arXiv:2305.00776v3 [cond-mat.dis-nn] 2 Dec 2023

使用神经网络表征例外点

Md. Afsar Reja[1] 和 Awadhesh Narayan[1], *[1] *Solid State and Structural Chemistry Unit, Indian Institute of Science, Bangalore 560012, India*(日期：2023年12月5日)

非厄米系统的一个关键特征是例外点（EP）的出现。例外点是本征值和本征矢量合并的谱简并。在这项工作中，我们提出通过引入一种新特征—— *summed phase rigidity*（SPR），利用神经网络表征例外点。我们考察了复杂程度各异的不同模型，以说明这一方法，并展示如何预测双位点和四位点增益与损耗模型中的例外点。此外，我们还展示了如何在具有代表性的 Hatano-Nelson 模型中，对格点数可变的情况准确预测例外点。值得注意的是，我们展示了 SPR 如何使模型能够预测训练数据中完全未见过阶数的例外点。我们的方法可用于通过机器学习方法自动表征例外点。

引言–近年来，对非厄米系统的探索受到了广泛关注 [1–6]。这是由于其中存在大量丰富的固有物理现象，例如例外点（EPs）、非厄米皮肤效应（NHSE）、非布洛赫能带理论、奇异拓扑相以及扩展的对称性类别，而这些现象在当代厄米体系中都没有对应物。非厄米系统最引人入胜的特征之一，是例外点（EPs）的存在——在这些谱简并点处，不仅本征值发生合并，本征态也会同时发生并合 [7, 8]。在例外点处，哈密顿矩阵会变为缺陷矩阵。例外点是非厄米物理的固有特征，在定义非厄米拓扑相及其相关相变方面发挥着关键作用。例外点还可以在非厄米系统的参数空间中表现为例外环 [9] 和例外线 [10] ，并且与PT（宇称–时间）对称性破缺相变密切相关 [7]。非厄米布洛赫能带会形成纽结，而例外点在不同纽结之间的转变中发挥着至关重要的作用 [11]。除了基础意义之外，例外点已经在实际应用中得到运用，包括利用高阶例外点增强传感能力 [12], 、在光学微腔中的应用 [13], 以及定向激光技术的发展 [14]。例外点已在各种实验装置中被成功观测和研究，涉及光学 [15, 16], 、光子学 [17], 、电路 [18, 19], 和声学 [20, 21]等领域。

凭借广泛的应用和独特的学习能力，机器学习（ML）正迅速成为研究人员采用的一种新型工具。特别是，机器学习有望在无需人类预先介入的情况下揭示新的物理规律。机器学习技术的应用日益增长，不仅局限于凝聚态物理的不同领域 [22], ，也在粒子物理、宇宙学和量子计算等其他领域得到探索 [23]。近年来，机器学习技术已凭借出色的准确率被用于研究拓扑相 [24–27] 以及拓扑不变量 [28, 29], 对拓扑相进行分类 [26, 30], 以及厄米体系中的相变 [31] 。最近，机器学习技术首次被应用于非厄米系统。例如，Narayan 等人 [32], 、Cheng 等人 [33] 和 Zhang 等人 [34]利用卷积神经网络（NN）研究非厄米拓扑相。Yu 等人采用一种无监督方法，即扩散映射，探索了这类相 [35]。研究人员还利用流形聚类研究了声子学中的非厄米拓扑相 [36]。此外，Araki 及其合作者在机器学习框架中分析了非厄米皮肤效应（NHSE） [37]。此外，近期也有研究探索了机器学习方法在各种非厄米实验平台中的应用。例如，利用物理图信息引导的机器学习研究拓扑电路中的二阶非厄米趋肤效应 [38],，利用主成分分析和神经网络探索非厄米光子学 [39], ，以及利用扩散映射分析固态自旋系统中的非厄米结缚相 [40]。

在这项工作中，我们提出并展示了利用神经网络表征例外点的方法。我们引入了一种新的特征，称为总和相位刚度（SPR），它能够明确表征高阶例外点。作为我们方法的示例，我们从简单模型入手，在神经网络的帮助下，对复杂程度不断提高的各种系统中的例外点进行了分类。具体而言，我们展示了如何利用神经网络区分二格点和四位点模型中的例外点。此外，我们构建的神经网络和 SPR 能够准确预测例外点的阶数。最后，我们使用广为人知的 Hatano-Nelson 模型，并改变格点数量，准确预测例外点；同时展示了 SPR 如何预测训练数据中完全未曾出现过阶数的例外点。我们的方法有助于利用机器学习技术自动表征例外点。

双位点模型– 我们首先考虑一个简单的、具有格点增益与损耗的双位点非厄米模型，以说明我们的方法 [见图 1(a)]。该系统由以下哈密顿量描述 [41]

$$H_2 = \begin{pmatrix} \omega_0 + i\gamma & J \\ J & \omega_0 - i\gamma \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 ω_0 为格点势， J 为图 1(a) 所示的格点间耦合，非厄米性则由增益与损耗项 $\pm i\gamma$引入。本征值为 $\lambda_\pm = \omega_0 \pm \sqrt{J^2 - \gamma^2}$。为简单起见，我们取 $\omega_0 = 0$，此时例外点出现在$\gamma = \pm J$。请注意，该模型只能支持二阶例外点。

我们简要介绍相位刚度的概念，并以此对例外点进行分类。给定哈密顿量在参数空间中任意一点处的相位刚度 r定义为 [42, 43]

$$r = \frac{\langle \Psi_L | \Psi_R \rangle}{\langle \Psi_R | \Psi_R \rangle}, \tag{2}$$

其中， Ψ_L 和 Ψ_R 分别是非厄米哈密顿量的左、右本征态。由于双正交性， r在例外点处取值为零，远离例外点时取值为一。我们不采用取值范围为零到一的 r，而是建议取 r的负对数，即 $-\ln|r|$。这种尺度变换实质上增强了参数空间中例外点与非例外点之间的区分度——正如我们将展示的，这使例外点的表征效果显著提升。因此，在例外点处，该量取较大的正值；远离例外点时，则降至零。

我们为双位点模型在$\gamma - J$ 平面中随机生成 40,000 个点，并计算 $-ln|r|$。随后，我们以类似方式生成 10,000 个满足 $\gamma = J$ 的点，并将其与上述点合并。在生成的数据中，我们保留 10% 作为测试数据，其余用于训练。我们构建了一个包含两个隐藏层的网络，每层分别有 16 个和 4 个神经元。可训练参数总数为 121。隐藏层采用修正线性单元（ReLU）作为激活函数。图 1(b) 展示了批量大小为 32、训练 200 轮的损失（均方误差损失）曲线。我们注意到，模型收敛相当快（约 50 轮内），且测试集的损失没有明显波动，也没有偏离训练集的损失曲线，这表明模型拟合良好。

通过对各种超参数进行优化来训练模型（见表I），随后我们预测测试集中的例外点阶数。另一方面，对于这个简单的示例，我们已经知道例外点的真实阶数。我们在相同数据点的 $\gamma - J$ 平面中比较真实结果与预测结果，如图1(c)和图1(d)所示。我们发现，神经网络的预测值与真实值几乎完全一致，准确率达到99%；据此，我们可以轻松判断给定点是否为例外点。我们还计算

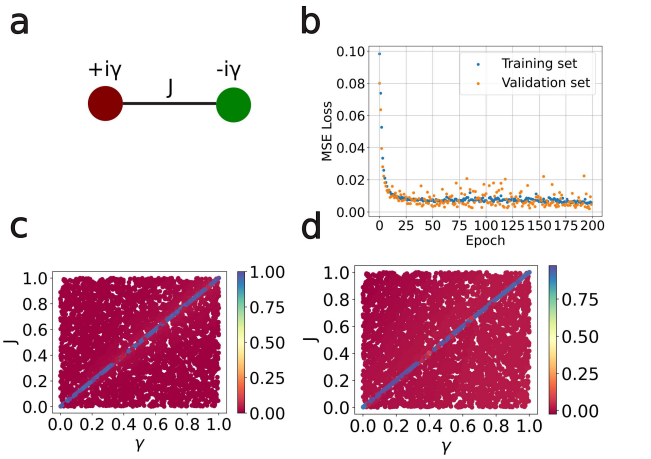

图1. 双位点模型的神经网络训练。(a) 双位点增益与损耗非厄米模型示意图。这里， J 表示两个格点之间的耦合， $\pm i\gamma$ 表示增益与损耗项。(b) 构建了一个具有2个隐藏层的神经网络。隐藏层分别包含16个和4个神经元。可训练参数总数为121。图中绘出了训练过程中损失曲线随训练轮次的变化。蓝色表示训练数据集，黄色表示验证集。由损失曲线可见，我们的模型没有过拟合。(c) 在$J - \gamma$ 平面中，以颜色刻度绘出测试数据集的 $-\ln(|r|)$。色条中趋近于1的数值表示例外点，较低的数值表示非例外点。(d) 图中显示了神经网络给出的相应预测值。可以看出，(c)和(d)中的实际值与预测值吻合良好。

表I. 神经网络结构的详细信息。本文展示了针对不同模型构建的网络详情。我们注意到，要在层数固定为两层的情况下获得良好的R^2 得分（≈ 0.95），需要通过增加每层的神经元数量来增加可训练参数总数。这是因为模型的复杂度不断提高。除 R^2 得分外，我们还报告了每个模型的平均绝对误差（MAE）和均方根误差（RMSE）。

模型	数量 隐藏层（神经元）	总计参数	R^2 得分	平均绝对误差 均方根误差
双站点	2 (16, 4)	121	0.968	0.018 0.068
四格点	2 (32, 16)	673	0.974	0.088 0.181
N 格点（Hatano-Nelson）	2 (12, 4)	105	0.998	0.057 0.087

评估了网络的性能，采用 R^2分数。结果见表I ，数值接近 0.968。

四站点模型——接下来，我们考虑四站点模型中稍复杂的情形，该模型可能同时存在二阶和四阶例外点。其哈密顿量为 [44]

表II. 双位点模型的 SPR 构造。构造 SPR 时，我们首先计算所选点处的 $-\ln|r|$，然后将其除以最大值进行重标度。重标度后，所有重标度后的 $-\ln|r|$ 之和即为 SPR。注意，在例外点处，SPR 值接近例外点的阶数；远离例外点时，SPR 值则接近于零。

点类型	J	γ	$-\ln\|r_1\|$	$-\ln\|r_2\|$	重标度后 $-\ln\|r_1\|$	重标度后 $-\ln\|r_2\|$	SPR
非例外点	0.3	0.7	0.10	0.10	0.0036	0.0036	0.007
EP-2	0.5	0.5	27.34	27.34	0.99	0.99	1.98
EP-2	0.3	0.3	27.52	27.52	1	1	2
非例外点	0.5	0.8	0.25	0.25	0.009	.009	0.018

$$H_4 = \begin{pmatrix} i\delta & p & 0 & 0 \\ p & i\gamma & q & 0 \\ 0 & q & -i\gamma & p \\ 0 & 0 & p & -i\delta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

其中 p 表示格点一与格点二之间，以及格点三与格点四之间的耦合，q 表示格点二与格点三之间的耦合，$\pm i\delta$ 而 $\pm i\gamma$ 则为增益与损耗项，如图 2 (a) 所示。根据参数空间中 p、q、δ和 γ 的取值，上述哈密顿量可同时存在二阶和四阶例外点。在接下来的讨论中，我们令 $\gamma = 1$。EP-2 位于参数空间中满足以下条件的一个曲面上

$$p^4 + \delta^2 + 2\delta p^2 - \delta^2 q^2 = 0. \tag{4}$$

另一方面，当方程4 和下述方程5 同时满足时，我们得到一个 EP-4,

$$1 + \delta^2 - 2p^2 - q^2 = 0. \tag{5}$$

与前一种情况，即在例外点和非例外点之间进行分类相比，这里我们需要区分三类点：EP-2、EP-4 和非 EP。为此，我们设计了一个新的特征，将其称为总和相位刚度 SPR。其定义为

$$\mathrm{SPR} = \sum_k -\ln|r_k| / \max(-\ln|r_k|), \tag{6}$$

其中 k 遍历给定哈密顿量的所有本征态。对于 N阶例外点，SPR $\approx N$ 在该例外点处。构造 SPR 的步骤如表II所示。

我们训练网络根据 SPR 值对参数空间中的点进行分类。因此，我们为 SPR 设定了以下阈值——SPR 值

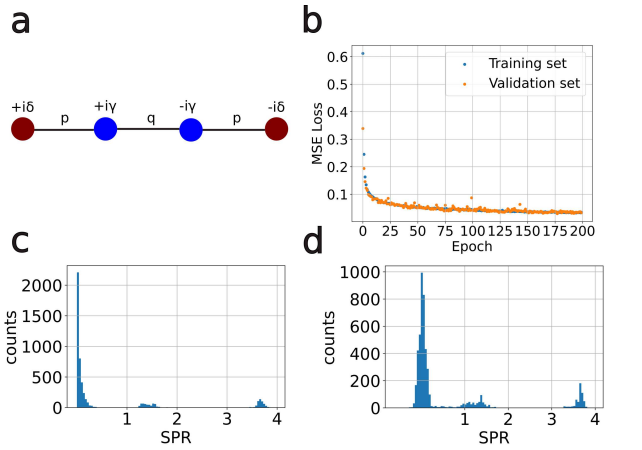

图 2. 四站点模型的神经网络训练。(a) 四站点非厄米模型示意图。这里，p 和q 是格点之间的耦合常数，$\pm i\gamma$ 和 $\pm i\delta$ 表示增益与损耗项。(b) 构建了一个具有 2 个隐藏层的神经网络。这些隐藏层分别包含 32 个和 16 个神经元。可训练参数总数为 673。训练期间的损失曲线随训练轮次的变化如图所示，训练数据集对应蓝色点，验证集对应黄色点。显然，从损失曲线可以看出，我们的神经网络没有过拟合。(c) 根据 SPR 值绘制的参数空间（p、q、δ、γ）中测试数据点的直方图。SPR=0 附近的点为非例外点，即普通点。SPR 介于 1 和 2 之间表示二阶例外点，SPR 介于 3 和 4 之间表示四阶例外点。(d) 与 (c) 相同，但此处绘制的是神经网络预测的 SPR 值。可以看出，(c) 和 (d) 中的实际值与预测值吻合良好。

接近零（$0 < \mathrm{SPR} < 1$）对应普通点（非例外点），SPR 在 1 到 2 之间表示二阶例外点（EP-2），而 SPR 大于 3 则对应四阶例外点（EP-4）。请注意，在实际计算中，对于 N 阶例外点，SPR 的取值低于 N。这是因为我们随机选取生成的数据点，而相位刚度取决于失谐参数 δz，这些参数会使系统偏离例外点。一般而言，$r \propto \delta z^{1/N}$。尽管如此，我们证明了 SPR 能够以出色的准确率对相应点进行分类，因此可作为非常有用的训练特征。

我们生成了一个包含 50,000 个点的数据集，其中包括 5000 个 EP-2 点和 5000 个 EP-4 点的混合体，其余为非例外点。与之前一样，我们留出 10% 的数据点作为测试数据，其余数据用于训练数据。数据点通过从（p、q、δ）参数空间中随机选取一个点来生成（其中$\gamma = 1$）。使用方程 4和方程 5建立例外点的条件。接下来，我们按照上文所述计算这些点处的 SPR。因此，最终每个数据点的特征为 p、q、δ 和 SPR。我们训练的神经网络由两个隐藏层组成，每层分别包含 32 个和 16 个神经元。可训练参数的总数

为 673。在批量大小为 32、训练轮数为 200 的训练中，图中的损失曲线。2 (b) 显示神经网络没有过拟合，且收敛迅速。训练后，我们预测测试数据集的 SPR 值，并将其与实际值一同绘制在图中。2(c) 和 (d)。我们注意到实际数据与预测数据高度吻合。尤其是，不同阶数的例外点之间有着明显区别。总体而言，在估算测试数据集中例外点的实际阶数时，我们取得了 97.5% 的准确率。

含可变位点的 Hatano-Nelson 模型——接下来，我们将介绍一种基于 SPR 概念、用于表征例外点的广义方法。我们考虑具有代表性的 Hatano-Nelson 模型 [45], ，它是许多非厄米物理核心思想的发源地。开放边界条件下含有 L 个格点的哈密顿量由以下矩阵给出

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & t-\gamma/2 & 0 & \dots & 0 \\ t+\gamma/2 & 0 & t-\gamma/2 & \dots & 0 \\ 0 & t+\gamma/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}. \quad (7)$$

这里， $t \pm \gamma/2$ 表示非互易跃迁项，即左右跃迁强度不相等。在该模型中，高阶例外点出现在 $t = \pm\gamma/2$处，其阶数取决于格点数，即 L。因此，若参数空间 $t-\gamma$中的某一点是例外点，那么对于含 L个格点的模型，SPR 值将接近 L。为简单起见，我们将变量改写为 $t_1 = t-\gamma/2$和 $t_2 = t+\gamma/2$。在这一参数空间 $t_1 - t_2$ 中，当 t_1 或 t_2 中的一个接近零、另一个接近一时，就会出现例外点。

这里我们针对不同格点数的 Hatano-Nelson 模型进行了训练。我们使用 $L = 3$ and$L = 7$ 对网络进行了训练。我们通过在 $t_1 - t_2$ 参数空间中选取随机点并计算 SPR 来生成数据。对于 $L = 3$，我们生成了 30,000 个点，其中包括 5,000 个满足 $t_1 \approx 1$ and $t_2 \approx 0$ 的点、5,000 个满足 $t_2 \approx 1$ and $t_1 \approx 0$ 的点，其余点满足 $t_1 \approx t_2$。同样，对于 $L = 7$，我们按照类似的分布生成了 30,000 个数据点。因此，最终我们得到了 60,000 个具有不同 SPR 值的数据点；根据 t_1、t_2 和 L 的取值，SPR 值约为 3、7 或 0。

在生成的数据中，10% 被保留为测试数据，其余数据用于训练神经网络。我们构建了一个包含两个隐藏层的神经网络，两个隐藏层分别具有 12 个和 4 个神经元。图 3 （b）中的损失曲线表明神经网络没有过拟合。训练完成后，我们预测了测试数据集相对于 SPR 值的分布，如图 3 （d）所示，其中 $6 < \mathrm{SPR} < 7$ 表示七阶例外点， $2 < \mathrm{SPR} < 3$ 表示三阶例外点，

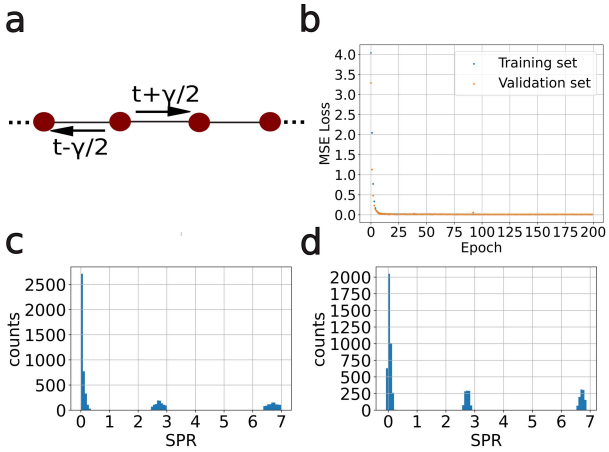

图 3. 可变格点数 Hatano-Nelson 模型的神经网络训练。(a) Hatano-Nelson 模型的示意图，其跃迁具有左右非对称性（$t \pm \gamma/2$）。(b) 构建了一个包含 2 个隐藏层的神经网络。两个隐藏层分别包含 12 个和 4 个神经元。可训练参数总数为 105。以训练轮次为横轴绘制的损失曲线表明，神经网络既没有过拟合，也没有欠拟合。(c) $L = 3$ 和 $L = 7$ 个格点对应的测试数据集及其实际 SPR 值的分布。(d) 与 (c) 相同的数据集分布，但显示的是网络预测的 SPR 值。可以看出，实际 SPR 值与预测 SPR 值一致。

而 $\mathrm{SPR} < 1$ 则表示非例外点。通过与图 3 （c）中测试数据集的实际 SPR 分布进行比较，我们发现实际与预测的 SPR 值分布高度一致，准确率接近 99.9%。因此，我们得出结论：利用 SPR 可以成功地对不同阶数的例外点进行分类。

我们的神经网络是否学会了 SPR 的广义性质，这是一个至关重要的问题。为了弄清这一点，我们让已经训练好的神经网络预测训练时未包含的模型中的例外点及其阶数。图 4 (a) 展示了来自 $(t_1, t_2, L = 4)$ 参数空间的真实 SPR 数据分布，这些数据取自含有 $L = 4$个格点的 Hatano-Nelson 模型。这里， $3 < \mathrm{SPR} < 4$ 表示四阶例外点，而 $0 < \mathrm{SPR} < 1$ 则表示非例外点。接下来，我们将这组含有 $L = 4$ 个格点的测试数据集输入已经训练好的神经网络，预测为 SPR 的数据分布如图 4 (b) 所示。值得注意的是，我们发现，在含有 $L = 3$ 个和 $L = 7$ 个格点的模型上训练的神经网络，能够识别例外点及其阶数，准确率超过 99.9%。

为了进一步考察神经网络的稳健性，我们通过从t_1、t_2、 $L = 6$参数空间中添加随机点，使情境更加复杂，并将其加入现有的 $L = 4$数据集。SPR 值的分布如图4 (c) 所示，其中 $0 < \mathrm{SPR} < 1$ 为非例外点， $3 <$SPR < 4 为四阶例外点， $5 < \mathrm{SPR} < 6$ 代表六阶例外点。预测 SPR 值的相应分布如图4 d 所示。我们注意到

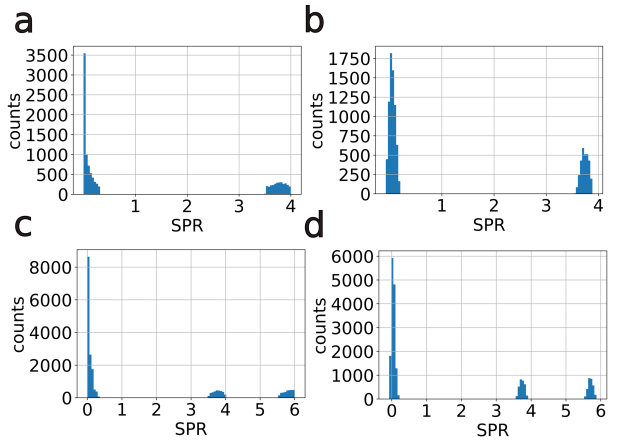

图4. 对未经训练的 Hatano-Nelson 模型中高阶例外点的 SPR 预测。(a) $L = 4$ 格点 Hatano-Nelson 模型的实际数据分布。这里，$3 <$SPR< 4表示四阶例外点，而 SPR 小于 1 表示普通点。(b) 神经网络对相应数据的预测，该网络仅针对 $L = 3$ 和 $L = 7$ 格点进行训练。(c) $L = 4$ 格点和 $L = 6$ 格点 HN 模型混合情况下的实际数据集，其中 $3 <$ SPR < 4 表示四阶例外点，$5 <$ SPR< 6 表示六阶例外点。(d) 神经网络给出的相应预测值。我们发现，即使混合了不同阶数例外点的数据，神经网络也能够检测出例外点的阶数。此外，对于训练数据集和测试数据集中均未包含的情况，神经网络也能够预测例外点及其阶数。

针对 $L = 3$ 个和 $L = 7$ 个格点训练的神经网络，不仅能够预测未训练模型中的例外点及其阶数，还能够以接近 99.9% 的准确率，对来自不同非厄米模型且包含不同阶数例外点的混合数据进行预测。

神经网络模型的训练细节–在进行总结之前，我们概述模拟的技术细节，这些细节一致应用于所有神经网络模型。我们采用自顶向下方法训练模型。我们从复杂模型开始，即设置较多的超参数（层数以及每层的神经元数量），然后系统地降低复杂度，直至性能显著下降。这一过程得到的神经网络模型在计算成本和性能之间实现了最佳平衡。我们通过采用默认的 Glorot 均匀权重初始化器启动训练过程，该初始化器从正态分布中随机初始化权重，并将所有偏置设为零。我们选择 Adam优化器进行自适应学习率调整，使实际 SPR 与预测 SPR 之间的均方误差最小化。采用了修正线性单元（ReLU）激活函数。每个模型使用小批量训练、批量大小为 32，训练 200 个训练轮数。未应用任何正则化技术。为监测潜在的过拟合，我们使用了单独的测试数据进行评估。

所有模型均采用了.....。需要强调的是，我们的机器学习模型本质上作为回归模型运行，用于预测 SPR 值。随后，根据具体的 SPR 范围对不同阶数的例外点进行分类。

与随机森林回归的比较– 为了与更直接的方法进行比较，我们在双位点模型数据集上训练了一个随机森林（RF）回归模型 [46]。数据被划分为 90% 的训练数据和 10% 的测试数据。这些超参数为我们的数据带来了最佳拟合，从而得到 R^2 得分 0.975。RF 模型的性能指标（R^2 得分和均方根误差）见表III。训练数据与测试数据之间性能指标的微小差异表明不存在过拟合。RF 模型的准确率为 92.5%，低于相应的神经网络模型。

表 III。RF 模型的性能。我们使用 300 棵决策树训练了一个随机森林模型。测试数据与训练数据之间性能得分的轻微差异表明，该模型没有过拟合。

Data	R^2得分	均方根误差
训练数据	0.975	0.176
测试数据	0.949	0.247

讨论与总结– 总而言之，我们提出了一种以数据为中心的方法，用于表征例外点。值得注意的是，我们的方法超越了非厄米物理中现有的机器学习应用，尤其是在预测非厄米拓扑相 [32–34, 39] 和非厄米皮肤效应 [37, 38]方面。我们成功展示了如何利用机器学习技术，以卓越的准确率预测各种模型中的例外点和例外点阶数。为确保透明性，我们选择了简单但并非平凡、且复杂度逐步增加的模型。对于双位点模型，我们训练了一个神经网络来分类例外点和非例外点。接下来，我们提出了一种新的特征——称为（SPR）——并利用它区分不同阶数的例外点。随后，我们将这一过程推广到著名的、具有可变位点的 Hatano-Nelson 模型。值得注意的是，我们发现，即使在训练数据中完全未出现某些阶数的例外点时，我们的神经网络模型仍能以超过 99% 的准确率预测例外点的真实阶数。

展望未来，我们的工作或许能为进一步探索开辟有趣的途径。我们的技术可用于研究高维空间中例外点的参数依赖性，而这可能变得相当复杂，尤其是在各向异性例外点等情况下 [47]。例外点的行为可能因系统中存在的对称性而异 [48]。我们设想，对框架的推广或许有助于刻画此类情形中的非平凡行为—

。此外，例外点与非厄米系统的拓扑相之间存在引人入胜的联系，这使得我们的方法可能适用于研究其拓扑性质。我们希望我们的工作能够推动这些富有前景的发展。

致谢–我们使用了 Python [49] 和 TensorFlow [50] 进行计算，感谢开发者们所做的工作。M. A. R. 感谢 Sourav Mal 提供有益的讨论，也感谢他的猫 Smoky；在撰写本文期间，Smoky 始终给予他平静的陪伴。M. A. R. 获得印度科学研究所研究生奖学金的资助。A. N. 感谢印度科学研究所提供的创业启动基金。

数据可用性– 支持本研究发现的数据和代码可从以下地址获取：`https://github.com/rejaafsar/EP_机器学习`

* awadhesh@iisc.ac.in[1] N. Moiseyev, 《*Non-Hermitian quantum mechanics*》（剑桥大学出版社，2011年）。[2] C. M. Bender, 《物理学进展报告》70, 947（2007年）。[3] Y. Ashida、Z. Gong 和 M. Ueda, 《物理学进展》69, 249（2020年）。[4] E. J. Bergholtz、J. C. Budich 和 F. K. Kunst, 《现代物理评论》93, 015005（2021年）。[5] K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato, 《物理评论X》9, 041015（2019年）。[6] A. Banerjee、R. Sarkar、S. Dey 和 A. Narayan，arXiv 预印本 arXiv:2212.06478（2022年）。[7] W. Heiss, 《物理学杂志 A：数学与理论》45, 444016（2012年）。[8] T. Kato, 《*Perturbation theory for linear operators*》，第132卷（施普林格科学与商业媒体，2013年）。[9] B. Zhen、C. W. Hsu、Y. Igarashi、L. Lu、I. Kaminer、A. Pick、S.-L. Chua、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c, 《自然》525, 354（2015年）。[10] J. C. Budich、J. Carlstr¨om、F. K. Kunst 和 E. J. Bergholtz, 《物理评论B》99, 041406（2019年）。[11] H. Hu 和 E. Zhao, 《物理评论快报》126, 010401（2021年）。[12] H. Hodaei、A. U. Hassan、S. Wittek、H. Garcia-Gracia、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides 和 M. Kha- javikhan, 《自然》548, 187（2017年）。[13] W. Chen、S.. Kaya ¨Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang, 《自然》548, 192（2017年）。[14] B. Peng、S.. K. ¨Ozdemir、M. Liertzer、W. Chen、J. Kramer、H. Yılmaz、J. Wiersig、S. Rotter 和 L. Yang, 《美国国家科学院院刊》113, 6845（2016年）。[15] M.-A. Miri 和 A. Al`u, 《科学》363, eaar7709（2019年）。[16] M. Parto、Y. G. Liu、B. Bahari、M. Khajavikhan 和 D. N. Christodoulides, 《纳米光子学》10, 403（2020年）。[17] S.. K. ¨Ozdemir、S. Rotter、F. Nori 和 L. Yang, 《自然·材料》18, 783（2019年）。[18] Y. Choi、C. Hahn、J. W. Yoon 和 S. H. Song, 《自然·通讯》9, 2182（2018年）。[19] T. Stehmann、W. Heiss 和 F. Scholtz, 《物理学杂志A：数学与一般》37，7813（2004年）。[20] C. Shi、M. Dubois、Y. Chen、L. Cheng、H. Ramezani、Y. Wang 和 X. Zhang, 《自然·通讯》7，11110（2016年）。[21] W. Zhu、X. Fang、D. Li、Y. Sun、Y. Li、Y. Jing 和 H. Chen, 《物理评论快报》121，124501（2018年）。[22] E. Bedolla、L. C. Padierna 和 R. Castaneda-Priego, 《物理学杂志：凝聚态》33，053001（2020年）。[23] G. Carleo、I. Cirac、K. Cranmer、L. Daudet、M. Schuld、N. Tishby、L. Vogt-Maranto 和 L. Zdeborov´a, 《现代物理评论》91，045002（2019年）。[24] D.-L. Deng、X. Li 和 S. D. Sarma, 《物理评论B》96，195145（2017年）。[25] Y. Zhuang、L. H. Santos 和 T. L. Hughes，载于 *Memorial Volume for Shoucheng Zhang* 2022（世界科学出版社，），第211–223页。[26] M. S. Scheurer 和 R.-J. Slager, 《物理评论快报》124，226401（2020年）。[27] S. Tibaldi、G. Magnifico、D. Vodola 和 E. Ercolessi, 《SciPost物理》14，005（2023年）。[28] P. Zhang、H. Shen 和 H. Zhai, 《物理评论快报》120，066401（2018年）。[29] J. F. Rodriguez-Nieva 和 M. S. Scheurer, 《自然·物理》15，790（2019年）。[30] Y. Long 和 B. Zhang, 《物理评论快报》130，036601（2023年）。[31] J. Carrasquilla 和 R. G. Melko, 《自然·物理》13，431（2017年）。[32] B. Narayan 和 A. Narayan, 《物理评论B》103，035413（2021年）。[33] Z. Cheng 和 Z. Yu, 《中国物理快报》38，070302（2021年）。[34] L.-F. Zhang、L.-Z. Tang、Z.-H. Huang、G.-Q. Zhang、W. Huang 和 D.-W. Zhang, 《物理评论A》103，012419（2021年）。[35] L.-W. Yu 和 D.-L. Deng, 《物理评论快报》126，240402（2021年）。[36] Y. Long、J. Ren 和 H. Chen, 《物理评论快报》124，185501（2020年）。[37] H. Araki、T. Yoshida 和 Y. Hatsugai, 《日本物理学会杂志》90，053703（2021年）。[38] C. Shang、S. Liu、R. Shao、P. Han、X. Zang、X. Zhang、K. N. Salama、W. Gao、C. H. Lee、R. Thomale, *et al.*, 《先进科学》9，2202922（2022年）。[39] W. W. Ahmed、M. Farhat、K. Staliunas、X. Zhang 和 Y. Wu, 《通讯·物理》6，2（2023年）。[40] Y. Yu、L.-W. Yu、W. Zhang、H. Zhang、X. Ouyang、Y. Liu、D.-L. Deng 和 L.-M. Duan, npj Quantum Information 8，116（2022年）。[41] S. Zhang、X. Zhang、L. Jin 和 Z. Song, 《物理评论A》101，033820（2020年）。[42] M. M¨uller 和 I. Rotter, 《物理学杂志A：数学与一般》41，244018（2008年）。[43] H. Eleuch 和 I. Rotter, 《物理评论A》93，042116（2016年）。[44] R. Jaiswal、A. Banerjee 和 A. Narayan，arXiv预印本 arXiv:2107.11649（2021年）。[45] N. Hatano 和 D. R. Nelson, 《物理评论快报》77，570（1996年）。[46]我们使用了 sklearn 的随机森林回归器类，并采用以下超参数：（i）树的数量（n estimators）= 300；（ii）分割内部节点所需的最小样本数

（min samples split $= 20$；（iii）随机状态 $= 0$，用于控制随机性；以及（iv）并行运行的作业数（n jobs） $= 3$，其余参数均保持默认值。[47] K. Ding、G. Ma、Z. Zhang 和 C. T. Chan，《物理评论快报》121，085702（2018年）。[48] I. Mandal 和 E. J. Bergholtz，《物理评论快报》127, 186601（2021年）。[49] G. Van Rossum、F. L. Drake、 *et al.*、 *Python referencemanual*（Centrum voor Wiskunde en Informatica 阿姆斯特丹，1995年）。[50] M. Abadi、A. Agarwal、P. Barham、E. Brevdo、Z. Chen、C. Citro、G. S. Corrado、A. Davis、J. Dean、M. Devin、*et al.*，网址：https://www. tensorflow. org（2015年）。