动方程的奇异函数，位于第三个分量 $(0,0,S_k)$ 中，而 $\mathrm{S}^*_{k,\ell}$ 在主导阶上是二维弹性静力系统 (31) 的奇异函数。下文中，我们考虑 ζ 较大的情况（见 [15]）。我们将 (43) 变换回坐标 ξ, x, y。当 $\mathrm{S}_{k,\ell}$ 和 $\mathrm{S}^*_{k,\ell}$ 不含对数项时，则有 $\mathrm{S}_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi) = \zeta^{-\nu_k-\ell}\mathrm{S}_{k,\ell}(r,\phi)$，对于 $\mathrm{S}^*_{k,\ell}$ 也有相应的关系。利用 $\hat{}c_{k,(\zeta)} = \zeta^{-\nu_k} a_{k,(\zeta)}$ 和 $\hat{}c^*_{k,(\zeta)} = \zeta^{-\nu^*_k} a^*_{k,(\zeta)}$，我们得到 $a_{k,(\zeta)} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} \mathrm{S}_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi) = \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} \zeta^{-\ell}\hat{}c_{k,(\zeta)}\mathrm{S}_{k,\ell}(r,\phi)$，对于 $\mathrm{S}^*_{k,\ell}$ 也有相应的关系。令 $\mathrm{v}(\tilde{x},\tilde{y}) = \hat{}\mathrm{u}(x,y,\xi,\tau)$ 且 $\mathrm{v}_0(\tilde{x},\tilde{y}) = \hat{}\mathrm{u}_0(x,y,\xi,\tau)$，我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(x,y,\xi,\tau) &= \hat{\mathbf{u}}_0(x,y,\xi,\tau) + \chi(r/\zeta)\Big(\sum_{\mathrm{Re}\ \nu_k<s} a_{k,(\zeta)} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} \mathbf{S}_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi) \\ &\quad + \sum_{\mathrm{Re}\ \nu^*_k<s} a^*_{k,(\zeta)} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu^*_k} \mathbf{S}^*_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi)\Big) \\ &= \hat{\mathbf{u}}_0(x,y,\xi,\tau) + \chi(r/\zeta)\Big(\sum_{\mathrm{Re}\ \nu_k<s} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} \zeta^{-\ell}\hat{c}_{k,(q)}\mathbf{S}_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi) \\ &\quad + \sum_{\mathrm{Re}\ \nu^*_k<s} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu^*_k} \zeta^{-\ell}\hat{c}^*_{k,(\zeta)}\mathbf{S}^*_{k,\ell}(\zeta^{-1}r,\phi)\Big)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

按照记号 附录 B 中的记号，应用傅里叶逆变换可得 $\mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\ \tau)\mapsto(z,\ t)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x,y,z,t) &= \mathbf{u}_0(x,y,z,t) + \sum_{\mathrm{Re}\ \nu_k<s} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} (Xc_{k,\ell})(\mathbf{y},z,t)\mathbf{S}_{k,\ell}(r,\phi) \\ &\quad + \sum_{\mathrm{Re}\ \nu^*_k<s} \sum_{0\le\ell<s-\mathrm{Re}\ \nu_k} (Xc^*_{k,\ell})(\mathbf{y},z,t)\mathbf{S}^*_{k,\ell}(r,\phi). \end{aligned} \tag{45}$$

这里，$\hat{}c_{k,\ \ell} = \zeta^{-\ell}\hat{}c_{k,\ (\zeta)}$、$\hat{}c^*_{k,\ \ell} = \zeta^{-\ell}\hat{}c^*_{k,\ (\zeta)}$，其中 $\zeta^2 = (\mu\xi^2 - \varrho\tau^2)^{-1}$ 与前文相同。与附录 B 中一样，平滑算子 X 定义为

$$Xc(\mathbf{y},z,t) = \mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\tau)\to(z,t)}\chi(\sqrt{|\xi|^2+|\tau|^2}\mathbf{y})\hat{c}(\xi,\tau)$$

对于 $\hat{}c = \hat{}c_{k,\ \ell}$，$\hat{}c^*_{k,\ \ell}$。$\mathbf{u}_0$ 以及边缘函数 $c_{k,\ p}$，$c^*_{k,\ p}$ 的正则性与定理 3.3 中标量波动方程的情形相对应，而 [23] 的结果则推广到了弹性动力学。

总之，我们得到以下定理，其表述与附录 B 中的定理 B.10 相对应。

定理 *3.5.* 设 $\gamma > 0$, $q \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (\beta_{r+1}, \beta_r)$ 满足 $0 < \beta_r - \beta < 1$，$(f, g) \in \mathcal{RV}_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)$，并假设对所有 ν_k, ν^*_k 且 $\mathrm{Re}\ \nu_k, \mathrm{Re}\ \nu^*_k \in [1-\beta_r, 1-\beta_1]$，正交条件 *(128)* 均成立。那么，初边值问题 *(4) - (6)* 的解可表示为由奇异函数 $S_{k,\ell}$、$S^*_{k,\ell}$ 构成的展开 *(45)*，它们分别由 *(31)* 和 *(24)* 构造。此外，在 *(45)* 中，$s < \min\{\mathrm{Re}\ \nu_k, \mathrm{Re}\ \nu^*_k\} + \ell + 1 + \beta$ 对所有 k 以及 $u_0 \in DV_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)$ 均成立。

将沿边的坐标 z 视为参数，我们重新得到了并进一步细化了第 3.1 节中关于二维多边形区域的结果。更准确地说，对于弹性动力学问题 (20)-(21) 的解，我们得到：

推论 3.6. 设 $\gamma > 0$, $q \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (\beta_{r+1}, \beta_r)$ 满足 $0 < \beta_r - \beta < 1$, $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{RV}_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)$，并假设对于所有满足实部 $\nu^*_k \in [1-\beta_r, 1-\beta_1]$的 ν^*_k，正交条件 (128) 均成立。则在内角为 ω_j 的顶点 t_j 的邻域内，(4) - (6) 的解可展开为

$$\mathbf{u}(x,y,t) = \mathbf{u}_0(r,\phi,t) + \sum_{k,\ell}(Xc^*_{k,\ell})(t)\mathbf{S}^*_{k,\ell}(r,\phi), \tag{46}$$

其中 $s <$ 最小值{实部 ν_k，实部 ν^*_k} $+ \ell + 1 + \beta$ 对所有 k 以及 $\mathbf{u}_0 \in DV_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\gamma)$ 均成立。

推论 3.6 在 [43] 中恢复了定理 3.5；请注意，式 (45) 和式 (46) 中 k 的求和均隐含地包含了特征值的重数。

最后，我们回顾嵌入定理 $DV_{\beta,\,q}(\mathcal{Q},\ \gamma) \subset H^r_\sigma(\mathbb{R}^+,\ H^s(\mathbb{D}))^n$ [42]。推论 3.6 表明，给定参数 β, γ，解可以写成余项 $\mathbf{u}_0 \in DV_{\beta,\,q}(\mathcal{Q},\ \gamma) \subset H^r_\sigma(\mathbb{R}^+,\ H^s(\mathbb{D}))^n$ 与有限个奇异函数 $\mathbf{S}^*_{k,\,\ell}$ 之和；奇异函数的数量取决于阶数 s。

3.3 圆锥中解的性质

我们在球坐标 $(r,\ \theta,\ \phi)$ 下考虑弹性动力学系统，坐标原点位于顶点处。其形式为

$$(\lambda+\mu)\partial_r(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu[\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(u_\theta\sin\theta) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\partial_\phi u_\phi] + f_r = \varrho\partial_t^2 u_r \tag{47}$$

$$\frac{(\lambda+\mu)}{r}\partial_\theta(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu[\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi u_\phi] + f_\theta = \varrho\partial_t^2 u_\theta \tag{48}$$

$$\frac{(\lambda+\mu)}{r\sin\theta}\partial_\phi(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu[\nabla^2 u_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\partial_\phi u_r + \frac{2cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi u_\theta - \frac{u_\phi}{r^2\sin^2\theta}] + f_\phi = \varrho\partial_t^2 u_\phi \tag{49}$$

with

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2u_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)u_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi u_\phi \tag{50}$$

$$\nabla^2 u_i = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r u_i) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)\partial_\theta u_i) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi^2 u_i, \quad \text{with } i = r,\phi,\theta. \tag{51}$$

注意，我们在区域中包含一个力项 $\mathbf{f} = (f_r,\ f_\phi,\ f_\theta)^\top$。

我们用$\mathbf{x}$ 表示 具有球坐标 $(r,\ \phi,\ \theta)$ 的点。局部标准正交基向量为 e

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))^\top,\\
\mathbf{e}_\theta &= (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta))^\top,\\
\mathbf{e}_\phi &= (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)^\top,
\end{aligned}$$

并且我们将任意向量 $\mathbf{u}$ 在该基下的分量写作 $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_\phi\mathbf{e}_\phi$。任何在 ϕ 下旋转对称的向量场都具有如下形式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = u_r(r,\theta,t)\mathbf{e}_r + u_\theta(r,\theta,t)\mathbf{e}_\theta =: (\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta)^\top\tilde{\mathbf{u}}(r,\theta,t)\ .$$

首先，对于固定的 t，我们考虑系统（47）–（49）。Beagles 和 S¨andig [6] 使用帕普科维奇–诺伊伯势，通过以下形式的假设构造解

$$\mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{B} - \nabla(\mathbf{x}\cdot\mathbf{B} + B_4) \tag{52}$$

其中泊松比为 ν，且 $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top$ 和 B_4 的分量均为调和函数。用球坐标表示时，（52）变为

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)^\top &= (3-4\nu)(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_r, \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\theta, \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\phi)^\top\\
&- (r\mathbf{e}_r\cdot\partial_r\mathbf{B} + \partial_r B_4, \mathbf{e}_r\cdot\partial_\theta\mathbf{B} + \frac{1}{r}\partial_\theta B_4, \frac{1}{\sin(\theta)}\mathbf{e}_r\cdot\partial_\phi\mathbf{B} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi B_4)^\top.
\end{aligned} \tag{53}$$

令 $B_1 = B_2 = 0$,

$$B_3 = c_1 r^\alpha P_\alpha(\cos(\theta)),\ B_4 = c_2 r^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(\cos(\theta)),$$

其中 $P_\alpha(\cos(\theta))$ 为第一类勒让德函数， $\alpha > 0$ 将在下文给出。将此假设代入 (53)，即可得到固定时间 t 下满足 (47)–(49) 的旋转对称解的一般形式，

$$\mathbf{u}(r,\theta) = c_1 r^\alpha \begin{pmatrix} A_{11}(\alpha,\theta) \\ A_{21}(\alpha,\theta) \end{pmatrix} + c_2 r^\alpha \begin{pmatrix} B_{11}(\alpha,\theta) \\ B_{21}(\alpha,\theta) \end{pmatrix} \tag{54}$$

其中 $(A_{11}(\alpha,\theta)\ A_{21}(\alpha,\theta)) = ((3-4\nu-\alpha)P_\alpha\cos(\theta)\ P'_\alpha\cos(\theta)\sin(\theta) - (3-4\nu)P_\alpha\sin(\theta))$，以及 $(B_{11}(\alpha,\theta)\ B_{21}(\alpha,\theta)) = (-(\alpha+1)P_{\alpha+1}, \sin(\theta)P'_{\alpha+1})$。

关于 r进行梅林变换，

$$\widetilde{w}(\alpha,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^{-\alpha-1} w(r,\theta,\phi)\, dr$$

具有狄利克雷边界条件的系统（47）-（49）变换为一个依赖于参数的边值问题。指数 α 由方程的根给出

$$\det \begin{pmatrix} A_{11}(\alpha,\omega) & B_{11}(\alpha,\omega) \\ A_{21}(\alpha,\omega) & B_{21}(\alpha,\omega) \end{pmatrix} = 0\ ,$$

其中 ω 是开角。行列式的消失等价于关于 α的以下超越方程：

$$0 = \frac{-(\alpha+1)}{\sin(\omega)} \left(P_\alpha^2 \cos(\omega)(\alpha+4\nu-3) + P_\alpha P_{\alpha+1}(3-4\nu-\cos^2(\omega)(2\alpha+1)) + P_{\alpha+1}^2 \cos(\omega)(\alpha+1) \right)\ . \tag{55}$$

在 (54) 中对 $\mathbf{u}$ 施加齐次狄利克雷条件，确定系数 c_1、 c_2 ，从而得到相应的特征函数。关于 α_ℓ 的数值结果及其对 ω的依赖关系，见 [6]。

现在，我们对系统 (47)–(49) 应用偏傅里叶变换 $\mathcal{F}_{t\to\tau}$ ，得到圆锥 $\mathbb{K}$ 中开角为 ω 的以下参数相关的 Lam´e 方程，

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\hat{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\hat{\mathbf{u}} + \tau^2\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{K}, \tag{56}$$

其满足 Dirichlet边界条件 $\hat{}\mathbf{u}|_{\partial\mathbb{K}} = \hat{}\mathbf{g}$。设 $\hat{}\mathbf{f} \in H^0_\beta(\mathbb{K})^n$、$\hat{}\mathbf{g} \in H^{3/2}_\beta(\partial\mathbb{K})^n$。假设算子束 $\mathcal{A}_D$ （见 (107)）没有特征值，更具体地说，(55) 的根不落在直线上

$$\mathrm{Re}\ \alpha = -\beta + \frac{1}{2} =: h \quad \mathrm{Re}\ \alpha = -\beta' + \frac{1}{2} =: h'. \tag{57}$$

我们应用附录 B 的框架，特别是 B.1 节。我们注意到，对于齐次狄利克雷问题，满足 α 且对应于 (55) 的特征函数 $A_{11}(\alpha,\theta)$、 $A_{21}(\alpha,\theta)$、 $B_{11}(\alpha,\theta)$、 $B_{21}(\alpha,\theta)$，正是齐次狄利克雷边值问题 (110)、(111) 的幂型解 (109) 中的特征函数 $\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k)}$ 。现在，带有 Dirichlet边界条件的方程 (56) 正是附录 B 中的 (102)、(103)。因此，我们可以在 $i\lambda_\ell = \alpha_\ell$ 、Re $\alpha_\ell = -$、Im λ_ℓ 的条件下应用附录 B 中的定理 B.5。现在，若 $h <$ Re $\alpha_\ell < h'$，则由定理 B.5（取非齐次狄利克雷数据 $\mathbf{g}$）可得以下结果：方程 (47)–(49) 的解具有如下展开

$$\hat{\mathbf{u}}(r,\theta,\phi,\tau) = \chi(pr) \sum_\ell \sum_{k,j} \hat{c}_\ell^{(k,j)}(\phi,\tau)\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}(r,\theta) + \hat{\mathbf{u}}_0(r,\theta,\phi,\tau)\ , \tag{58}$$

其中 $\hat{}\mathbf{u}_0 \in DH_{\beta'}(\mathbb{K},\tau)$、$\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}$ 如式（54）所示，其中 $\alpha = \alpha_\ell$ 是方程（55）的一个根，且 $-h <$ Re $\alpha_\ell < -h'$。求和遍及根 α_ℓ的指标 k 。展开（58）中的系数 $\hat{}c_\ell^{(k,j)}$ 可根据 Maz'ya 和 Plamenevskiĭ 的结果计算，参见 [6]。

从 τ 到 t 进行傅里叶逆变换，Matyukevich 和 Plamenevskiĭ [40] 在 B节中的结果通过定理 B.10 得到以下结论，其中使用了 (125)、(126) 中的函数空间：

定理 3.7。 设 $\gamma > 0$ 和 $\beta \in (\beta_{r+1}, \beta_r)$ 满足 $0 < \beta_r - \beta < 1$, $(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) \in \mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q}, \gamma)$，并假设对所有满足 $\mathrm{Re}\ \alpha_\ell \in [\frac{1}{2} - \beta_1, \frac{1}{2} - \beta_r]$ 的 α_ℓ，正交条件 (128) 成立。那么，满足狄利克雷条件 $\mathbf{u}|_{\partial\mathcal{Q}} = \mathbf{g}$ 的 (47)- (49) 的解可展开为

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\ell} \sum_{k,j} \tilde{c}_\ell^{k,j}(\phi, t) \mathbf{u}_\ell^{k,j}(r, \theta) + \mathbf{u}_0(r, \theta, \phi, t), \tag{59}$$

其中，$\mathbf{u}_0 \in DH_\beta(\mathcal{Q}, \gamma)$，其中 $\mathbf{u}_\ell^{k\,j}$,来自(54)，变系数 $\tilde{c}^{k}{}_{,\ell}{}^{j}$ 如定理 *B.10* 中所述。 ℓ 中的求和遍历所有满足$\mathrm{Re}\ \alpha_\ell = \frac{1}{2} - \beta_r$的 α_ℓ，而关于 k, j 的求和则遍历与 α_ℓ对应的、具有(54) 形式的所有广义特征函数 $\mathbf{u}_\ell^{k\,j}$,。

与楔形域的推论 3.6 类似，圆锥的定理 3.7 表明，解可以写成余项 $\mathbf{u}_0 \in DV_\beta(\mathcal{Q}, \gamma) \subset H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^s(\mathbb{D}))^n$ 与有限个奇异函数 $\mathbf{u}_\ell^{k\,j}$, 之和，奇异函数的个数取决于阶数s。

4 边界元法离散

为以离散形式求解能量弱形式 (15) 和 (17)，我们考虑对时间区间 $[0, T]$ 进行均匀分解，时间步长为 $\Delta t = T/N_{\Delta t}$, $N_{\Delta t} \in \mathbb{N}^+$，由 $N_{\Delta t}+1$ 次 $t_n = n\Delta t$, $n = 0, \ldots, N_{\Delta t}$ 生成。我们定义相应的空间 $V_{\Delta t, s}$，它由时间次数为 s 的分片多项式函数构成（连续，且在 $t = 0$ 处为零，如果 $s \geq 1$）。

对于二维空间离散，我们引入由一组直线段构成的边界网格 $\mathcal{T} = \{e_1, ..., e_M\}$，使得 $h_i := \underline{length}(e_i) \leqslant h$；若 $i \neq j$，且 $\cup_{i=1}^M e_i = \Gamma$ 为多边形，则 $e_i \cap e_j = \emptyset$；否则，采用对 Γ的适当精细近似。在三维情形下，我们假设 Γ 由$\mathcal{T} = \{e_1, \cdots, e_M\}$三角剖分，其中 $h_i := \underline{diam}(e_i) \leqslant h$，若 $i \neq j$，且若 $e_i \cap e_j \neq \emptyset$，则两个三角形的交集为一条边或一个顶点。

在 $\mathcal{T}$ 上，我们定义 $\mathcal{P}_p$ 为次数为 p的多项式空间，并考虑分片多项式函数空间

$$X_{h,p}^{-1} = \left\{ w \in L^2(\Gamma) \,:\, w|_{e_i} \in \mathcal{P}_p,\ e_i \in \mathcal{T} \right\} \subset \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

and

$$X_{h,p}^{0} = \left\{ w \in C^0(\Gamma) \,:\, w|_{e_i} \in \mathcal{P}_p,\ e_i \in \mathcal{T} \right\} \subset \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma).$$

对应于这些离散空间的(15)、(17)式的 Galerkin近似为，且$B_{D/N,\ \Sigma}$如(14)、(16)式所示：

求 $\mathbf{\Phi}_{h,\ \Delta t} \in \left(V_{\Delta t, s_p} \otimes X_{h,p}^{-1} \right)^n$，使得

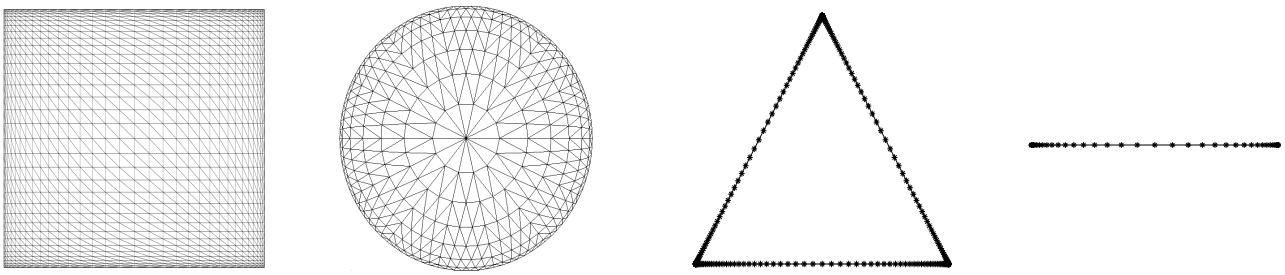
$$B_{D,\Sigma}(\mathbf{\Phi}_{h,\Delta t}, \tilde{\mathbf{\Phi}}_{h,\Delta t}) = \langle \partial_t \big(\mathcal{K}' + 1/2 \big)\, \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{\Phi}}_{h,\Delta t} \rangle_{L^2(\Sigma)}, \tag{60}$$

对所有 $\tilde{\mathbf{\Phi}}_{h,\ \Delta t} \in \left(V_{\Delta t, s_p} \otimes X_{h,p}^{-1} \right)^n$。
求 $\mathbf{\Psi}_{h,\ \Delta t} \in \left(V_{\Delta t, s_q} \otimes X_{h,q}^{0} \right)^n$，使得

$$B_{N,\Sigma}(\mathbf{\Psi}_{h,\Delta t}, \tilde{\mathbf{\Psi}}_{h,\Delta t}) = \langle \partial_t (\mathcal{K} - 1/2)\, \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{\Psi}}_{h,\Delta t} \rangle_{L^2(\Sigma)}, \tag{61}$$

对所有 $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{h,\ \Delta t} \in \left(V_{\Delta t, s_q} \otimes X_{h,q}^{0} \right)^n$。

注记 4.1。 分别根据双线性型 (15)（命题 A.3）和 (17) 的连续性与强制性， [7], 离散方程 (60) 和 (61) 均有唯一解。数值误差的稳定性和先验误差估计可按 [5] 中的方法得到。本文旨在说明，采用分级网格和高阶多项式可以提高解的逼近率。这是第 5 节的主题。



(a) (b)

图 1：正方形和圆形屏的 β 分级网格，其中 $\beta = 2$ (a)；以及一维障碍物的 β 分级网格，其中 $\beta = 3$ (b)。

本文考虑在准均匀网格和 β 分级网格上的近似，其中常数为 $\beta \geq 0$。要在区间 $[-1, 1]$ 上定义 β 分级网格，由对称性，只需指定$[-1, 0]$中的节点。在那里，我们令

$$x_k = -1 + \left(\frac{k}{N_l}\right)^{\tilde{\beta}} \tag{62}$$

当 $k = 1, \ldots, N_l$时。我们用 h 表示最长区间的长度，用 $h_1 = x_1 - x_0$ 表示最短区间的长度。对于正方形 $[-1, 1]^2$， $\tilde{\beta}$ 分级网格的节点是这类点的元组， (x_k, x_l) $k, l = 1, \ldots, N_l$。当 $\beta = 1$ 时，我们得到均匀网格。

对于一般的多面体几何，可以根据这些示例在局部构造分级网格。特别地，对于半径为 1 的圆形屏，当 $\beta = 1$ 时，我们采用均匀网格，其节点位于半径为 $r_k = 1 - \frac{k}{N_l}$ 的同心圆上，其中 $k = 0, \ldots, N_l - 1$。对于 $\tilde{\beta}$级加密网格，半径调整为 $r_k = 1 - (\frac{k}{N_l})^{\beta}$，其中 $k = 0, \ldots, N_l - 1$。尽管三角形在边界附近逐渐变得扁平，但其总数仍与 N_l^2成正比。

分级网格的全局网格尺寸 h 定义为最大单元的直径。最小单元的直径的阶为h^{β}。

图 1(a) 展示了正方形和圆形屏上的二级加密网格示例。

我们还考虑 Γ上的几何分级网格。为了在参考区间 $[-1, 1]$上定义这些网格，并采用细化参数 $\sigma \in (0, 1/2]$，在 $[-1, 0]$ 中令 $x_0 = -1$，

$$x_k = \sigma^{N_l+1-k} - 1 \tag{63}$$

对于 $k = 1, \ldots, N_l$，并通过对称性指定 $[0, 1]$ 中的相应节点。对于 hp 版本，多项式次数 p 从 $\partial\Gamma$开始线性增加：给定 $\mu > 0$时， $[x_k, x_{k+1}]$ 中的 $p = \mu k$。

5 Ap狄利克雷迹和诺伊曼迹的逼近结果

本节分为三个小节。在第 5.1 小节中，我们考虑外部 Lipschitz域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega'}$中的时变弹性动力学问题，其中 Ω' 具有分片光滑边界，边界由弯曲且互不相交的边构成，或称锥点。利用第 3 节的结果可知，该解具有显式的奇异展开，其空间变量中的奇异行为与时不变 Lam´e 方程中的相同。随后在第 5.2 小节中利用这一行为分析分级网格上分片多项式逼近的误差，并在第 5.3 小节中分析拟一致网格上的 hp 逼近。

5.1 正则性结果陈述

我们首先考虑圆形楔体（图 2），由此得到命题 5.1 中的正则性结果。随后讨论圆锥的情形（图 3），由此得到命题 5.2。

对于开角为 ω、边为 $\{(x_1,\ x_2,\ 0) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ 的圆形楔体外部，在边的邻域内，我们采用第3.2小节中的局部柱坐标 $(r,\ \phi,\ z)$：到边的距离记为 $r = |1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}|$，$\phi$为极角，而边变量 z 是沿赤道、位于 $x_1 - x_2$ 平面内的方位角，$\tan(z) = \frac{x_2}{x_1}$。当 $\omega \to 2\pi^-$ 时，楔体退化为圆形屏幕 $\{(x_1,\ x_2,\ 0) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$。图 2 展示了楔体的几何形状及其分级网格离散化。与 [49], 中类似，定理 3.5 中关于弹性动力学方程（3）解的展开，对于曲边同样成立，且具有相同的首项奇异项 r^{ν^*}。

对于狄利克雷问题 ($B = D$)，以及诺伊曼问题 ($B = N$)，假设算子束 $\mathcal{A}_B$ （来自 (107) 及其特殊情形 (108)）的谱 $\sigma(\mathcal{A}_B)$ 在边上为常数，并且存在 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ \lambda = \beta - 1\} \cap \sigma(\mathcal{A}_B) = \emptyset$。

利用第 3 节和附录 B，我们可以证明以下关于解的边界迹的正则性结果：

命题 5.1。 *a)* 令 $\gamma > 0$、 $q \in \mathbb{N}_0$ 和 ν^* 为主导奇异指数，它是 $\frac{\pi}{\omega}$ 与(25)的最小根二者中的较小值。令 $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{R}V_{\beta,q}(\mathcal{Q}, \gamma)$，并假设正交条件(128) 成立。则具有右端项$\mathbf{f}$、狄利克雷数据$\mathbf{g}$ 和初始条件(5) 的狄利克雷问题(3)、(6) 的解$\boldsymbol{u}$ 的诺伊曼迹满足

$$p_i(\boldsymbol{u})(r, \phi, z, t)|_\Gamma = b_i(\phi, z, t) r^{\nu^* - 1} + \phi_{i,0}(r, \phi, z, t)\ . \tag{64}$$

这里， b_i 在数据光滑时是光滑的，而$\phi_{i,0}$ 是较弱奇异余项。
b) 令 $\gamma > 0$, $q \in \mathbb{N}_0$ 和 ν^* 为主导奇异指数，它是$\frac{\pi}{\omega}$ 与(26)的最小根中的较小者。假设 $i\lambda_1 = \nu^*$ 是条带 $\beta - 1 \le \mathrm{Im}\ \ \lambda_1 \le 0$中的唯一特征值。令$(\mathbf{f}, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}V_{\beta,q-1}(\mathcal{Q}, \gamma)$，并假设正交条件(128) 成立。那么，右端项为$\mathbf{f}$、诺伊曼数据为$\mathbf{h}$ 且初始条件为(5)的诺伊曼问题(4)、(7) 的解$\boldsymbol{u}$ 的狄利克雷迹满足

$$u_i(r, \phi, z, t)|_\Gamma = a_i(\phi, z, t) r^{\nu^*} + u_{i,0}(r, \phi, z, t)\ . \tag{65}$$

这里， a_i 在数据光滑时是光滑的，而$u_{i,0}$ 是关于变量 r的较弱奇异余项。

证明。 a) 首先注意到，对于满足 $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ 的狄利克雷问题，利用单位分解，我们局部得到命题 B.7 中的正则性估计（见 [40] 中的命题 9.3、(160)）。非齐次问题的解所对应的估计是命题 9.3, [40] 中的估计 (159)。对于曲边，在边的邻域内引入局部坐标图，从而在 j 个坐标图中得到楔形域 $\mathbb{D} = \mathbb{D}_j$ 上的变系数问题。首先使用一个与 z 无关的函数 $(y, z) \mapsto \zeta^{(j)}(y, z) \in C^\infty(\mathbb{D}_j)$，并且当 $\delta > 0$ 充分小时， $\zeta^{(j)} = 1$ 对 $|y| < \delta$ 成立， $\zeta^{(j)} = 0$ 对 $|y| > 2\delta$ 成立。令 $\zeta_\tau^{(j)}(y, z) = \zeta^{(j)}(|\tau| y, z)$。然后将这些函数 $\zeta_\tau^{(j)}$

用单位分解拼接起来。在 (122) 的证明中，将 χ_τ 替换为映射 $(y,z)\mapsto \eta(z)\zeta_\tau^{(j)}(y,z)$，该映射支撑在 $z=0$ 的一个小邻域内，并在 $z=0$ 附近满足 $\eta=1$。与命题 B.7 相比，截断函数 z 的微分会产生一些额外项。这种微分不会提高 $|\tau|$ 中的增长阶。因此，在命题 B.7 中取足够大的常数 $\gamma_0>0$ 和 $\gamma>\gamma_0$，即可从估计中消去这些额外项。由此也可得到适用于曲边的定理 B.10 中的展开 (129)，而表达式 (64) 则由取迹得到。

更光滑的数据 f、g 会使展开式 (129 中的余项更加光滑).

b) 诺伊曼问题的证明类似。相关的正则性估计可见 [40]中的命题 9.4。

□

现在考虑圆锥外部 $\mathbb{K}$ 的弹性动力学方程，其顶点位于 $r=0$，如图 3 所示。

对于狄利克雷问题（$B=D$）和诺伊曼问题（$B=N$），假设算子束 $\mathcal{A}_B$ （见 (107) 及其特例 (108)）的谱 $\sigma(\mathcal{A}_B)$ 沿边保持不变，并且存在 $\beta\in\mathbb{R}$ 使得 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}\lambda=\beta-\frac12\}\cap\sigma(\mathcal{A}_B)=\emptyset$。

利用第 3.3 小节和附录 B，我们可以得到圆锥顶点附近球坐标下解的边界迹的以下结果：

命题 5.2。 *a)* 令 $\gamma>0$, $q\in\mathbb{N}_0$。假设 $i\lambda_1=\alpha$ 是算子束 $\mathcal{A}_D$ 在条带 $\beta-\frac12\le\operatorname{Im}\ \lambda_1\le 0$内的唯一特征值。令 $(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathcal{RV}_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\gamma)$，并假设正交条件(128)成立。那么，右端项为$\mathbf{f}$、狄利克雷数据为$\mathbf{g}$ 且初始条件为(5) 的狄利克雷问题(3)、(6) 的解$\boldsymbol{u}$ 的诺伊曼迹满足

$$p_i(\boldsymbol{u})(r,\phi,\theta,t)|_\Gamma=\chi(r)r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)+\phi_{i,0}(r,\phi,\theta,t)\ . \tag{66}$$

其中，b_i 在数据光滑时是光滑的，而 $\phi_{i,\ 0}$ 是一个较弱奇异余项。

b) 设 $\gamma>0$, $q\in\mathbb{N}_0$。假设 $i\lambda_1=\alpha$ 是算子束 $\mathcal{A}_N$ 在条带$\beta-\frac12\le\operatorname{Im}\ \lambda_1\le 0$中的唯一特征值。令 $(\mathbf{f},\mathbf{h})\in\mathcal{RV}_{\beta,q-1}(\mathcal{Q},\gamma)$，并假设正交条件 (128)成立。那么，右端项为$\mathbf{f}$、诺伊曼数据为$\mathbf{h}$ 且初始条件为(5) 的诺伊曼问题 (4), (7) 的解$\mathbf{u}$ 的狄利克雷迹满足

$$u_i(r,\phi,\theta,t)|_\Gamma=\chi(r)r^{\alpha}a_i(\phi,\theta,t)+u_{i,0}(r,\phi,\theta,t)\ . \tag{67}$$

其中，a_i 在数据光滑时是光滑的，而 $u_{i,\ 0}$ 是一个较弱奇异余项。

证明。 a) 首先注意到，对于圆锥 $\mathbb{K}$，局部成立狄利克雷问题的估计 (106)，另见 [40] 中的命题 9.1、(150)。对所得展开 (59) 取迹即可得到 (67)。与楔形域的情形（命题 5.1 和定理 B.10）一样，利用更光滑数据$\mathbf{f}$,$\mathbf{g}$对应的 (106) 的类比结果，对弹性动力学方程的狄利克雷边值问题的解进行分解 (129)，并取其边界牵引力 $p_i(\mathbf{u})$，即可推导出展开 (66)。

b) 对于诺伊曼问题， [40] 中的命题 9.2 给出了一个与式 (106) 类似的估计，适用于充分大的 $\gamma>\gamma_0>0$。同样，可以推导出类似于定理 B.10 中的解的展开式，并取其迹。

□

对于楔形域和圆锥，在分别于式 (65)、(64) 和式 (67)、(66) 中进一步展开 $u_{i,0}$ 和 $\phi_{i,0}$ 后，我们可以假设正则部分 $u_{i,0}$ 属于 H^3 空间，而 $\phi_{i,0}$ 属于 H^1 空间。于是，积分方程 (11) 和 (13) 的解 $\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 也具有相应的展开式。

为简化记号，对于 $\mathbb{R}^3$ 中同时具有楔形域和圆锥奇异性的区域，我们定义

$$\tilde\alpha=\min\left\{\operatorname{Re}\ \nu^*,\operatorname{Re}\ \alpha+\frac12\right\}, \tag{68}$$

这里回顾一下， ν^* 表示边处的主导奇异指数（$\frac{\pi}{\omega}$ 与方程 (26) 的最小根两者中的较小值），而 α 表示圆锥处的主导奇异指数（算子束 $\mathcal{A}_{D/N}$的主导特征值）。对于 $\mathbb{R}^2$中的多边形区域，我们令 $\tilde{\alpha} = \operatorname{Re}\ \nu^*$。注意，对于 $\mathbb{R}^3$中的屏幕以及 $\mathbb{R}^2$中的裂纹，分别有 $\nu^* = \frac{1}{2}$。

5.2 分级网格上的逼近

我们利用本节开头给出的正则性结果，推导分级网格上的逼近性质：

定理 *5.3.* 设 $r \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$。*a)* 设 $\boldsymbol{u}$ 是满足齐次弹性动力学方程 *(3)* 且具有非齐次狄利克雷边界条件 $\boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{g}$ 的强解，其中 $\boldsymbol{g}$ 光滑。此外，设 $\boldsymbol{\Phi}_h^\beta, \Delta t \in \left(V_{\Delta t,q} \otimes X_{h,0}^{-1}\right)^n$ 是 $\boldsymbol{p(u)}$ 在 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 范数下，在具有 $\Delta t \lesssim h_1$ 的 $\tilde{\beta}$ 分级空间网格上的最佳逼近。那么 $\|\boldsymbol{p(u)}|_\Gamma - \boldsymbol{\Phi}_h^{\tilde{\beta}}, \Delta t\|_{r, -\frac{1}{2}, \Gamma, *} \leq C_{\tilde{\beta}, \varepsilon} h^{\min\{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}-\varepsilon, \frac{3}{2}\}}$。

b) 设 $\boldsymbol{u}$ 是具有非齐次诺伊曼边界条件 $\boldsymbol{p(u)}|_\Gamma = \boldsymbol{h}$ 的齐次弹性动力学方程 *(3)* 的强解，其中 $\boldsymbol{h}$ 光滑。此外，设 $\boldsymbol{\Psi}_h^{\tilde{\beta}}, \Delta t \in \left(V_{\Delta t,q} \otimes X_{h,1}^0\right)^n$ 是在 $\tilde{\beta}$-分级空间网格上，以 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma))^n$ 范数对 $\boldsymbol{u}|_\Gamma$ 的最佳逼近，且该网格满足 $\Delta t \lesssim h_1$。那么 $\|\boldsymbol{u}|_\Gamma - \boldsymbol{\Psi}_h^{\tilde{\beta}}, \Delta t\|_{r, \frac{1}{2}-s, \Gamma, *} \leq C_{\tilde{\beta}, \varepsilon} h^{\min\{\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}+s)-\varepsilon, \frac{3}{2}+s\}}$，其中 $s \in [0, \frac{1}{2}]$。

回顾一下，$\|\cdot\|_{r, \pm\frac{1}{2}, \Gamma, *}$表示 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 上的范数，- 与附录 A 中相同； h 表示分级网格中最大单元的直径。定理 5.3 对表面上的单层积分方程和超奇异积分方程的解也蕴含相应的结果：

推论 5.4。令 $r \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$。*a)* 令 $\boldsymbol{\Phi}$ 为单层积分方程(11)的解，且 $\boldsymbol{\Phi}_h^{\tilde{\beta}, \Delta t} \in \left(V_{\Delta t,q} \otimes X_{h,0}^{-1}\right)^n$ 为 $\boldsymbol{\Phi}$ 在分级空间网格上关于 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 范数的最佳逼近，其中 $\tilde{\beta}$-分级且 $\Delta t \lesssim h_1$。则 $\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_h^{\tilde{\beta}, \Delta t}\|_{r, -\frac{1}{2}, \Gamma, *} \leq C_{\tilde{\beta}, \varepsilon} h^{\min\{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}-\varepsilon, \frac{3}{2}\}}$。

b) 令 $\boldsymbol{\Psi}$ 为超奇异积分方程 (17) 的解，并且 $\boldsymbol{\Psi}_h^{\tilde{\beta}, \Delta t} \in \left(V_{\Delta t,q} \otimes X_{h,1}^0\right)^n$ 在范数 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma))^n$ 下，在具有 $\Delta t \lesssim h_1$ 的 $\tilde{\beta}$ 级分空间网格上的最佳逼近。于是 $\|\boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi}_h^{\tilde{\beta}, \Delta t}\|_{r, \frac{1}{2}-s, \Gamma, *} \leq C_{\tilde{\beta}, \varepsilon} h^{\min\{\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}+s)-\varepsilon, \frac{3}{2}+s\}}$，其中 $s \in [0, \frac{1}{2}]$。

事实上，积分方程的解分别为 $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{u}|_\Gamma$ （其中解 $\mathbf{u}$ 满足牵引条件 $\mathbf{p(u)}|_\Gamma = \mathbf{g}$），以及 $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{p(u)}|_\Gamma$（其中解 $\mathbf{u}$ 满足狄利克雷条件 $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{f}$）。

该证明扩展了 [21], where $\nu^* = \frac{1}{2}$ 中关于波动方程的论证。它采用了第 5 节中的分解。在逼近过程中，圆锥局部通过仿射变换映射到正方形上，如图 4 所示。此外， $1d$ are 中的以下逼近性质至关重要。可见于 [46,Satz 3.7, Satz 3.10]。

引理 5.5。设 $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re}\ a > 0$ 且 $s \in [-1, -\operatorname{Re}\ a + \frac{1}{2})$。那么，对于 $\tilde{\beta}$-分级网格上 r^{-a} 的分片常数插值函数 $\Pi_r^0 r^{-a}$，有

$$\|r^{-a} - \Pi_r^0 r^{-a}\|_{\widetilde{H}^s([0,1])} \lesssim h^{\min\{\tilde{\beta}(-\operatorname{Re}\ a-s+\frac{1}{2})-\varepsilon, 1-s\}}.$$

引理 5.6。设 $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{C}$ 满足 实部 $a > 0$ 且 $s \in [0, \text{实部}\ a + \frac{1}{2})$。则在 $\tilde{\beta}$-分级网格上， r^a 的线性插值函数 $\Pi_r^1 r^a$ 满足

$$\|r^a - \Pi_r^1 r^a\|_{\widetilde{H}^s([0,1])} \lesssim h^{\min\{\tilde{\beta}(\operatorname{Re}\ a-s+\frac{1}{2})-\varepsilon, 2-s\}}.$$

定理 *5.3* 的证明。 (a)，楔形奇异性：在矩形网格 $\Gamma_h = \bigcup \Gamma_j$ 上逼近 $\mathbf{p(u)}$，利用三角不等式以及时间变量上的逼近性质，可得：

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \Pi_x\Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \\
&\leq \sum_k \|\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma,*} + \sum_{k,j} \|\Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \Pi_x\Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \\
&\leq \sum_k (\Delta t)^a \|\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r+a,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma} + \sum_{k,j} \|\Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u}) - \Pi_x\Pi_t\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \,.
\end{aligned}$$

现在，我们对$\mathbf{p(u)}$使用分解 (64)，并分别考虑奇异部分和正则部分。对于第二个求和项，我们使用每个分量的奇异展开，

$$\begin{aligned}
\|\Pi_t p_i(\mathbf{u}) - \Pi_x\Pi_t p_i(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \leq\ & \|\Pi_t b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t\Pi_x b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \\
&+ \|\Pi_t\phi_{i,0} - \Pi_x\Pi_t\phi_{i,0}\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \,.
\end{aligned}$$

对于第一项，由引理 C.2 可得

$$\begin{aligned}
&\|\Pi_t b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t\Pi_x b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times\Gamma_j,*} \\
&\leq \|\Pi_t b_i(\phi,z,t) - \Pi_t\Pi_z b_i(\phi,z,t)\|_{r,\varepsilon-\frac{1}{2}} \|r^{\nu^*-1}\|_{-\varepsilon} + \|\Pi_t\Pi_z b_i(\phi,z,t)\|_{r,0} \|r^{\nu^*-1} - \Pi_r r^{\nu^*-1}\|_{-\frac{1}{2}} \,.
\end{aligned}$$

由引理 5.5 可得 $\|r^{\nu^*-1} - \Pi_r r^{\nu^*-1}\|_{-\frac{1}{2}} \lesssim h^{\beta\mathrm{Re}\,\nu^*-\varepsilon}$和 $\|\Pi_t b_i(\phi,\ z,\ t) - \Pi_t\Pi_z b_i(\phi,\ z,\ t)\|_{r,\ \varepsilon-\frac{1}{2}} \lesssim h^{3/2-\varepsilon}\|\Pi_t b_i\|_{r,\ H^1}$，根据 z 中的逼近性质。

最后，结合引理 C.4 和引理 C.1，在边长分别为 h_1、 h_2 、沿 x_1 和 x_2 方向的各向异性矩形 R 中：

$$\begin{aligned}
&\|\Pi_t\phi_{0,i} - \Pi_x\Pi_t\phi_{0,i}\|_{r,-\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*} \\
&\lesssim (\Delta t)^{\rho-r} \|\partial_t^\rho \phi_{0,i}\|_{L^2([t_k,t_{k+1}]\times R)} + \max\{h_1,h_2,\Delta t\}^{\frac{1}{2}} \left(h_1 \|\phi_{0,i,x_1}\|_{L^2([t_k,t_{k+1}]\times R)} + h_2 \|\phi_{0,i,x_2}\|_{L^2([t_k,t_{k+1}]\times R)} \right) \,.
\end{aligned}$$

注意，光滑项的逼近误差具有更高阶。对屏幕网格中的所有矩形Γ_j以及所有分量求和，可得 $\|\mathbf{p(u)} - \Pi_x\Pi_t\mathbf{p(u)}\|_{r,\ -\frac{1}{2},\ \Gamma,\ *} \lesssim h^{\beta\mathrm{Re}\,\nu^*-\varepsilon}$若 $\Delta t \leq \min\{h_1,h_2\}$。

(a)，锥形奇异性：为讨论圆锥几何中 $\mathbf{p(u)}$ 的逼近，简便起见，令 Γ为正方形 $\tilde{R} = [0,1]^2$。图 4 展示了如何通过仿射映射将圆锥上的网格化归约为这种情形，少数三角形单元除外。

对于矩形单元，奇异函数的逼近证明与[21], 中的证明基本相同，为方便读者，现将其列出如下。

对于图 4(b) 中采用线性基函数的附加三角形单元，关键在于它们的角度与 h 无关，因此形成形状正则网格。特别地，最小外接圆半径与最大内切圆半径之比 ρ 保持有界，且预期的插值不等式成立：对于由三角形 T 的顶点确定的函数 f 的线性插值函数 p，若该三角形的外接圆半径为 $\leq h$，则有

$$\|f - p\|_{H^s(T)} \leq C_0 h^{2-s} \|f\|_{H^2(T)} \,.$$

这里， $s \in [0,1]$，而常数 C_0 仅取决于 ρ 和 s。以这种方式对正则部分$\boldsymbol{\phi}_0$ 和奇异函数 $r^{\lambda-1}b_i$ 所作的相应证明，可直接应用于由此产生的三角形。

由于展开（66）中的正则部分 $\boldsymbol{\phi}_0$ 的逼近已在圆形楔体的证明中予以考虑，因此还需分析（66）中顶点奇异性的逼近。

下面我们对角点奇异性进行逼近:
在每个时空单元中，我们估计

$$\|r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_t\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)\|\le\|r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_t r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)\| \\ +\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|\ .$$

由于 b_i在时间上光滑，第一项 $\|r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_t r^{\alpha-1}b_i(\phi,\theta,t)\|$可以利用时间方向上的标准逼近性质进行估计，并且当 Δt较小时可以忽略。 $\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)$与椭圆情形 [28]中的函数 b_i 具有相同的形式。因此，可以将椭圆逼近结果推广到 $\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|$。然后对所有单元求和。我们考虑

$$\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i-\Pi_{\phi,r}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i\|=\|(1-\Pi_{\phi,r})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|$$

设 $\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)=\sum t^j b_{i,j}(\phi,\theta)$，且 $f_j(r,\phi)=r^{\alpha-1}b_{i,j}(\phi,\theta)$在 $[t_k,t_{k+1})$上。^{j}

由 $p_j|_{R_{kl}}=\sum_j \frac{t^j}{h_k h_l}\iint_{R_{kl}} f_j(x,\ y)dydx$ 可由（132）得到

$$\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i-\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i\|^2_{r,-\frac12,\tilde R,*}\lesssim\sum\sum\max\{\Delta t,h_k,h_l\} \\ (h_k^2\|\partial_1(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl}}+h_l^2\|\partial_2(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl}}) \\ +\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i-\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i\|^2_{r,-\frac12,R_{11}}$$

对于 l，k 的不同取值范围，分别估计各个加项:
对 $k\geqslant 2$，$l\geqslant 2$ 的估计：注意，对于 $k\geqslant 2$，$\Delta t\le h_k^{\beta\tilde\gamma}$ 其中$\tilde\gamma=1-\frac{1}{\tilde\beta}>0$。因此，若对所有 k 都有 $\Delta t\le h_k^{\tilde\beta}$，有 $|h_k|\le\beta 2^{\tilde\beta}\underline{x}^{\tilde\gamma}$ $x\in[x_{k-1},x_k]$

$$\max\{h_k,h_l,\Delta t\}h_k^2\|\partial_x(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl}}\lesssim h^3\|\partial_x(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\max\{x^{\tilde\gamma},y^{\tilde\gamma}\}^{1/2}x^{\tilde\gamma}\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl}}$$

and

$$\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i-\Pi_{x,y}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i\|^2_{r,-\frac12,\bigcup_{k\geq2,l\geq2}R_{kl},*}\lesssim h^3\|\partial_x(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\max\{x^{\tilde\gamma},y^{\tilde\gamma}\}x^{2\tilde\gamma}\|_{r,0,\tilde R} \\ +h^3\|\partial_y(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\max\{x^{\tilde\gamma},y^{\tilde\gamma}\}y^{2\tilde\gamma}\|_{r,0,\tilde R}\ . \tag{69}$$

由于 $|\partial_1(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)|\lesssim r^{\alpha-2}\tilde b_i(\phi,\ \theta,\ t)$ 对某个 $\tilde b_i$ 在空间中平方可积，且 $\max\{x^{\tilde\gamma},y^{\tilde\gamma}\}\le r^{\tilde\gamma}$，当且仅当以下条件成立时，（69）的右端项有限:

$$\tilde\beta>\frac{3}{2(\alpha+1/2)}. \tag{70}$$

因此

$$\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i-\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i\|^2_{r,-\frac12,\bigcup_{k\geq2,l\geq2}R_{kl},*}\lesssim h^3,$$

对所有 k，给定 $\Delta t\le h_k$。

$k=1$的估计，$l>1$（类似地，$k>1$，$l=1$）：对于 $f(x,\ y)=r^{\alpha-1}b_i(\phi,\ \theta)$

$$\sum_j\sum_{l=2}^N\|(1-\Pi_{r,\phi})\Pi_t f\|^2_{r,-\frac12,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl},*} \\ \le\sum_j\sum_{l=2}^N\max\{\Delta t,h_k,h_l\}\left(h_1^2\|\partial_1(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl},*}+h_l^2\|\partial_2(r^{\alpha-1}\Pi_t b_i)\|^2_{r,0,[t_j,t_{j+1})\times R_{kl},*}\right)$$

按照（69）进行即可看出，对于 $\tilde{\beta} > 2^{3}(\alpha+\frac{1}{2})$，该项也是有界的。

$k=1,\ l=1$ 的估计：由于 $\alpha>0,\ r^{\alpha-1}\in L^2(R_{11})$。现在，根据 $\Pi_{r,\phi}$ 的 L^2-稳定性，有 $\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\|_{L^2(R_{11})} \lesssim \|r^{\alpha-1}\|_{L^2(R_{11})}$，并且

$$\begin{aligned}&\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|^2_{r,-\frac{1}{2},R_{11},*}\\ &\lesssim \|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|_{r,-1,R_{11},*}\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|_{r,0,R_{11},*}\end{aligned}$$

第二项为 $\le h^\alpha$。对于第一项

$$\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|_{r,-1,R_{11},*}\equiv\sup_{g\in H^{-r}(\mathbb{R}^+,\tilde{H}^1(R_{11}))}\frac{\langle(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t),g\rangle}{\|g\|_{-r,1,R_{11}}}$$

替换 g 为 $g-p$，$H^{-r}(\mathbb{R}^+,\ H^0(R_{11}))$ 投影 g，我们得到对于 $\Delta t\le h_1$：

$$\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|_{r,-1,R_{11},*}\le\|(1-\Pi_{r,\phi})r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|_{r,0,R_{11}}\sup_g\frac{\|g-p\|_{-r,0,R_{11}}}{\|g\|_{-r,1,R_{11}}}\ .$$

第一因子由 h_1^α 控制，而第二因子由 h_1 控制。因此

$$\|r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)-\Pi_t\Pi_{r,\phi}r^{\alpha-1}\Pi_t b_i(\phi,\theta,t)\|^2_{r,-\frac{1}{2},R_{11},*}\lesssim h_1^{2\alpha+1}.$$

注意到 $h_1=h^\beta$ 即可得出该断言。

(b)，楔形奇异性：对于 $\mathbf{u}$ 的逼近，一个关键要素是引理 C.5。按照上述方法，利用展开式 (65)，可对网格的每个矩形 R 上的 i 次分量进行估计：

$$\begin{aligned}\|\Pi_t u_i-\Pi_x\Pi_t u_i\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\le{}&\|\Pi_t a_i(\phi,z,t)r^{\nu^*}-\Pi_t\Pi_x a_i(\phi,z,t)r^{\nu^*}\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\\&+\|\Pi_t u_{i,0}-\Pi_x\Pi_t u_{i,0}\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\ .\end{aligned}$$

对于第一项，根据引理 C.3，并结合 $\Pi_x=\Pi_{r,z}$，我们注意到，

$$\begin{aligned}&\|\Pi_t a_i(\phi,z,t)r^{\nu^*}-\Pi_t\Pi_x a_i(\phi,z,t)r^{\nu^*}\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\\&\le\|\Pi_t a_i(\phi,z,t)-\Pi_t\Pi_z a_i(\phi,z,t)\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\|r^{\nu^*}\|_{\frac{1}{2}}+\|\Pi_t\Pi_z a_i(\phi,z,t)\|_{r,\frac{1}{2},(t_k,t_{k+1}]\times R,*}\|r^{\nu^*}-\Pi_r r^{\nu^*}\|_{\frac{1}{2},R,*}\ .\end{aligned}$$

根据空间中的逼近性质，注意到

$$\|\Pi_t a_i(\phi,z,t)-\Pi_t\Pi_z a_i(\phi,z,t)\|_{r,\frac{1}{2}}\le C\|\Pi_t a_i(\phi,z,t)\|_{r,H^2}h^{\frac{3}{2}}$$

并且，根据引理 5.6,

$$\|r^{\nu^*}-\Pi_r r^{\nu^*}\|_{\frac{1}{2}}\lesssim h^{\min\{\tilde{\beta}\mathrm{Re}\ \nu^*-\varepsilon,\frac{3}{2}\}}\ .$$

展开式 (64) 中正则部分 $\mathbf{u}_0$ 的每个分量都可以按照 [21, 定理18]进行近似：令 $\mathbf{q}\in S_h^\beta$ 表示 $\mathbf{u}_0$ 在空间和时间上的插值函数。在 $\tilde{R}:=[0,1]\times[0,1]$上，将其分解为边长为 h_j,h_k的矩形 R_{jk}：
$=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$，

$$\|\mathbf{u}_0-\mathbf{q}\|^2_{r,0,\tilde{R}}\lesssim\max\{h,\Delta t\}^4\|\mathbf{u}_0\|^2_{r,3,\tilde{R}}$$

and

$$\|\mathbf{u}_0-\mathbf{q}\|^2_{r,1,\tilde{R}}\lesssim\max\{h,\Delta t\}^2\|\mathbf{u}_0\|^2_{r,3,\tilde{R}}\ .$$

~这里我们使用了 $h_k \le \beta\, h$ ，并回顾一下，当$\mathbb{R}_+$时，我们不在范数中标明时间区间。插值给出 $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{q}\|_{r,\frac{1}{2},\tilde{R}} \lesssim \max\{h, \Delta t\}^{3/2} \|\mathbf{u}^0\|_{r,3,\tilde{R}}$。

为近似奇异部分的每个分量，我们用分段线性插值函数 q_j 对 f_j 进行插值，定义 $f_1(z,t) := a_i(\phi, z, t)$, $f_2(r) := r^{\nu^*}$ 和 $q(x,t) := q_1(z,t) q_2(r)$。因此，对于 $0 \le s < 1$

$$\begin{aligned} \|f - q\|_{r,s,\tilde{R}} \le & \|q_1\|_{r,0,I} \|f_2 - q_2\|_{H^s(I)} + \|q_1\|_{r,s,I} \|f_2 - q_2\|_{L^2(I)} \\ & + \|f_1 - q_1\|_{r,0,I} \|f_2\|_{H^s(I)} + \|f_1 - q_1\|_{r,s,I} \|f_2\|_{L^2(I)} \,. \end{aligned} \tag{71}$$

利用引理 5.6 中的 r^{ν^*} 近似结果，我们得出

$$\|f - q\|_{r,\frac{1}{2},\tilde{R}} \le c\; h^{\tilde{\beta} \mathrm{Re}\ \nu^* - \epsilon}.$$

圆锥上奇异函数的近似与上文 a) 部分中牵引力 $\mathbf{p(u)}$ 的证明非常相似。对于波动方程，详细内容见 [21]。 □

近似论证可从矩形单元推广到三角形单元，如 [46]所示。

$n = 3$ 中关于边奇异性近似的结果，可转化为~中线性裂纹的相应结果。特别是，在图6中，当 $\nu^* = \frac{1}{2}$ 时，我们观察到 $\beta = 1$,2,3 的预期收敛阶；而在图 12 中则观察到 $\nu^* = 0.5372$ 的预期收敛阶。

5.3 通过 hp 方法进行近似

我们利用本节开头的正则性结果，推导 hp 版本在准均匀网格上的逼近性质：

为陈述 hp-方法逼近误差的主要结果，回顾式 (68)，其中 $\tilde{\alpha} = \min\left\{\mathrm{Re}\ \nu^*,\ \mathrm{Re}\ \alpha + \frac{1}{2}\right\}$。

定理 5.7。 设 $r \ge 0$ 和 $\varepsilon > 0$。*a)* 设 $\mathbf{u}$ 是具有非齐次 *Dirichlet*边界条件 (3) 的齐次弹性动力学方程的强解 $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}$，其中 $\mathbf{g}$ 是光滑的。此外，设$\mathbf{\Phi}_{h,\Delta t} \in \left(V_{\Delta t,p} \otimes X_{h,p}^{-1}\right)^n$ 是牵引力$\mathbf{p}(\mathbf{u})|_\Gamma$ 在具有 $\Delta t \lesssim h$ 的准均匀空间网格上的最佳逼近，其采用 $H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 的范数。则对于 $p = 0$，1，2，.....。

$$\|\mathbf{p}(\mathbf{u})|_\Gamma - \mathbf{\Phi}_{h,\Delta t}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim \left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{\tilde{\alpha}-\varepsilon} + \left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r} + \left(\frac{h}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}+\eta},$$

其中 $r \in [0, p+1)$ *a nd* $\boldsymbol{\phi}_0 \in H^{p+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^\eta(\Gamma))^n$ 是$\mathbf{p}$(**u**的奇异展开的正则部分).

b) 设**u** 是齐次弹性动力学方程(3) 在非齐次诺伊曼边界条件$\mathbf{p}(\mathbf{u})|_\Gamma = \mathbf{h}$下的强解，其中**h** 光滑。此外，设 $\mathbf{\Psi}_{h,\Delta t} \in \left(V_{\Delta t,p} \otimes X_{h,p}^{0}\right)^n$ 是在准均匀空间网格上对狄利克雷迹$\mathbf{u}|_\Gamma$ 的最佳逼近，其范数为 $H^r_\sigma(\mathbb{R}^+,$ $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma))^n$，且该网格具有 $\Delta t \lesssim h$。那么对于 $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\|\mathbf{u}|_\Gamma - \mathbf{\Psi}_{h,\Delta t}\|_{r,\frac{1}{2}-s,\Gamma,*} \lesssim \left(\frac{h}{p^2}\right)^{\tilde{\alpha}+s-\varepsilon} + \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{p-r} + \left(\frac{h}{p}\right)^{-\frac{1}{2}+s+\eta},$$

~其中 $r \in [0, p)$ 以及$\mathbf{u}_0 \in H^p_\sigma(\mathbb{R}^+, H^\eta(\Gamma))$ 是**u**的奇异展开的正则部分。

定理 5.7 对曲面上的单层积分方程和超奇异积分方程的解给出了相应的结果：

推论 5.8. 设 $r \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$。*a)* 设 $\mathbf{\Phi}$ 为单层积分方程(11)的解，$\mathbf{\Phi}_{h,\Delta t} \in \left(V_{\Delta t,p} \otimes X_{h,p}^{-1}\right)^n$ 为准均匀空间网格上 $\mathbf{\Phi}$ 的范数 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$ 下的最佳逼近，其中 $\Delta t \lesssim h$。那么对于 $p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$$\|\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_{h,\Delta t}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim \left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{\tilde{\alpha}-\varepsilon} + \left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r} + \left(\frac{h}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}+\eta},$$

其中 $r \in [0, p+1)$ 且 $\boldsymbol{\phi}_0 \in H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^\eta(\Gamma))^n$ 是 $\mathbf{\Phi}$ 的奇异展开的正则部分。

b) 设 $\mathbf{\Psi}$ 是超奇异积分方程 (17) 的解，$\mathbf{\Psi}_{h,\Delta t} \in \left(V_{\Delta t,p} \otimes X_{h,p}^0\right)^n$ 是在准均匀空间网格上对 $\mathbf{\Psi}$ 的 $H_\sigma^r(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma))^n$ 范数下的最佳逼近，其中 $\Delta t \lesssim h$。那么对于 $p = 1、2、3、\ldots\ldots$

$$\|\mathbf{\Psi} - \mathbf{\Psi}_{h,\Delta t}\|_{r,\frac{1}{2}-s,\Gamma,*} \lesssim \left(\frac{h}{p^2}\right)^{\tilde{\alpha}+s-\varepsilon} + \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{p+1-r} + \left(\frac{h}{p}\right)^{-\frac{1}{2}+s+\eta},$$

其中 $r \in [0, p)$，$s \in [0, \frac{1}{2}]$ 且 $\mathbf{u}_0 \in H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^\eta(\Gamma))^n$ 是$\mathbf{\Psi} = \mathbf{u}|_\Gamma$的奇异展开的正则部分。

证明中，我们回顾 [10, 定理 3.1]:

引理 5.9. 对于 $\varepsilon > 0$，$\mathrm{Re}\ a < 1$且 $s \in [-1, \text{最小值}\{-\mathrm{Re}\ a + \frac{1}{2}, 0\})$ 分片多项式插值函数的次数为 p，$\Pi_r^p r^{-a}$，对于 r^{-a}，有如下结论

$$\|r^{-a} - \Pi_r^p r^{-a}\|_{s,[0,1],*} \lesssim \left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{-\mathrm{Re}\ a - s + \frac{1}{2} - \varepsilon}.$$

类似地，对于 r 的正幂，我们回顾 [11, 定理 3.1]:

引理 5.10. 对于 $\varepsilon > 0$, $0 < \mathrm{Re}\ a$且 $s \in [0, \mathrm{Re}\ a + \frac{1}{2})$ 分片多项式插值函数的次数为 $p+1$, $\Pi_r^{p+1} r^a$, 对于 r^a，有如下结论

$$\|r^a - \Pi_y^{p+1} r^a\|_{s,[0,1],*} \lesssim \left(\frac{h}{p^2}\right)^{\min\{\mathrm{Re}\ a - s + \frac{1}{2}, 2-s\} - \varepsilon}.$$

定理 *5.7* 的证明。 对于 a) 部分的证明，我们重点讨论楔形奇异性的情形，因为圆锥上的奇异函数的逼近证明与 [21] 中的证明非常相似。

我们选择 $\mathbf{\Phi}_{h,\ \Delta t} = \Pi_x^p \Pi_t^p\ \mathbf{p(u)}$。利用式 **(64)** 对 **p(u)** 进行分解，我们可以在矩形网格上将奇异部分与正则部分分离:

$$\begin{aligned}
&\|p_i(\mathbf{u}) - \Pi_x^p \Pi_t^p p_i(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \leq \|b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t^p \Pi_x^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} + \|\phi_{i,0} - \Pi_t^p \Pi_x^p \phi_{i,0}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \\
&\leq \|b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} + \|\Pi_t^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t^p \Pi_x^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \\
&\quad + \|\phi_{i,\ 0} - \Pi_t^p \Pi_x^p \phi_{i,\ 0}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \\
&\leq \|b_i(\phi,z,t) - \Pi_t^p b_i(\phi,z,t)\|_{r,\epsilon-\frac{1}{2}} \|r^{\nu^*-1}\|_{-\varepsilon,I,*} + \|\Pi_t^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t^p \Pi_z^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \\
&\quad + \|\Pi_t^p \Pi_z^p b_i(\phi,z,t) r^{\nu^*-1} - \Pi_t^p \Pi_z^p b_i(\phi,z,t) \Pi_y^p r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*} + \|\phi_{i,0} - \Pi_t^p \Pi_x^p \phi_{i,0}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*}.
\end{aligned}$$

在第二项中，我们使用了 $\Pi_x^p = \Pi_z^p \Pi_r^p$。第一项利用引理 C.2 进行了估计，因此现在结果有如下界:

$$\|b_i(\phi,z,t) - \Pi_t^p b_i(\phi,z,t)\|_{r,\epsilon-\frac{1}{2}} \lesssim \left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r} \|b_i(\phi,z,t)\|_{p+1,\epsilon-\frac{1}{2}}.$$

利用引理 C.2，我们得到第二项和第三项：

$$\|\Pi_t^p b_i(\phi,z,t)r^{\nu^*-1}-\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*}+\|\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)r^{\nu^*-1}-\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)\Pi_y^p r^{\nu^*-1}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*}$$
$$\lesssim \|\Pi_t^p b_i(\phi,z,t)-\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)\|_{r,\varepsilon-\frac{1}{2}}\|r^{\nu^*-1}\|_{-\varepsilon,I,*}+\|\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)\|_{r,0}\|r^{\nu^*-1}-\Pi_r^p r^{\nu^*-1}\|_{-\frac{1}{2},I,*}\ .$$

最后我们指出

$$\|r^{\nu^*-1}-\Pi_r^p r^{\nu^*-1}\|_{\frac{1}{2},I,*}\lesssim\left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{\mathrm{Re}\ \nu^*-\varepsilon}$$

由引理 5.9，以及

$$\|\Pi_t^p b_i(\phi,z,t)-\Pi_t^p\Pi_z^p b_i(\phi,z,t)\|_{r,\varepsilon-\frac{1}{2}}\lesssim\left(\frac{h}{p+1}\right)^{\frac{1}{2}+k-\epsilon}\|b_i(\phi,z,t)\|_{r,k}\ .$$

当 (64) 中的正则部分 $\boldsymbol{\phi}_0$ 属于 H^η 空间时，由逼近性质 [23]可得：

$$\|\phi_{i,0}-\Pi_t^p\Pi_x^p\phi_{i,0}\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*}\lesssim_\sigma\left(\left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r}+\left(\frac{h}{p+1}\right)^{1/2+\eta}\right)\|\phi_{i,0}\|_{p+1,\eta,\Gamma}\ .$$

结合这些估计，即可得到所述估计 $\Delta t\lesssim h$

$$\|\mathbf{p}(\mathbf{u})-\Pi_x^p\Pi_t^p\mathbf{p}(\mathbf{u})\|_{r,-\frac{1}{2},\Gamma,*}\lesssim\left(\frac{h}{(p+1)^2}\right)^{\mathrm{Re}\ \nu^*-\varepsilon}+\left(\left(\frac{\Delta t}{p+1}\right)^{p+1-r}+\left(\frac{h}{p+1}\right)^{1/2+\eta}\right)\|\phi_{i,0}\|_{p+1,\eta,\Gamma}\ .$$

狄利克雷迹$\mathbf{u}|_\Gamma$ 的逼近采用上述论证即可证明 b) 部分。 □

逼近论证可从矩形单元推广到三角形单元，如 [46]所示。

对于$V_{\Delta t,\ 1}$，也可得到类似的估计，只需将 $(\Delta t)^p$ 替换为 Δt。

6 算法细节

第7节中的数值实验考虑二维情形，因此在下文中我们将维数 $n=2$ 固定。我们引入集合 $\left\{w_m^{(p)}(\mathbf{x})\right\}_{m=1}^{M_h^{(p)}}$，其中包含空间$X_h^{-1}{}_{,\ p}$的基函数，这些基函数是在每个单元 e_i上依赖于拉格朗日多项式的分片多项式。类似地，集合 $\left\{w_m^{(q)}(\mathbf{x})\right\}_{m=1}^{M_h^{(q)}}$ 对应于函数空间$X_{h,\ q}^0$的一个基。对于时间离散，我们选择分片常数基函数来近似 $\boldsymbol{\Phi}$ ($s_p=0$)，

$$v_n^{(0)}(t)=H[t-t_n]-H[t-t_{n+1}],\quad n=0,...,N_{\Delta t}-1,$$

和用于近似 $\boldsymbol{\Psi}$ ($s_q=1$) 的线性基函数，

$$v_n^{(1)}(t)=\frac{t-t_n}{\Delta t}H[t-t_n]-\frac{t-t_{n+1}}{\Delta t}H[t-t_{n+1}],\quad n=0,...,N_{\Delta t}-1.$$

因此，离散函数的分量$\boldsymbol{\Phi}_{h,\ \Delta t}$ 和$\boldsymbol{\Psi}_{h,\ \Delta t}$ 可表示为空间和时间上的形式

$$\boldsymbol{\Phi}_{i,h,\Delta t}(\mathbf{x},t)=\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}-1}\sum_{m=1}^{M_h^{(p)}}\alpha_{nm}^i w_m^{(p)}(\mathbf{x})v_n^{(0)}(t),\quad i=1,2,$$

and

$$\mathbf{\Psi}_{i,h,\Delta t}(\mathbf{x},t)=\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}-1}\sum_{m=1}^{M_h^{(q)}}\beta_{nm}^{i}w_m^{(q)}(\mathbf{x})v_n^{(1)}(t),\quad i=1,2,$$

时空伽辽金方程（60）导出线性方程组

$$\begin{pmatrix} E_{\mathcal{V}}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ E_{\mathcal{V}}^{(1)} & E_{\mathcal{V}}^{(0)} & 0 & \cdots & 0\\ E_{\mathcal{V}}^{(2)} & E_{\mathcal{V}}^{(1)} & E_{\mathcal{V}}^{(0)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E_{\mathcal{V}}^{(N_{\Delta t}-1)} & E_{\mathcal{V}}^{(N_{\Delta t}-2)} & E_{\mathcal{V}}^{(N_{\Delta t}-3)} & \cdots & E_{\mathcal{V}}^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{(0)}\\ \boldsymbol{\alpha}_{(1)}\\ \boldsymbol{\alpha}_{(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{(N_{\Delta t}-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{(0)}\\ \mathbf{g}_{(1)}\\ \mathbf{g}_{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{g}_{(N_{\Delta t}-1)} \end{pmatrix},\tag{72}$$

其中，对于所有的 $l=0,...,N_{\Delta t}-1$，解向量的第 l 个块、第 l 个元素以及右端项的第 l 个元素组织如下

$$E_{\mathcal{V}}^{(l)}=\begin{pmatrix} E_{\mathcal{V},11}^{(l)} & E_{\mathcal{V},12}^{(l)}\\ E_{\mathcal{V},21}^{(l)} & E_{\mathcal{V},22}^{(l)} \end{pmatrix},\quad \begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{(l)}&=\begin{pmatrix} \alpha_{l1}^{1} & \cdots & \alpha_{lM_h^{(p)}}^{1} & \alpha_{l1}^{2} & \cdots & \alpha_{lM_h^{(p)}}^{2} \end{pmatrix}^{\top}\\ \mathbf{g}_{(l)}&=\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{l1}^{1} & \cdots & \mathbf{g}_{lM_h^{(p)}}^{1} & \mathbf{g}_{l1}^{2} & \cdots & \mathbf{g}_{lM_h^{(p)}}^{2} \end{pmatrix}^{\top}\end{aligned}.$$

通过回代求解 (72)，可得到逐时推进时间步进格式（MOT）。为求子块 $E_{\mathcal{V}}^{(l)}$ 的一般矩阵元素，其中 $l=n-\widetilde{n}$ 是两个时间索引之间的非负差值，我们可以对时间变量 t 进行解析积分，得到

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_{\mathcal{V},ij}^{(l)}\right)_{\widetilde{m},m}&=\langle V_{ij}w_m^{(p)}\partial_t v_n^{(0)},w_{\widetilde{m}}^{(p)}v_{\widetilde{n}}^{(0)}\rangle_{L^2(\Sigma)}=-\langle V_{ij}w_m^{(p)}v_n^{(0)},w_{\widetilde{m}}^{(p)}\partial_t v_{\widetilde{n}}^{(0)}\rangle_{L^2(\Sigma)}\\&=-\sum_{\xi,\varsigma=0}^{1}(-1)^{\xi+\varsigma}\int_\Gamma w_{\widetilde{m}}^{(p)}(\mathbf{x})\int_0^{t_{\widetilde{n}+\xi}}\int_\Gamma G_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};t_{\widetilde{n}+\xi},\tau)w_m^{(p)}(\boldsymbol{\xi})H[\tau-t_{n+\varsigma}]d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}d\tau d\Gamma_{\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{73}$$

此外，也可以精确计算(73) 中关于 τ 的积分，从而得到矩阵元素

$$\left(E_{\mathcal{V},ij}^{(l)}\right)_{\widetilde{m},m}=-\sum_{\xi,\varsigma=0}^{1}\frac{(-1)^{\xi+\varsigma}}{2\pi\rho}\int_\Gamma\int_\Gamma w_{\widetilde{m}}^{(p)}(\mathbf{x})w_m^{(p)}(\boldsymbol{\xi})\nu_{ij}^{\mathcal{V}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})d\Gamma_{\mathbf{x}}d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}},\tag{74}$$

对于所有的 $i,j=1,2;\quad m,\widetilde{m}=1,...,M_h^{(p)}$ 以及 $n,\widetilde{n}=0,...,N_{\Delta t}-1$。其中，正时间差 $t_{\widetilde{n}+\xi}-t_{n+\varsigma}=\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}$ 以及积分核 $\nu_{ij}^{\mathcal{V}}$

$$\begin{aligned}&\nu_{ij}^{\mathcal{V}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}):=\\&\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}\left(\frac{r_ir_j}{r^4}-\frac{\delta_{ij}}{2r^2}\right)\left[\frac{H[c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{P}}}\varphi_{\mathrm{P}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})-\frac{H[c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{S}}}\varphi_{\mathrm{S}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})\right]\\&\qquad+\frac{\delta_{ij}}{2}\left[\frac{H[c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{P}}^2}\widehat{\varphi}_{\mathrm{P}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})+\frac{H[c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{S}}^2}\widehat{\varphi}_{\mathrm{S}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})\right].\end{aligned}\tag{75}$$

对于每个 $\gamma=\mathrm{P,S}$，给出的特定核函数为

$$\varphi_\gamma(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}):=\sqrt{c_\gamma^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2},\tag{76}$$

$$\widehat{\varphi}_\gamma(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}):=\log\left(\sqrt{c_\gamma^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2}+c_\gamma\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}\right)-\log(r).\tag{77}$$

如果 $0 \leqslant r \leqslant c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma} < c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}$ 核 ν_{ij} 具有简化形式：

$$\begin{aligned}
&\nu_{ij}^{\mathcal{V}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}) = \\
&\frac{c_{\mathrm{P}}^2-c_{\mathrm{S}}^2}{c_{\mathrm{P}}c_{\mathrm{S}}}\left(\frac{r_ir_j}{r^2}-\frac{\delta_{ij}}{2}\right)\frac{\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}}{c_{\mathrm{P}}\sqrt{c_{\mathrm{S}}^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2}+c_{\mathrm{S}}\sqrt{c_{\mathrm{P}}^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2}} - \frac{c_{\mathrm{P}}^2+c_{\mathrm{S}}^2}{c_{\mathrm{P}}^2c_{\mathrm{S}}^2}\frac{\delta_{ij}}{2}\log(r) \\
&+\frac{\delta_{ij}}{2}\left[\frac{1}{c_{\mathrm{P}}^2}\log\left(c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}+\sqrt{c_{\mathrm{P}}^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2}\right)+\frac{1}{c_{\mathrm{S}}^2}\log\left(c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}+\sqrt{c_{\mathrm{S}}^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2-r^2}\right)\right], \quad (78)
\end{aligned}$$

对于 $r\to 0$，具有类型为 $\mathcal{O}(\log(r))$ 的空间奇异性。这种行为在与二维椭圆问题相关的边界积分算子中已有充分研究。

弱形式 (61) 中的离散函数 $\boldsymbol{\psi}_{i,h,\Delta t}$ 产生线性方程组 $E_{\mathcal{W}}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{h}$，与单层算子 $\mathcal{V}$ 离散化后得到的线性方程组类似。特别是，时间方向上得到相同的托普利兹结构，矩阵元素通过对时间变量进行解析积分计算，类似于 (73) 中采用的方法，从而得到

$$\left(E_{\mathcal{W},ij}^{(l)}\right)_{\widetilde{m},m} = -\sum_{\xi,\varsigma=0}^{1}\frac{(-1)^{\xi+\varsigma}}{2\pi\rho\Delta t^2}\int_\Gamma\int_\Gamma w_{\widetilde{m}}^{(q)}(\mathbf{x})w_m^{(q)}(\boldsymbol{\xi})\nu_{ij}^{\mathcal{W}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})d\Gamma_{\mathbf{x}}d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (79)$$

对所有 $i,j=1,2$； $m,\widetilde{m}=1,...,M_h^{(q)}$ 以及 $n,\widetilde{n}=0,...,N_{\Delta t}-1$ 均成立。这里，$t_{\widetilde{n}+\xi}-t_{n+\varsigma}=\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}$，且积分核 $\nu_{ij}^{\mathcal{W}}$ 为

$$\begin{aligned}
&\nu_{ij}^{\mathcal{W}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}) = \\
&\frac{H[c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{P}}^3}\left[\left(D_{\varphi,c_{\mathrm{P}}}^{ij}+D_{c_{\mathrm{P}}}^{ij}\frac{\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2c_{\mathrm{P}}^2}{r^2}\right)\frac{\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}\,\varphi_{\mathrm{P}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})}{r^2}+D_{\widehat{\varphi},c_{\mathrm{P}}}^{ij}\frac{\widehat{\varphi}_{\mathrm{P}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})}{c_{\mathrm{P}}}\right] \\
&-\frac{H[c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}-r]}{c_{\mathrm{S}}^3}\left[\left(D_{\varphi,c_{\mathrm{S}}}^{ij}+D_{c_{\mathrm{S}}}^{ij}\frac{\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}^2c_{\mathrm{S}}^2}{r^2}\right)\frac{\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}\,\varphi_{\mathrm{S}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})}{r^2}+D_{\widehat{\varphi},c_{\mathrm{S}}}^{ij}\frac{\widehat{\varphi}_{\mathrm{S}}(r;\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma})}{c_{\mathrm{S}}}\right], \quad (80)
\end{aligned}$$

其中，系数 $D_{\varphi,c_\gamma}^{ij}$、 $D_{c_\gamma}^{ij}$ 和 $D_{\widehat{\varphi}\ ,c_\gamma}^{ij}$ 在 [16] 的附录 A.3 中定义。若 $0\leqslant r\leqslant c_{\mathrm{S}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma} < c_{\mathrm{P}}\Delta_{\widetilde{n}+\xi,n+\varsigma}$，则核 $\nu_{ij}^{\mathcal{W}}$ 化简为具有奇异性 $\mathcal{O}(r^{-2})$ 的形式，其中 $r\to 0$。

我们还必须考虑到，两个核 $\nu_{ij}^{\mathcal{V}}$ 和 $\nu_{ij}^{\mathcal{W}}$ 都通过 Heaviside 函数依赖于差值 $c_\gamma^2\Delta_{\widetilde{n}+\xi,\ n+\varsigma}^2-r^2$，因此在自变量为零的点处会发生跳跃。为解决可能存在一个或两个波前这一问题（它们可能会缩小局部空间变量中的积分域），我们对后者进行适当的分解。这一分裂过程大幅减少了达到单精度精度 [3]所需的求积节点数量。

此外，为了对 (74) 和 (79) 进行数值求值，我们采用专门的求积公式来处理 (78) 和 (80) 中定义的核 $\nu_{ij}^{\mathcal{V}}$ 和 $\nu_{ij}^{\mathcal{W}}$ 的奇异性。感兴趣的读者可参阅[3]，其中详细介绍了对弱奇异核进行积分时所采用的求积方案。关于超奇异积分的数值求值，请参阅 [16]。

7 数值结果

本节中的数值实验考察了软散射问题（15）（第7.1–7.2节）和硬散射问题（17）（第7.3节）中的 h、p 和 hp 离散化。它们展示了解在裂纹尖端附近的奇异行为，以及理论上预期的收敛率。除非另有说明，对于均匀网格或分级网格上的 h 版本，采用分片常数基函数

在空间和时间上对狄利克雷问题（60）的解进行逼近。诺伊曼问题（61）采用分段线性函数。 p 和 hp 版本在空间上使用更高的多项式次数，最高达到 $p=7$。除非另有说明，对于本节所呈现的所有结果，Lam´e参数和质量密度分别设为 $\lambda=2$、 $\mu=1$ 和 $\varrho=1$ 。

狄利克雷问题的所有数值结果均针对式 (15) 中给定的右端项 $\tilde{\mathbf{g}}=(\mathcal{K}+1/2)\mathbf{g}$ 计算。尽管第 3 节和第 5 节中的分析依赖于这种形式的 $\tilde{\mathbf{g}}$，这也是边界元文献中的常见做法，但为方便数值计算，我们直接给定 $\tilde{\mathbf{g}}$。类似地，对于诺伊曼问题，我们给定$\tilde{\mathbf{h}}=(\mathcal{K}'-1/2)\mathbf{h}$。此外，我们设权重为 $\sigma=0$。

7.1 平坦障碍物上的软散射问题

例1。 这里我们考虑平坦障碍物$\Gamma=\{(x,\ 0)$ 上直至时间 $T=1$ 的离散弱奇异积分方程 (60)。狄利克雷数据对应于 $\widetilde{g}_i(x,\ t)=\widetilde{g}(x,\ t)=H[t]f(t)x^4, i=1,\ 2$，其中函数

$$f(t)=\begin{cases}\sin^2(4\pi t), & t\in[0,1/8]\\ 1, & t>1/8\end{cases} \tag{81}$$

是一种时间剖面，它导出了一个随时间保持静态的精确解 $\mathbf{\Phi}$ 。图5中展示了固定时刻下，障碍物 Γ 上式（60）的离散解 $\mathbf{\Phi}$ 的水平分量：从图中可以看出，解在裂纹尖端附近具有奇异性。表1、表2和表3列出了数值 $\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$，即 Galerkin 解的能量范数平方，随着空间自由度（DOF）数量增加而变化的情况（关于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和矩阵 $E_{\mathcal{V}}$的构造细节，请参见第6节）。特别是，该数值对应于式（60）左侧的 $L^2(\Sigma)$ 乘积，其中离散解$\mathbf{\Phi}_{h,\ \Delta t}$ 取代了测试函数。为简便起见，在以下各表中，DOF 数量仅针对向量值解的一个分量标出。表1中的数值通过在空间中采用 p 版本得到：边界均匀划分为长度为 $h=0.1$的线段，同时逐渐增加空间基函数的次数 p 。对于 $p=1$ ，我们设定时间步长 $\Delta t=0.025$ ，并在 p 增加时将其减半。

表1： $T=1$ （p 版本）近似解的能量范数正方形

次数 p	1	2	3	4	5	6	7
DOF	11	21	31	41	51	61	71
Δt	$2.50000\cdot10^{-2}$	$1.25000\cdot10^{-2}$	$6.25000\cdot10^{-3}$	$3.12500\cdot10^{-3}$	$1.56250\cdot10^{-3}$	$7.81250\cdot10^{-4}$	$3.90625\cdot10^{-4}$
$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$	$3.4108\cdot10^{-2}$	$3.6257\cdot10^{-2}$	$3.7012\cdot10^{-2}$	$3.7338\cdot10^{-2}$	$3.7511\cdot10^{-2}$	$3.7615\cdot10^{-2}$	$3.7684\cdot10^{-2}$

表2中报告的能量值对应于采用h 版本求解该问题的结果：对于给定的分级参数 $\beta=1,2,3$和网格点数 $2N+1$，我们在弧上采用如式(62)所示的代数分级网格~。表3中采用的离散化方法是hp 版本。我们在 Γ 上按照规则所示设置几何分级的网格点。

$$\begin{cases} x_{0,L}=-\frac{1}{2},\ x_{L,j}=\frac{1}{2}\left(\sigma^{N+1-j}-1\right) & j=1,\dots,N+1\\ x_{N+1}=\frac{1}{2},\ x_{R,j}=\frac{1}{2}\left(1-\sigma^{j}\right), & j=1,\dots,N\end{cases}, \tag{82}$$

对于 $\sigma=0.2,\ 0。5$，为便于编程，在网格的每次细化过程中，所有空间单元上的次数 p 都均匀增加。表中的参数 L_σ 表示网格中最小线段的长度。

对于所测试的离散化方法，能量正逐渐趋近于同一个基准值。为展示相应的收敛率，图6绘出了能量范数下的平方误差与

表2： $T=1$（h 版本，采用代数分级网格的近似解的能量范数平方）

Δt	DOF	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\beta}=1$	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\beta}=2$	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\beta}=3$
$1.2500\cdot10^{-2}$	10	$3.0143\cdot10^{-2}$	$3.6212\cdot10^{-2}$	$3.7315\cdot10^{-2}$
$6.2500\cdot10^{-3}$	20	$3.3906\cdot10^{-2}$	$3.7501\cdot10^{-2}$	$3.7835\cdot10^{-2}$
$3.1250\cdot10^{-3}$	40	$3.5933\cdot10^{-2}$	$3.7813\cdot10^{-2}$	$3.7903\cdot10^{-2}$
$1.5625\cdot10^{-3}$	80	$3.6943\cdot10^{-2}$	$3.7890\cdot10^{-2}$	$3.7914\cdot10^{-2}$

表3：近似解的能量范数 平方； $T=1$ （hp 版本，采用几何分级 ）

p	$L_{0.5}$	$L_{0.2}$	DOF	Δt	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$, $\sigma=0.5$	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$, $\sigma=0.2$
0	$5.00000\cdot10^{-1}$	$5.0\cdot10^{-1}$	2	$2.500000\cdot10^{-1}$	$4.0730\cdot10^{-3}$	$4.0730\cdot10^{-3}$
1	$2.50000\cdot10^{-1}$	$1.0\cdot10^{-1}$	5	$1.250000\cdot10^{-1}$	$2.7847\cdot10^{-2}$	$3.4521\cdot10^{-2}$
2	$1.25000\cdot10^{-1}$	$2.0\cdot10^{-2}$	13	$6.250000\cdot10^{-2}$	$3.2960\cdot10^{-2}$	$3.4581\cdot10^{-2}$
3	$6.25000\cdot10^{-2}$	$4.0\cdot10^{-3}$	25	$3.125000\cdot10^{-2}$	$3.6745\cdot10^{-2}$	$3.7256\cdot10^{-2}$
4	$3.12500\cdot10^{-2}$	$8.0\cdot10^{-4}$	41	$1.562500\cdot10^{-2}$	$3.7618\cdot10^{-2}$	$3.7783\cdot10^{-2}$
5	$1.56250\cdot10^{-2}$	$1.6\cdot10^{-4}$	61	$7.812500\cdot10^{-3}$	$3.7828\cdot10^{-2}$	$3.7890\cdot10^{-2}$
6	$7.81250\cdot10^{-3}$	$3.2\cdot10^{-5}$	85	$3.906250\cdot10^{-3}$	$3.7888\cdot10^{-2}$	$3.7911\cdot10^{-2}$
7	$3.90625\cdot10^{-3}$	$6.4\cdot10^{-6}$	113	$1.953125\cdot10^{-3}$	$3.7906\cdot10^{-2}$	$3.7915\cdot10^{-2}$

空间自由度之间的关系。我们观察到，在对数图中，误差的衰减呈直线趋势~，对于带有 $\beta=1$ 的 p 版本和 h 版本均如此；这分别对应于按自由度计的收敛率为 2（p）和 1（h）的代数收敛。这意味着误差分别按 p^{-1} 和 $h^{1/2}$ 趋于 0。根据推论 5.8，预期会得到这一收敛率。事实上，根据命题 A.3，能量 $\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\alpha}$受推论 5.8 中所考虑的 Sobolev范数控制。对于空间中多项式次数为 $p=1$,2 的 h版本，也得到了类似结果。

~对于具有 $\beta=2$ 和 3 的代数分级网格，误差也会随着自由度增加沿直线衰减，但斜率为 $-\beta$ 的
~ ~。特别是，采用 $\beta=3$ 的（62）号加密网格上的边界元方法能够恢复 $h^{3/2}$ ，这正是光滑解在能量范数下所预期的最优收敛阶，与推论 5.4 中的结果一致。

图6中最快的收敛由hp 版本实现，其误差对于 $\sigma=0.2$，0。5均比直线衰减更快。平方误差图表明误差呈指数衰减。 $\sigma=0.2$的收敛最快，其结果接近理论最优值 $\sigma\simeq0.17$。与 $\sigma=0.5$相比，此情形下的节点在 Γ 端点附近分布得更密集。

为说明解的奇异行为，图7绘出了近似解 $\boldsymbol{\Phi}$ 的水平分量和垂直分量随距离 r 变化的情况，其中距离是朝向弧的左端点 $(-0.5,0)^\top$的距离，图中展示了多个时刻的结果：可以观察到，奇异行为与时间无关，且当 $r\to0$时，各分量按 $\mathcal{O}(r^{-1/2})$ 增大。这证实了第 3.1 节中的讨论。图中的解由采用 81 个节点的 3 级分级网格上的 h 版本得到。

例2。 对于平坦障碍物上的其他边界数据，也能得到与例1类似的结果$\Gamma=\{(x,0)\in\mathbb{R}\mid x\in[-0.5,0.5]\}$。这里设 $\widetilde{g}_i(x,t)=\widetilde{g}(x,t)=H[t]f(t)x$, $i=1,2$，其中函数$f(t)$是式（81）中定义的时间剖面。问题（60）的解在弧的端点处仍然是奇异的；与前一个实验中观察到的情况一样，当距离 r 趋于零时， $\boldsymbol{\Phi}$ 的各分量按 $\mathcal{O}(r^{-1/2})$ 增大（见图8）。

我们再次研究这一新狄利克雷条件下能量范数中误差的衰减，从而对不同离散化方法的收敛速度进行类似的考察。h、p 和hp 版本的空间与时间离散化参数均按前一项实验中的设置选取。

结果如图 9 所示。在代数h分级网格上，h版本的平方误差为 $\mathcal{O}\left(h^{\tilde{\beta}}\right)$，如推论 5.4 所示。$p$ 版本的相应结果为 $\mathcal{O}\left(p^{-2}\right)$，与推论 5.8 一致。在几何分级网格上，$hp$ 版本实现了快于代数收敛的收敛速度。

7.2 多边形障碍物上的软散射问题

下面我们考虑如图 10(b) 所示的不同类型闭合障碍物Γ上的弱奇异积分方程(15)，其中汇总了所考虑的四种凸多边形几何。

回顾第 2 节所述的记号，闭弧 Γ 将 $\mathbb{R}^2$ 划分为有界内部区域 Ω'、 $\partial\Omega' = \Gamma$以及其补集 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$。由第 3.1 节可知，外部区域 Ω 中的解$\mathbf{u}$ 在 Γ的角点附近局部呈现为顶点处距离 r 的幂:

$$u_i \approx C_{i,\omega_{ext}}(t) r^{\nu^*(\omega_{ext})}, \quad r \to 0,$$

其中 ω_{ext} 为所考虑的外角（其补角为 ω_{int}），指数 $\nu^*(\omega_{ext})$是方程 (25) 的最小解，即

$$\sin^2(\omega_{ext}\,\nu^*) = \left(\frac{\nu^*}{k}\sin\omega_{ext}\right)^2, \tag{83}$$

其正实部为正，其中 $k = 3 - 2\lambda/(\lambda+\mu)$。前因子$C_{i,\omega_{ext}}(t)$是 t中的光滑函数，与 r无关，因此主导奇异行为不随时间变化。边界积分方程 (15) 的解 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{p}(\mathbf{u})|_\Gamma$表示障碍物处的牵引力；根据第 3 节的讨论，其在顶点处的渐近行为可表示为

$$\Phi_i \approx \widetilde{C}_{i,\omega_{ext}}(t) r^{\nu^*(\omega_{ext})-1},\ r \to 0.$$

对于 Lam´é 参数 $\lambda = 2$、 $\mu = 1$ 和质量密度 $\varrho = 1$，图 10(a) 显示了外部和内部指数 $\nu^*(\omega_{ext})$、$= \nu^*(2\pi - \omega_{int})$ 和 $\nu^*(\omega_{int})$ 随 ω_{int} 变化的情况。红色叉号表示与图 10(b) 右侧所示多边形的红色角点相对应的指数ν^*，其内角分别为 $\frac{7\pi}{24}$ ($\nu^* = 0.5372$)、 $\frac{\pi}{3}$ ($\nu^* = 0.5451$)、 $\frac{3\pi}{8}$ ($\nu^* = 0.542$) 和 $\frac{3\pi}{5}$ ($\nu^* = 0.6306$)。

例 3。 我们考虑图 10(b) 所示多边形上弱奇异积分方程 (60) 的 Galerkin 解，时间截至 $T = 1$。在所有情形中，施加的右端项为 $\tilde{g}_1(\mathbf{x}\ t) = 0$， $\tilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = H[t]f(t)100|x|^{9.5}$。图 10(c) 给出了由边界条件产生的一个解示例，其中绘制了等边三角形Γ_1底边处的垂直分量 $\mathbf{\Phi}$ 。该解在底边角点附近具有高梯度。对于多边形 Γ_i、 $i = 1, \ldots, 4$ 的每条边，网格按照 (62) 代数分级并向角点加密，其中分级参数给定为 $\tilde{}$，$\beta = 1, 2, 3$。多边形 Γ_1 和 Γ_4 均为等边三角形，每边划分为 80 条线段；对于 Γ_2 和 Γ_3，长度相等的两条边各使用 80 条线段，而底边分别使用 75 条和 87 条线段。所有实验均选取时间步长 $\Delta t = 0.00625$ 。

在图 11 中，针对每种几何形状，绘出了 $\mathbf{\Phi}$ 的欧几里得范数随距图 10 所示角点的距离 r 变化的情况。我们观察到，对于所有考察的几何形状，解都呈现出预期的行为 $\mathcal{O}(r^{-(1-\nu^*)})$。具体而言，锐角角点的渐近行为会导致比五边形的钝角更强的奇异性（$1 - \nu^* \approx 0.5$）。这证实了第 3.1 节中的理论讨论。

最后，我们考察多边形障碍物上的能量收敛性。具体而言，我们研究等边三角形 Γ_1，并在表 4 中报告空间

离散化每个层级对应的能量值。随着自由度增加，能量趋近于基准值（同样，此处的数量指向量解的一个分量），能量范数中的平方误差如图 12 所示。平方误差在对数尺度图中的衰减呈线性，对应于每个实验中的 $\mathcal{O}(\text{自由度}^{-2\nu^*\beta})$，如推论 5.4 所示。

表 4： $T = 1$的近似解的能量范数平方

Δt	DOF	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\alpha}$, $\widetilde{\beta} = 1$	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\alpha}$, $\widetilde{\beta} = 2$	$\boldsymbol{\alpha}^\top E_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\alpha}$, $\widetilde{\beta} = 3$
$5.00 \cdot 10^{-2}$	30	$5.7394 \cdot 10^{-2}$	$7.4875 \cdot 10^{-2}$	$7.6829 \cdot 10^{-2}$
$2.50 \cdot 10^{-2}$	60	$6.8490 \cdot 10^{-2}$	$7.6828 \cdot 10^{-2}$	$7.7460 \cdot 10^{-2}$
$1.25 \cdot 10^{-2}$	120	$7.3821 \cdot 10^{-2}$	$7.7448 \cdot 10^{-2}$	$7.7566 \cdot 10^{-2}$
$6.25 \cdot 10^{-3}$	240	$7.5989 \cdot 10^{-2}$	$7.7558 \cdot 10^{-2}$	$7.7582 \cdot 10^{-2}$

例 4。 在本例中，我们通过数值计算表明，角点处的奇异行为和能量误差的衰减并不取决于施加在障碍物上的边界数据。具体而言，我们考虑图 10(b) 中的三角形障碍物 Γ_2。对于具有平凡水平方向 $\widetilde{g}_1(\mathbf{x}\ t) = 0$和不同垂直分量 $\widetilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = H[t]f(t)$、$\widetilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = H[t]f(t)x^4$以及 $\widetilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = 100H[t]f(t)|x|^{9.5}$的右端项，计算方程 (60) 的解 $\boldsymbol{\Phi}$。在图 13(a) 中，我们考察 $\boldsymbol{\Phi}$ 的欧几里得范数对于这些不同边界数据的行为，并将其绘制为距离 r 的函数，其中该距离指向以红色突出显示的顶点（图 10(b)，几何 Γ_2）。对于底角为 $3\pi/8$，预计奇异指数为$\nu^* \simeq 0.542$。事实上，我们发现，在对数尺度下，对于每组经过测试的边界数据，$r \to 0$ 的范数曲线斜率都平行于对应于 $r^{-(1-0.542)}$ 的虚线。在图 13(b) 中，$\boldsymbol{\Phi}$ 的垂直分量显示在 Γ_2 的底边上，时间为 $T = 1$，突出了角点处的奇异行为。

在图 14 中，我们考虑 10(b) 中的等边三角形 Γ_1，并研究 h 版本中随着自由度增加而产生的误差衰减。线段数和时间步长与 4 中相同。这里的右端项为 $\widetilde{g}_1(\mathbf{x}\ t) = 0, \widetilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = H[t]f(t)x^4$。每条边上都采用代数 $\tilde{\beta}$-graded˜网格，其中 $\beta = 1,2$。随着自由度增加，能量趋近于基准值；在对数尺度图中，能量范数下的平方误差线性衰减为 $\mathcal{O}(\text{自由度}^{-2\nu^*\beta})$，这与推论 5.4 一致。

7.3 平坦障碍物上的硬散射问题

下文中，我们考虑障碍物 $\Gamma = \{(x, 0) \in \mathbb{R} \mid x \in [-0.5, 0.5]\}$ 上的离散超奇异积分方程 (17)，其诺伊曼条件与时间无关。我们尤其关注采用 h, p 和 hp 版本求解离散问题 (61)。

˜**例 5.** 我们考虑与 $h_i(\mathbf{x}\ t) = \eta_i$ 对应的诺伊曼数据，其中 $\eta_i \in \mathbb{R}$ 对于$i = 1,2$ 为常数。边界上的数据与时间无关。因此，随着时间增加，解的分量$\Psi_i(\mathbf{x}\ t)$趋向于稳态函数

$$\Psi_{i,\infty}(\mathbf{x}) = k_i \sqrt{1/4 - x^2}, \quad k_i = -\frac{c_{\mathsf{P}}^2}{\rho c_{\mathsf{S}}^2 \left(c_{\mathsf{P}}^2 - c_{\mathsf{S}}^2\right)} \eta_i, \quad i = 1, 2, \tag{84}$$

表示参考弹性静力学诺伊曼问题解的分量，其边界数据为$\mathbf{h}_\infty(\mathbf{x}) = \eta_i$。我们具体令 $\eta_i = 1$ 对于 $i = 1,2$，因此 $\boldsymbol{\Psi}$ 的两个分量都收敛到同一个弹性静力学函数 $\Psi_{1,\infty} = \Psi_{2,\infty}$。考虑两组不同的速度，$c_{\mathsf{S}} = 1$, $c_{\mathsf{P}} = 2$和 $c_{\mathsf{S}} = 1$, $c_{\mathsf{P}} = 3$。

图15(a)显示了在时间区间 $[0, 7.5]$ 上，两组速度对应的 Ψ_1 和 Ψ_2在 Γ的中点 (0,0) 处计算得到的时间历程。我们观察到，经过初始瞬态阶段后，解

趋近于稳态值 (84)。图15(b)绘出了速度为 $c_{\mathrm{P}} = 2{,}3$ 时刻 $T = 7.5$ 的垂直分量 Ψ_2 ，关于 Γ。这个时刻足够长，因此对于两个问题，数值解都与 (84) 中的稳态参考解非常接近。图15中的曲线分别是在网格尺寸为 $h = 0.025$ 和 $\Delta t = 0.0125$ 的均匀时空网格上求解方程 (61) 得到的。

为说明解在 $\partial\Gamma$ 附近的行为，图16展示了 $-\boldsymbol{\Psi}$ 的各个分量，对于$c_{\mathrm{S}} = 1,\ \ c_{\mathrm{P}} = 2$，以及相对于指向线段 $(0.5{,}0)^\top$ 右端点的距离 r 在不同时间瞬间的变化：可以观察到，奇异行为与时间无关，并且当 r 趋于零时，数值解按 $r^{1/2}$ 衰减。图16中的曲线使用带有81个节点的 β 分级网格上的 h 版本获得，时间步长为 $\Delta t = 0.00625$。

对于 $c_{\mathrm{S}} = 1,\ \ c_{\mathrm{P}} = 2$ 的情形，我们研究截至时间 $T = 2$ 的近似解 (61) 在能量范数下的误差衰减，分析数值 $\boldsymbol{\beta}^\top E_{\mathcal{W}} \boldsymbol{\beta}$，即近似解的能量范数平方；对于所有经过测试的离散化方法，该数值都逐渐趋近于一个共同的基准值。有关 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $E_{\mathcal{W}}$ 的构造细节，请参阅第6节。如下文所述，以下的空间自由度数量对应于向量解的一个分量。对于 $\tilde{h}$ $\tilde{}$版本，我们在 Γ 上选取 β 分级网格，分别包含 $\beta = 1{,}2$ 和 $10, 20{,}40$，以及80条线段。当线段数为10时，每次细化空间网格，时间步长 $\Delta t = 0.05$ 都减半。图17中的对数尺度图显示， h 版本的误差呈线性衰减，并且与直线 $\mathcal{O}$(自由度$^{-\beta}$) 平行。结果证实了推论 5.4 中的预测。对于 p 版本，我们对障碍物采用包含 $h = 0.1$ 的均匀离散化，并使用均匀时间步长 $\Delta t = 1/$（2·自由度）。对数尺度图显示，误差呈线性衰减，并且与预期直线 $\mathcal{O}$(自由度$^{-2}$) 平行。对于采用几何分级网格的 hp 版本，我们考虑 Γ 上分别包含4,6,8,10和12条线段的网格。每次细化网格时，次数 p 从2开始，在所有空间单元上均匀增加。对于4条线段，时间步长取为 $\Delta t = 0.125$ ，之后每次迭代减半。与前面介绍的软散射问题类似，随着空间自由度增加， hp 方法展现出最快的误差衰减。

8 结论

本文开始研究线性弹性动力学中高阶边界元法，包括 h、 p 和 hp 版本。根据区域几何奇异点附近解的渐近展开，可以构造高效的离散化，其逼近率与定常问题 h、 p 和 hp 逼近已知的逼近率相同。

本文给出的准最优 hp 显式估计，补充了近期针对波动方程的分析，涵盖有限元法和边界元法 [21, 23, 42], ，以及二维线性弹性动力学 [43]。收敛性由区域非光滑边界点附近解的奇异行为决定。我们的分析结合了定常问题的经典逼近结果 [15], 与时变问题中主导奇异项的分析 [40]。

针对二维裂缝和多边形区域的大量数值实验展示了准最优收敛率，并验证了解在顶点附近预期的主导渐近行为。对于裂缝， p 版本的能量误差 O（p^{-1}）与在二级加密网格上采用 h 版本时以相同的速率收敛。对于封闭多边形区域，解在顶点附近的奇异性较弱，具体程度取决于材料参数和开角。因此，分析和数值实验均获得了更高的收敛率。

附录 A

本附录将在边界 Γ 上引入时空各向异性 Sobolev 空间，作为分析时变边界积分算子的一种便利的泛函分析框架。详细

论述见 [29, 19]。此外，我们汇总这些时空各向异性空间中积分算子$\mathcal{V},\mathcal{W}$ 的映射性质（定理 A.2），并证明相关双线性型的连续性和强制性（命题 A.3）。后者意味着第 4 节中 Galerkin 格式的稳定性。对于开屏或线段的情形， $\partial\Gamma \neq \emptyset$，我们首先将 Γ 扩展为一个闭的、可定向的~Lipschitz 流形 $\widetilde{\Gamma}$。在 Γ 上，我们回顾支撑分布的通常 Sobolev 空间：

$$\widetilde{H}^s(\Gamma) = \{u \in H^s(\widetilde{\Gamma}) : \operatorname{supp} u \subset \overline{\Gamma}\}\ , \quad s \in \mathbb{R}\ .$$

~ ~ ~Sobolev空间 $H^s(\Gamma)$ 是商空间 $H^s(\Gamma)/H^s(\widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma)$。为了定义一族 Sobolev 范数，$\sim\alpha_i$ 设为从开集 B_i 对 Γ 的覆盖的单位分解。给定微分同胚 φ_i，它们将B_i 映射到 $\mathbb{R}^n$ 中的单位立方体，则 Sobolev 范数由 $\mathbb{R}^n$ 诱导，其中参数为 $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$：

$$||u||_{s,\omega,\widetilde{\Gamma}} = \left(\sum_{i=1}^{p}\int_{\mathbb{R}^n}(|\omega|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)^s|\mathcal{F}\left\{(\alpha_i u)\circ\varphi_i^{-1}\right\}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这里， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{x}\mapsto\boldsymbol{\xi}}$ 表示傅里叶变换 $\mathcal{F}\varphi(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$。不同的 $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 在 $H^s(\Gamma)$、$\|u\|_{s,\ \omega,\ \Gamma} = \inf_{v\in\widetilde{H}^s(\widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma)}\|u+v\|_{s,\ \omega}$ 以及 $H^s(\Gamma)$、$\|u\|_{s,\ \omega,\ \Gamma,\ *} = \|e_+u\|_{s,\ \omega,\ \widetilde{\Gamma}}$ 上诱导出~等价范数。$\sim e_+$ 将分布 u 从 Γ 延拓至 $\widetilde{\Gamma}$，并在外部取 0。当固定了特定的 ω 时，我们分别用 $H^s_\omega(\Gamma)$ 表示 $H^s(\Gamma)$，用 ~ ~ $H^s_\omega(\Gamma)$ 表示 $H^s(\Gamma)$。范数$\|u\|_{s,\ \omega,\ \Gamma,\ *}$ 强于$\|u\|_{s,\ \omega,\ \Gamma}$。

现在我们可以定义一族时空各向异性 Sobolev 空间：

定义 A.1。对于 $\sigma > 0$ 和 $r,\ s \in \mathbb{R}$ 定义

$$\begin{aligned} H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^s(\Gamma)) &= \{u \in \mathcal{D}'_+(H^s(\Gamma)) : e^{-\sigma t}u \in \mathcal{S}'_+(H^s(\Gamma)) \text{ and } ||u||_{r,s,\Gamma} < \infty\}\ , \\ H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^s(\Gamma)) &= \{u \in \mathcal{D}'_+(\widetilde{H}^s(\Gamma)) : e^{-\sigma t}u \in \mathcal{S}'_+(\widetilde{H}^s(\Gamma)) \text{ and } ||u||_{r,s,\Gamma,*} < \infty\}\ . \end{aligned} \tag{85}$$

这里， $\mathcal{D}'_+(E)$表示定义在 $\mathbb{R}$ 上、支集包含于 $[0,\infty)$的所有分布所构成的空间，其值分别取自希尔伯特空间 $E = H^s(\Gamma)$和 $E = \widetilde{H}^s(\Gamma)$。 $\mathcal{S}'_+(E) \subset \mathcal{D}'_+(E)$表示温和分布的子空间。这些 Sobolev 空间赋予范数

$$\begin{aligned} \|u\|_{r,s} := \|u\|_{r,s,\Gamma} &= \left(\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma}|\omega|^{2r}\ \|\hat{u}(\omega)\|^2_{s,\omega,\Gamma}\ d\omega\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{r,s,*} := \|u\|_{r,s,\Gamma,*} &= \left(\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma}|\omega|^{2r}\ \|\hat{u}(\omega)\|^2_{s,\omega,\Gamma,*}\ d\omega\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{86}$$

它们是希尔伯特空间。当 $r = s = 0$ 时，它们对应于带权 L^2空间，其内积为$\int_0^\infty e^{-2\sigma t}\int_\Gamma uv d\Gamma_{\mathbf{x}}\ dt$。由于 Γ 是 Lipschitz 的，当 $|s| \le 1$时，这些空间不依赖于 α_i 和 φ_i的选取，与标准 Sobolev 空间的情形相同。

我们还将使用范数$\|u\|_{r,\ s,\ (t_1,t_2]\times\Gamma}$ 以及$\|u\|_{r,\ s,\ (t_1,t_2]\times\Gamma,\ *}$，用于时间区间 $(t_1,\ t_2]$ 上的限制。

现在设 $\widetilde{\Gamma} = \partial\Omega'$ 为 Lipschitz 子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的边界，且 $\Gamma \subset$ $\widetilde{\Gamma}$ 开。记 $\Omega = \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega'}$。
我们回顾弱奇异积分算子 $\mathcal{V}$ 和超奇异算子 $\mathcal{W}$的映射性质。

定理 A.2。 单层势算子和超奇异算子对于$\sigma > 0$ 和 $r \in \mathbb{R}$是连续的：

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &: H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\ ,\ , \\ \mathcal{K}' &: H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))\ , \\ \mathcal{K} &: H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\ , \\ \mathcal{W} &: H^{r+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))\ . \end{aligned}$$

这可见于 [12], 中的定理 3.1；另请参见 [8] 关于二维中 $\mathcal{W}$ 的内容，其证明类似。另请参见[31] ，其中近期讨论了波动方程的映射性质。

为方便读者，我们回顾无限时空柱体 $\Gamma \times \mathbb{R}^+$ 中狄利克雷问题的双线性型的基本性质，

$$B_{D,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Phi},\tilde{\mathbf{\Phi}}) := \int_{\mathbb{R}^+}\int_\Gamma \mathcal{V}\partial_t\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x})\ \tilde{\mathbf{\Phi}}(t,\mathbf{x})\ d\Gamma_{\mathbf{x}}\, d_\sigma t\ , \tag{87}$$

其中 $d_\sigma t = e^{-2\sigma t}dt$，以及诺伊曼问题所对应的双线性型 ，

$$B_{N,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Psi},\tilde{\mathbf{\Psi}}) := \int_{\mathbb{R}^+}\int_\Gamma \mathcal{W}\partial_t\mathbf{\Psi}(t,\mathbf{x})\ \tilde{\mathbf{\Psi}}(t,\mathbf{x})\ d\Gamma_{\mathbf{x}}\, d_\sigma t\ , \tag{88}$$

命题 A.3。设 $\sigma > 0$。
a) 对于任意 $\mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}} \in H^1_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，有：

$$|B_{D,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Phi},\tilde{\mathbf{\Phi}})| \lesssim \|\mathbf{\Phi}\|_{1,-\frac{1}{2},\Gamma,*}\|\tilde{\mathbf{\Phi}}\|_{1,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \tag{89}$$

and

$$\|\mathbf{\Phi}\|^2_{0,-\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim B_{D,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Phi}). \tag{90}$$

b) 对于任意 $\mathbf{\Psi}, \tilde{\mathbf{\Psi}} \in H^1_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^n$，有：

$$|B_{N,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Psi},\tilde{\mathbf{\Psi}})| \lesssim \|\mathbf{\Psi}\|_{1,-\frac{1}{2},\Gamma,*}\|\tilde{\mathbf{\Psi}}\|_{1,\frac{1}{2},\Gamma,*} \tag{91}$$

and

$$\|\mathbf{\Psi}\|^2_{0,\frac{1}{2},\Gamma,*} \lesssim B_{N,\Gamma\times\mathbb{R}^+}(\mathbf{\Psi},\mathbf{\Psi}). \tag{92}$$

证明。 不等式 (89) 和 (91) 可由定理 A.2 中的映射性质推出。强制性 (92) 已在 [7, 8] 二维情形中证明，而该证明可逐字适用于任意维数。

为证明 (90)，我们考虑频域中的弹性问题：

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = \operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Omega'\cup\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}. \end{cases} . \tag{93}$$

假设 Im $(\omega) \geq \sigma > 0$。频域中牵引力的单层方程的能量弱形式为（利用帕塞瓦尔恒等式）：_[1] ~求 $[\mathbf{p}] \in H_\omega{}^2(\Gamma)^n$ 使得

$$B_{D,\omega}([\mathbf{p}],\overline{\boldsymbol{q}}) = \langle -i\omega\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}],\overline{\boldsymbol{q}}\rangle_{\widetilde{\Gamma}} = \langle -i\omega\mathbf{g},\overline{\boldsymbol{q}}\rangle_{\widetilde{\Gamma}} \tag{94}$$

[1] ~对所有 $\boldsymbol{q} \in H_\omega{}^2(\Gamma)^n$.

其中包含单层算子 $\mathcal{V}_\omega$，该算子由 $\mathcal{V}$ 经傅里叶变换得到。利用格林公式，如 [8], 定理 3.1 中所示，我们有

$$\int_{\Omega'\cup\Omega}\left(\overline{\sigma(\mathbf{u})} : \varepsilon(\mathbf{u}) - \rho\omega^2|\mathbf{u}|^2\right)d\mathbf{x} = \int_{\widetilde{\Gamma}}\mathbf{u}\cdot\overline{[\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}]}d\widetilde{\Gamma} \equiv \langle\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}],\overline{[\mathbf{p}]}\rangle_{\widetilde{\Gamma}}.$$

现在注意，$|\langle -i\omega\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}],[\mathbf{p}]\rangle_{\widetilde{\Gamma}}| \geqslant \mathrm{Re}\ i\omega\langle\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}],[\mathbf{p}]\rangle_{\widetilde{\Gamma}}$和

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\ i\overline{\omega}\langle\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}],\overline{[\mathbf{p}]}\rangle_{\widetilde{\Gamma}} &= \mathrm{Re}\left(i\overline{\omega}\int_{\Omega'\cup\Omega}\overline{\sigma(\mathbf{u})} : \varepsilon(\mathbf{u})d\mathbf{x}\right) + \mathrm{Re}\left(-i\omega\int_{\Omega'\cup\Omega}\rho|\omega|^2|\mathbf{u}|^2d\mathbf{x}\right) \\ &= 2\mathrm{Im}(\omega)E_\omega \geqslant 0,\end{aligned} \tag{95}$$

with

$$E_\omega = \frac{1}{2}\int_{\Omega'\cup\Omega}\left(\overline{\sigma(\mathbf{u})} : \varepsilon(\mathbf{u}) + \rho|\omega|^2|\mathbf{u}|^2\right) d\mathbf{x}\ .$$

从物理上看， E_ω 是位移**u**的能量，并且满足

$$E_\omega \geqslant C_\sigma \|\mathbf{u}\|^2_{1,\omega,\Omega'\cup\Omega} \tag{96}$$

对于某个正常数 C_σ。由（95）和（96）可推得

$$|\langle -i\omega\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}], \overline{[\mathbf{p}]}\rangle_{\widetilde{\Gamma}}| \geqslant \widetilde{C}_\sigma \|\mathbf{u}\|^2_{1,\omega,\Omega'\cup\Omega}\ .$$

根据迹定理，存在一个正常数 C_{trace} ，使得

$$2C_{trace}\|\mathbf{u}\|^2_{1,\omega,\Omega'\cup\Omega} \geqslant 2\|\mathbf{p}|_{\widetilde{\Gamma}_+}\|^2_{-1/2,\omega,\widetilde{\Gamma}} + 2\|\mathbf{p}|_{\widetilde{\Gamma}_-}\|^2_{-1/2,\omega,\widetilde{\Gamma}} \geqslant \|[\mathbf{p}]\|^2_{-1/2,\omega,\widetilde{\Gamma}}.$$

频域中的强制性如下:

$$|\langle -i\omega\mathcal{V}_\omega[\mathbf{p}], \overline{[\mathbf{p}]}\rangle_{\widetilde{\Gamma}}| \geqslant \frac{\widetilde{C}_\sigma}{2C_{trace}}\|[\mathbf{p}]\|^2_{-1/2,\omega,\widetilde{\Gamma}}. \tag{97}$$

为证明（90），还需将强制性（97）从频域转换到时域。对 ω积分（94）并使用帕塞瓦尔恒等式，注意到 $\mathcal{F}^{-1}_{\omega\to t}(\widehat{\varphi}(\omega+i\sigma)) = \varphi(t)e^{-\sigma t}$，可得恒等式

$$\int_{\mathbb{R}+i\omega_I^0}\int_{\widetilde{\Gamma}} -i\omega\mathcal{V}_\omega\widehat{\boldsymbol{\Phi}}\cdot\overline{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}d\widetilde{\Gamma}d\omega = \int_0^{+\infty}\int_{\widetilde{\Gamma}} e^{-2\sigma t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{V}\boldsymbol{\Phi}\right)\cdot\boldsymbol{\Phi}d\widetilde{\Gamma}dt = B_D\left(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}\right).$$

现在使用（97）：

$$\mathrm{Re}\, B_D\left(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}\right) = \int_{\mathbb{R}+i\sigma}\mathrm{Re}\, i\overline{\omega}\langle\mathcal{V}_\omega\widehat{\boldsymbol{\Phi}},\overline{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}\rangle_{\widetilde{\Gamma}} \geqslant \frac{\widetilde{C}_\sigma}{2C_{trace}}\int_{\mathbb{R}+i\sigma}\|\widehat{\boldsymbol{\Phi}}\|^2_{-1/2,\omega,\widetilde{\Gamma}}d\omega\ .$$

因此

$$|B_D\left(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}\right)| \geq \frac{\widetilde{C}_{\omega_I}}{2C_{trace}}\|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{0,-1/2,\widetilde{\Gamma}}\ .$$

~命题 A.3 可通过限制为支撑在 $\Gamma\subset\Gamma$ 中的分布得到。 □

附录 B

下面，我们介绍 Matyukevich 和 Plamenevskiĭ 的方法，证明弹性动力学狄利克雷问题 (4) - (6) 的解在区域的一个非光滑边界点邻域内的渐近展开。为便于参考 Plamenevskiĭ 及其合作者的工作，以及 [23], ，本节采用了分析学界的一些记号，而非数值研究中常用的记号。特别是，文章其他部分中的 $\sigma > 0$ 在此处称为 γ，奇异指数 λ_ℓ 记为 $i\lambda_\ell$，傅里叶变换及其逆变换的定义则互换了。不过请注意，与具体参考文献 [40], 相比，维数 n 和 m 互换了，但它们与本文主体部分一致。

下面我们考虑两种模型几何：楔形域和角点，用以描述该系统及更一般系统的解在区域非光滑边界点附近的局部行为。它们具有 $\mathbb{D} = \mathbb{K}\times\mathbb{R}^{n-m}\subset\mathbb{R}^n$ 的形式，其中 $m\geq 2$ 和 $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^m$ 是一个开锥。我们在楔形域 $\mathbb{D}$ 中使用局部坐标$\mathbf{x} = (\mathbf{y}\ z)$。

对于 $n \geq 2$，我们考虑时空柱体 $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ 中的弹性动力学问题 (4) - (6)，并将其抽象地写成如下形式:

$$\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}}, D_t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}\ , \tag{98}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \partial\mathbb{D} \times \mathbb{R}\ . \tag{99}$$

具有矩阵微分算子 $(\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},\ D_t)\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t))_p = \partial_t^2\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t) - \sum_{k\ ,\ l,\ q=0}^{n} \partial_k a_{pq}^{kl}(\mathbf{x})\partial_l u_q(\mathbf{x}\ t),\ p = 1,\ \ldots\ldots,\ n$。

应用傅里叶变换 $\mathcal{F}_{t\mapsto\tau}$ 后，得到一个参数椭圆问题，其中 $\tau = \sigma - i\gamma$、$\gamma > 0$、$\sigma \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}}, \tau)\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tau),\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{D},\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = 0,\quad \mathbf{x} \in \partial\mathbb{D}\ . \tag{100}$$

我们将该算子在 $L^2(\mathbb{D})$ 中的闭包记为 $\mathcal{A}_D(\tau) = \mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},\ \tau)$。我们首先指出一个适定性结果，即 [40] 中的定理 4.1.2。

命题 B.1。对于每个 $\hat{\mathbf{f}} \in L^2(\mathbb{D})$ 以及 $\tau = \sigma - i\gamma$、$\sigma \in \mathbb{R}$、$\gamma > 0$，方程 (100) 存在唯一解 $\hat{\mathbf{v}}$。此外，存在一个与 τ 和 $\mathbf{f}$ 无关的常数 $c > 0$，使得

$$\gamma^2 \int_{\mathbb{D}} (|\tau|^2|\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)|^2 + |D_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)|^2)d\mathbf{x} \leq c \int_{\mathbb{D}} |\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tau)|^2 d\mathbf{x}\ . \tag{101}$$

证明。在标准 Sobolev空间 $H_0^1(\mathbb{D})$ 上，我们定义半双线性型

$$B_D^\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{D}} \sum_{i,j,k,l} C_{kl}^{ij}(\mathbf{x})\partial_k u_i(\mathbf{x})\partial_l \overline{v_j(\mathbf{x})}d\mathbf{x} - \tau^2 \int_{\mathbb{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}\ ,$$

其中 C_{kl}^{ij} 表示第 2 节中的胡克张量。B_D^τ 的一个关键性质是科恩不等式，它用 $H^1(\mathbb{D})$ 的范数来估计 B_D^τ；参见 [40] 中的命题 4.1.3：若 $\tau^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$，则存在 $\delta = \delta(\tau) > 0$ 使得 $|B_D^\tau(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \delta\|\mathbf{u};\ H^1(\overline{\mathbb{D}})\|^2$。

然后应用拉克斯–米尔格拉姆定理即可得出该结论。 □

B.1 圆锥中的参数狄利克雷问题的解

为了进行更细致的分析，对式 (98)、(99) 中变量 z 进行傅里叶变换 $\mathcal{F}_{z\mapsto\xi}$，并在 $\mathbb{K}$ 中引入极坐标: $r = |\mathbf{y}|$，$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{y}\,|\mathbf{y}|$。我们首先假设 $\mathbf{v}$ 是参数 $\tau \in \mathbb{R} - i\gamma$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$ 下非齐次狄利克雷问题的解,

$$\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}}, \xi, \tau)\mathbf{v}(\mathbf{y}, \xi, \tau) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \xi, \tau), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{K} \tag{102}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \xi, \tau) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{y}, \xi, \tau), \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{K}\ . \tag{103}$$

为简单起见，我们首先考虑齐次狄利克雷问题，对应于 $\mathbf{g} = 0$。非零狄利克雷数据 $\mathbf{g}$ 对应的结论可由小节 B.2 中楔形域的一般结果推得。

命题 B.2 (定理 6.2.5, [40])。设 $\tau \in \mathbb{R} - i\gamma$，且 $\gamma > 0$。对于所有 $\hat{\mathbf{f}} \in L^2(\mathbb{K})$，存在唯一的强解 $\mathbf{v}$ 满足 (102)、(103)，并且

$$\gamma^2(p^2\|\mathbf{v}; L^2(\mathbb{K})\|^2 + \|D_{\mathbf{x}}\mathbf{v}; L^2(\mathbb{K})\|^2) \leq c\|\hat{\mathbf{f}}; L^2(\mathbb{K})\|^2\ .$$

这里有 $p = \sqrt{|\xi|^2 + |\tau|^2}$，且 c 独立于 ξ、τ。

定义加权索博列夫范数

$$\|v;H^s_\beta(\mathbb{K})\|=\left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{K}} r^{2(\beta+|\alpha|-s)}|D^\alpha_{\mathbf{x}}v|^2\right)^{\frac12} d\mathbf{x}\ , \tag{104}$$

$$\|v;H^s_\beta(\mathbb{K},p)\|=\left(\sum_{k=0}^{s}p^{2k}\|v;H^{s-k}_\beta(\mathbb{K})\|^2\right)^{\frac12}\ . \tag{105}$$

令 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{K})$ 为一个截断函数，它在圆锥 $\mathbb{K}$ 的顶点邻域内为 $=1$，且$\chi_\tau(\mathbf{x})=\chi(|\tau|\mathbf{y})$。由命题 B.2 可得，取 $p=\sqrt{|\xi|^2+|\tau|^2}$，且 c 与 ξ、τ 无关，

$$\gamma^2\|\mathbf{v};H^1_\beta(\mathbb{K},p)\|^2+\|\chi_\tau\mathbf{v};H^2_\beta(\mathbb{K},p)\|^2\le c\left\{\|\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\xi,\tau)\mathbf{v};H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2+\frac{p^{2(1-\beta)}}{\gamma^2}\|\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\xi,\tau)\mathbf{v};L^2(\mathbb{K})\|\right\}. \tag{106}$$

令 $\Xi=\mathbb{K}\cap S^{m-1}$。对于每个 $\lambda\in\mathbb{C}$，算子束

$$\mathcal{A}_D(\lambda)\boldsymbol{\varphi}=\left\{r^{2-i\lambda}\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},0,0)r^{i\lambda}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Xi}\right\} \tag{107}$$

定义了一个映射

$$\mathcal{A}_D(\lambda):H^2(\Xi)\to L^2(\Xi)\times H^{3/2}(\partial\Xi)\ ,$$

除一离散特征值集合 $\{\lambda_\ell\}$ 外，它是一个同构。

对于弹性动力学方程，$\mathcal{L}$ 具有常系数，形式为 $\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},D_t)\mathbf{v}=\partial_t^2\mathbf{v}+A(D_{\mathbf{x}})\mathbf{v}$，其中

$$A(D_{\mathbf{x}})=A(D_{\mathbf{y}},D_z)=D_kA^{kl}D_l\ ,$$

其中每个 t 他 A^{kl} 是一个常数矩阵 $A^{kl}=(a^{kl}_{ij})_{i,\ j}$。于是，算子束可表示为

$$\left\{r^{2-i\lambda}A(D_{\mathbf{y}},0)r^{i\lambda}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Xi}\right\}\ . \tag{108}$$

我们假设条带 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\ m-3\le 2\mathrm{Im}\ \lambda\le m-2\}$ 与 $\mathcal{A}_D$的谱不相交。对于 $\mathcal{A}_D$ 的一个特征值 λ_ℓ，我们取一个幂型解

$$\mathbf{u}_\ell(\mathbf{y})=r^{i\lambda_\ell}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln(r))^q\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k-q)}(\boldsymbol{\omega}) \tag{109}$$

齐次狄利克雷问题的解，其中 $\tau=0,\xi=0$:

$$\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},0,0)\mathbf{u}(\mathbf{y})=0,\quad \mathbf{y}\in\mathbb{K}\ , \tag{110}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{y})=0,\quad \mathbf{y}\in\partial\mathbb{K}\ . \tag{111}$$

这里，$\{\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(0)},\dots,\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k)}\}$ 是对应于 λ_ℓ的若尔当链，由一个特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k)}$和广义特征向量$\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(0)}$，.....，$\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k-1)}$组成。令 $\kappa_1\ge\kappa_2\ge\cdots\ge\kappa_J$表示 λ_ℓ的部分重数，并令 $\{\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(0,j)},\dots,\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(\kappa_j-1,j)}):j=1,\ .....,\ J\}$ 为若尔当链的典范系。这些函数

$$\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}(\mathbf{y})=r^{i\lambda_\ell}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln(r))^q\boldsymbol{\varphi}_\ell^{(k-q,j)}(\boldsymbol{\omega}), \tag{112}$$

其中 $k=0$、.....、κ_j-1和 $j=1$、.....、J构成了对应于 λ_ℓ的幂型解空间中的一组基。

注 B.3。 对于特殊几何形状， $\mathcal{A}_D$ 的谱问题可以得到显式解。关于多边形情形下特征值和特征函数的讨论，请参见第 3.1 节；关于边的情形，请参见第 3.2 节；关于圆锥的情形，请参见第 3.3 节。

令$\mathbf{V}_\ell^{(k,j)}$ 为满足齐次方程 (110) 的对偶函数无穷级数，并令$\mathbf{V}_{\ell\,M}^{(k,j)}$ ，为其截断到 M 项后的结 (111), 果。

对偶向量函数

$$\mathbf{v}_\ell^{(k,j)}(\mathbf{y}) = r^{i\overline{\lambda_\ell}-(m-2)}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln(r))^q\boldsymbol{\psi}_\ell^{(k-q,j)}(\boldsymbol{\omega}), \tag{113}$$

构成 (110)、(111) 的幂型解空间中对应于特征值 $\lambda_\ell + i(m-2)$ 的一组基。在特定的正交条件和归一化条件下，这些基彼此匹配（例如，分别参见 [40] 中的 (114)） [44]。

记 $\{\mathbf{u}_\ell^{k\,j}\}_{,}$, $\{\mathbf{v}_\ell^{k\,j}\}_{,}$ 为 (110)、(111) 的幂型解的匹配基。接下来，我们考虑参数为 $\tau \in \mathbb{R} - i\gamma$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$、对应于 (102)、(103) 的齐次问题，

$$\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\xi,\tau)\mathbf{v}(\mathbf{y},\xi,\tau) = 0, \quad \mathbf{y}\in\mathbb{K} \tag{114}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\xi,\tau) = 0, \quad \mathbf{y}\in\partial\mathbb{K}\ . \tag{115}$$

将$\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}$ 代入 (114)、(115)，构造形式级数

$$\mathbf{U}_\ell^{(k,j)}(\mathbf{y},\xi,\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} r^{i\lambda_\ell+q}\mathbf{P}(k,j)_q(\boldsymbol{\omega},\xi,\tau,\ln(r)) \tag{116}$$

满足（114）、（115）。这里 $\mathbf{P}(k,j)_q$ 是关于 $\xi,\tau,\ln(r)$ 的多项式，其系数平滑地依赖于 $\boldsymbol{\omega}\in\Xi$。将 $\{\mathbf{u}_\ell^{k\,j}\}$,替换为 $\{\mathbf{v}_\ell^{k\,j}\}_{,}$，我们得到形式级数

$$\mathbf{V}_\ell^{(k,j)}(\mathbf{y},\xi,\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} r^{i(\overline{\lambda_\ell}+i(m-n-2))+q}\mathbf{Q}(k,j)_q(\boldsymbol{\omega},\xi,\tau,\ln(r)), \tag{117}$$

满足 (114)、(115)。函数 $\mathbf{Q}(k,\ j)_q$ 再次遵循与 $\mathbf{P}(k,\ j)$ 类似的性质 $_q$.

在参考文献 [40] 中，为这些基构造了形式级数 $\mathbf{U}_\ell^{(k,j)}$ 、$\mathbf{V}_\ell^{(k,j)}$ 。

现在考虑（102）、（103），其中 $\chi\mathbf{v}\in H^2_\beta(\mathbb{K})$、$\hat{}\mathbf{f}\in H^0_\beta(\mathbb{K})\cap H^0_\gamma(\mathbb{K})$，对于 $\gamma<\beta$。与上文一样，$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{K})$ 表示一个截断函数，它在圆锥 $\mathbb{K}$ 的顶点邻域内满足 $=1$。如果直线 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\ \lambda=\gamma+\frac{m}{2}-2\}$ 不与算子束 $\mathcal{A}_D$ 的谱相交，那么我们有

$$\mathbf{v} = \chi\sum c_\ell^{(k,j)}\mathbf{U}_{\ell,M}^{(k,j)} + \mathbf{h}\ ,$$

其中余项 $\mathbf{h}$ 满足 $\chi\mathbf{h}\in H^2_\gamma(\mathbb{K})$。这里，$\mathbf{U}_{\ell\,M}^{(k,j)}$,是包含 M 项的级数$\mathbf{U}_\ell^{(k,j)}$ 的部分和，满足 $\chi r^{i\lambda_\ell+(M+1)}\mathbf{P}_{M+1}^{(k,j)}\in H^2_\gamma(\mathbb{K})$。$\mathbf{v}$ 的渐近公式包含算子束在条带 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\ \lambda\in(\gamma+\frac{m}{2}-2,\beta+\frac{m}{2}-2)\}$内对应于特征值的各项，因此 $\chi\mathbf{U}_\ell^{(k,j)}{}_{,M}\in H^2_\beta(\mathbb{K})$ 和 $\chi\mathbf{U}_\ell^{(k,j)}{}_{,M}\notin H^2_\gamma(\mathbb{K})$ — —

为陈述圆锥 $\mathbb{K}$ 顶点附近参数依赖问题的展开的主要结果，我们引入以下函数空间：

$$\|\mathbf{v};DH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\| = \left(\gamma^2\|\mathbf{v};H^1_\beta(\mathbb{K},p)\|^2 + \|\chi_p\mathbf{v};H^2_\beta(\mathbb{K},p)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\|\hat{\mathbf{f}};RH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\| = \left(\|\hat{\mathbf{f}};H^0_\beta(\mathbb{K})\|^2 + p^{2(1-\beta)}\gamma^{-2}\|\hat{\mathbf{f}};L^2(\mathbb{K})\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

其中 $p=\sqrt{|\xi|^2+|\tau|^2}$ 和 $\tau=\sigma-i\gamma$（$\sigma\in\mathbb{R},\ \gamma>0$）。根据命题 B.2 和（106），问题（102）、（103）中的算子 $\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\ \xi,\ \tau)$ 定义了一个连续映射 $\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\ \xi,\ \tau):\ DH_\beta(\mathbb{K},\ \xi,\ \tau)\to RH_\beta(\mathbb{K},\ \xi,\ \tau)$。

在 [40], Matyukevich 和 Plamenevskiĭ 研究了 $\mathcal{L}(D_{\mathbf{y}},\ \xi,\ \tau)$ 的性质对 β 的依赖关系。设 $1>\beta_1>\beta_2>\dots$ 是区间 $(-\infty,\ 1]$ 中的数，使得每条直线 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\,\lambda=\beta_r+\frac{m}{2}-2\}$ 至少包含算子束 $\mathcal{A}_D$ 的一个特征值。

Matyukevich 和 Plamenevskiĭ 得到了以下结果：

定理 B.4（定理 6.3。5, [40]）。设 $\beta\in(\beta_1,1]$，$\gamma>0$ 和 $\mathbf{f}\in RH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)$。则（102）、（103）的右端项为 $\mathbf{f}$ 时存在唯一解 $\mathbf{v}$，满足

$$\|\mathbf{v};DH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\|\le c\|\hat{\mathbf{f}};RH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\|,$$

其中 c 与 (ξ,τ) 无关。

定理 B.5（命题 6.4.1, [40]）。设 $\gamma>0,\ \beta\in(\beta_{r+1},\ \beta_r),\ 0<\beta_r-\beta<1,\ \mathbf{f}\in RH_\beta(\mathbb{K},\ \xi,\ \tau)$且

$$(\hat{\mathbf{f}},\mathbf{w}_\ell^{(k,j)}(\cdot,\xi,\overline{\tau}))_{L^2(\mathbb{K})}=0$$

对条带 $\{\mathrm{Im}\ \lambda\in(\beta_{r+1}+\frac{m}{2}-2,\beta_1+\frac{m}{2}-2)\}$ 中对应于 $\mathcal{A}_D$ 的特征值的所有 $\mathbf{w}_\ell^{(k,j)}$，解 $\mathbf{v}$ 满足 (102)、(103)，并具有如下表示

$$\mathbf{v}(\mathbf{y},\xi,\tau)=\chi(p\mathbf{y})\sum_\ell\sum_{k,j}c_\ell^{(k,j)}(\xi,\tau)\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}(\mathbf{y})+\mathbf{v}_0(\mathbf{y},\xi,\tau)\ .$$

这里，外层求和 ℓ 对算子束的所有特征值 λ_ℓ 求和，其中 $\mathrm{Im}\ \lambda=\beta_r+\frac{m}{2}-2$；内层求和则对如 (109) 所示、对应于 λ_ℓ 的幂型解的一组基 $\{\mathbf{u}_\ell^{(k,j)}\}$ 求和。余项 $\mathbf{v}_0$ 属于 $DH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)$。

有如下关系

$$c_\ell^{(k,j)}(\xi,\tau)=p^{i\lambda_\ell}\sum_q\frac{1}{q!}(i\ln(p))^q d_\ell^{(k+q,j)}(\xi,\tau)\ ,$$

with

$$d_\ell^{(k,j)}(\xi,\tau)=p^{-2}\left(\hat{\mathbf{f}}(p^{-1}\cdot,\xi,\tau),\mathbf{w}_\ell^{(k,j)}(\cdot,\xi/p,\bar{\tau}/p)\right)_{L^2(\mathbb{K})}\ .$$

此外，有如下关系

$$\|\mathbf{v}_0;DH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\|\le c\|\hat{\mathbf{f}};RH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\|,\quad |d_\ell^{(k,j)}(\xi,\tau)|\le cp^{\beta+\frac{m}{2}-2}\|\hat{\mathbf{f}};RH_\beta(\mathbb{K},\xi,\tau)\|,$$

其中常数 c 与 ξ、τ 及 $\mathbf{f}$ 无关。

B.2 楔形域中参数相关的狄利克雷问题的解

通过对偶边变量 ξ 上的傅里叶逆变换 $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\mapsto z}$，我们得到了楔形域 $\mathbb{D}$ 中一般狄利克雷问题的结果，

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},D_{\mathbf{x}},\tau)\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)=\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\tau),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{D},\tag{118}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)=\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x},\tau),\quad \mathbf{x}\in\partial\mathbb{D}\ ,\tag{119}$$

与（98）、（99）对应的频域问题。

解的正则性由 $\mathbb{D}=\mathbb{K}\times\mathbb{R}^{n-m}$ 上以下加权索博列夫空间描述。在 $\mathbb{D}$ 中，采用坐标 $\mathbf{x}=(\mathbf{y},\ z)$，并在 $\mathbb{K}$ 中引入极坐标：$r=|\mathbf{y}|,\boldsymbol{\omega}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$。定义

$$\|u;H^s_\beta(\mathbb{D})\|=\left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{D}} r^{2(\beta+|\alpha|-s)}|D^\alpha_{\mathbf{x}}u|^2\right)^{\frac12}, \tag{120}$$

$$\|u;H^s_\beta(\mathbb{D},p)\|=\left(\sum_{k=0}^{s}p^{2k}\|u;H^{s-k}_\beta(\mathbb{D})\|^2\right)^{\frac12}. \tag{121}$$

相应的空间 $H^s_\beta(\partial\mathbb{D})$ 和 $H^s_\beta(\partial\mathbb{D},\ p)$ 分别可作为 $H^s_\beta(\mathbb{D})$ 和 $\mathbb{D},\ p)$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上的迹空间获得。

基本存在性结果如下：

命题 B.6 (定理 4.2.2, [40])。假设楔形域 $\mathbb{D}$ 满足 *[40]*，$\{\hat{\mathbf{f}},\hat{\mathbf{g}}\}\in L^2(\mathbb{D})\times H^1(\partial\mathbb{D})$ 以及 $\tau=\sigma-i\gamma,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \gamma>0$ 所规定的可容许性条件。则存在唯一的强解 $\mathbf{v}$，满足(118) 和(119)。此外，存在一个与 τ 无关的常数 $c>0$，使得

$$\gamma^2\|\mathbf{v},H^1(\mathbb{D},|\tau|)\|^2+\gamma\|\mathbf{p}(\mathbf{v}),L^2(\partial\mathbb{D})\|^2\le c\left(\|\hat{\mathbf{f}}\|^2_{L^2(\mathbb{D})}+\gamma\|\hat{\mathbf{g}},H^1(\partial\mathbb{D},|\tau|)\|^2\right).$$

Matyukevich 和 Plamenevskiĭ 在空间 $H^s_\beta(\mathbb{D})$ 中得到了更高阶正则性。沿用 [40] 的做法，我们仅陈述齐次边界条件下的结果。

命题 B.7 (命题 5.1.1, [40])。设 $\beta\le 1$。假设$\mathrm{Im}\,\lambda=\beta+\frac{m}{2}-2$ 与 $\mathcal{A}_D$ 的谱不相交。那么对于$\mathbf{v}\in H^2_\beta(\mathbb{D},1)\cap H^1_{\beta=0}(\mathbb{D})$，若 $\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},0)\mathbf{v}\in L^2(\mathbb{D})$，则有

$$\begin{aligned}&\|\chi_\tau\mathbf{v},H^2_\beta(\mathbb{D},|\tau|)\|^2+\gamma^2\|\mathbf{v},H^1_\beta(\mathbb{D},|\tau|)\|^2\\&\quad\le c\left\{\|\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},\tau)\mathbf{v},H^0_\beta(\mathbb{D})\|^2+|\tau|^{2(1-\beta)}\gamma^{-2}\|\mathcal{L}(D_{\mathbf{x}},\tau)\mathbf{v},L^2(\mathbb{D})\|^2\right\},\end{aligned} \tag{122}$$

其中，对某个 $\chi\in C^\infty_0(\mathbb{K})$，$\chi_\tau(\mathbf{x})=\chi(|\tau|\mathbf{y})$ 在圆锥 $\mathbb{K}$ 的顶点邻域内成立。常数 c 与 $\mathbf{v}$、$\tau=\sigma-i\gamma$、$\sigma\in\mathbb{R}$、$\gamma>0$ 无关。

关于具有非齐次边界条件的波动方程的相应结果已在 [50], 公式（7）中讨论，但我们省略较为复杂的陈述。

[40] 中的证明分为三个步骤：（i）远离边处的估计；（ii）边附近的估计；（iii）全局先验估计（101）。

B.3 楔形域中时变问题的解；非齐次边界条件

现在，我们给出时变系统 (98)、(99) 的结果。该系统具有常系数，这些结果由频域结果通过傅里叶逆变换得到。结果以时空柱体 $\mathcal{Q}=\mathbb{D}\times\mathbb{R}$ 中的下列加权函数空间表示，其坐标为 $\mathbf{x}=(\mathbf{y}\ \ z)\in\mathbb{D}$，参数为 $q>0$：

$$\|w;H^s_\beta(\mathcal{Q})\|=\left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{D}} r^{2(\beta-s+|\alpha|)}|D^\alpha_{\mathbf{x},t}w(\mathbf{x},t)|^2\ d\mathbf{x}\ dt\right)^{1/2},$$

$$\|w;H^s_\beta(\mathcal{Q},q)\|=\left(\sum_{k=0}^{s}q^{2k}\|w;H^{s-k}_\beta(Q)\|^2\right)^{1/2}.$$

若 $\gamma > 0$，则令 $w^\gamma(\mathbf{x}\ t) := \exp(-\gamma t) w(\mathbf{x}\ t)$，并定义

$$\|w; V_\beta^s(\mathcal{Q}, \gamma)\| = \|w^\gamma; H_\beta^s(\mathcal{Q}, \gamma)\| \ .$$

相应的边界空间分别定义为 $\partial\mathcal{Q}$ $H_\beta^s(Q)$ 和 $V_\beta^s(\mathcal{Q},\ \gamma)$ 的迹空间。

定义 B.8. 设 $(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) \in V_0^0(\mathcal{Q},\ \gamma) \times V_0^{3/2}(\partial\mathcal{Q},\ \gamma)$，并设$\mathbf{v}$ 是 $\mathbb{D}$中方程 (118)、(119) 的一个强解，右端项为 $(\hat{}\mathbf{f},\ \hat{}\mathbf{g})$。那么$\mathbf{u}(\mathbf{y}\ z,\ t) = \mathcal{F}^{-1}{}_{(\xi,\ \tau)\to(z,\ t)}\mathbf{v}(\mathbf{y}\ \xi,\ \tau)$ 称为 (98)、(99) 的强解。

命题 B.6 表明，对于任意 $(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) \in V_0^0(\mathcal{Q},\ \gamma) \times V_0^{3/2}(\partial\mathcal{Q},\ \gamma)$，$\gamma > 0$ 问题 (98)、(99) 存在唯一的强解，并且

$$\gamma^2\|\mathbf{u}; V_0^1(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma\|\mathbf{p}(\mathbf{u}), V_\gamma^0(\partial\mathbb{D},\gamma)\|^2 \le c\left(\|\mathbf{f}; V_0^0(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma\|\mathbf{g}; V_0^{3/2}(\partial\mathcal{Q},\gamma)\|^2\right) \ ,$$

其中常数 $c > 0$ 与 γ无关。

令 $\chi \in C^\infty(\overline{\mathbb{K}})$ 为一个截断函数，它在锥点 0 的某个邻域内恒等于 1。定义

$$X\mathbf{u}(\mathbf{y}, z, t) = \mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\tau)\to(z,t)}\chi(p\mathbf{y})\mathcal{F}_{(z',t')\to(\xi,\tau)}\mathbf{u}(\mathbf{y}, z', t') \tag{123}$$

and

$$\Lambda^\mu\mathbf{u}(\mathbf{y}, z, t) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}|\tau|^\mu\mathcal{F}_{t'\to\tau}\mathbf{u}(\mathbf{y}, z, t') \ . \tag{124}$$

高正则性定理涉及 Q 中的以下范数：对于 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma > 0$

$$\|\mathbf{v}; DV_\beta(\mathcal{Q},\gamma)\| = \left(\gamma^2\|\mathbf{v}; V_\beta^1(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \|X\mathbf{v}; V_\beta^2(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma\|\partial_\nu\mathbf{v}; V_\beta^0(\partial\mathcal{Q},\gamma)\|^2\right)^{1/2} \ , \tag{125}$$

$$\|\mathbf{f}; RV_\beta(\mathcal{Q},\gamma)\| = \left(\|\mathbf{f}; V_\beta^0(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma^{-2}\|\Lambda^{1-\beta}\mathbf{f}; V_0^0(\mathcal{Q},\gamma)\|^2\right)^{1/2} \ . \tag{126}$$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{f},\mathbf{g}); \mathcal{R}V_\beta(\mathcal{Q},\gamma)\| = \Big(&\|\mathbf{f}; RV_\beta(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \|X\mathbf{g}; V_\beta^{3/2}(\partial\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma\|\mathbf{g}; V_0^1(\partial\mathcal{Q},\gamma)\|^2 \\ &+\gamma^{-1}\|\Lambda^{1-\beta}\mathbf{g}; V_0^1(\partial\mathcal{Q},\gamma)\|^2\Big)^{1/2} \ .\end{aligned} \tag{127}$$

更一般地，可对 $q \in \mathbb{N}_0$ 引入

$$\|\mathbf{f}; RV_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)\| = \left(\sum_{j=0}^{q}\gamma^{-2j}\|\Lambda^j\mathbf{f}; V_{\beta+q-j}^{q-j}(\mathcal{Q},\gamma)\|^2 + \gamma^{-2(1+q)}\|\Lambda^{1-\beta+q}\mathbf{f}; V_0^0(\mathcal{Q},\gamma)\|^2\right)^{1/2} \ ,$$

类似地，$\mathcal{R}V_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\ \gamma)$ 和 $DV_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\ \gamma)$。

于是可在定理 7.4, [40], 中找到以下结果，其中 $\mathbf{g} = 0$ 和 $q = 0$。利用 [34]中的论证，该结果可推广至非齐次边界条件和 $q > 0$ 。

定理 B.9. 设 $q \in \mathbb{N}_0$, $\gamma > 0$ 和 $(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) \in \mathcal{R}V_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\gamma)$。***a)*** 若 $\beta \in (\beta_1, 1)$，则方程 (98)、(99) 的强解$\mathbf{u}$属于 $DV_{\beta,\ q}(\mathcal{Q},\gamma)$ ，且存在与 γ 无关的 $c > 0$ ，使得

$$\|\mathbf{u}; DV_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)\| \le c\|(\mathbf{f},\mathbf{g}); \mathcal{R}V_{\beta,q}(\mathcal{Q},\gamma)\| \ .$$

b) 若 $\beta \in (\beta_{r+1}, \beta_r)$，则存在满足(98)、(99) 的解$\mathbf{u}$ ，当且仅当对所有 $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$、所有$\tau \in \mathbb{R} - i\gamma$ 以及所有对应于 $\mathcal{A}_D$ 的特征值 λ_ℓ 且满足$\mathrm{Im}\ \lambda \in [\beta_r + \frac{m}{2} - 2, \beta_1 + \frac{m}{2} - 2]$的$\mathbf{w}_\ell^{k\,j}$,, — —

$$(\hat{\mathbf{f}}(\cdot,\xi,\tau), \mathbf{w}_\ell^{k,j}(\cdot,\xi,\overline{\tau}))_{L^2(\mathbb{K})} + (\hat{\mathbf{g}}(\cdot,\xi,\tau), \boldsymbol{p}(\mathbf{w}_\ell^{k,j})(\cdot,\xi,\overline{\tau}))_{L^2(\partial\mathbb{K})} = 0 \ . \tag{128}$$

现在我们可以陈述本节的主要结果，该结果给出了时间依赖问题在边附近邻域中的渐近行为。对于 $\mathbf{g} = 0$ 和 $q = 0$，可参见定理 7.5, [40], 。非齐次边界数据$\mathbf{g}$ 的推广可按第 3 节中的方法进行：在区域内选取一个延拓 $\tilde{\mathbf{g}}$，其狄利克雷迹为$\mathbf{g}$。定理 7.5, [40] 进而保证函数$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}$存在渐近展开，该函数满足齐次边界条件。于是可得$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{g}}$的展开。

定理 B.10。 假设 $\gamma > 0$和 $(\mathbf{f}、\mathbf{g}) \in \mathcal{R}V_{\beta,\, q}(\mathcal{Q}、\ \gamma)$对于 $\beta \in (\beta_{r+1}、\ \beta_r)$且满足 $0 < \beta_r - \beta < 1$。假设对于所有 $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$、对于所有 $\tau \in \mathbb{R} - i\gamma$ 以及对于所有 $\mathbf{w}_\ell^{k\,j}$，对应于 $\mathcal{A}_D$ 的特征值 λ_ℓ 且满足$\mathrm{Im}\ \lambda \in [\beta_r + \frac{m}{2} - 2, \beta_1 + \frac{m}{2} - 2]$，关系式 (128) 成立。那么，式 (98)、(99) 的解 $\mathbf{u}$ 具有渐近展开

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, z, t) = \sum_\ell \sum_{k,j} (X\tilde{c}_\ell^{k,j})(\mathbf{y}, z, t)\mathbf{u}_\ell^{k,j}(\mathbf{y}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{y}, z, t)\ , \tag{129}$$

其中 $\mathbf{u}_0 \in DV_{\beta,\, q}(\mathcal{Q}、\ \gamma)$。这里，第一重求和遍历所有满足 $\mathrm{Im}\ \ \lambda = \beta_r + \frac{m}{2} - 2$的特征值 λ_ℓ，第二重求和遍历所有对应于 λ_ℓ 的广义特征函数 $\mathbf{u}_\ell^{k\,j}$，。系数 $\tilde{c}^{k}_{,\ \ell}{}^{j}\ (z、\ t)$ 定义为

$$\tilde{c}_\ell^{k,j} = \mathcal{F}^{-1}_{(\xi,\tau)\to(z,t)} c_\ell^{k,j},$$

其中

$$c_\ell^{k,j} = p^{i\lambda_\ell} \sum_q \frac{1}{q!} (i \ln p)^q d_\ell^{(k+q,j)}(\xi, \tau), \tag{130}$$

并且，与定理 *B.9* 中一样，令 $p = \sqrt{|\xi|^2 + |\tau|^2}$ 和 $\mathbf{w}_\ell^{k\,j}$，

$$d_\ell^{(k+q,j)}(\xi, \tau) = p^{-2}(\hat{\mathbf{f}}(p^{-1}\cdot, \xi, \tau), \mathbf{w}_\ell^{k,j}(\cdot, \xi/p, \overline{\tau}/p))_{L^2(\mathbb{K})} + p^{-1}(\hat{\mathbf{g}}(p^{-1}\cdot, \xi, \tau), \boldsymbol{p}(\mathbf{w}_\ell^{k,j})(p^{-1}\cdot, \xi/p, \overline{\tau}/p))_{L^2(\partial\mathbb{K})}.$$

此外，以下估计成立： $\|e^{-\gamma t}\tilde{d}_\ell;\ H^{2-\frac{m}{2}-\beta}(\mathbb{R}^{n-m+1})\| \le c\|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g});\ \mathcal{R}V_{\beta,q}(\mathcal{Q}, \gamma)\|$和 $\|\boldsymbol{u}_0;\ DV_{\beta,q}(\mathcal{Q}, \gamma)\| \le c\|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g});\ \mathcal{R}V_{\beta,q}(\mathcal{Q}, \gamma)\|$。

显式公式表明，对于在时间上光滑的 f，系数 d_ℓ 在时间上也将光滑。

诺伊曼问题的类似结果也可以用类似的方法获得，见 [35, 40]。边界条件会影响相应的模板 $\mathcal{A}_N$，进而影响其特征值 $i\lambda_\ell$ 和奇异函数$\mathbf{w}_\ell^{k\,j}$，。

附录 C

我们回顾 [21], 中的一些辅助结果，这些结果用于定理 5.3 和定理 5.7 的证明。

引理 C.1 ([21], 引理 3). 设 $\Gamma, \Gamma_j\ (j = 1, \ldots, N)$ 为 *Lipschitz* 区域，且 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$, $s \in [-1, 1]$和 $r \in \mathbb{R}$。那么对所有 $\tilde{u} \in H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^s(\Gamma))$, $u \in H^r_\sigma(\mathbb{R}^+, H^s(\Gamma))$,

$$\sum_{j=1}^{N} \|u\|^2_{r,s,\Gamma_j} \le \|u\|^2_{r,s,\Gamma}\ , \qquad \|\tilde{u}\|^2_{r,s,\Gamma,*} \le \sum_{j=1}^{N} \|\tilde{u}\|^2_{r,s,\Gamma_j,*}\ . \tag{131}$$

引理 C.2 ([21], 引理 8). 设 $I_j = [0, h_j]$, $r \in \mathbb{R}$, $0 \le s_j \le 1$, $f_2 \in H^{-s_2}(I_2)$, $f_1 \in H^r(\mathbb{R}^+, H^{-s_1}(I_1)$。则有

$$\|f_1(t, x) f_2(y)\|_{r,-s_1-s_2,I_1\times I_2,*} \le \|f_1\|_{r,-s_1,I_1,*} \|f_2\|_{\tilde{H}^{-s_2}(I_2)}\ .$$

正的 Sobolev 范数中也有类似结果：

~ ~**引理 C.3** ([21], 引理 9)。 设 $I_j = [0, h_j]$, $0 \le s \le 1$, $f_2 \in H^s(I_2)$, $f_1 \in H^s(\mathbb{R}^+, H^s(I_1)$。则有

$$\|f_1(t,x)f_2(y)\|_{r,s,I_1\times I_2,*} \le \|f_1\|_{r,s,I_1,*}\|f_2\|_{\tilde{H}^s(I_2)} .$$

引理 C.4 ([21], 引理 10). 设 $0 \le r \le \rho \le q+1$, $-1 \le s \le 0$, $R = [0,h_1]\times[0,h_2]$, $u \in H^\rho([0,\Delta t)$ $H^1(R))$, $\Pi_t^q u$ t 中阶数为 q的分片多项式空间上的正交投影, $\Pi^0_{x,y}u = \frac{1}{h_1h_2}\int_R u(t,x,y)dy\,dx$。那么对于 $\overline{p = \Pi_t^q\Pi_{x,y}u}$, 有

$$\begin{aligned}\|u-p\|_{r,s,R,*} \lesssim{}& (\Delta t)^{\rho-r}\max\{h_1,h_2,\Delta t\}^{-s}\|\partial_t^\rho u\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)}\\ &+ \max\{h_1,h_2,\Delta t\}^{-s}\left(h_1\|u_x\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)} + h_2\|u_y\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)}\right). \end{aligned} \tag{132}$$

若 $u(t,x,y) = u_1(t,x)u_2(y)$ $u_1 \in H^\rho([0,\Delta t)$ $H^1([0,h_1]))$ $u_2 \in H^1([0,h_2])$ 则
$\|u-p\|_{r,\ s,\ R,\ *} \lesssim (\Delta t)^{\rho-r}$最大$\{h_1,h_2,\Delta t\}^{-s}\|\partial_t^\rho u\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)} + \left(h_1^{1-s}\|u_x\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)} + h_2^{1-s}\|u_y\|_{L^2([0,\Delta t)\times R)}\right)$.

引理 C.5 ([21], 引理 11)。 设 $Q = [0,h_1]\times[0,h_2]$, $u \in H^3([0,\Delta t)\times Q)$ p 为 u 在 Q顶点处的双线性插值函数。则对于 $r \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\|u-p\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} \lesssim{}& \max\{h_1,\Delta t\}^2\|u_{xx}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} + \max\{h_2,\Delta t\}^2\|u_{yy}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q}\\ &+ (\max\{h_1,\Delta t\}^2 + \max\{h_2,\Delta t\}^2)\|u_{tt}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q}\\ &+ \max\{h_1,\Delta t\}^2\max\{h_2,\Delta t\}\|u_{xxy}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} \end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}\|(u-p)_x\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} \lesssim{}& \max\{h_1,\Delta t\}\|u_{xx}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} + \max\{h_1,\Delta t\}\|u_{xt}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q}\\ &+ \max\{h_2,\Delta t\}^2\|u_{xyy}\|_{r,0,[0,\Delta t)\times Q} \end{aligned} \tag{134}$$

致谢

本研究 于 2020年通过“奥伯沃尔法赫研究员计划”获得资助。

参考文献

[1] A. Aimi，M. Diligenti，G. Monegato，用于二维问题伽辽金边界元法的新型数值积分格式，《国际工程数值方法杂志》40 (1997)，1977-1999。[2] A. Aimi，M. Diligenti，C. Guardasoni，I. Mazzieri，S. Panizzi，波传播问题时空伽辽金边界元法的能量方法，《国际工程数值方法杂志》80 (2009)，1196-1240。[3]A. Aimi，G. Di Credico，M. Diligenti，C. Guardasoni，能量边界元法应用于弹性动力学时奇异积分的高精度求积方案，《计算与应用数学杂志》，《计算与应用数学杂志》410 (2022)，114186。[4] H. Antes，用于二维各向同性弹性介质中瞬态波传播的边界元法，《有限元分析与设计》1 (1985)，313-322。[5] A. Bamberger，T. Ha Duong，用于通过延迟势计算声波的时空变分公式，《数学方法与应用科学》8 (1986)，405-435和598-608。[6] A. E. Beagles，A.-M. S¨andig，拉梅方程边值问题旋转对称解的奇异性，Z. angew. Math. Mech. 71 (1991)，423-431。[7] E. B´ecache，弹性动力学反平面裂纹的变分边界积分方程法，《国际工程数值方法杂志》36 (1993)，969-984。

[8] E. B´ecache，T. Ha Duong，二维弹性裂纹问题边界积分方程的时空变分公式，ESAIM：数学建模与数值分析28 (1994)，141-176。[9] A. Bespalov，三维裂纹问题中采用准均匀网格的边界元法 hp 版本：具有光滑边界曲线的光滑裂纹情形，《数值方法与偏微分方程》24 (2008)，1159-1180。[10] A. Bespalov，N. Heuer，三维裂纹问题边界元法的 p版本，《积分方程与应用杂志》17 (2005)，243-258。[11] A. Bespalov，N. Heuer，分片平面开曲面上超奇异算子的边界元法 p版本，《数值数学》100 (2005)，185-209。[12] I. Yu. Chudinovich，弹性理论第三类初边值问题的边界方程法：I. 存在性定理，《数学方法与应用科学》16 (1993)，203-215。[13] M. Costabel，M. Dauge，Z. Yosibash，用于提取边缘应力强度函数的准对偶函数法，SIAM 数学分析杂志35 (2004)，1177-1202。[14] M. Costabel，F.-J. Sayas，边界积分方程法求解时变问题，《计算力学百科全书》，第二版（编者：E. Stein，R. de Borst，T. J. R. Hughes），约翰·威立父子出版公司，霍博肯，新泽西州，2017。[15] M. Dauge，角域中的椭圆边值问题，《数学讲义》1341，施普林格出版社，1988。[16]G. Di Credico，时域二维弹性动力学问题的能量边界元法，博士论文，摩德纳-雷焦艾米利亚大学（2022），网址：http://hdl.handle.net/11380/1265215。[17]V. Dominguez，F.-J. Sayas，T. Sanchez-Vizuet，二维弹性波动方程的全离散 Calder´on 演算，《计算机与应用数学》69 (2015)，620-635。[18] A. C. Eringen，E. S. Suhubi，《弹性动力学》，学术出版社，纽约，（1975）。[19] H. Gimperlein，Z. Nezhi，E. P. Stephan，半空间声波方程时变边界元法的先验误差估计，《应用科学中的数学方法》40 (2017)，448-462。[20] H. Gimperlein，M. Maischak，E. P. Stephan，自适应时域边界元法及其工程应用，《积分方程与应用杂志》29 (2017)，75–105。.[21] H. Gimperlein，F. Meyer，C. Ozdemir，D. Stark，E. P. Stephan，采用网格加密的波动方程边界元法，《数值数学》139 (2018)，867-912。.[22] H. Gimperlein，F. Meyer，C. Ozdemir，E. P. Stephan，动态接触问题的时域边界元法，《计算机在应用力学与工程中的方法》333 (2018)，147-175。.[23] H. Gimperlein，C. Ozdemir，D. Stark，E. P. Stephan，准均匀网格上波动方程时域边界元法的 hp 版本，《计算机在应用力学与工程中的方法》356 (2019)，145-174。.[24] H. Gimperlein，C. Ozdemir，D. Stark，E. P. Stephan，时域边界元法的残差后验估计，《数值数学》146 (2020)，239-280。[25] P. Grisvard，椭圆问题解的边缘行为，《数学通讯》132 (1987)，281-299。[26] P. Grisvard，拉梅方程的狄利克雷问题，《巴黎科学院报告：数学系列 I》304 (1987)，71-73。[27] P. Grisvard，弹性力学中的奇异性，《理性力学与分析档案》107 (1989)，157-180。

[28] J. Gwinner, E. P. Stephan，《高级边界元方法——边值、传输与接触问题的处理》，Springer计算数学丛书，第52卷，2018年。[29] T. Ha Duong，关于迟滞势边界积分方程及其离散化，载于：《计算波传播专题》，第301–336页，应用计算力学讲义，31，Springer，柏林，2003年。[30] G. Hsiao, T. Sanchez-Vizuet，线性热弹性中的时域边界积分方法，SIAM数学分析杂志 52（2020年），2463–2490。[31]P. Joly, J. Rodriguez，时变波传播变分边界积分方程的数学方面，积分方程及其应用杂志 29（2017年），137–187。[32] B. Kager, M. Schanz，弹性动力学的快速、数据稀疏时域边界元法，Eng. Anal. Bound. Elem. 50（2015年），212–223。[33] A. Y. Kokotov, P. Neittaanm¨aki, B. A. Plamenevskiĭ，圆锥中的波动方程诺伊曼问题，J. Math. Sci. 102（2000年），4400–4428。[34] A. Y. Kokotov, B. A. Plamenevskiĭ，楔形域中双曲型系统的柯西–狄利克雷问题，St. Petersburg Math. J. 11（2000年），497–534。[35] A. Y. Kokotov, B. A. Plamenevskiĭ，带圆锥点区域中双曲型系统诺伊曼问题解的渐近行为，St. Petersburg Math. J. 16（2005年），477–506。[36] A. Y. Kokotov, P. Neittaanm¨aki, B. A. Plamenevskiĭ，圆锥上的衍射：顶点附近解的渐近性，J. Math. Sci. 109（2002年），1894–1910。[37] V. A. Kondratiev，带圆锥点或角点区域中椭圆方程的边值问题，莫斯科数学会会刊 16（1967年），227–313。[38] V. Kozlov, J. Rossmann，圆锥中的非定常斯托克斯系统，J. Differential Equations 260（2016年），8277–8315。[39] M. Maischak, E. P. Stephan，拉梅方程的边界元法hp版本（三维）。边界元分析，应用计算力学讲义，第29卷（Springer，柏林，2007年），第97–112页。[40] S. I. Matyukevich, B. A. Plamenevskiĭ，带边区域中的弹性动力学，St. Petersburg Math. J. 18（2007年），459–510。[41] G. Monegato, and L. Scuderi，具有边界奇异性的函数的数值积分，计算与应用数学杂志 112（1999年），201–214。[42] F. M¨uller, C. Schwab，多边形中波动方程的有限元与网格加密，J. Comp. Appl. Math. 283（2015年），163–181。[43] F. M¨uller, C. Schwab，多边形中弹性波传播的有限元与网格加密，数学方法与应用科学 39（2016年），5027–5042。[44] S. Nazarov, B. A. Plamenevskiĭ，《分片光滑边界区域中的椭圆问题》，De Gruyter数学专题丛书，第13卷，De Gruyter，1994年。[45] N. Omer, Z. Yosibash，沿材料性质依赖于角坐标的边缘的弹性解奇异渐近展开，固体数学与力学 22（2017年），2288–2308。[46]T. von Petersdorff，多面体奇异性弹性理论的边值问题及边界元方法近似，博士论文，达姆施塔特工业大学（1989年）。[47] T. von Petersdorff, E. P. Stephan，$\mathbb{R}^3$ 上的混合边值问题正则性及分级网格上的边界元方法，数学方法与应用科学 12（1990年），229–249。

[48] T. von Petersdorff, E. P. Stephan，多面体中拉普拉斯算子狄利克雷问题解的边缘与角点奇异性分解，数学通讯 149（1990年），71–103。[49] T. von Petersdorff, E. P. Stephan，具有圆形边缘区域中拉普拉斯算子解的奇异性，Appl. Analysis 45（1992），281–294。[50] B. A. Plamenevskiĭ，带边圆柱中波动方程的狄利克雷问题，Algebra i Analiz 10（1998），197–228。[51] F.-J. Sayas，延迟势与时域边界积分方程：路线图，Springer计算数学丛书 50（2016年）。[52] M. Schanz, W. Ye, J. Xiao，卷积求积法与增强型逆快速傅里叶变换的比较及其在弹性动力学边界元法中的应用，Comput. Mech. 57（2016年），523–536。[53] C. Schwab， p- 与 hp- 有限元方法：固体力学与流体力学理论及应用，牛津大学出版社，1998年。



图 2：楔形域的几何形状和分级网格。

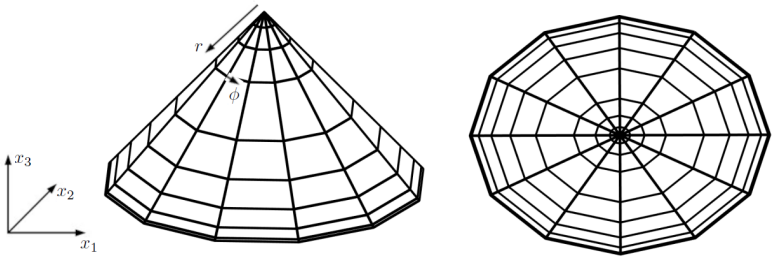


图 3：几何与 圆锥上的分级网格：侧视图（a）和俯视图（b） .

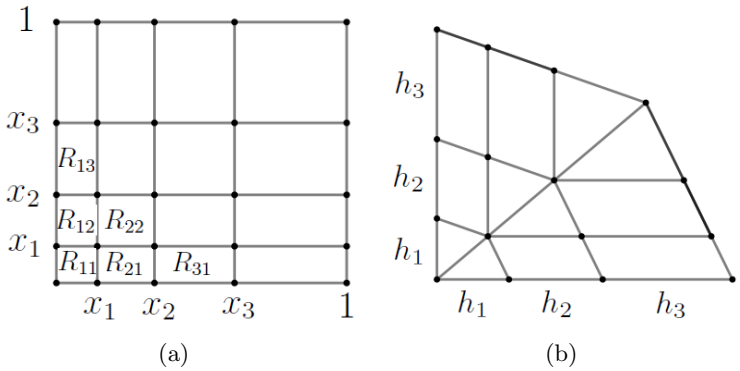


图 4：正方形 (a) 与圆锥 (b) 上网格之间的仿射映射。(b) 中的平行四边形对应于 (a) 中的矩形，而 (b) 中两个相邻的三角形被映射到 (a) 中的对角正方形 R_{ii} 。

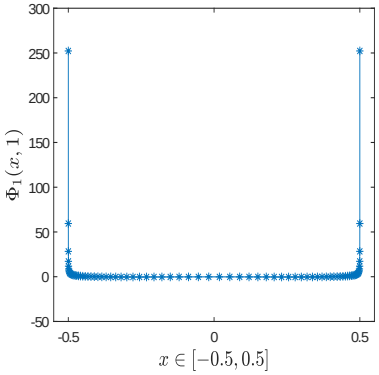


图5：在时间瞬间 $T = 1$，于障碍物 Γ 上计算得到的 $\mathbf{\Phi}$的水平分量。该图由 h 版本在具有81个节点的3级分级网格上以及 $\Delta t = 0.00625$获得。

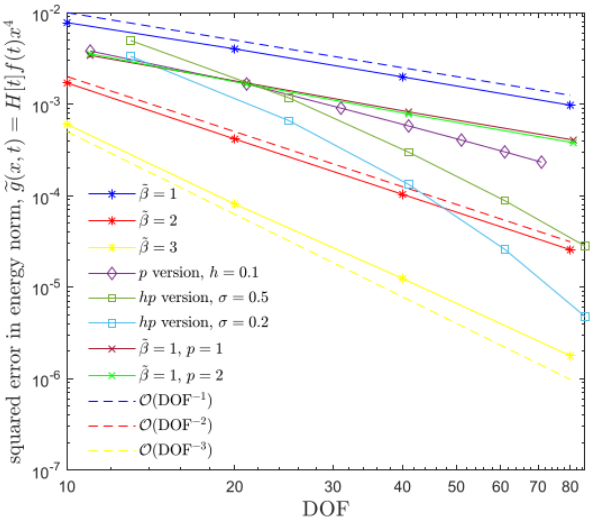


图6：不同离散化方法的能量范数平方误差。

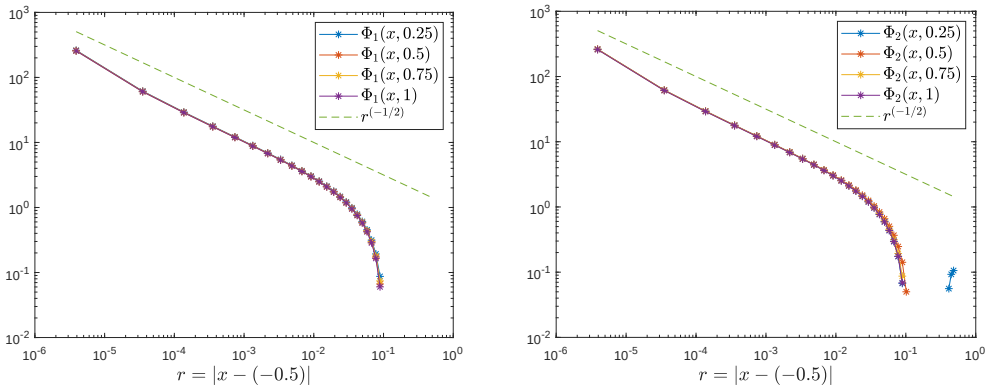


图7：趋向于 Γ左端的渐近行为

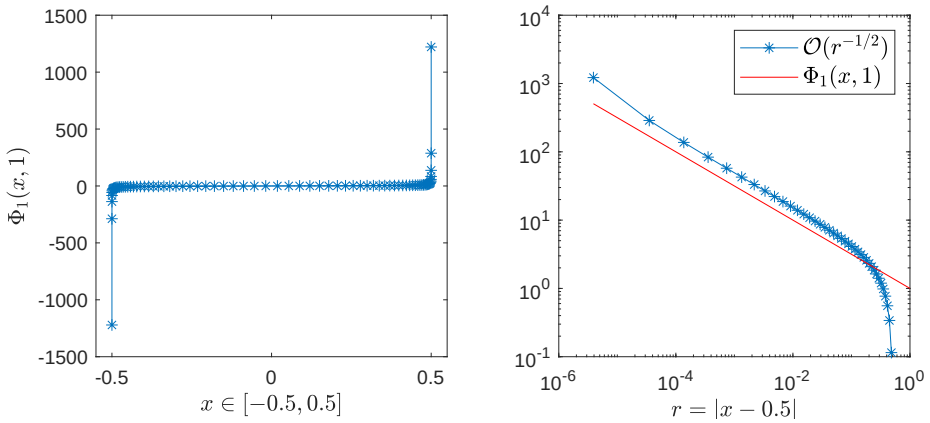


图 8：水平分量 Φ_1 在 Γ 上的变化，以及其随到 $T = 1$处右端点距离的变化。两个图均通过在 Γ 上施加含 80 条线段的代数三分级网格得到。

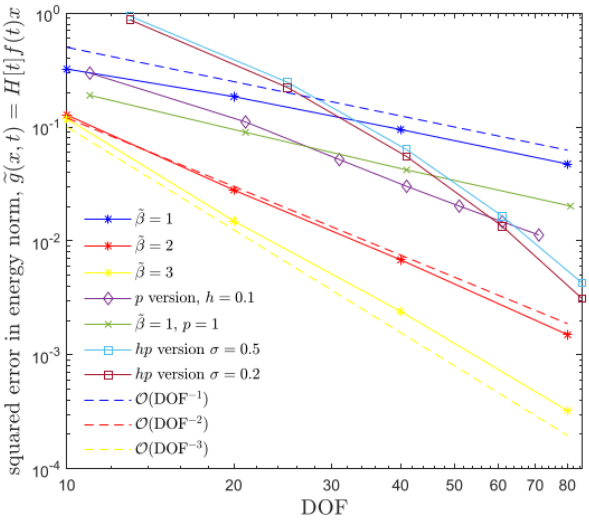
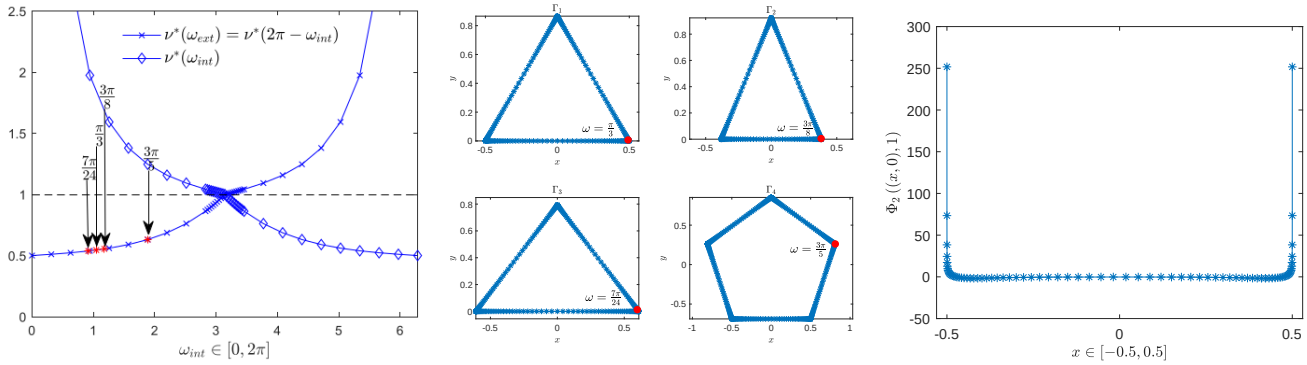


图 9：各种离散化方法的能量范数平方误差



(a) (b) (c)

图 10：预期指数与 ω_{int} 及其补集（$k = 5/3$）的关系，以及测试的多边形网格（a 和 b）； $\mathbf{\Phi}$ 在 Γ_1 底边上的垂直分量图（c）。

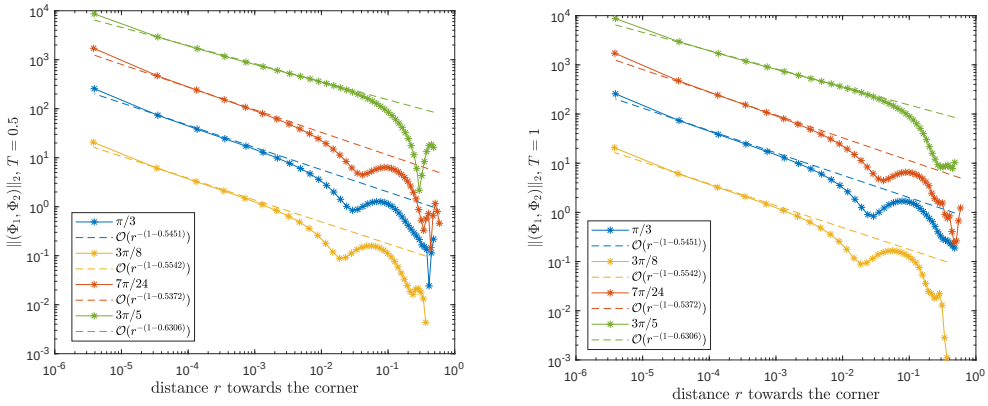
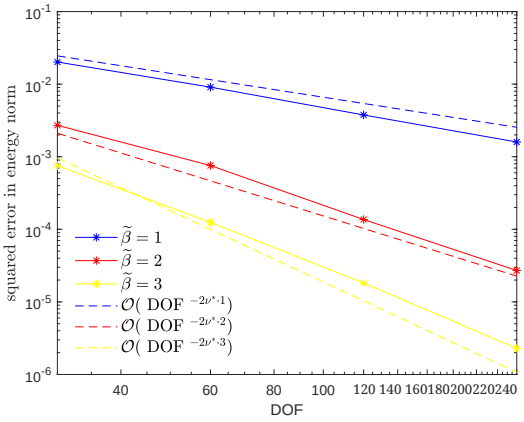
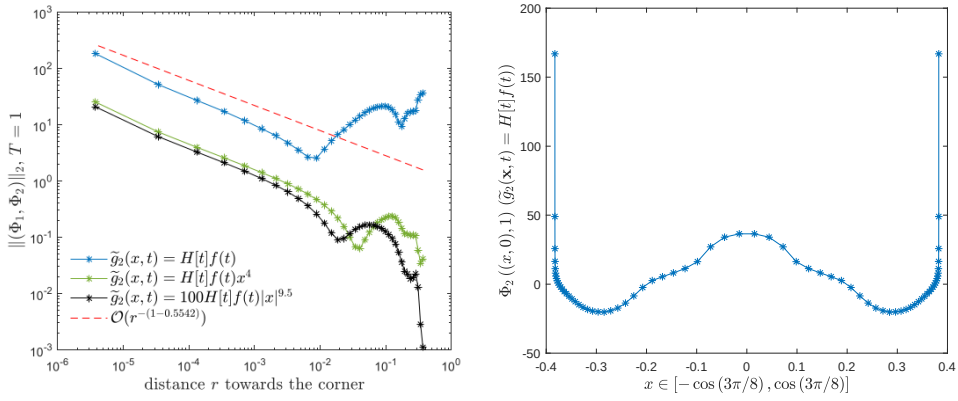


图 11：趋近顶点时的渐近行为



Fi ˜图12：采用h 版本时，在 Γ_1, β分级网格上的能量范数平方误差 h



(a) (b)

图13： Γ_2 中在不同边界条件下趋近顶点时的渐近行为 (a)，以及在所示边界条件下， Γ_2 底边上 $\mathbf{\Phi}$ 的垂直分量图 (b)。

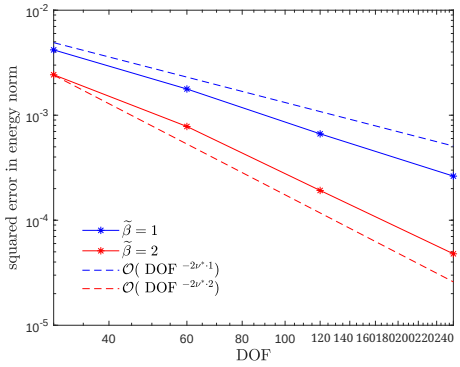
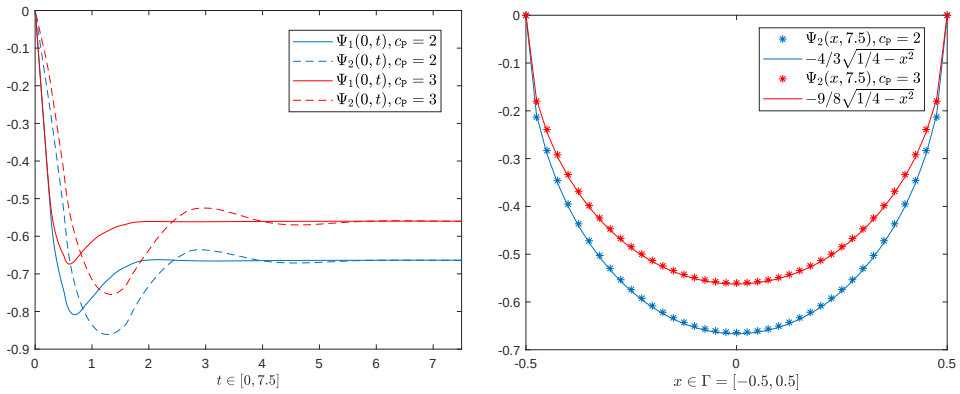


图 14：采用h版本时， Γ_1, $\tilde{\beta}$分级网格上的能量范数平方误差， $\tilde{g}_2(\mathbf{x}\ t) = H[t]f(t)x^4$



(a) (b)

图15：在 Γ 中点处计算的 Ψ_1 和 Ψ_2 的时间历程，对应的速度组合为$c_S = 1,\ c_P = 2$ 和 $c_S = 1,\ c_P = 3$ (a)。在最终时刻 $T = 7.5$计算的 Ψ_2 垂直分量及其对应的弹性静力解$\Psi_{2,\infty}(\mathbf{x}\ t) = k_2\sqrt{1/4 - x^2}$ （ $k_2 = -4/3$ 对应 $c_P = 2$， $k_1 = -9/8$ 对应$c_P = 3$）(b)。

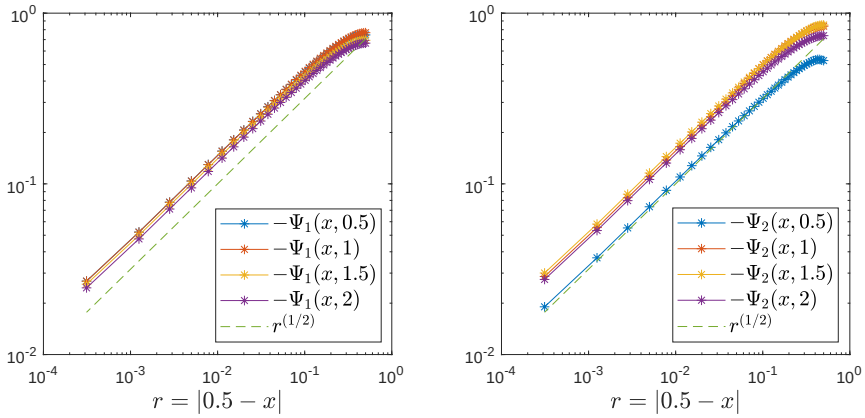


图16：在不同时间点~ ~($c_S = 1,\ c_P = 2$)， Γ 右端附近 $-\Psi_1$ 和 $-\Psi_2$ 的渐近行为。该弧采用 β分级网格离散，包含 $\beta = 2$ 和81个网格点。

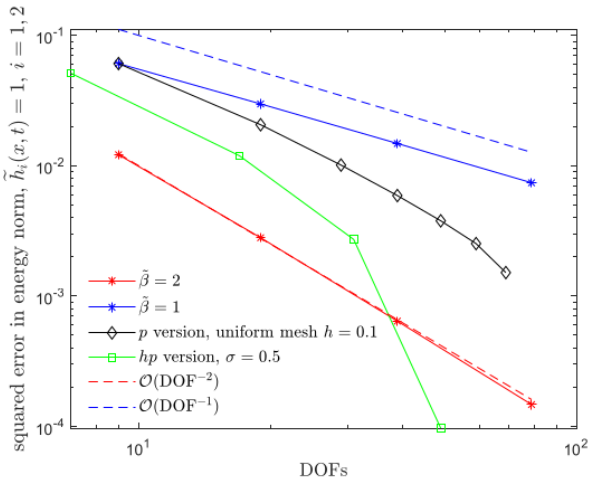


图 17：计算至时刻 $T=2$ 的能量范数平方误差