arXiv:2305.00778v1 [math.AP] 1 May 2023

变系数相容时间分数阶偏微分系统的对称群、基本解与守恒律

程晓宇 * 王丽珍 †

2023年5月2日

摘要：本文研究了一类变系数相容时间分数阶偏微分方程（PDEs）的李对称群与基本解之间的关系。具体而言，应用对称群方法构造所研究方程的群不变解，并借助上述得到的群不变解及逆拉普拉斯变换，建立这些系统相应的基本解。此外，通过等价变换给出了两个相容时间分数阶系统的基本解之间的联系。进一步地，利用新诺特定理和所得到的李代数，给出了这些分数阶系统的守恒律。

关键词：相容时间分数阶系统、李对称群、基本解、等价变换、守恒律

数学主题分类：35A08, 35B06

1 引言

分数阶微积分意味着微分算子和积分算子的阶数为分数，并可追溯至1695年，当时洛必达在致莱布尼茨的信中提出了这一概念

*非线性研究中心，数学学院，西北大学，中国陕西省西安市，邮编：710127，电子邮箱：xiaoyuchengxy@163.com

†非线性研究中心，数学学院，西北大学，中国陕西省西安市，邮编：710127，电子邮箱：wanglizhen@nwu.edu.cn

。在过去四十年中，分数阶微积分因其在科学、工程学、物理学、生物学等各个领域的应用而受到广泛关注 [1–3]。

迄今为止，分数阶导数已有多种定义形式，例如黎曼–刘维尔、卡普托和 Gr¨unwald-Letnikov 算子，其中黎曼–刘维尔导数和卡普托导数最为著名，也在现代研究中得到广泛应用。与经典导数相比，它们失去了一些基本性质，例如链式法则、莱布尼茨法则，以及黎曼–刘维尔分数阶导数对常数求导不为零。2014 年，Khalil [4] 提出了一种新的定义，称为相容分数阶导数，该定义取决于极限的定义。这类导数性质良好，Abdeljawad [5]证明，共形导数满足一些性质，例如链式法则、Gromwall 不等式、分数阶拉普拉斯变换等。参考文献 [6] 指出，共形导数反映了函数在 (t, ϵ, α) 中速度的方向和大小，而共形导数下函数的变化率取决于 α，因此它比经典导数更具 α包容性。近年来，参考文献 [7–10]研究了共形导数的其他一些性质。

对称群方法最初由 Sophous Lie 提出，随后由 Olver 扩展 [11]，已被证明是分析微分方程的一种实用方法。事实上，微分方程的对称群是一个能够将该方程的解变换为其他解的群。因此，我们可以直接利用对称群的性质，从一个系统的平凡解构造出复杂解。有关对称群的更多信息，请参阅参考文献[11–13]。近年来，对称群方法已扩展至分数阶微分方程 [14] ，并被证实是求解分数阶微分方程精确解的有力工具，例如（1+1）维黎曼–刘维尔分数阶方程[15–18], 、（2+1）维黎曼–刘维尔分数阶方程 [19–21] 等。对于相容分数阶导数，Chatibi 等人[22] 证明，李对称群可以扩展到相容微分方程，并构造了相容导数的延拓公式，从而求得相容热方程的精确解。

守恒律在研究非线性偏微分方程的某些性质中发挥着重要作用。参考文献 [23] 中的诺特定理给出了李对称群与偏微分方程守恒律之间的对应关系。通过诺特定理，还可以构造微分方程的守恒律。最近，借助非线性自伴方程的概念，Ibragimov [24, 25] 提出了一个新守恒定理，用于研究任意微分方程的守恒律。

对于标量偏微分方程，一些学者证明了李对称群与偏微分方程的基本解密切相关。Craddock 及其合作者 [26] 首次表明，对称群方法可用于构造以下形式的偏微分方程的基本解

$$u_t = xu_{xx} + f(x)u_x, \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

当漂移函数 $f(x)$ 满足 Riccati 方程时。他们提出的方法表明，总可以通过对称性推导出方程 (1.1) 基本解的经典积分变换。此外，他们在参考文献 [27] 中改进了这些结果，并得到了以下形式的一类方程的基本解

$$u_t = \sigma x^{\gamma} u_{xx} + f(x)u_x - \mu x^r u, \quad \sigma > 0, \tag{1.2}$$

其中 γ、 μ 和 r 为常数。在参考文献 [28]，中，他们进一步研究了

$$u_t = \sigma x^{\gamma} u_{xx} + f(x)u_x - g(x)u, \quad x \geq 0, \sigma > 0, \gamma \neq 2, \tag{1.3}$$

并证明，非平凡的李对称性可导出方程 (1.3) 基本解的拉普拉斯变换和傅里叶变换。

此外，Kang 和 Qu [29] 拓展了 Craddock 等人 [26–28] 提出的方法，以研究李对称性与以下变系数抛物型方程系统的基本解之间的关系

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \dfrac{c}{x}u_x + mx^k v_x, \\ v_t = v_{xx} + \dfrac{c}{x}v_x + nx^k u_x, \quad x > 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 c、 m、 n 和 k 均为常数。他们建立了系统 (1.4) 所具有的若干对称性，并根据所得对称性给出了相应的群不变解。此外，他们利用拉普拉斯逆变换，由系统 (1.4) 的群不变解推导出了该系统的基本解。

已有研究表明，李对称群与整数阶偏微分方程的基本解密切相关。由此自然产生一个问题：我们能否根据分数阶线性偏微分方程的对称性构造其基本解？在某些情况下，Caputo 分数阶模型与共形分数阶模型表现相似[30–32], ，而有时共形分数阶模型甚至更具优势，例如在肿瘤-免疫相互作用中[7]。更重要的是，以相容导数意义构造方程的解比使用 Caputo 导数更容易。系统的时间导数项

(1.4) 可推广为阶数为 α 的时间分数阶导数。据我们所知，目前尚无文献采用对称群方法研究时间分数阶系统的基本解。迄今为止，与用于李对称群的黎曼–刘维尔导数和 Caputo 导数相比，相容分数阶导数在计算上更为方便。在参考文献 [33], 中，我们研究了以下相容时间分数阶方程

$$\mathcal{T}_t^{\alpha} u = x u_{xx} + f(x) u_x, \quad x \geq 0, \tag{1.5}$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$， $\mathcal{T}_t^{\alpha}$是阶数为 α的相容分数阶微分算子。此外，我们基于所获得的对称性构造了方程（1.5）的基本解和守恒律。本文考虑如下相容时间分数阶抛物型方程系统

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^{\alpha} u = u_{xx} + \dfrac{c}{x} u_x + m x^k v_x, \\ \mathcal{T}_t^{\alpha} v = v_{xx} + \dfrac{c}{x} v_x + n x^k u_x, \quad x > 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$。通过参考文献 [22, 26–29], 中采用的方法和公式，我们将利用所获得的对称性计算系统（1.6）的基本解。

本文旨在利用系统（1.6）所具有的李对称性，构造一类具有共形时间导数的分数阶系统的基本解和守恒律。第2节介绍与共形导数、拉普拉斯变换和贝塞尔函数相关的定义和性质。第3节建立系统（1.6）的基本解，并且两个相容时间分数阶系统的基本解可以通过等价变换相互联系。此外，系统（1.6）的守恒律将在第4节中得到。在本文最后，第5节给出总结性评论。

2 预备知识

本节回顾一致分数阶微积分、拉普拉斯变换和贝塞尔函数的一些定义及相关性质。

定义 2.1 [4] 设 $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 且 $\alpha \in (0, 1]$。函数 $f(t)$ 的 α 阶共形导数定义为

$$\mathcal{T}_t^{\alpha}(f)(t) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon},$$

对所有 $t>0$均成立。

接下来，我们给出共形微分算子的以下引理。

引理 2。**1** [4] 设 $0<\alpha\leq 1$ 和 $f(t)$ 在点 α 处可微 $t>0$。则

(a) $\mathcal{T}_t^{\alpha}(t^p)=pt^{p-\alpha}$ 对所有 $p\in\mathbb{R}$, (b) $\mathcal{T}_t^{\alpha}(c)=0$, c 为常数，(c) 此外，若 $f(t)$ 可微，则 $\mathcal{T}_t^{\alpha}(f)(t)=t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}$.

定义 **2.2** [34] 设 $z\in\mathbb{C}/(-\infty,0]$. 修正贝塞尔函数 $I_\nu(z)$ 定义为

$$I_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}.$$

定义 **2.3** [34] 设函数 $f(t)$ 定义在 $t\in(0,+\infty)$ 上，且其~拉普拉斯变换 $f(s)$ 定义为

$$\tilde{f}(s)=\mathcal{L}(f)(s):=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

并且 $f(t)$ 被称为 $\tilde{f}(s)$ 的拉普拉斯逆变换，记作 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}(s))(t)$。

我们给出下面这个与拉普拉斯变换有关的引理。

引理 **2.2** [26, 34] 令 $\mathcal{L}$ 表示关于 λ 的拉普拉斯变换，则有

(i) $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(\lambda)=\tilde{f}(\lambda-a)$，其中 a 为任意常数，

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^\mu}e^{\frac{k}{\lambda}}\right)=\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}I_{\mu-1}(2\sqrt{ky})$，其中 $\mu>0$、$k>0$ 和 $I_{\mu-1}$ 是阶为 $\mu-1$ 的修正贝塞尔函数。

3 李对称群和偏微分方程组的基本解 (1.6)

本节旨在根据系统所允许的李代数，求出系统（1.6）基本解的精确表达式。首先，我们介绍可顺应分数阶抛物型系统的李对称群及其基本解的定义。

3.1 可顺应时间分数阶抛物型系统的李点对称与基本解

考虑一个相容时间分数阶系统

$$\begin{cases}\mathcal{T}_t^{\alpha}u=M(x,t,u,v,u^{(1)},v^{(1)},\cdots,u^{(n)},v^{(n)}),\\ \mathcal{T}_t^{\alpha}v=N(x,t,u,v,u^{(1)},v^{(1)},\cdots,u^{(n)},v^{(n)}),\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 M 和 N 假设关于其自变量是光滑的。假设系统 G （3.1）的对称群由以下向量场生成

$$V=\xi(x,t,u,v)\partial_x+\tau(x,t,u,v)\partial_t+\eta(x,t,u,v)\partial_u+\phi(x,t,u,v)\partial_v, \tag{3.2}$$

其中 ξ， τ， η 和 ϕ 均为无穷小变换系数。系统（3.1）的第 n阶延拓公式如下

$$\mathrm{Pr}^{(\alpha,n)}V=V+\eta^{\alpha,t}\partial_{\mathcal{T}_t^\alpha u}+\phi^{\alpha,t}\partial_{\mathcal{T}_t^\alpha v}+\eta^x\partial_{u_x}+\phi^x\partial_{v_x}+\eta^{xx}\partial_{u_{xx}}+\phi^{xx}\partial_{v_{xx}}+\cdots, \tag{3.3}$$

其中， η^x、 ϕ^x、 η^{xx}、 ϕ^{xx}、 $\cdots$ 的公式已给出，更详细且严谨的讨论可参见参考文献[11–13]。 $\eta^{\alpha,t}$、 $\phi^{\alpha,t}$ 的表达式如下

$$\eta^{\alpha,t}=t^{1-\alpha}\eta_t+t^{1-\alpha}\left(\eta_u-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)u_t+t^{1-\alpha}(\eta_v v_t-\xi_t u_x-\xi_u u_x u_t-\xi_v u_x v_t-\tau_u u_t^2-\tau_v u_t v_t),$$

$$\phi^{\alpha,t}=t^{1-\alpha}\phi_t+t^{1-\alpha}\left(\phi_v-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)v_t+t^{1-\alpha}(\phi_u u_t-\xi_t v_x-\xi_u v_x u_t-\xi_v v_x v_t-\tau_u u_t v_t-\tau_v v_t^2).$$

向量场 V满足以下不变条件

$$\begin{cases}\mathrm{Pr}^{(\alpha,n)}V(\mathcal{T}_t^\alpha u-M(x,u^{(n)},v^{(n)})|_{(3.1)}=0,\\ \mathrm{Pr}^{(\alpha,n)}V(\mathcal{T}_t^\alpha v-N(x,u^{(n)},v^{(n)})|_{(3.1)}=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

基于系统（3.4），我们可以推导出一个超定系统，并求解该系统以得到向量场 V。为使向量场 V指数化，我们求解以下系统

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\epsilon}=\xi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u},\tilde{v}),\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}\epsilon}=\tau(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u},\tilde{v}),\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\epsilon}=\eta(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u},\tilde{v}),\quad \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\epsilon}=\phi(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u},\tilde{v}), \tag{3.5}$$

满足初始条件

$$\tilde{x}(0)=x,\quad \tilde{t}(0)=t,\quad \tilde{u}(0)=u,\quad \tilde{v}(0)=v. \tag{3.6}$$

若（u（x， t） v（x， t））是系统（3.1）的一个解，则由 V生成的该系统的作用可表示为

$$(\tilde{u}_\epsilon(x,t),\tilde{v}_\epsilon(x,t))=\rho(\exp(\epsilon V))(u(x,t),v(x,t)), \tag{3.7}$$

其中 ϵ 是群参数，而（$\tilde{u}_\epsilon$（x， t） $\tilde{v}_\epsilon$（x， t））是系统（3.1的一个新解。此外，与标量情形不同，根据参考文献中线性抛物型 2×2矩阵系统（1.6的基本解定义，可以注意到该系统的基本解是一个

系统，见参考文献 [29, 35]。假设 2×2 矩阵 $\boldsymbol{P}$（t，x，y）是系统（3.1的一个解，则

$$\boldsymbol{U}(x,t)=\int_R \boldsymbol{P}(t,x,y)\boldsymbol{f}(y)\mathrm{d}y, \tag{3.8}$$

是系统 (3.1) 的柯西问题的一个解，其初始数据为 $\boldsymbol{U}(x,0)=\boldsymbol{f}(x)$，其中 $\boldsymbol{U}=(u,v)^{\mathrm{T}}$。接下来，通过联立方程 (3.7) 和 (3.8)，我们选取系统 (3.1) 的两组线性无关解，记为 $(u_i(x)\ v_i(x))\ i=1$，2，它们对应于系统 (3.1) 的两组群不变解，记为 $(\tilde{u}^i_\epsilon(x,t)\ \tilde{v}^i_\epsilon(x,t))\ i=1$，2。

此外，为了应用拉普拉斯变换，有时我们必须选择适当的变换 $\epsilon\to\lambda$，使 $(\tilde{u}^i_\epsilon(x,t)\ \tilde{v}^i_\epsilon(x,t))$ 变为 $(\tilde{u}^i_\lambda(x,t)\ \tilde{v}^i_\lambda(x,t))$，并满足以下条件

$$\tilde{u}^i_\lambda(x,0)=\mathrm{e}^{-\lambda x}L^u_i(x),\quad \tilde{v}^i_\lambda(x,0)=\mathrm{e}^{-\lambda x}L^v_i(x),\quad i=1,2. \tag{3.9}$$

最后，给出以下定理，以展示系统 (3.1) 的基本解公式。

定理 3.1 对于定义在 3.1 的具有两个因变量 (u,v) 的系统 ($R^+\times[0,T]$，假设其群不变解 $(\tilde{u}^i_\lambda(x,t)\ \tilde{v}^i_\lambda(x,t))\ i=1$，2 是关于 y 的拉普拉斯变换。也就是说，存在一个矩阵

$$\boldsymbol{P}(t,x,y)=\begin{pmatrix}A(t,x,y) & B(t,x,y)\\ C(t,x,y) & D(t,x,y)\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

满足

$$\int_0^\infty \boldsymbol{P}(t,x,y)\boldsymbol{L}(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y=\boldsymbol{U}(x,t)$$

具有矩阵

$$\boldsymbol{L}(x)=\begin{pmatrix}L^u_1(x) & L^u_2(x)\\ L^v_1(x) & L^v_2(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}(x,t)=\begin{pmatrix}\tilde{u}^1_\lambda(x,t) & \tilde{u}^2_\lambda(x,t)\\ \tilde{v}^1_\lambda(x,t) & \tilde{v}^2_\lambda(x,t)\end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{P}(t,x,y)$ 是系统 (3.1) 的基本解。

由于定理 3.1 的证明与参考文献 [29], 中定理 2.1 的证明相似，因此省略细节。

3.2 偏微分方程组的基本解

可以发现，求系统（3.1）基本解的关键步骤是计算 $A(t,x,y)$，$B(t,x,y)$，$C(t,x,y)$，$D(t,x,y)$ 在（3.10）中的表达式，该式在

小节 3.1. 根据定理 3.1，可以通过对某个群不变解作拉普拉斯逆变换来构造基本解。下面我们给出一个例子来说明具体细节。

例 3.1 考虑变系数抛物型方程系统 s

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^{\alpha} u = x u_{xx} + a v_x, \\ \mathcal{T}_t^{\alpha} v = x v_{xx} + b u_x, \quad x > 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 a 和 b 为常数，且 $ab > 0$.

第一步，根据方程（3.2）-（3.4），我们可以得到

$$\begin{cases} [\eta^{\alpha,t} - \xi u_{xx} - x\eta^{xx} - a\phi^x]|_{(3.11)} = 0, \\ [\phi^{\alpha,t} - \xi v_{xx} - x\phi^{xx} - b\eta^x]|_{(3.11)} = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

令系统（ u_x、 u_{xx}、 $\cdots$（3.12）中各项的系数为零，从而得到以下决定方程

$$\begin{cases} t^{1-\alpha}\eta_t - x\eta_{xx} - a\phi_x = 0, \quad x\left(-\tau_t + \dfrac{1-\alpha}{t}\tau\right) - \xi + 2x\xi_x = 0, \\ a\left(\eta_u - \tau_t + \dfrac{1-\alpha}{t}\tau\right) - 2x\eta_{xv} - a(\phi_v - \xi_x) = 0, \\ b\eta_v - t^{1-\alpha}\xi_t - x\left(2\eta_{xu} - \xi_{xx}\right) - a\phi_u = 0, \\ t^{1-\alpha}\phi_t - x\phi_{xx} - b\eta_x = 0, \quad b\left(\phi_v - \tau_t + \dfrac{1-\alpha}{t}\tau\right) - 2x\phi_{xu} - b(\eta_u - \xi_x) = 0, \\ a\phi_u - t^{1-\alpha}\xi_t - x(2\phi_{xv} - \xi_{xx}) - b\eta_v = 0, \\ \tau_u = \tau_v = \tau_x = \xi_u = \xi_v = \eta_{uu} = \eta_{uv} = \eta_{vv} = \phi_{uu} = \phi_{uv} = \phi_{vv}. \end{cases} \tag{3.13}$$

求解方程（3.13），得到系统（3.11）李代数的一个基底

$$V_1 = t\partial_t + \alpha x\partial_x, \quad V_2 = t^{1-\alpha}\partial_t,$$

$$V_3 = t^{1+\alpha}\partial_t + 2\alpha x t^{\alpha}\partial_x - (\alpha^2 x u + a\alpha t^{\alpha} v)\partial_u - (\alpha^2 x v + b\alpha t^{\alpha} u)\partial_v,$$

$$V_4 = u\partial_u + v\partial_v, \quad V_5 = av\partial_u + bu\partial_v, \quad V_{\phi_3} = \phi_3(x,t)\partial_v, \quad V_{\eta_3} = \eta_3(x,t)\partial_u,$$

其中， η_3 和 ϕ_3 分别满足 $t^{1-\alpha}\eta_{3t} - x\eta_{3xx} - a\phi_{3x} = 0$ 和 $t^{1-\alpha}\phi_{3t} - x\phi_{3xx} - b\eta_{3x} = 0$。

现在我们关注向量场 V_3，并打算计算由向量场 V_3生成的群作用。求解系统 (3.5)，并以初始条件 (3.6)为条件，可得

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \left(\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}} + \dfrac{\sqrt{ab}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{-\sqrt{ab}}} \right) u \right. \\ \qquad \left. + \left(\dfrac{a}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}} - \dfrac{a}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{-\sqrt{ab}}} \right) v \right), \\ \tilde{v}_\epsilon(x,t) = \dfrac{1}{2a} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \left(\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}} - \dfrac{\sqrt{ab}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{-\sqrt{ab}}} \right) u \right. \\ \qquad \left. + \left(\dfrac{a}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}} + \dfrac{a}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{-\sqrt{ab}}} \right) v \right), \end{cases} \tag{3.14}$$

其中 $u = u\left(\dfrac{x}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^2}, \dfrac{t}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)$, $v = v\left(\dfrac{x}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^2}, \dfrac{t}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)$. 若 $(u(x,t)\ v(x,t))$ 是系统（3.11）的一个解，则 $(\tilde{u}_\epsilon(x,t)\ \tilde{v}_\epsilon(x,t))$ 是系统（3.11）的一个新解。

接下来，根据方程（3.10），我们证明 $\boldsymbol{P}(t,x,y)$ 的存在性；换言之，我们需要给出 $A(t,x,y)$、$B(t,x,y)$、$C(t,x,y)$ 和 $D(t,x,y)$ 的显式表达式。取系统（3.11）的两组如下形式的解

$$(u_1, v_1) = \left(1, \frac{\sqrt{ab}}{a}\right), \quad (u_2, v_2) = x^{1+\sqrt{ab}} \left(1, -\frac{\sqrt{ab}}{a}\right), \tag{3.15}$$

然后将（3.15）代入（3.14）可得

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_\epsilon^1(x,t), \tilde{v}_\epsilon^1(x,t)) &= \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \frac{1}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}}, \frac{\sqrt{ab}}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \frac{1}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}}} \right), \\ (\tilde{u}_\epsilon^2(x,t), \tilde{v}_\epsilon^2(x,t)) &= \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \frac{x^{1+\sqrt{ab}}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}+2}}, -\frac{\sqrt{ab}}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x}{1+\alpha\epsilon t^\alpha}} \frac{x^{1+\sqrt{ab}}}{(1+\alpha\epsilon t^\alpha)^{\sqrt{ab}+2}} \right), \end{aligned} \tag{3.16}$$

其满足

$$(\tilde{u}_\epsilon^1(x,0), \tilde{v}_\epsilon^1(x,0)) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\epsilon x} \left(1, \frac{\sqrt{ab}}{a}\right), \quad (\tilde{u}_\epsilon^2(x,0), \tilde{v}_\epsilon^2(x,0)) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\epsilon x} x^{1+\sqrt{ab}} \left(1, -\frac{\sqrt{ab}}{a}\right).$$

鉴于定理 3.1 并设 $\lambda = \alpha^2\epsilon$ 在（3.16）中，我们推得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (AL_1^u(y) + BL_1^v(y)) \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}} \frac{1}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty (AL_2^u(y) + BL_2^v(y)) \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}} \frac{x^{1+\sqrt{ab}}}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}+2}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty (CL_1^u(y) + DL_1^v(y)) \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{ab}}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}} \frac{1}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty (CL_2^u(y) + DL_2^v(y)) \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y = -\frac{\sqrt{ab}}{a} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}} \frac{x^{1+\sqrt{ab}}}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}+2}}. \end{cases} \tag{3.17}$$

根据引理 2.2，我们有

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}}\dfrac{1}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}}}\right)=\dfrac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{\sqrt{ab}-1}{2}}I_{\sqrt{ab}-1}\left(\dfrac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right), \\ \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}}\dfrac{x^{1+\sqrt{ab}}}{(1+\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})^{\sqrt{ab}+2}}\right)=x^{1+\sqrt{ab}}\dfrac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1+\sqrt{ab}}{2}}I_{\sqrt{ab}+1}\left(\dfrac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right). \end{cases} \tag{3.18}$$

根据方程（3.18），并对方程（3.17）进行拉普拉斯变换的逆变换，得到

$$A+\frac{\sqrt{ab}}{a}B=\frac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\sqrt{ab}-1}{2}}I_{\sqrt{ab}-1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right), \tag{3.19}$$

$$A-\frac{\sqrt{ab}}{a}B=\frac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1+\sqrt{ab}}{2}}I_{\sqrt{ab}+1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right), \tag{3.20}$$

$$C+\frac{\sqrt{ab}}{a}D=\frac{\sqrt{ab}}{a}\frac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\sqrt{ab}-1}{2}}I_{\sqrt{ab}-1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right), \tag{3.21}$$

$$C-\frac{\sqrt{ab}}{a}D=-\frac{\sqrt{ab}}{a}\frac{\alpha}{t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1+\sqrt{ab}}{2}}I_{\sqrt{ab}+1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right). \tag{3.22}$$

求解方程（3.19）-（3.22）并根据（3.10），我们得到系统（3.11）的以下基本解

$$\boldsymbol{P}(t,x,y)=\frac{\alpha}{2t^\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x+y)}{t^\alpha}}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \frac{a}{\sqrt{ab}}\gamma_2\\ \frac{\sqrt{ab}}{a}\gamma_2 & \gamma_1\end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

其中

$$\gamma_1=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\sqrt{ab}-1}{2}}I_{\sqrt{ab}-1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1+\sqrt{ab}}{2}}I_{\sqrt{ab}+1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right),$$

$$\gamma_2=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\sqrt{ab}-1}{2}}I_{\sqrt{ab}-1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1+\sqrt{ab}}{2}}I_{\sqrt{ab}+1}\left(\frac{2\alpha\sqrt{xy}}{t^\alpha}\right).$$

本例表明，可以利用该系统的群不变解推导相容时间分数阶系统（3.11）的基本解，因此问题是，我们是否可以使用与例 3.1 中类似的方法获得其他系统的基本解。

此外，我们讨论以下系统。

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^{\alpha} u = x^m u_{xx} + a' v_x, \\ \mathcal{T}_t^{\alpha} v = x^m v_{xx} + b' u_x, \end{cases} \tag{3.24}$$

它比系统 (3.11) 更一般。若令 $y = x^{\frac{2-q}{2}}$和 $\tau = (1-\frac{q}{2})^{\frac{2}{\alpha}} t$代入系统 (3.24，则该系统转化为以下相容时间分数阶系统

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\tau}^{\alpha} u = u_{yy} + \dfrac{q}{(q-2)y} u_y + a' \dfrac{2}{2-q} y^{\frac{q}{q-2}} v_y, \\ \mathcal{T}_{\tau}^{\alpha} v = v_{yy} + \dfrac{q}{(q-2)y} v_y + b' \dfrac{2}{2-q} y^{\frac{q}{q-2}} u_y. \end{cases} \tag{3.25}$$

在第3.3节中，我们考虑一个比系统（1.6）更一般的相容时间分数阶系统（3.25）。

3.3 系统的基本解 (1.6)

首先，为了简便起见，我们仅考虑系统（1.6）中的 $mn > 0$。回顾一下，如果向量场 $V = \xi(x,t,u,v)\partial_x + \tau(x,t,u,v)\partial_t + \eta(x,t,u,v)\partial_u + \phi(x,t,u,v)\partial_v$ 生成了系统（1.6）的一种对称性，那么 V 必须满足

$$\begin{cases} \mathrm{Pr}^{(\alpha,2)} V \left(\mathcal{T}_t^{\alpha} u - u_{xx} - \dfrac{c}{x} u_x - m x^k v_x \right) |_{(1.6)} = 0, \\ \mathrm{Pr}^{(\alpha,2)} V \left(\mathcal{T}_t^{\alpha} v - v_{xx} - \dfrac{c}{x} v_x - n x^k u_x \right) |_{(1.6)} = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

使用标准的李点对称性计算算法，并利用方程（3.26），令 u_x、 u_{xx}、 $\cdots$的系数为零，可得

$$t^{1-\alpha}\eta_t - \eta_{xx} - \frac{c}{x}\eta_x - m x^k \phi_x = 0, \tag{3.27}$$

$$t^{1-\alpha}\phi_t - \phi_{xx} - \frac{c}{x}\phi_x - n x^k \eta_x = 0, \tag{3.28}$$

$$\frac{1-\alpha}{t}\tau - \tau_t + 2\xi_x = 0, \tag{3.29}$$

$$\frac{c}{x}\left(-\tau_t + \frac{1-\alpha}{t}\tau \right) + n x^k \eta_v - t^{1-\alpha}\xi_t - (2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + \frac{c}{x^2}\xi + \frac{c}{x}\xi_x - m x^k \phi_u = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{c}{x}\left(-\tau_t + \frac{1-\alpha}{t}\tau \right) + m x^k \phi_u - t^{1-\alpha}\xi_t - (2\phi_{xv} - \xi_{xx}) + \frac{c}{x^2}\xi + \frac{c}{x}\xi_x - n x^k \eta_v = 0, \tag{3.31}$$

$$m x^k \left(\eta_u - \tau_t + \frac{1-\alpha}{t}\tau \right) - 2\eta_{xv} - mk x^{k-1}\xi - m x^k (\phi_v - \xi_x) = 0, \tag{3.32}$$

$$nx^k\left(\phi_v-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)-2\phi_{xu}-nkx^{k-1}\xi-nx^k(\eta_u-\xi_x)=0, \tag{3.33}$$

$$\xi_u=\xi_v=\tau_x=\tau_u=\tau_v=\phi_{uu}=\phi_{uv}=\phi_{vv}=\eta_{uu}=\eta_{uv}=\eta_{vv}=0. \tag{3.34}$$

N现在来求解方程（3.27）-（3.34）。考虑方程（3.34）以求得

$$\tau=\tau(t),\quad \xi=\xi_1(x,t), \tag{3.35}$$

and

$$\eta=\eta_1(x,t)u+\eta_2(x,t)v+\eta_3(x,t),\quad \phi=\phi_1(x,t)v+\phi_2(x,t)u+\phi_3(x,t). \tag{3.36}$$

将方程（3.35）-（3.36）代入方程（3.27）-（3.33）可得

$$t^{1-\alpha}\eta_{1t}-\eta_{1xx}-\frac{c}{x}\eta_{1x}-mx^k\phi_{2x}=0, \tag{3.37}$$

$$t^{1-\alpha}\eta_{2t}-\eta_{2xx}-\frac{c}{x}\eta_{2x}-mx^k\phi_{1x}=0, \tag{3.38}$$

$$t^{1-\alpha}\eta_{3t}-\eta_{3xx}-\frac{c}{x}\eta_{3x}-mx^k\phi_{3x}=0, \tag{3.39}$$

$$t^{1-\alpha}\phi_{1t}-\phi_{1xx}-\frac{c}{x}\phi_{1x}-nx^k\eta_{2x}=0, \tag{3.40}$$

$$t^{1-\alpha}\phi_{2t}-\phi_{2xx}-\frac{c}{x}\phi_{2x}-nx^k\eta_{1x}=0, \tag{3.41}$$

$$t^{1-\alpha}\phi_{3t}-\phi_{3xx}-\frac{c}{x}\phi_{3x}-nx^k\eta_{3x}=0, \tag{3.42}$$

$$\frac{c}{x}\left(-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)+nx^k\eta_2-t^{1-\alpha}\xi_{1t}-2\eta_{1x}+\xi_{1xx}+\frac{c}{x^2}\xi_1+\frac{c}{x}\xi_{1x}-mx^k\phi_2=0, \tag{3.43}$$

$$\frac{c}{x}\left(-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)+mx^k\phi_2-t^{1-\alpha}\xi_{1t}-2\phi_{1x}+\xi_{1xx}+\frac{c}{x^2}\xi_1+\frac{c}{x}\xi_{1x}-nx^k\eta_2=0, \tag{3.44}$$

$$mx^k\left(\eta_1-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)-2\eta_{2x}-mkx^{k-1}\xi-mx^k(\phi_1-\xi_{1x})=0, \tag{3.45}$$

$$nx^k\left(\phi_1-\tau_t+\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)-2\phi_{2x}-nkx^{k-1}\xi-nx^k(\eta_1-\xi_{1x})=0, \tag{3.46}$$

$$\xi_1(x,t)=\frac{1}{2}\left(\tau_t-\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)x+\sigma_1, \tag{3.47}$$

其中 $\sigma_1=\sigma_1(t)$ 是 t 的未定函数。将 (3.47) 代入方程 (3.43)-(3.46)，并通过加法或减法运算，推导得

$$x^k(n\eta_2-m\phi_2)+\phi_{1x}-\eta_{1x}=0, \tag{3.48}$$

$$(-(1-\alpha)t^{-1-\alpha}\tau+(1-\alpha)t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt})x-2t^{1-\alpha}\sigma_{1t}-2\eta_{1x}-2\phi_{1x}+\frac{2c}{x^2}\sigma_1=0, \quad (3.49)$$

$$mnx^k(\eta_1-\phi_1)-n\eta_{2x}+m\phi_{2x}=0, \quad (3.50)$$

$$2(m\phi_{2x}+n\eta_{2x})+mn(k+1)x^k\left(-\frac{1-\alpha}{t}\tau+\tau_t\right)+2mnkx^{k-1}\sigma_1=0, \quad (3.51)$$

由此得到

$$\phi_2=\frac{n}{m}\eta_2+\frac{1}{mx^k}(\phi_{1x}-\eta_{1x}), \quad (3.52)$$

$$\phi_1=\frac{1}{4}(-(1-\alpha)t^{-1-\alpha}\tau+(1-\alpha)t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt})x^2-t^{1-\alpha}\sigma_{1t}x-\eta_1-\frac{c}{x}\sigma_1+\sigma_2, \quad (3.53)$$

其中 $\sigma_2=\sigma_2(t)$ 是 t 的未定函数。将方程 (3.53) 和方程 (3.47) 代入方程 (3.45) 并化简，得到

$$\begin{aligned}\eta_1=&\frac{1}{8}(-(1-\alpha)t^{-1-\alpha}\tau+(1-\alpha)t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt})x^2-\frac{1}{2}t^{1-\alpha}\sigma_{1t}x\\&+\frac{k+1}{4}\left(\tau_t-\frac{1-\alpha}{t}\tau\right)+\frac{k-c}{2x}\sigma_1+\frac{1}{mx^k}\eta_{2x}+\frac{1}{2}\sigma_2.\end{aligned} \quad (3.54)$$

由方程 (3.38)，可得

$$\begin{aligned}&t^{1-\alpha}\eta_{2xt}-\frac{k+c}{x}\eta_{2xx}+\frac{k+c}{x^2}\eta_{2x}-\frac{1}{4}m(k+1)x^k(-(1-\alpha)t^{-1-\alpha}\tau\\&+(1-\alpha)t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt})+\frac{1}{2}mkx^{k-1}t^{1-\alpha}\sigma_{1t}-\frac{1}{2}m(k+c)(k-2)x^{k-3}\sigma_1=0.\end{aligned} \quad (3.55)$$

将方程 (3.52)-(3.54) 代入方程 (3.37) 和方程 (3.40)，得到

$$\begin{aligned}&4x^{3-k}t^{1-\alpha}\eta_{2xt}-4(k+c)x^{2-k}\eta_{2xx}+4k(k+c)x^{1-k}\eta_{2x}-m(k+1)x^3(-(1-\alpha)t^{-1-\alpha}\tau\\&+(1-\alpha)t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt})+2mkx^2t^{1-\alpha}\sigma_{1t}+2mk(k+c)\sigma_1=0.\end{aligned} \quad (3.56)$$

将方程 (3.56) 乘以 $\frac{1}{4}x^{k-3}$，再减去方程 (3.55)，得到

$$(k-1)(k+c)(m\sigma_1x^{k-1}+\eta_{2x})=0. \quad (3.57)$$

现在，我们将给出系统（1.6）所具有的李点对称。为此，我们分两种情形进行讨论；为了随后求出系统（1.6）的基本解和守恒律，我们仅考虑情形 $\eta_{2x}=0$。

情形3.1 $k+c\neq 0$ 和 $k\neq 1$.

有两种可能：

子情形3.1.1： $\tau\neq C_1t+C_2t^{1-\alpha}$、$C_1$ 和 C_2 是两个任意常数。

根据方程（3.55）-（3.57），若 $-(1-\alpha)\,t^{-1-\alpha}\tau+(1-\alpha)\,t^{-\alpha}\tau_t-t^{1-\alpha}\tau_{tt}\neq 0$，我们推得 $k=-1,\ \ \sigma_1=0$，以及 $\eta_{2x}=0$。此外，在这种情况下，我们得到以下向量场

$$V_1=t\partial_t+\frac{1}{2}\alpha x\partial_x,\ \ V_2=t^{1-\alpha}\partial_t,$$

$$\begin{aligned}V_3=&t^{1+\alpha}\partial_t+\alpha xt^{\alpha}\partial_x-\left(\left(\frac{\alpha(c+1)t^{\alpha}}{2}+\frac{\alpha^2x^2}{4}\right)u+\frac{m\alpha t^{\alpha}}{2}v\right)\partial_u-\\&\left(\left(\frac{\alpha(c+1)t^{\alpha}}{2}+\frac{\alpha^2x^2}{4}\right)v+\frac{n\alpha t^{\alpha}}{2}u\right)\partial_v,\end{aligned}$$

$$V_4=u\partial_u+v\partial_v,\ \ V_5=mv\partial_u+nu\partial_v,\ \ V_{\eta_3}=\eta_3\partial_u,\ \ V_{\phi_3}=\phi_3\partial_v.$$

子情形3.1.2：$\tau=C_1t+C_2t^{1-\alpha}$.

李代数的基底为 V_{η_3}、V_{ϕ_3}、V_2、V_4和 V_5。

情形3.2 $k+c=0$.

在此情形下，我们考虑以下两个子情形：

子情形3.2.1：$k=-1$ （$c=1$）。

系统（1.6）的李代数基底为 V_{η_3}、V_{ϕ_3}、V_1、V_2、V_3、V_4、V_5。

子情形3.2.2：$k\neq -1$.

李代数的基底由 V_{η_3}、V_{ϕ_3}、V_2、V_4、V_5组成。

下文利用上述李代数构造系统（1.6）的基本解。由于向量场 V_3 在 t中的群作用并非平凡，因此考虑向量场 V_3，利用它可以从该系统的平凡解得到系统（1.6）的基本解。

例3.2 考虑系统（ $k=-1$ （1.6）中的情形，即

$$\begin{cases}\mathcal{T}_t^{\alpha}u=u_{xx}+\dfrac{c}{x}u_x+\dfrac{m}{x}v_x,\\ \mathcal{T}_t^{\alpha}v=v_{xx}+\dfrac{c}{x}v_x+\dfrac{n}{x}u_x,\ \ x>0.\end{cases}\tag{3.58}$$

由于由 V_3生成的群作用，我们得到以下结果

$$\begin{cases}\tilde{u}_{\epsilon}(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{mn}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x^2}{4(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})}}\left(\left(\dfrac{\sqrt{mn}}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}+\dfrac{\sqrt{mn}}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1-\sqrt{mn}}{2}}}\right)u\right.\\ \qquad\left.+\left(\dfrac{m}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}-\dfrac{m}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1-\sqrt{mn}}{2}}}\right)v\right),\\ \tilde{v}_{\epsilon}(x,t)=\dfrac{1}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2\epsilon x^2}{4(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})}}\left(\left(\dfrac{\sqrt{mn}}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}-\dfrac{\sqrt{mn}}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1-\sqrt{mn}}{2}}}\right)u\right.\\ \qquad\left.+\left(\dfrac{m}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}+\dfrac{m}{(1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{c+1-\sqrt{mn}}{2}}}\right)v\right),\end{cases}\tag{3.59}$$

其中 $u=u\big(\frac{x}{1+\alpha\epsilon t^{\alpha}},\quad t\ (1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\big)$，$v=v\big(\frac{x}{1+\alpha\epsilon t^{\alpha}},\quad t\ (1+\alpha\epsilon t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\big)$. 若 $(u,\ v)$ 是系统（3.58）的一个解，则方程（3.59）也是系统（3.58）的一个解。在此，我们取

$$(u_1,v_1)=\left(1,\frac{\sqrt{mn}}{m}\right),\quad (u_2,v_2)=x^{1+\sqrt{mn}-c}\left(-\frac{\sqrt{mn}}{n},1\right), \tag{3.60}$$

其满足系统（3.58）。

将上述方程（3.60）代入方程（3.59），并令 $\lambda=\alpha^2\epsilon$，可得

$$\boldsymbol{U}_{\lambda}(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}} & \frac{-mx^{1+\sqrt{mn}+c}}{\sqrt{mn}(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{3+\sqrt{mn}-c}{2}}}\\ \frac{\sqrt{mn}}{m(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}} & \frac{x^{1+\sqrt{mn}+c}}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{3+\sqrt{mn}-c}{2}}}\end{pmatrix}, \tag{3.61}$$

其满足

$$\boldsymbol{U}_{\lambda}(x,0)=\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\begin{pmatrix}1 & -\frac{mx^{1+\sqrt{mn}-c}}{\sqrt{mn}}\\ \frac{\sqrt{mn}}{m} & x^{1+\sqrt{mn}-c}\end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

根据定理 3.1 和方程（3.62），可得

$$\int_0^{\infty}(AL_1^u(y)+BL_1^v(y))\mathrm{e}^{-\lambda y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}, \tag{3.63}$$

$$\int_0^{\infty}(AL_1^u(y)+BL_1^v(y))\mathrm{e}^{-\lambda y^2}\mathrm{d}y=\frac{-mx^{1+\sqrt{mn}+c}}{\sqrt{mn}(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{3+\sqrt{mn}-c}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}, \tag{3.64}$$

$$\int_0^{\infty}(CL_2^u(y)+DL_2^v(y))\mathrm{e}^{-\lambda y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{mn}}{m(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}, \tag{3.65}$$

$$\int_0^{\infty}(CL_2^u(y)+DL_2^v(y))\mathrm{e}^{-\lambda y^2}\mathrm{d}y=\frac{x^{1+\sqrt{mn}+c}}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{3+\sqrt{mn}-c}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}. \tag{3.66}$$

根据引理 2.2，我们推导出

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left(\frac{1}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{c+1+\sqrt{mn}}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}\right)\\ =&\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{4t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}I_{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right),\\ &\mathcal{L}\left(\frac{1}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)^{\frac{3+\sqrt{mn}-c}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x^2}{(1+\frac{4t^{\alpha}}{\alpha}\lambda)}}\right)\\ =&x^{1+\sqrt{mn}-c}\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}I_{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right).\end{aligned} \tag{3.67}$$

对方程（3.63）-（3.66）进行拉普拉斯变换的逆变换可得

$$\frac{1}{2y}\left(A+\frac{\sqrt{mn}}{m}B\right)=\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{4t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}I_{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right),\tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2y}\left(-\frac{m}{\sqrt{mn}}A+B\right)y^{1+\sqrt{mn}-c}\\=&-\frac{mx^{1+\sqrt{mn}-c}}{\sqrt{mn}}\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}I_{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right),\end{aligned}\tag{3.69}$$

$$\frac{1}{2y}\left(C+\frac{\sqrt{mn}}{m}D\right)=\frac{\sqrt{mn}}{m}\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{4t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}I_{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right),\tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2y}\left(-\frac{m}{\sqrt{mn}}C+D\right)y^{1+\sqrt{mn}-c}\\=&\frac{\alpha x^{1+\sqrt{mn}-c}}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{t^{\alpha}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}I_{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{xy}}{2t^{\alpha}}\right).\end{aligned}\tag{3.71}$$

根据方程 (3.10)，求解方程 (3.68)-(3.71)，得到 A、 B、 C 和 D ，从而获得系统 (3.58) 的基本解

$$\boldsymbol{P}(t,x,y)=\frac{\alpha}{4t^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{4t^{\alpha}}}\sqrt{xy}\begin{pmatrix}\gamma_1 & \frac{m}{\sqrt{mn}}\gamma_2\\ \frac{\sqrt{mn}}{m}\gamma_2 & \gamma_1\end{pmatrix},\tag{3.72}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c+\sqrt{mn}}{2}}I_{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}\left(\frac{\alpha xy}{2t^{\alpha}}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c-\sqrt{mn}}{2}}I_{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}\left(\frac{\alpha xy}{2t^{\alpha}}\right),\\ \gamma_2&=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c+\sqrt{mn}}{2}}I_{\frac{c+\sqrt{mn}-1}{2}}\left(\frac{\alpha xy}{2t^{\alpha}}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{c-\sqrt{mn}}{2}}I_{\frac{1+\sqrt{mn}-c}{2}}\left(\frac{\alpha xy}{2t^{\alpha}}\right).\end{aligned}$$

3.4 等价变换与基本解

现在，我们探讨通过等价变换联系起来的两个系统的基本解之间的关系

$$\tilde{t}=Y(t),\quad \tilde{x}=X(x,t)\Big),\quad \tilde{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{F}(x,t)\boldsymbol{U}(x,t),\tag{3.73}$$

其中 $\boldsymbol{F}(x,t)=\begin{pmatrix}r_1(x,t) & r_2(x,t)\\ s_2(x,t) & s_1(x,t)\end{pmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{U}}=(\tilde{u},\tilde{v})^{\mathrm{T}}$. 显然，变换 (3.73) 的可逆性意味着 $X_x\neq 0$, $Y_t\neq 0$ 和 $r_1s_1-r_2s_2\neq 0$.

将 X 和 Y 的逆变换写为

$$x = Z(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad t = Y^{-1}(\tilde{t}).$$

假设变换（3.73）是共形时间分数阶线性系统类的等价变换

$$E(x, t, u, v) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0, \tag{3.74}$$

使得变换后的系统为

$$E(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{v}) = 0, \ \tilde{x} \in \tilde{\Omega}, \ \tilde{t} > 0, \tag{3.75}$$

它属于与初始系统相同的一类系统。

If $\boldsymbol{U}(x,t)$ 是初始系统（3.74）的一个解，并且根据变换（3.73），

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \boldsymbol{F}(Z(\tilde{x}, \tilde{t}), Y^{-1}(\tilde{t}))\boldsymbol{U}(Z(\tilde{x}, \tilde{t}), Y^{-1}(\tilde{t}))$$

是变换后的系统（3.75）的一个解。设 $\tilde{t}(0) = 0$ 不失一般性。在下一个定理中，我们将证明：若已知系统（3.74）的基本解，则通过变换（3.73），可以得到系统（3.75）的基本解。

定理 3.2 假设偏微分方程线性系统(3.74)可通过变换(3.75)变换为系统(3.73)，且相容条件 $\tilde{t}(0) = 0$ 成立。若$\boldsymbol{\Gamma}(t, x, z)$是系统(3.74)的基本解，则

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{z}) = \boldsymbol{F}(Z(\tilde{x}, \tilde{t}), \boldsymbol{Y}^{-1}(\tilde{t}))\boldsymbol{\Gamma}(Y^{-1}(\tilde{t}), Z(\tilde{x}, \tilde{t}), Z(\tilde{z}, \tilde{t}))\boldsymbol{F}^{-1}(Z(\tilde{z}, 0), \tilde{t}(0))Z_z(\tilde{z}, \tilde{t})$$

是变换后的系统的一个基本解（3.75）。

证明 定理 3.2 的证明与参考文献[29], 中的定理 4.1 的证明类似，因此本文省略。

接下来，我们考虑一类线性可归一化时间分数阶系统的等价变换

$$\begin{cases} \mathcal{T}_t^{\alpha} u = h(x,t)u_{xx} + f_1(x,t)u_x + g_1(x,t)v_x, \\ \mathcal{T}_t^{\alpha} v = h(x,t)v_{xx} + f_2(x,t)v_x + g_2(x,t)u_x, \end{cases} \tag{3.76}$$

其中系统（3.11）和系统（1.6）是两个特例。考虑可逆变换

$$\tilde{x} = X(x,t,u,v), \quad \tilde{t} = Y(x,t,u,v), \quad \tilde{u} = R(x,t,u,v), \quad \tilde{v} = S(x,t,u,v), \tag{3.77}$$

该变换保持系统（3.76）不变。也就是说， $\tilde{u}$（$\tilde{x}$， $\tilde{t}$）和 $\tilde{v}$（$\tilde{x}$， $\tilde{t}$）满足如下形式的系统

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{u} = h'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + f_1'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{x}} + g_1'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{v}_{\tilde{x}}, \\ \mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{v} = h'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + f_2'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{v}_{\tilde{x}} + g_2'(\tilde{x},\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{x}}, \end{cases} \tag{3.78}$$

where h, h', f_1, f_1', f_2, f_2', g_1, g_1', g_2 和 g_2' 是其自变量的光滑函数 s.

根据变换（3.77），我们可以得到 $\mathcal{T}_t^{\alpha}u$、 $\mathcal{T}_t^{\alpha}v$、 u_x、 v_x、 u_{xx}和 v_{xx}的表达式。由于变换（3.77）保持系统（3.76）不变，换言之，将 $\tilde{u}_{\tilde{x}}\tilde{v}_{\tilde{t}}$、 $\tilde{u}_{\tilde{t}}\tilde{v}_{\tilde{x}}$、 $\tilde{u}_{\tilde{x}}^2$、 $\tilde{u}_{\tilde{x}}\tilde{v}_{\tilde{x}}$、 $\tilde{v}_{\tilde{x}}^2$ 的系数设为零，可得 $T_x = T_u = T_v = 0$ 和$X_u = X_v = 0$、 $X_x \neq 0$、
$R_{uu} = R_{uv} = R_{vv} = S_{uu} = S_{uv} = S_{vv} = 0$。因此，我们可以推导出

$$\begin{cases} \tilde{t} = Y(t), \\ \tilde{x} = X(x,t), \\ \tilde{u} = r_1(x,t)u + r_2(x,t)v + r_3(x,t), \\ \tilde{v} = s_1(x,t)v + s_2(x,t)u + s_3(x,t), \end{cases} \tag{3.79}$$

这意味着

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\kappa}(s_1(x,t)\tilde{u} - r_2(x,t)\tilde{v} + \delta), \\ v = \dfrac{1}{\kappa}(-s_2(x,t)\tilde{u} + r_1(x,t)\tilde{v} + \varrho), \end{cases} \tag{3.80}$$

其中 $\kappa = r_1 s_1 - r_2 s_2 \neq 0$， $\delta = r_2 s_3 - r_3 s_1$， $\varrho = r_3 s_2 - r_1 s_3$。因此，根据变换（3.79），$\mathcal{T}_t^{\alpha}u$、 $\mathcal{T}_t^{\alpha}v$、 u_x、 v_x、 u_{xx} 和 v_{xx} 的表达式可化简为

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t^{\alpha}u =& \frac{1}{\kappa}[s_1\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^{\alpha}Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{u} - r_2\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^{\alpha}Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{v} + s_1\mathcal{T}_t^{\alpha}X\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_2\mathcal{T}_t^{\alpha}X\tilde{v}_{\tilde{x}} \\ &+ r_2(v\mathcal{T}_t^{\alpha}s_1 + u\mathcal{T}_t^{\alpha}s_2 + \mathcal{T}_t^{\alpha}s_3) - s_1(u\mathcal{T}_t^{\alpha}r_1 + v\mathcal{T}_t^{\alpha}r_2 + \mathcal{T}_t^{\alpha}r_3)], \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t^{\alpha}v =& -\frac{1}{\kappa}[s_2\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^{\alpha}Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{u} - r_1\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^{\alpha}Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{v} + s_2\mathcal{T}_t^{\alpha}X\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_1\mathcal{T}_t^{\alpha}X\tilde{v}_{\tilde{x}} \\ &+ r_1(v\mathcal{T}_t^{\alpha}s_1 + u\mathcal{T}_t^{\alpha}s_2 + \mathcal{T}_t^{\alpha}s_3) - s_2(u\mathcal{T}_t^{\alpha}r_1 + v\mathcal{T}_t^{\alpha}r_2 + \mathcal{T}_t^{\alpha}r_3)], \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$u_x = \frac{1}{\kappa}[s_1X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_2X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} + r_2(s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x}) - s_1(r_{1x}u + r_{2x}v + r_{3x})], \tag{3.83}$$

$$v_x = -\frac{1}{\kappa}[s_2X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_1X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} + r_1(s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x}) - s_2(r_{1x}u + r_{2x}v + r_{3x})], \tag{3.84}$$

$$
\begin{aligned}
u_{xx} =&\frac{1}{\kappa}\{X_x^2(s_1\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - r_2\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}) + X_{xx}(s_1\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_2\tilde{v}_{\tilde{x}}) + (s_{1xx}v + s_{2xx}u \\
&+ s_{3xx})r_2 - (r_{1xx}u + r_{2xx}v + r_{3xx})s_1 + \frac{1}{\kappa}[(s_1X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_2X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} \\
&+ (s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x})r_2 - s_1(r_{1x}u + r_{2x}v + r_{3x}))(2s_{2x}r_2 - 2r_{1x}s_1)] \\
&+ \frac{1}{\kappa}[(s_2X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_1X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} + (s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x})r_1 - s_2(r_{1x}u + r_{2x}v \\
&+ r_{3x}))(2s_{1x}r_2 - 2r_{2x}s_1)]\},
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{xx} =&\frac{1}{\kappa}\{X_x^2(s_2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - r_1\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}) + X_{xx}(s_2\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_1\tilde{v}_{\tilde{x}}) + (s_{1xx}v + s_{2xx}u \\
&+ s_{3xx})r_1 - (r_{1xx}u + r_{2xx}v + r_{3xx})s_2 + \frac{1}{\kappa}[(s_1X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_2X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} \\
&+ (s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x})r_2 - s_1(r_{1x}u + r_{2x}v + r_{3x}))(2s_{2x}r_1 - 2r_{1x}s_2)] \\
&+ \frac{1}{\kappa}[(s_2X_x\tilde{u}_{\tilde{x}} - r_1X_x\tilde{v}_{\tilde{x}} + (s_{1x}v + s_{2x}u + s_{3x})r_1 - s_2(r_{1x}u + r_{2x}v \\
&+ r_{3x}))(2s_{1x}r_1 - 2r_{2x}s_2)]\}.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

接下来，将方程（3.81）-（3.86）代入系统（3.76），可得

$$
\begin{aligned}
&s_1\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^\alpha Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^\alpha\tilde{u} - r_2\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^\alpha Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^\alpha\tilde{v} - hs_1X_x^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + hr_2X_x^2\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}}\big[s_1\mathcal{T}_t^\alpha X \\
&- hs_1X_{xx} - 2hX_xs_{1x} + \frac{2hs_1}{\kappa}X_x\kappa_x - f_1s_1X_x + g_1s_2X_x\big] + \tilde{v}_{\tilde{x}}\big[-r_2\mathcal{T}_t^\alpha X \\
&+ hr_2X_{xx} + 2hX_xr_{2x} - \frac{2hr_2}{\kappa}X_x\kappa_x + f_1r_2X_x - g_1r_1X_x\big] + \tilde{u}\big[\kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{s_1}{\kappa}) - h\kappa(\frac{s_1}{\kappa})_{xx} \\
&- f_1\kappa(\frac{s_1}{\kappa})_x + g_1\kappa(\frac{s_2}{\kappa})_x\big] + \tilde{v}\big[-\kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{r_2}{\kappa}) + h\kappa(\frac{r_2}{\kappa})_{xx} + f_1\kappa(\frac{r_2}{\kappa})_x - g_1\kappa(\frac{r_1}{\kappa})_x\big] \\
&+ \kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{\delta}{\kappa}) - h\kappa(\frac{\delta}{\kappa})_{xx} - f_1\kappa(\frac{\delta}{\kappa})_x - g_1\kappa(\frac{\varrho}{\kappa})_x = 0,
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

$$
\begin{aligned}
&-s_2\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^\alpha Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^\alpha\tilde{u} + r_1\tilde{t}^{\alpha-1}\mathcal{T}_t^\alpha Y\mathcal{T}_{\tilde{t}}^\alpha\tilde{v} + hs_2X_x^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - hr_1X_x^2\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}}\big[-s_2\mathcal{T}_t^\alpha X \\
&+ hs_2X_{xx} + 2hX_xs_{2x} - \frac{2hs_2}{\kappa}X_x\kappa_x + f_2s_2X_x - g_2s_1X_x\big] + \tilde{v}_{\tilde{x}}\big[r_1\mathcal{T}_t^\alpha X - hr_1X_{xx} \\
&- 2hX_xr_{1x} + \frac{2hr_1}{\kappa}X_x\kappa_x - f_2r_1X_x + g_2r_2X_x\big] + \tilde{u}\big[-\kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{s_2}{\kappa}) + h\kappa(\frac{s_2}{\kappa})_{xx} \\
&+ f_2\kappa(\frac{s_2}{\kappa})_x - g_2\kappa(\frac{s_1}{\kappa})_x\big] + \tilde{v}\big[\kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{r_1}{\kappa}) - h\kappa(\frac{r_1}{\kappa})_{xx} - f_2\kappa(\frac{r_1}{\kappa})_x + g_2\kappa(\frac{r_2}{\kappa})_x\big] \\
&+ \kappa\mathcal{T}_t^\alpha(\frac{\varrho}{\kappa}) - h\kappa(\frac{\varrho}{\kappa})_{xx} - f_2\kappa(\frac{\varrho}{\kappa})_x - g_2\kappa(\frac{\delta}{\kappa})_x = 0,
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

根据方程（3.87）-（3.88）和变换后的系统（3.78），我们得到以下关系

$$
h'(\tilde{x},\tilde{t}) = \frac{h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))X_x^2(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\tilde{t}^{\alpha-1}(\mathcal{T}_t^\alpha Y)(Y^{-1}(\tilde{t}))},
$$

$$
\begin{aligned}
f_1'(\tilde{x},\tilde{t}) =& \frac{1}{\tilde{t}^{\alpha-1}(\mathcal{T}_t^{\alpha}Y)(Y^{-1}(\tilde{t}))}\Big[-(\mathcal{T}_t^{\alpha}X)(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))+h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))\\
& X_{xx}(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))+\frac{2h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa}\big(r_{2x}s_2\\
& -r_{1x}s_1\big)+\frac{X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa}\big(f_1r_1s_1-g_1r_1s_2-f_2r_2s_2+g_2r_2s_1\big)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1'(\tilde{x},\tilde{t}) =& \frac{X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa\tilde{t}^{\alpha-1}(\mathcal{T}_t^{\alpha}Y)(Y^{-1}(\tilde{t}))}\big[2h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))(r_2r_{1x}-r_1r_{2x})-f_1r_1r_2\\
& +g_1r_1^2+f_2r_1r_2-g_2r_2^2\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2'(\tilde{x},\tilde{t}) =& \frac{1}{\tilde{t}^{\alpha-1}(\mathcal{T}_t^{\alpha}Y)(Y^{-1}(\tilde{t}))}\Big[-(\mathcal{T}_t^{\alpha}X)(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))+h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))\\
& X_{xx}(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))+\frac{2h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa}\big(r_2s_{2x}\\
& -r_1s_{1x}\big)+\frac{X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa}\big(-f_1r_2s_2+g_1r_1s_2+f_2r_1s_1-g_2r_2s_1\big)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2'(\tilde{x},\tilde{t}) =& \frac{X_x(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))}{\kappa\tilde{t}^{\alpha-1}(\mathcal{T}_t^{\alpha}Y)(Y^{-1}(\tilde{t}))}\Big[2h(Z(\tilde{x},\tilde{t}),Y^{-1}(\tilde{t}))(s_2s_{1x}-s_1s_{2x})+f_1s_1s_2\\
& -g_1s_2^2-f_2s_1s_2+g_2s_1^2\Big],
\end{aligned}
$$

其中 $r_i,\ s_i,\ (i=1,2,3)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{r_1}{\kappa})-h(\frac{r_1}{\kappa})_{xx}-f_2(\frac{r_1}{\kappa})_x+g_2(\frac{r_2}{\kappa})_x=0,\quad \mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{s_1}{\kappa})-h(\frac{s_1}{\kappa})_{xx}-f_1(\frac{s_1}{\kappa})_x+g_1(\frac{s_2}{\kappa})_x=0,\\
&\mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{r_2}{\kappa})-h(\frac{r_2}{\kappa})_{xx}-f_1(\frac{r_2}{\kappa})_x+g_1(\frac{r_1}{\kappa})_x=0,\quad \mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{s_2}{\kappa})-h(\frac{s_2}{\kappa})_{xx}-f_2(\frac{s_2}{\kappa})_x+g_2(\frac{s_1}{\kappa})_x=0,\\
&\mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{\delta}{\kappa})-h(\frac{\delta}{\kappa})_{xx}-f_1(\frac{\delta}{\kappa})_x-g_1(\frac{\varrho}{\kappa})_x=0,\quad \mathcal{T}_t^{\alpha}(\frac{\varrho}{\kappa})-h(\frac{\varrho}{\kappa})_{xx}-f_2(\frac{\varrho}{\kappa})_x-g_2(\frac{\delta}{\kappa})_x=0.
\end{aligned}
$$

例3.3 系统（3.58）与以下系统相关

$$
\begin{cases}
\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{u}=\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}-\left(c-2-\sqrt{mn}\dfrac{B_1}{B_2}\right)\dfrac{1}{\tilde{x}}\tilde{u}_{\tilde{x}}+\dfrac{2\sqrt{mn}a_1b_1}{B_2\tilde{x}}\tilde{v}_{\tilde{x}},\\
\mathcal{T}_{\tilde{t}}^{\alpha}\tilde{v}=\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}-\left(c-2+\sqrt{mn}\dfrac{B_1}{B_2}\right)\dfrac{1}{\tilde{x}}\tilde{v}_{\tilde{x}}-\dfrac{2\sqrt{mn}a_2b_2}{B_2\tilde{x}}\tilde{u}_{\tilde{x}},
\end{cases}
\tag{3.89}
$$

通过变换

$$
\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\boldsymbol{F}(x,t)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad \tilde{x}=x,\quad \tilde{t}=t,
$$

其中

$$\boldsymbol{F}(x,t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2B_2}(b_1x^{-\sqrt{mn}+c-1}-a_1x^{\sqrt{mn}+c-1}) & \frac{-\sqrt{mn}}{2nB_2}(a_1x^{\sqrt{mn}+c-1}+b_1x^{-\sqrt{mn}+c-1})\\ \frac{1}{2B_2}(a_2x^{\sqrt{mn}+c-1}-b_2x^{-\sqrt{mn}+c-1}) & \frac{\sqrt{mn}}{2nB_2}(a_2x^{\sqrt{mn}+c-1}+b_2x^{-\sqrt{mn}+c-1})\end{pmatrix},$$

$B_1=a_2b_1+a_1b_2$, $B_2=a_2b_1-a_1b_2\neq 0$. 根据定理 3.2，可以得到该系统（3.89）的基本解。

4 守恒律

本节利用上述李代数和新的诺特定理[24, 25]，构造所研究的相容分数阶偏微分方程的守恒律。

考虑以下共形分数阶微分方程

$$F_j(x,t,u_1,\cdots,u_s,\mathcal{T}_t^{\alpha}u_1,\cdots,\mathcal{T}_t^{\alpha}u_s,u_{1,x},\cdots,u_{s,x},\cdots)=0,\quad j=1,\cdots,s, \tag{4.1}$$

具有两个自变量（x, t）和 s（$s>1$）个因变量（u_1, $\cdots$, u_s）。假设系统（4.1）具有如下形式的李对称生成元

$$V_i=\xi_i\partial_x+\tau_i\partial_t+\sum_{j=1}^{s}\eta_i^j\partial_{u_j},\quad i=1,\cdots,n. \tag{4.2}$$

系统（ C = ）的守恒向量 C^t, C^x）满足以下守恒方程

$$\left(D_t(C^t)+D_x(C^x)\right)|_{(4.1)}=0. \tag{4.3}$$

系统（4.1）的形式拉格朗日函数可写为

$$L=\sum_{j=1}^{s}p_j(x,t)(F_j), \tag{4.4}$$

利用新的因变量 $p_j(x,\ t)$, $j=1,\ \cdots,\ s$。形式拉格朗日量（4.4）的伴随方程定义如下[25]

$$F_j^*=\frac{\delta L}{\delta u_j}=0,\quad j=1,\cdots,s, \tag{4.5}$$

其中，$\frac{\delta}{\delta u_j}$ 表示欧拉-拉格朗日算子，记为

$$\frac{\delta}{\delta u_j}=\frac{\partial}{\partial u_j}+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^lD_{i1}D_{i2}\cdots D_{il}\frac{\partial}{\partial_{u_j,i_1i_2\cdots i_l}}. \tag{4.6}$$

若系统（4.5）的伴随方程对于系统（4.1）的解在作如下代换后成立

$$p_j(x,t)=\psi_j(x,t,u_1,\cdots,u_s),$$

其中 $\psi_j\neq 0$，至少对一个 j 成立。这意味着必须满足以下条件

$$\frac{\delta L}{\delta u_j}|_{(4.1)}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^j(F_i).$$

向量 $V_i,\ i=1,\cdots,n$ 的守恒向量可由以下公式得到：

$$\begin{aligned}C_i^x=&\xi_i L+\sum_{j=1}^{s}\left(W_i^j\frac{\delta L}{\delta u_{j,x}}+D_x(W_i^j)\frac{\delta L}{\delta u_{j,xx}}+D_x^2(W_i^j)\frac{\delta L}{\delta u_{j,xxx}}+\cdots\right),\\ C_i^t=&\tau_i L+\sum_{j=1}^{s}\left(W_i^j\frac{\delta L}{\delta u_{j,t}}\right),\end{aligned}\tag{4.7}$$

其中 $W_i^j=\eta_i^j-\xi_i u_{j,\ x}-\tau_i u_{j,\ t},\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,s.$

系统(3.11)的 4.1 守恒律

基于系统 (3.11) 所允许的对称性，我们旨在本小节中获得系统 (3.11) 的守恒律。

系统（3.11）的形式拉格朗日函数写作

$$L=p(x,t)(\mathcal{T}_t^{\alpha}u-xu_{xx}-av_x)+q(x,t)(\mathcal{T}_t^{\alpha}v-xv_{xx}-bu_x),\tag{4.8}$$

引入新的因变量 p（x，t）和 q（x，t）。形式拉格朗日方程（4.8）的伴随方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\delta L}{\delta u}=F_1^*=-t^{1-\alpha}p_t-(1-\alpha)t^{-\alpha}p-2p_x+bq_x-xp_{xx}=0,\\ \dfrac{\delta L}{\delta v}=F_2^*=-t^{1-\alpha}q_t-(1-\alpha)t^{-\alpha}q-2q_x+bp_x-xq_{xx}=0.\end{cases}\tag{4.9}$$

Repl空间 p（x，t）$=\psi_1$（x，t，u，v）和 q（x，t）$=\psi_2$（x，t，u，v）代入方程（4.9）以推导

$$\begin{cases}\dfrac{\delta L}{\delta u}|_{\{p=\psi_1\}}=\lambda_1(\mathcal{T}_t^{\alpha}u-xu_{xx}-av_x)+\lambda_2(\mathcal{T}_t^{\alpha}v-xv_{xx}-bu_x),\\ \dfrac{\delta L}{\delta v}|_{\{q=\psi_2\}}=\lambda_3(\mathcal{T}_t^{\alpha}u-xu_{xx}-av_x)+\lambda_4(\mathcal{T}_t^{\alpha}v-xv_{xx}-bu_x).\end{cases}\tag{4.10}$$

根据方程(4.10)，我们得到

$$\lambda_i=0\ (i=1,2,3,4),\quad \psi_1=(k_2+k_3x^{-1+\sqrt{ab}}+k_4x^{-1-\sqrt{ab}})t^{\alpha-1},$$

$$\psi_2 = \frac{(k_1 b + k_2 + k_3 x^{-1+\sqrt{ab}}\sqrt{ab} - k_4\sqrt{ab}x^{-1-\sqrt{ab}})t^{\alpha-1}}{b}.$$

接下来，根据系统(3.11)，通过计算，我们得到以下守恒向量：

情形1 对于 $V_1 = t\partial_t + \alpha x\partial_x$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
C_1^x =& \frac{k_1}{b}\left(bxt^\alpha v_{xt} + \alpha b x^2 t^{-1+\alpha} v_{xx} + \alpha b^2 x t^{-1+\alpha} u_x + b^2 u_t t^\alpha - b v_t t^\alpha\right) + \frac{k_2}{b}[xt^\alpha v_{xt} \\
&+ \alpha x^2 t^{-1+\alpha} v_{xx} + bxt^\alpha u_{xt} + \alpha b\, x^2 t^{-1+\alpha} u_{xx} + \alpha abxt^{-1+\alpha} v_x + \alpha b t^{-1+\alpha} u_x + (ab-1)t^\alpha v_t] \\
&+ \frac{k_3}{b}\big[\alpha t^{-1+\alpha}(\sqrt{ab}v_{xx} + bu_{xx})x^{1+\sqrt{ab}} + ((t^\alpha v_{xt} + \alpha\, t^{-1+\alpha} v_x)\sqrt{ab} \\
&+ b(t^\alpha u_{xt} + \alpha\, t^{-1+\alpha} u_x))x^{\sqrt{ab}}\big] + \frac{k_4}{b}[-\alpha t^{-1+\alpha}(\sqrt{ab}\, v_{xx} - bu_{xx})x^{1-\sqrt{ab}} \\
&- ((t^\alpha v_{xt} + \alpha\, t^{-1+\alpha} v_x)\sqrt{ab} - b(t^\alpha u_{xt} + \alpha\, t^{-1+\alpha} u_x))x^{-\sqrt{ab}}], \\
C_1^t =& k_1\left(-\alpha x v_x - t v_t\right) + \frac{k_2}{b}\left(-\alpha b x u_x - b t u_t - \alpha x v_x - t v_t\right) \\
&+ \frac{k_3}{b}\left(-\alpha\left(\sqrt{ab}\, v_x + b u_x\right)x^{\sqrt{ab}} - \sqrt{ab}\, t x^{-1+\sqrt{ab}} v_t - b t x^{-1+\sqrt{ab}} u_t\right) \\
&+ \frac{k_4}{b}\left(t\left(\sqrt{ab}\, v_t - b u_t\right)x^{-1-\sqrt{ab}} + \alpha\left(\sqrt{ab}\, v_x - b u_x\right)x^{-\sqrt{ab}}\right).
\end{aligned}$$

情形2 对于 $V_2 = t^{1-\alpha}\partial_t$，我们有

$$\begin{aligned}
C_2^x =& k_1\left(x v_{xt} + b u_t - v_t\right) + \frac{k_2}{b}\left(x v_{xt} + b x u_{xt} + (ab-1)v_t\right) \\
&+ \frac{k_3}{b}\left(\left(\sqrt{ab}\, v_{xt} + b u_{xt}\right)x^{\sqrt{ab}}\right) - \frac{k_4}{b}\left(\left(\sqrt{ab}\, v_{xt} - b u_{xt}\right)x^{-\sqrt{ab}}\right), \\
C_2^t =& -k_1 t^{1-\alpha} v_t + \frac{k_2}{b}\left((-b u_t - v_t)t^{1-\alpha}\right) - \frac{k_3}{b}\left(\left(\sqrt{ab}\, v_t + b u_t\right)x^{-1+\sqrt{ab}} t^{1-\alpha}\right) \\
&+ \frac{k_4}{b}\left(\left(\sqrt{ab}\, v_t - b u_t\right)x^{-1-\sqrt{ab}} t^{1-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

情形3 对于 $V_3 = t^{1+\alpha}\partial_t + 2\alpha x t^\alpha \partial_x - (\alpha^2 x u + a\alpha t^\alpha v)\partial_u - (\alpha^2 x v + b\alpha t^\alpha u)\partial_v$，我们推导得出

$$\begin{aligned}
C_3^x =& \frac{k_1}{b}[(2\alpha b x^2 v_{xx} + \alpha b(3bxu_x + abv - bu))t^{-1+2\alpha} + bxt^{2\alpha} v_{xt} + \alpha^2 x(bxv_x + b^2 u)t^{-1+\alpha} \\
&+ (b^2 u_t - b v_t)t^{2\alpha}] + \frac{k_2}{b}[(2x^2 v_{xx} + \alpha b(2x^2 u_{xx} + 3xu_x + 3axv_x + (ab-1)u))\, t^{-1+2\alpha} \\
&+ xt^{2\alpha} v_{xt} + bxt^{2\alpha} u_{xt} + \alpha^2 x(bxu_x + xv_x + b(av+u))t^{-1+\alpha} + (ab-1)t^{2\alpha} v_t] \\
&+ \frac{k_3}{b}[\alpha((2\sqrt{ab}\, v_{xx} + 2bu_{xx})t^{-1+2\alpha} + \alpha t^{-1+\alpha}(\sqrt{ab}\, v_x + bu_x))x^{1+\sqrt{ab}} \\
&+ (\alpha\sqrt{ab}(bu_x + 2v_x) + \alpha b(av_x + 2u_x))x^{\sqrt{ab}} t^{-1+2\alpha} + (\sqrt{ab}(\alpha^2 t^{-1+\alpha} v + t^{2\alpha} v_{xt}) \\
&+ b(\alpha^2 t^{-1+\alpha} u + t^{2\alpha} u_{xt}))x^{\sqrt{ab}}] + \frac{k_4}{b}[-\alpha((2\sqrt{ab}\, v_{xx} - 2bu_{xx})t^{-1+2\alpha}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha t^{-1+\alpha}(\sqrt{ab}\,v_x-bu_x))x^{1-\sqrt{ab}}+(\alpha(\sqrt{ab}(-bu_x-2v_x)+b(av_x+2u_x))t^{-1+2\alpha}\\
&+\sqrt{ab}(-\alpha^2t^{-1+\alpha}v-t^{2\alpha}v_{xt})+b(\alpha^2t^{-1+\alpha}u+t^{2\alpha}u_{xt}))x^{-\sqrt{ab}}],\\
C_3^t=&\frac{k_1}{b}[-bt^{1+\alpha}v_t-\alpha(2xbt^{\alpha}v_x+b^2t^{\alpha}u+\alpha bxv)]+\frac{k_2}{b}[(-bu_t-v_t)t^{1+\alpha}-\alpha(2bxt^{\alpha}u_x\\
&+2xt^{\alpha}v_x+b(av+u)t^{\alpha}+\alpha x(bu+v))]+\frac{k_3}{b}[-2\alpha(\sqrt{ab}(t^{\alpha}v_x+\frac{\alpha v}{2})\\
&+b(t^{\alpha}u_x+\frac{\alpha u}{2}))x^{\sqrt{ab}}-x^{-1+\sqrt{ab}}\sqrt{ab}(\alpha bt^{\alpha}u+t^{1+\alpha}v_t)-bx^{-1+\sqrt{ab}}t^{1+\alpha}u_t\\
&-\alpha abx^{-1+\sqrt{ab}}t^{\alpha}v]+\frac{k_4}{b}[-(\sqrt{ab}(-\alpha bt^{\alpha}u-t^{1+\alpha}v_t)+b(\alpha at^{\alpha}v\\
&+t^{1+\alpha}u_t))x^{-1-\sqrt{ab}}+2\alpha(\sqrt{ab}(t^{\alpha}v_x+\frac{\alpha v}{2})-b(t^{\alpha}u_x+\frac{\alpha u}{2}))\,x^{-\sqrt{ab}}].
\end{aligned}
$$

情形4 对于 $V_4=u\partial_u+v\partial_v$，我们得到

$$
\begin{aligned}
C_4^x=&\frac{k_1}{b}\left(-bxv_x-b^2u+bv\right)t^{-1+\alpha}+\frac{k_2}{b}\left(-xv_x-bxu_x+(-ab+1)\,v\right)t^{-1+\alpha}\\
&-\frac{k_3}{b}\left(\sqrt{ab}\,v_x+bu_x\right)x^{\sqrt{ab}}t^{-1+\alpha}+\frac{k_4}{b}\left(\sqrt{ab}x^{-\sqrt{ab}}v_x-bx^{-\sqrt{ab}}u_x\right)t^{-1+\alpha},\\
C_4^t=&k_1v+\frac{k_2}{b}\left(bu+v\right)+\frac{k_3}{b}\left(\sqrt{ab}v+bu\right)x^{-1+\sqrt{ab}}-\frac{k_4}{b}\left(\sqrt{ab}v-bu\right)x^{-1-\sqrt{ab}}.
\end{aligned}
$$

情形 5 对于 $V_5=av\partial_u+bu\partial_v$，我们得出

$$
\begin{aligned}
C_5^x=&k_1\left(bxu_x+abv-bu\right)t^{-1+\alpha}+k_2\left(xu_x+axv_x+(ab-1)\,u\right)t^{-1+\alpha}\\
&+k_3\left(av_x+\sqrt{ab}u_x\right)x^{\sqrt{ab}}t^{-1+\alpha}+k_4\left(av_x-\sqrt{ab}u_x\right)x^{-\sqrt{ab}}t^{-1+\alpha},\\
C_5^t=&k_1bu+k_2\left(av+u\right)+k_3\left(av+\sqrt{ab}u\right)x^{-1+\sqrt{ab}}+k_4\left(av-\sqrt{ab}u\right)x^{-1-\sqrt{ab}}.
\end{aligned}
$$

4.2 系统(1.6)的守恒律

本小节将构造系统 (1.6) 的守恒律。为方便起见，此处考虑 $k=-1$，即考虑系统 (3.58) 的守恒律。

与系统（3.11）守恒律的构造类似，并基于第3.3节中得到的李代数，我们推导出以下守恒向量：情形1 对于 $V_1=t\partial_t+\frac{1}{2}\alpha x\partial_x$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
C_1^x=&\frac{k_1}{2n}[2nxt^{\alpha}v_{xt}+\alpha n\,x^2t^{-1+\alpha}v_{xx}+\alpha(cnv_x+n^2u_x)xt^{-1+\alpha}-2((-c+1)nv_t\\
&-n^2u_t)t^{\alpha}]+\frac{k_2}{2n}[-2(c-1)xt^{\alpha}v_{xt}-\alpha(c-1)x^2t^{-1+\alpha}v_{xx}+2nxt^{\alpha}u_{xt}\\
&+\alpha n\,x^2t^{-1+\alpha}u_{xx}-\alpha((-mn+c(c-1))v_x-nu_x)xt^{-1+\alpha}-2(-mn
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(c-1)^2)t^{\alpha}v_t]+\frac{k_3}{2n}[\alpha\,t^{-1+\alpha}(\sqrt{mn}\,v_{xx}+nu_{xx})x^{c+\sqrt{mn}+1}+(\sqrt{mn}(\alpha\,t^{-1+\alpha}v_x\\
&+2t^{\alpha}v_{xt})+n(\alpha\,t^{-1+\alpha}u_x+2t^{\alpha}u_{xt}))x^{c+\sqrt{mn}}]+\frac{k_4}{2n}[-\alpha\,t^{-1+\alpha}(\sqrt{mn}\,v_{xx}\\
&-nu_{xx})x^{c-\sqrt{mn}+1}-(\sqrt{mn}(\alpha\,t^{-1+\alpha}v_x+2t^{\alpha}v_{xt})-n(\alpha\,t^{-1+\alpha}u_x+2t^{\alpha}u_{xt}))x^{c-\sqrt{mn}}],\\
C_1^t=&-\frac{k_1}{2}\left(\alpha x v_x+2tv_t\right)x+\frac{k_2}{2n}\left(-2nxtu_t-\alpha nx^2u_x+(c-1)\left(\alpha x v_x+2tv_t\right)x\right)\\
&+\frac{k_3}{2n}\left(-2t\left(\sqrt{mn}\,v_t+nu_t\right)x^{c+\sqrt{mn}}-\sqrt{mn}\,\alpha x^{c+\sqrt{mn}+1}v_x-n\alpha\,x^{c+\sqrt{mn}+1}u_x\right)\\
&+\frac{k_4}{2n}\left(\alpha\left(\sqrt{mn}\,v_x-nu_x\right)x^{c-\sqrt{mn}+1}+2t\left(\sqrt{mn}\,v_t-nu_t\right)x^{c-\sqrt{mn}}\right).
\end{aligned}
$$

情形2 对于 $V_2=t^{1-\alpha}\partial_t$，我们有

$$
\begin{aligned}
C_2^x=&\frac{k_1}{n}\left(nxv_{xt}+n\left(c-1\right)v_t+n^2u_t\right)+\frac{k_2}{n}\left(\left(1-c\right)xv_{xt}+nxu_{xt}+\left(mn-\left(c-1\right)^2\right)v_t\right)\\
&+\frac{k_3}{n}\left(\sqrt{mn}\,v_{xt}+nu_{xt}\right)x^{c+\sqrt{mn}}-\frac{k_4}{n}\left(\sqrt{mn}\,v_{xt}-nu_{xt}\right)x^{c-\sqrt{mn}},\\
C_2^t=&-k_1xt^{1-\alpha}v_t+\frac{k_2}{n}\left(\left(c-1\right)v_t-nu_t\right)xt^{1-\alpha}-\frac{k_3}{n}\left(\sqrt{mn}\,v_t+nu_t\right)x^{c+\sqrt{mn}}t^{1-\alpha}\\
&+\frac{k_4}{n}\left(\sqrt{mn}\,v_t-nu_t\right)x^{c-\sqrt{mn}}t^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

情形3 对于

$$
\begin{aligned}
V_3=&t^{1+\alpha}\partial_t+\alpha xt^{\alpha}\partial_x-\left(\left(\frac{\alpha(c+1)t^{\alpha}}{2}+\frac{\alpha^2x^2}{4}\right)u+\frac{m\alpha t^{\alpha}}{2}v\right)\partial_u-\\
&\left(\left(\frac{\alpha(c+1)t^{\alpha}}{2}+\frac{\alpha^2x^2}{4}\right)v+\frac{n\alpha t^{\alpha}}{2}u\right)\partial_v,
\end{aligned}
$$

我们得到的是

$$
\begin{aligned}
C_3^x=&\frac{k_1}{4n}[-2\alpha(-2n\,x^2v_{xx}-(1+3c)nxv_x-3n^2xu_x+(-m\,n^2-(c^2-1)n)v\\
&-2c\,n^2u)t^{-1+2\alpha}+4t^{2\alpha}nxv_{xt}-\alpha^2(-nxv_x+(-c-1)nv-n^2u)x^2t^{-1+\alpha}\\
&-4t^{2\alpha}((-c+1)nv_t-n^2u_t)]+\frac{k_2}{4n}[-2\alpha(2(c-1)x^2v_{xx}-2n\,x^2u_{xx}\\
&+(-3mn+(3c+1)(c-1))xv_x-4nxu_x+(-(c+1)mn+(c+1)(c-1)^2)v\\
&+u(-mn+(c-1)^2)n)t^{-1+2\alpha}-4(c-1)xt^{2\alpha}v_{xt}+4nxt^{2\alpha}u_{xt}\\
&-\alpha^2((c-1)xv_x-nxu_x+(c^2-mn-1)v-2nu)x^2t^{-1+\alpha}-4t^{2\alpha}(-mn\\
&+(c-1)^2)v_t]+\frac{k_3}{4n}[2\alpha((2\sqrt{mn}\,v_{xx}+2nu_{xx})t^{-1+2\alpha}+\alpha\,t^{-1+\alpha}(nu+\\
&\sqrt{mn}v))x^{c+\sqrt{mn}+1}+\alpha^2t^{-1+\alpha}(\sqrt{mn}\,v_x+nu_x)x^{c+\sqrt{mn}+2}+2(\alpha(\sqrt{mn}((c+3)v_x\\
&+nu_x)+n(mv_x+(c+3)u_x))t^{-1+2\alpha}+2t^{2\alpha}(\sqrt{mn}\,v_{xt}+nu_{xt}))x^{c+\sqrt{mn}}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{k_4}{4n}[2\alpha((-2\sqrt{mn}\,v_{xx}+2nu_{xx})t^{-1+2\alpha}+\alpha\,t^{-1+\alpha}(nu-\sqrt{mn}v))x^{c-\sqrt{mn}+1}\\
&-\alpha^2t^{-1+\alpha}(\sqrt{mn}\,v_x-nu_x)x^{c-\sqrt{mn}+2}-2(\alpha(\sqrt{mn}((c+3)v_x+nu_x)-n(mv_x\\
&+(c+3)u_x))t^{-1+2\alpha}+2t^{2\alpha}(\sqrt{mn}\,v_{xt}-nu_{xt}))x^{c-\sqrt{mn}}],\\
C_3^t=&\frac{k_1}{2n}[x(-2nt^{1+\alpha}v_t+\alpha(-2xn\,t^\alpha v_x+((-c-1)nv-n^2u)t^\alpha-\frac{\alpha nx^2v}{2}))]\\
&+\frac{k_2}{2n}[x((2(c-1)v_t-2nu_t)t^{1+\alpha}+\alpha(2x(c-1)t^\alpha v_x-2nxt^\alpha u_x+((c^2-mn-1)v\\
&-2nu)t^\alpha+\frac{x^2((c-1)v-nu)\alpha}{2}))]+\frac{k_3}{4n}[-4\alpha\,t^\alpha(\sqrt{mn}\,v_x+nu_x)x^{c+\sqrt{mn}+1}\\
&-\alpha^2(nu+\sqrt{mn}v)x^{c+\sqrt{mn}+2}-2(\sqrt{mn}(2t^{1+\alpha}v_t+\alpha((c+1)v+nu)t^\alpha)\\
&+n(2t^{1+\alpha}u_t+\alpha(mv+(c+1)u)t^\alpha))x^{c+\sqrt{mn}}]+\frac{k_4}{4n}[4\alpha\,t^\alpha(\sqrt{mn}\,v_x-nu_x)x^{c-\sqrt{mn}+1}\\
&-\alpha^2(nu-\sqrt{mn}v)x^{c-\sqrt{mn}+2}-2(\sqrt{mn}(-2t^{1+\alpha}v_t-\alpha((c+1)v+nu)t^\alpha)\\
&+n(2t^{1+\alpha}u_t+\alpha(mv+(c+1)u)t^\alpha))x^{c-\sqrt{mn}}].
\end{aligned}
$$

情形4 对于 $V_4=u\partial_u+v\partial_v$，我们得到

$$
\begin{aligned}
C_4^x=&\frac{k_1}{n}(-xnv_x+(-c+1)nv-n^2u)t^{-1+\alpha}+\frac{k_2}{n}((c-1)xv_x-nxu_x+(-mn\\
&+(c-1)^2)v)t^{-1+\alpha}-\frac{k_3}{n}(\sqrt{mn}\,v_x+nu_x)x^{c+\sqrt{mn}}t^{-1+\alpha}\\
&+\frac{k_4}{n}(\sqrt{mn}\,v_x-nu_x)x^{c-\sqrt{mn}}t^{-1+\alpha},\\
C_4^t=&k_1xv-\frac{k_2}{n}\left((c-1)\,v-nu\right)x+\frac{k_3}{n}\left(nu+\sqrt{mn}v\right)x^{c+\sqrt{mn}}+\frac{k_4}{n}\left(nu-\sqrt{mn}v\right)x^{c-\sqrt{mn}}.
\end{aligned}
$$

情形 5 对于 $V_5=mv\partial_u+nu\partial_v$，我们发现

$$
\begin{aligned}
C_5^x=&k_1(-nxu_x-(c-1)nu-mnv)+k_2((c-1)xu_x-mxv_x+(-mn+(c-1)^2)u)\\
&-k_3(\sqrt{mn}\,u_x+mv_x)x^{c+\sqrt{mn}}+k_4(\sqrt{mn}\,u_x-mv_x)x^{c-\sqrt{mn}},\\
C_5^t=&k_1nxu-k_2((c-1)u-mv)x+k_3(\sqrt{mn}u+mv)x^{c+\sqrt{mn}}\\
&-k_4(\sqrt{mn}u-mv)x^{c-\sqrt{mn}}.
\end{aligned}
$$

5 结论

本文采用李对称方法，构造具有变系数的相容时间分数阶系统（1.6）的基本解。首先，在例 3.1 中，我们证明了可以通过该系统的群不变解和拉普拉斯变换，求得相容时间分数阶系统（3.11）的基本解。

接下来，我们考虑比系统（3.11）更一般的系统（3.24），并在系统（3.24）中进行变换 $y = x^{\frac{2-q}{2}}$, $\tau = (1 - \frac{q}{2})^{\frac{2}{\alpha}} t$，得到系统（3.25）；随后，进一步考虑比系统（3.25）更一般的系统（1.6）。根据所得到的非平凡向量场生成的群作用，我们构造了系统（1.6）的群不变解。然后，利用两组稳态解，并对群不变解进行拉普拉斯逆变换，以矩阵形式表示了 $k = -1$ 条件下系统（1.6）的基本解。我们还发现，系统（3.11）的基本解（3.23）与系统（1.6）在 $\alpha = 1$ 处的基本解（3.72），与参考文献 [29] 中得到的结果完全相同。此外，我们证明了两个相容分数阶系统的基本解可以通过等价变换相互关联。而且，通过例3.3，我们可以利用等价变换，直接从系统（3.58）的基本解得到系统（3.89）的基本解。最后，利用新诺特定理推导出系统（3.11）和（1.6）的守恒律。

资助 本文投稿至纪念 Peter J. Olver 70 岁生日的“对称性、不变量及其应用”特刊。本工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271433）资助。

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Miller K.S., Ross B.,《分数阶微积分与分数阶微分方程导论》，NY，Wiley，纽约，1993年。[2] Podlubny I.，《分数阶微分方程》，CA，Academic Press，圣迭戈，1999年。[3]Lokenath D.，分数阶微积分在科学与工程中的最新应用，*Internat. J. Math. Math. Sci.* **2003** (2014)，3413-3442。[4]Khalil R., Horani M.Al., Yousef A., Sababheh M.，分数阶导数的新定义，*J. Comput. Appl. Math.* **264** (2014)，65-70。[5] Abdeljawad T.，论相容分数阶微积分， *J. Comput. Appl. Math.* **279** (2015)，57-66。[6] Hyder A.A., Soliman A.H.，一种新的广义 θ相容微积分及其在数理物理中的应用，*Phys. Scripta* **96** (2020)，015208，共13页。[7] Balcı E.，¨Ozt¨urk ˙I., Kartal S.，Caputo导数和相容分数阶导数下分数阶肿瘤模型的动力学行为， *Chaos Solitons Fractals* **123** (2019)，43-51。[8]Chung W.S.，采用相容分数阶导数的分数阶牛顿力学，*J. Comput. Appl. Math.* **290** (2015)，150-158。

[9] Zhao D.Z., Luo M.K.，广义共形分数阶导数及其物理解释， *Calcolo*54 (2017)，1-15。[10] Kumar D., Seadawy A.R., Joardar A.K.，通过修正Kudryashov方法求解数学生物学中出现的若干共形分数阶微分方程的新精确解， *Chin. J. Phys.* **56**(2018)，75-85。[11] Olver P.J.，《李群在微分方程中的应用》，Springer，纽约，1993年。[12] Ovsiannikov L.V.，《微分方程群分析》，Academic Press，纽约，1982年。[13] Bluman G., Anco S.，《微分方程的对称性与积分方法》，Springer-Verlag，纽约，2002年。[14] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Y.，分数阶微分方程的连续变换群，*Vestnik Usatu* **9** (2007), 125-135。[15] Liu H.Z., Li J.B., Zhang Q.X.，一般Burgers方程的李对称分析与精确显式解， *J. Comput. Appl. Math.* **228** (2009)，1-9。[16] Liu H.Z.，分数阶五阶KdV型方程的完全群分类与对称约化，*Stud. Appl. Math.* **131** (2013)，317-330。[17] Cheng X.Y., Hou L., Wang L.Z.，李对称分析、不变子空间方法及q同伦分析方法在求解单壁碳纳米管分数阶系统中的应用， *Comput. Appl. Math.*40 (2021)，1-17。[18] Cheng X.Y., Wang L.Z., Hou J.，采用对称分析、幂级数方法、不变子空间方法和 q-同伦分析方法求解时间分数阶Keller-Segel型扩散方程，*Chin. J. Phys.* **77**(2022)，1639-1653。[19] Ray S.S.，利用李群分析研究时间分数阶（2+1）维Zakharov-Kuznetsov修正等宽方程的不变量分析与守恒律， *Comput. Math. Appl.* **76** (2018)，2110-2118。[20] Ren R.C., Zhang S.L.，（2+1）维分数阶长波色散系统的不变量分析、守恒律及若干精确解，*Comput. Appl. Math.* **39** (2020)，1-21。[21] Cheng X.Y., Wang L.Z.，（2+1）维时间分数阶Navier-Stokes方程的不变量分析、精确解与守恒律， *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* **477** (2021)，20210220，共20页。[22] Chatibi Y., Kinani E., Ouhadan A.，共形微分方程的李对称分析，*AIMS Math.* **4** (2019)，1133-1144。[23] Noether E.，不变变分问题， *Transport. Theor. Stat.* **1** (1971)，186-207。[24] Ibragimov N.H.，新守恒定理， *J. Math. Anal. Appl.* **333** (2007)，311-328。[25] Ibragimov N.H., Avdonina E.D.，非线性自伴性、守恒律，以及利用守恒律构造偏微分方程的解，*Russ. Math. Surv.* **68** (2013)，889-921。[26] Craddock M., Platen E.，基本解的对称群方法， *J. Differ. Equ.* **207**(2004)，285-302。[27] Craddock M., Lennox K.A.，李群对称性作为基本解的积分变换，*J. Differ. Equ.* **232**(2007)，652-674。[28] Craddock M.，基本解、转移密度与李对称性的积分，

J. Differ. Equ. **246**(2009年), 2538-2560。[29] Kang J.、Qu C.Z.，抛物型方程组的对称群和基本解，*J. Math. Phys.* **53**(2012年), 023509，21页。[30] Piotrowska E.、Rogowski K.，使用卡普托和相容导数定义分析分数阶电路，非整数阶微积分及其应用会议，Springer，Cham，2017年。[31] Piotrowska E.，使用卡普托和相容导数定义分析具有正弦输入信号的分数阶电路，波兹南理工大学学术期刊，电气工程，2019年。[32] El-Ajou A.、Al-Zhour Z.、Oqielat M.、Momani S.、Hayat T.，非线性相容分数阶 KdV-Burgers 方程的级数解及其若干应用，*Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019年), 1-16。[33] Cheng X.Y.、Wang L.Z.，相容时间分数阶偏微分方程的基本解和守恒律，已提交。[34] Guo B.L.、Pu X.K.、Huang F.H.，《分数阶偏微分方程及其数值解》，科学出版社，北京，2015年。[35] Kim S.，具有时间无关系数的二阶抛物型方程组基本解的高斯估计，*T. Am. Math. Soc.* **360** (2008年), 6031-6043。