小型量子纠错码的低深度标志式综合征提取

Dhruv Bhatnagar*量子与计算机工程系 代尔夫特理工大学荷兰代尔夫特 2628 CDd.bhatnagar@student.tudelft.nl

Matthew Steinberg*量子与计算机工程系 代尔夫特理工大学荷兰代尔夫特 2628 CDmatt.steinberg3@gmail.com

David Elkouss网络量子器件部 冲绳科学技术大学院大学 日本冲绳david.elkouss@oist.jp

Carmen G. Almudever计算机工程系 瓦伦西亚理工大学西班牙瓦伦西亚 cargara2@disca.upv.es

Sebastian Feld量子与计算机工程系 代尔夫特理工大学荷兰代尔夫特 2628 CDs.feld@tudelft.nl

arXiv:2305.00784v1 [quant-ph] 1 May 2023

摘要—**标志式容错已成为实现小规模容错量子纠错实验的关键。标志协议的实用性取决于较低的量子比特开销，通常远低于其他方法。然而，与大多数容错协议一样，标志式纠错的优势也伴随着取舍：虽然可以保证容错，但由于需要重复进行稳定子测量，这类协议需要较高深度的电路。在此，我们证明，基于先前综合征动态选择稳定子测量，并利用完整稳定子群中的元素，可以为 [[5,1,3]]量子码以及 Steane码实现深度更低的综合征提取电路，相较于标志容错领域此前确立的方法亦是如此。我们系统地证明了新协议能够生成容错查找表，并通过伪阈值模拟展示其效果；与此前确立的方法相比，所有协议均取得了显著提升。本研究开启了关于如何利用完整稳定子群的性质来降低容错量子纠错电路开销的探讨。**

索引词——**量子纠错、稳定子码、标志容错、综合征提取、量子计算**

I. 引言

标志式容错量子纠错相比量子纠错中其他典型的容错协议（FT），能够以更少的辅助量子比特进行综合征提取 [1]–[3]。该协议最初由 [4]–[6],提出，它允许高权重错误通过一个额外的辅助量子比特传播，该量子比特称为标志量子比特。研究表明，这个额外的辅助量子比特能够高效地确定最可能对应的低权重错误，并在后续的错误纠正轮次中纠正高权重错误。

该协议已扩展至容错领域中的多种不同稳定子码，也已用于容错态制备和量子计算等领域 [6]–[22], 。标志协议促成了多项实验的实现，这些实验使用当前的含噪中等规模量子（NISQ）硬件展示了容错量子纠错技术 [23]–[26]。标志协议尤其适用于稳定子码；在这类量子码中，通常需要经过一步经典处理，才能确定在迭代序列中接下来要测量哪个稳定子生成元。这种技术称为自适应综合征提取 [1], [4]。在大多数情况下，该协议的核心假设是，辅助量子比特的重置和测量操作能够相对快速地完成；不过，对于量子比特读出和重置时间较长的架构，可以通过调整原始标志协议，采用静态综合征提取序列来解决这一问题[12]。本文聚焦于快速测量和重置操作的情形；对于测量和重置较慢的情形，我们将在未来的工作中探讨新的协议。

在目前已知的大多数容错协议中，通常需要重复进行多次稳定子测量，以确保错误症状测量和标志量子比特测量的准确性；这会带来巨大的额外负担，包括在量子计算机上执行量子算法时所产生的额外门开销和深度成本 [3]。然而，最近的一篇论文 [27], 表明，对于大量稳定子码类，包括众所周知的 CSS 码，可以大幅降低 Shor 风格的错误症状提取电路序列的门开销。特别是对于 Steane码，通常需要多达 24 次稳定子测量才能保证容错。通过分析错误传播所导致的潜在错误，研究人员系统地证明，如果不仅考虑六个典型的稳定子生成元，还考虑更高权重、混合量子比特支撑集以及混合泡利算符的稳定子元素，就可以将 Shor 协议的长度缩短至仅需 7 次稳定子测量。

*这些作者对本项工作的贡献相同。本项工作的通讯作者是 Matthew Steinberg。

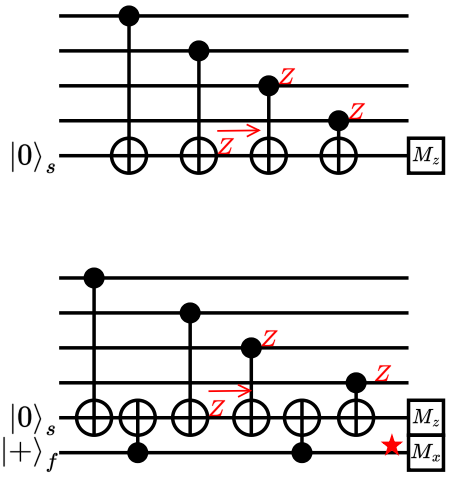


图 1. A) 和 B) 中分别展示了用于测量稳定子 $ZZZZ$ 的两个综合征提取电路。A) 不是容错的，因为 Z 错误的传播可能造成无法检测的逻辑错误；然而，B) 是容错的，因为传播错误会通过在 X-基中进行的标志量子比特测量被检测出来。红色星号标记了通过 X-基测量检测到传播错误的位置。对于所讨论的协议，综合征量子比特测量在 Z-基中实现。

位于 $2^{(n-k)}$ 元素的完整稳定子群中的元素。

在本工作中，我们将 [27] 中提出的分析方法应用于标志容错量子纠错的背景。由于标志容错量子纠错与其他已知容错协议一样面临门开销问题[3], ，我们表明，在传播错误检测的情况下，$[[5,1,3]]$ 量子码的综合征提取序列可以得到简化。此外，我们发现，在综合征和标志量子比特测量结果为非平凡的情况下，$[[7,1,3]]$ Steane码的标志综合征提取电路也可以得到简化。我们展示了若干为确保容错查找表（LUT）所需的示例协议，同时使特定子轮次中的双量子比特门数量减少了 $25-50\%$，相较于协议 [4] 中在同一子轮次测量所有稳定子的方案。我们将这些新协议与 [4],中的最先进的方法进行了系统测试，并发现伪阈值提高了$3.64\%-11.16\%$。我们认为，该方案仍可进一步完善，并可推广至其他量子码。

本文其余部分的结构如下：第 II 节总结原始标志协议并介绍相关术语，如 [4]中所述；第 III 节介绍我们新的旗标容错协议的结构；第 IV 节展示使用 Qiskit [28]进行的伪阈值模拟结果和分析；最后，我们在第 V 节给出总结性评论。

II. 背景

图1展示了 Steane 量子码其中一个稳定子的两个简单综合征提取电路。标志技术的核心是在综合征量子比特旁添加一个额外的量子比特，以追踪传播错误。如图1A)所示，未能完美执行的受控非门可能会产生一个额外的 Z 错误。经过后续两个受控非门后，该 Z 错误会经历幺正演化，并分别演变为 ZZ 错误。测量综合征量子比特的 Z 基时，将无法检测到传播错误。因此，一种可能的解决方案是添加一个额外的辅助量子比特（对于距离为3的量子码），将其制备在 $|+\rangle$ 态，并使其与原始综合征量子比特（制备在 $|0\rangle$ 态）纠缠；如图1B)所示，这称为标志量子比特。在这种设置中，错误仍可在整个电路中传播，但由于纠缠的标志量子比特具有特定性质，在 X基下测量可揭示错误已发生传播（图1中以红色星号标出）。

然而，仅测量一个稳定子生成元不足以完整识别并诊断错误。在 [4],中，会执行两个子轮次，每个子轮次包含六次稳定子测量；第一子轮次使用额外的标志辅助量子比特执行，第二子轮次则仅在出现非平凡综合征或标志量子比特测量结果时（即综合征量子比特和标志量子比特测量结果为 $[s,f]\in\{[1,0],[0,1],[1,1]\}$，其中 $[s,f]$ 指综合征量子比特和标志量子比特测量）执行，并且只使用综合征量子比特。图2和图3展示了 [4]中的原始协议。本文构造了三种具有相同总体结构的新型容错协议。

[4] 中针对 Steane 和 $[[5,1,3]]$量子码的原始协议如下。在第一子轮次中，如图3左侧一列所示，使用额外的标志辅助量子比特测量稳定子生成元。如果 Z-和X-测量结果均为平凡（即 $[s,f]=[0,0]$），则依次测量下一个生成元，直到定义该量子码的全部（$n-k$）个生成元都测量完毕。如果测量结果 $[s,f]$ 为非平凡，则第一子轮次结束，第二子轮次开始；此时再次测量所有生成元，但不使用标志辅助量子比特。所有生成元测量完毕并以经典方式存储综合征后，便开始通过查找表进行解码。对于 CSS 码，会分别对 X-型和 Z-型稳定子生成元进行解码，如图2所示，并标记为“X/Z 查找表”，表示测量 X-/Z-型稳定子后所施加的纠正。图2和图3展示了两个示例量子码——$[[5,1,3]]$ 和 Steane 码——所采用的原始标志协议。

从图2和图3可以看出，原始标志协议仅使用了用于定义稳定子码的 $(n-k)$ 个稳定子生成元。在下一节中，我们将详细介绍如何利用稳定子群中并非生成元的特定元素来简化综合征提取电路，即利用大小为$2^{(n-k)}$ 的稳定子群中的其他稳定子算符。

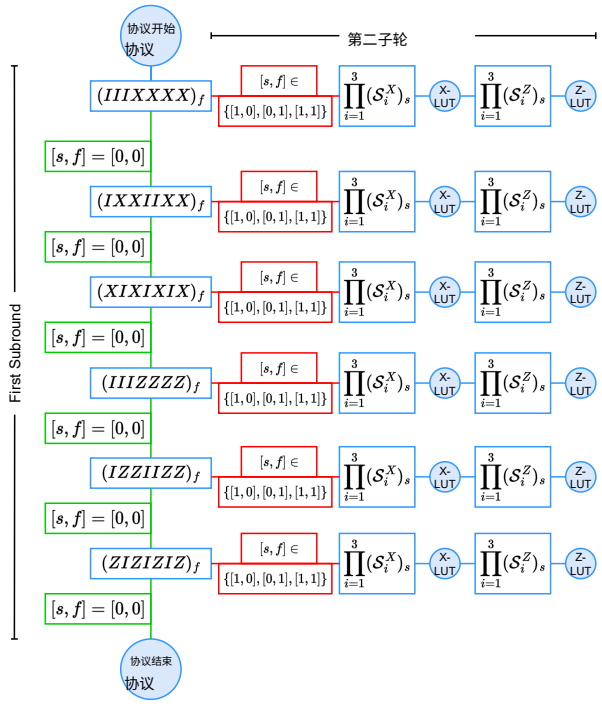


图 2. 示意图展示了[4] 中用于 Steane码的原始旗标容错协议。图中协议的起点和终点分别用顶部和底部的蓝色圆圈表示。绿色线条突出显示第一子轮中的平凡综合征/旗标测量，以及随后进行的带旗标稳定子测量；符号 $(\cdot)_f$ 表示带旗标稳定子，而 $(\cdot)_s$ 表示不带旗标稳定子。红色线条突出显示第一子轮中的非平凡综合征/旗标测量，这些测量会导致第二子轮中进行不带旗标稳定子测量。与 CSS 码的典型解码方案一致，首先通过查找表（LUT）进行不带旗标的 X 型稳定子测量和纠正，随后进行 Z 型测量和纠正。执行 LUT 纠正后，协议实际上即告结束；或者，如果第一子轮结束时所有症状对 $[s,f]$ 均为平凡，协议也随之结束。

III. 利用完整稳定子群元素的缩短旗标协议

尽管 [4] 提出的原始协议为容错领域的首批实验铺平了道路，但这些协议在双量子比特门数量的最小值和最大值方面并非最优，因为完整的综合征提取电路需要对 $[[5,1,3]]$量子码进行4至8次稳定子测量，对Steane码进行6至12次综合征测量。因此， $[[5,1,3]]$ 量子码的电路中双量子比特门数量为24至40个，Steane码则为36至60个。

稳定子群总共包含 $2^{(n-k)}$ 个稳定子算符，其中一个特定子集可用于构造容错综合征提取电路。采用这种方法，可以减少双量子比特门的总数。这里我们给出三种可能的约简方案。这些较短的序列仅适用于 [4],中提出的各个子轮次；对于非平凡综合征量子比特测量结果和非平凡旗标量子比特测量结果这两种情况，我们将分别讨论。

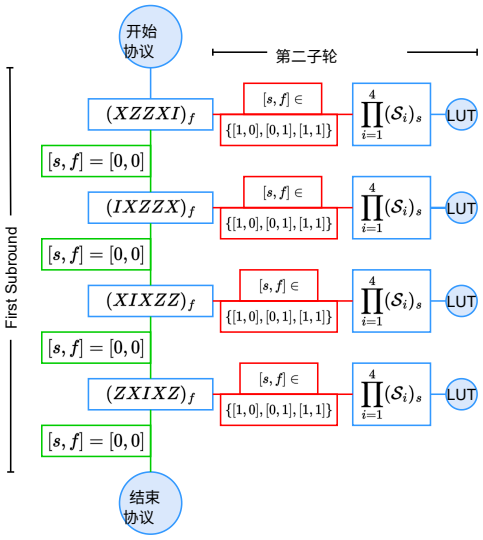


图3. 展示了 [4] 中针对 $[[5,1,3]]$ 量子码的原始旗标容错协议的示意图。此处，协议的大部分内容与图2相似或相同；然而，由于 $[[5,1,3]]$ 量子码的结构，没有区分 X 型和 Z 型稳定子。因此，第二子轮次中的解码通过在同一个查找表中同时考虑两种泡利误差类型来实现。

A. 针对 *[[5,1,3]]*量子码的容错简化

我们首先考虑 $[[5,1,3]]$ 量子码的综合征提取电路；协议示意图见图 4。在 [4],提出的协议中，第一子轮次首先使用旗标辅助量子比特测量四个权重为 4（$w=4$）的稳定子生成元 $\{XZZXI, IXZZX, XIXZZ, ZXIXZ\}$；如果检测到旗标生成元 $XZZXI$对应的非平凡综合征，我们就在第二子轮次中不使用旗标，再次测量这四个相同的生成元。然而，如果出现非平凡旗标量子比特测量结果，我们就会在第二子轮次中不使用旗标，再次测量同一稳定子，然后继续测量稳定子 $YXXYI$；该稳定子的测量结果随后会引出第三子轮次：若综合征平凡（$s=0$），则测量$ZIZYY$；若 $s=1$，则测量$XIXZZ$。这种变体可以应用于 $[[5,1,3]]$ 量子码的所有生成元：在子轮次中测量的第三个稳定子，其量子比特支撑集始终与第一子轮次中触发旗标的稳定子相同（即，先测量稳定子生成元 $XZZXI$，随后在第三子轮次测量 $YXXYI$）。

可以证明，所得查找表是容错的，因为所有所得错误症状都是唯一的，并且会以非平凡方式映射到最低权重的泡利校正。特别是， [4] 中的第二子轮次要求再次测量全部四个生成元，且不使用标记。所得的四位错误症状是唯一且非平凡的。然而，举例来说，第一个稳定子的非平凡标记仅表明存在七种可能的、彼此不等价的传播错误：$IIZXI$，$IXZXI$，$IYZXI$，$IZZXI$，$IIIXI$，$IIXXI$，以及 $IIYXI$。由于经典香农熵提供了一个】【。

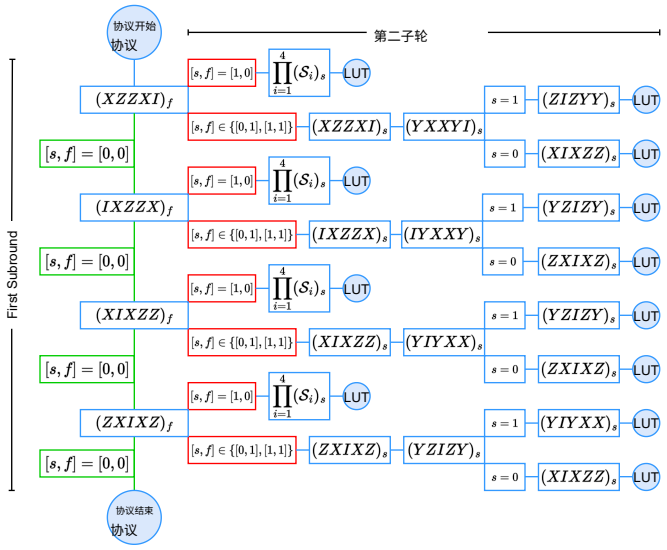


图 4. 新的 $[[5,1,3]]$ 量子码协议。请注意，当检测到传播错误时，我们的协议比 25%少使用了量子门，而原始方法由 [4] 提出。当未检测到错误时，该协议的执行方式与原始协议完全相同。

区分泡利错误 [29]，所需比特数的下界：可以证明，需要三个比特（因此需要三次稳定子测量）才能区分这些剩余错误。为确保容错，不等价的错误会映射到不同的非平凡综合征模式，从而使平凡综合征对应测量错误。我们观察到，这些泡利检查仅在第二和第三个量子比特（从左至右）上的算符不同，因此，用于区分它们的稳定子必须至少支撑在这两个量子比特中的一个上。稳定子在其余量子比特上的支撑不会影响用于区分它们的综合征信息。因此，不同于 [4]，中的方法，我们设计第二轮无标记稳定子检查时，先测量一个支撑在第二和第三个量子比特上的稳定子，然后再测量一个来自标准生成元集合之外的对应稳定子，因为第二和第三个量子比特上的泡利支撑可能不同。最后一个稳定子的支撑选择为仅包含第二或第三个量子比特。

如图 4 所示，在存在传播错误的情况下，我们的协议将第二子轮的量子门数量减少了 25%。在没有错误的情况下，该协议与原始协议完全相同，即测量全部四个稳定子生成元。随着电路中故障位置数量的减少，我们预计伪阈值也会有所提高；正如第四节所讨论的，实际情况确实如此。

*B. Steane*码的容错简化

在 $[[7,1,3]]$ Steane 码的情况下，可以进行更多侵入式的更改。例如，在测量第一个稳定子生成元 $IIIXXXX$ 时，使用一个标记彩票开户

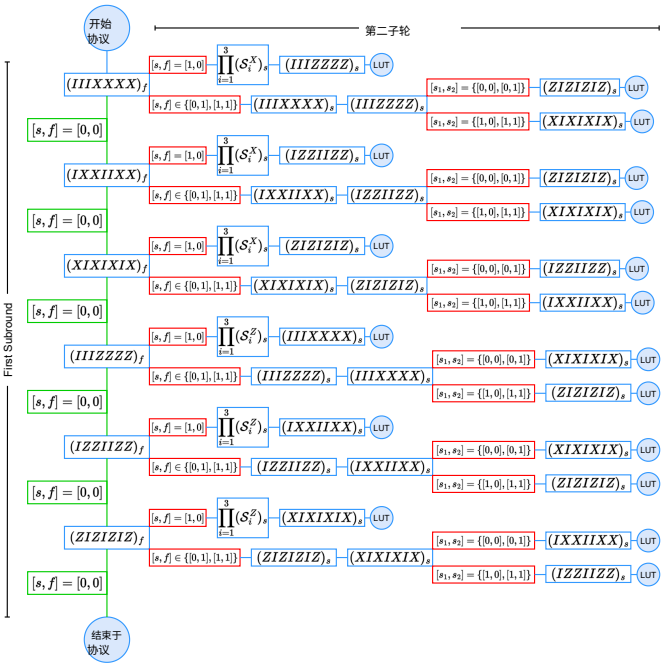


图 5. 为 Steane码 引入的第一个新协议。这里，我们针对标志触发或错误症状触发这两种情况，修改了标志协议的第二子轮。最坏情况下，这一约简可使量子门数量减少 33%。

装置，最终产生的不等价相关错误由非平凡的标记测量指示，属于集合$IIIIIXX$、$IIIIXXX$、$IIIIYXX$、$IIIIZXX$、。

$IIIIIIX$，$IIIIIYX$，$IIIIIZX$。由于稳定子的权重为 w（Steane码生成元的权重为$w=4$），并且存在标志量子比特，我们再次计数得到七种可能性，并构造后续的稳定子测量，使其能够通过三个综合征比特加以区分。容错再次要求与这些错误对应的错误症状均为非平凡且唯一。由于对于第一个稳定子，这些错误仅在第五和第六个量子比特上有所不同（即第一个稳定子生成元的量子比特支撑仅受第五和第六个量子比特影响），以下序列给出了容错纠正规则：我们再次测量同一个稳定子生成元（此处为 $IIIXXXX$）；然后，测量其共轭稳定子（$IIIZZZZ$）；最后，按如下方式测量第三个稳定子。如果 $IIIXXXX$ 测量（无标志）返回的测量结果为$s=0$，则测量稳定子 $ZIZIZIZ$；否则，测量 $XIXIXIX$。类比可知，我们的新序列将标志协议相应分支中的稳定子测量总数从6次减少到3次（第二子轮减少50%）。请注意，解码步骤采用传统的CSS方式，分别解码 Z 错误和 X 错误。此协议仅使用标准稳定子生成元。

当旗标量子比特测量结果平凡、但综合征量子比特测量结果非

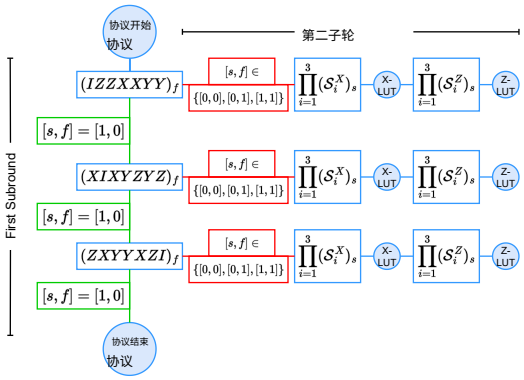


图 6. 为 Steane码提出的第二种新协议。在这里，我们修改标志协议的第一子轮次，而不是第二子轮次，通过测量三个带标志的 $w = 6$ 稳定子。此约简在最坏情况下可将双量子比特门数量降低 33%，但只有在与第一子轮次中测量两个或更多 $w = 4$ 生成元的情况相比时，才会降低。

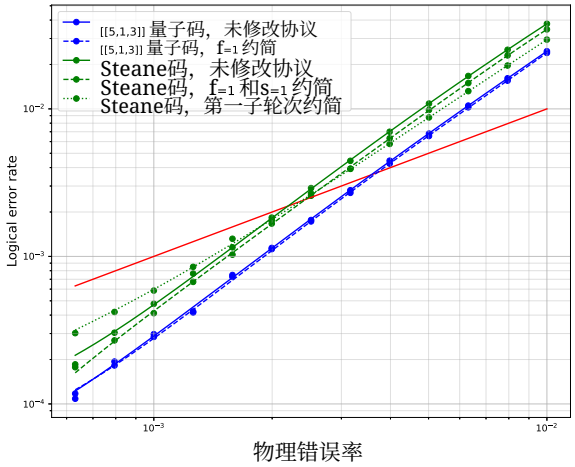


图7。Qiskit模拟得出的伪阈值结果；横轴表示物理错误率p_{phys}，纵轴表示逻辑错误率 p_L。我们得出的伪阈值优于 [4]中所用的协议。不过，我们的协议使用的双量子比特门显著更少。得到的伪阈值为： 3.5729×10^{-3} 对于未经修改的$[[5,1,3]]$ 量子码（图3）； 3.7030×10^{-3} 对于采用 [[5,1,3]] 约简的 $f = 1$ 量子码，提升了3。64%（图4）； 2.1927×10^{-3} 对于未经修改的 Steane码协议（图2）； 2.4302×10^{-3} 对于采用 $f = 1$ 和 $s = 1$ 约简的 Steane码，提升了11。16%（图5）；以及 2.3611×10^{-3} 对于采用第一子轮次约简的 Steane码，提升了7.68%（图6）。在这些模拟中，误差条太小，在图中难以看清。这些模拟可通过 https://github.com/dhruvbhq/lowdepthflagqec免费获取，且为开源。

平凡时（即 $[s, f] = [1, 0]$ 的情况），还可以进一步降低电路深度。例如，如果使用旗标装置测量第一个稳定子（$IIIXXXX$）时，得到的旗标量子比特测量结果平凡，但综合征量子比特测量结果非平凡，那么能够导致这一测量结果的最小错误集合包括单量子比特泡利错误 $IIIZIII$、$IIIIZII$、 $IIIIIZI$、 $IIIIIIZ$、 $IIIYIII$、$IIIIYII$、$IIIIIYI$、 $IIIIIIY$，或测量错误。为了以确保容错的方式唯一地区分这九种可能性，我们修改传统的六次稳定子测量顺序：首先测量全部三个 X 型稳定子生成元（$IIIXXXX$、 $IXXIIXX$、 $XIXIXIX$），以明确解码错误的 Z 分量；接下来，只需再获取一位信息，即可区分纯 Z 错误和 Y 错误，因为由第一个稳定子检测到的这些错误可能位置相同。通过测量一个（共轭稳定子）$IIIZZZZ$ 来获得这条信息：对于 Z 错误，其测量结果平凡；对于 Y 错误，其测量结果非平凡。将这一逻辑直接推广到其他稳定子测量，即可将稳定子测量次数从 6 次降至 4 次（减少 33%）。需要注意的是，对于 $[[5, 1, 3]]$ 量子码，关于综合征量子比特测量结果的这一推理需要测量 4 个稳定子，与测量 4 个标准稳定子生成元相比并无减少；因此我们认为，这种方法可能无法进一步降低 $[[5, 1, 3]]$ 量子码的门开销。Steane码协议的图示见图 5。

最后，还可以进一步修改第一子轮次，在我们的方法中，该子轮次包含标志量子比特。这里我们提出了一种适用于 Steane码的替代容错协议，该协议使用三个 $w = 6$ 稳定子，而不是通常的六个 $w = 4$生成元。图6展示了这一新协议。通过这种方式，我们保证在最坏情况下可以实现约简：将六次 $w = 4$ 测量的总量从 36 个量子门，将三个 $w = 6$ 稳定子约简为总计 24 个量子门（即约简 33%）。此外，我们的首个子轮次方法将测量结果数量从 6 减少到 3，仅为 [4] 的一半。不过，在某些情况下，该协议并不会降低门开销。例如，对于原协议中仅第一个生成元产生非平凡综合征结果的情况，可以使用更少的双量子比特门；在第一个子轮次中，我们的新协议将使用 8 个双量子比特门，而原协议使用 6 个。尽管如此，从平均情况来看，预计门开销仍可大幅降低，因为其他所有首个子轮次情况都会带来量子门约简。

IV. 结果

我们的模拟是在代尔夫特蓝色超级计算机 [30]上进行的。具体而言，我们使用了：Intel Xeon计算节点提供的384个核心，每个核心频率为3.0 GHz；192 GB内存；以及480 GB硬盘空间。除额外进行一轮完美的稳定子测量和纠错（如 [1], [4], [31]所示）外，所有协议均严格按照描述执行。为了节省处理器使用时间，我们的模拟采用了基于 Qiskit [28] 的蒙特卡罗波矢模拟，在高于物理错误率 $p_{\text{phys}} = 10^{-3}$的每个数据点进行 10^7 次试验，并在$p_{\text{phys}} < 10^{-3}$ 10^6 进行试验。

我们的噪声模型由独立同分布的错误（iid）组成。具体而言，我们考虑一种电路——

层退极化噪声模型，其参数如下，与 [4]:

- 以概率 p，每个双量子比特门之后都会发生一个从 $\{I, X, Y, Z\}^{\otimes 2} \backslash \{I \otimes I\}$中均匀抽取的双量子比特泡利错误。
- 以概率 $\frac{4p}{15}$， $|0\rangle$– 态的制备会被替换为 $|1\rangle = X|0\rangle$。同样， $|+\rangle$ 态的制备也会被等效地替换为$|-\rangle = Z|+\rangle$。• 以概率 $\frac{4p}{15}$，测量结果会翻转。

—

- 不考虑空闲错误。
- 假设初始态编码无噪声。
- 假设单量子比特门无噪声。

除了若干实验实现 [23]–[26]之外，还有其他更复杂的错误模型，并已使用标志协议进行测试。我们选择上述错误模型，是因为我们的目标是与 [4] 中提出的原始标志协议进行比较。

如图 7 所示，我们的方案优于 [4], 中提到的方案，尤其是在 Qiskit模拟中，新 $[[5, 1, 3]]$ 协议以及两个新的 Steane码协议分别实现了 3.64%、11.16%，和 7.68% 的提升。当然，这种改进并不令人意外，因为我们的协议减少了错误在电路中传播的机会。人们也可以考虑包含空闲噪声的错误模型 [1], ，但我们将把这一探索留待未来工作。

V. 结论

在本工作中，我们研究了标志式纠错以及容错综合征提取电路序列的构造，表明完整稳定子群中的元素可以降低总体门开销。我们重点研究了 $[[5, 1, 3]]$ 和 $[[7, 1, 3]]$ Steane码，发现确实存在约简。因此，对于新 $[[5, 1, 3]]$ 协议（图 4）中第二子轮次的 $f = 1$分支、Steane码的 $s = 1$， $f = 1$ 协议（图 5）以及 Steane码的第一子轮次约简协议（图 6），我们分别报告了每个子轮次双量子比特门数量降低 25%、 $33 - 50\%$ 和 33%。在我们的伪阈值模拟中，所有约简都相较于先前已建立的协议结果带来了具体改进。

我们的工作还表明，在硬件上运行稳定子电路之前，量子编译层面仍有很大的优化空间；事实上，已有多项研究表明，与电路级量子比特相互作用相关的拓扑图性质，对于抑制 NISQ 时代算法中的错误 [32]–[35], 起着重要作用，而纠错算法也不例外。鉴于 NISQ 时代设备的连通性受限，值得评估像我们这样深度较低的综合征提取序列是否仍适用于这类设备，以及并行综合征提取等当前策略 [10]能否用于进一步减少门数量。

最后，近期研究提出了一种利用 ZX演算 [36]实现容错的统一框架；这为稳定子测量序列的系统优化带来了可能性。未来的研究将致力于回答这一问题。

VI. 致谢

感谢 Aritra Sarkar 提供了富有启发性的讨论。MS 和 SF 感谢英特尔公司提供的支持。CGA 获得了 QuantERA 项目 EQUIP、科学与创新部和国家研究局 MCIN/AEI/10.13039/501100011033，以及欧盟“下一代欧盟”/PRTR 的支持。DE 部分获得了 JST登月研发计划项目（资助编号 JPMJMS2061）的支持。

参考文献

[1] C. Chamberland 和 M. E. Beverland，“适用于任意距离码的旗标容错纠错”，Quantum，第 2 卷，第 53 页，2018 [ ] 10 22331 2018 02 08 53 年 2 月。在线获取：https://doi.org/ 。 /q- - - - B. M. Terhal，“量子存储器的量子纠错”，《现代物理评论》，第 87 卷，第 307–346 页，2015 年 4 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 87 307 。 /RevModPhys. 。A. W. Cross、D. P. DiVincenzo 和 B. M. Terhal，“量子容错的码比较研究”，2009 年。[4] R. Chao 和 B. W. Reichardt，“仅使用两个额外量子比特的量子纠错”，《物理评论快报》，第 121 卷，第 050502 页，2018 年 8 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 121 050502 。 /PhysRevLett. 。B. W. Chao、Rui 和 Reichardt，“用少量量子比特实现容错量子计算”，npj Quantum Information，第 4 卷，第 1 期，第 42 页，2018 年。[6] T. J. Yoder 和 I. H. Kim，“带扭结的表面码”，Quantum，第 1 卷，第 2 页，2017 年 4 月。 [在线]。获取地址：https: //doi.org/ 10 22331 2017 04 25 2 。 /q- - - - R. Chao 和 B. W. Reichardt，“适用于任意稳定子码的旗标容错纠错”，PRX Quantum，第 1 卷，第 010302 页，2020 年 9 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 1 010302 。 /PRXQuantum. 。P. Prabhu 和 B. W. Reichardt，“用更少量子比特进行容错综合征提取和猫态制备”，载于第 16 届量子计算、通信与密码学理论会议（TQC 2021）。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2021 年。[9] C. Chamberland、G. Zhu、T. J. Yoder、J. B. Hertzberg 和 A. W. Cross，“带旗标量子比特的低度图上的拓扑码和子系统码”，《物理评论X》，第 10 卷，第 011022 页，2020 年 1 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 10 011022 。 /PhysRevX. 。B. W. Reichardt，“用少量或无需额外量子比特对 Steane七量子比特色码进行容错量子纠错”，Quantum Science and Technology，第 6 卷，第 1 期，第 015007 页，2020 年。[11] M. Guti´errez、M. M¨uller 和 A. Berm´udez，“横向性与晶格手术：探索利用囚禁离子量子处理器实现耦合逻辑量子比特的可行路径”，《物理评论A》，第 99 卷，第 022330 页，2019 年 2 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA. 99.022330[12] B. Anker 和 M. Marvian，“基于经典码的旗标组件”，2022 年。[13] T. Tansuwannont、C. Chamberland 和 D. Leung，“循环Calderbank-Shor-Steane码的旗标容错纠错、测量与量子计算”，《物理评论A》，第 101 卷，第 012342 页，2020 年 1 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA. 101.012342[14] C. Chamberland、A. Kubica、T. J. Yoder 和 G. Zhu，“带旗标量子比特的三价图上的三角色码”，New Journal of Physics，第 22 卷，第 2 期，第 023019 页，2020 年。[15] T. Tansuwannont 和 D. Leung，“用少量辅助量子比特实现封顶色码的容错”，PRX Quantum，第 3 卷，第 030322 页，2022 年 8 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/10.1103/ PRXQuantum.3.030322[16] ——，“利用错误权重奇偶性实现容错量子纠错”，《物理评论A》，第 104 卷，第 042410 页，2021 年 10 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 104 042410 。 /PhysRevA. 。C. Chamberland 和 A. W. Cross，“使用旗标量子比特进行容错魔态制备”，Quantum，第 3 卷，第 143 页，2019 年 5 月。 [ ] 10 22331 2019 05 20 143 在线。获取地址：https://doi.org/ 。 /q- - - - C. Chamberland 和 K. Noh，“使用冗余辅助量子比特编码和旗标量子比特实现极低开销的容错魔态制备”，npj Quantum Information，第 6 卷，第 1 期，第 91 页，2020 年。[19] Y. Shi、C. Chamberland 和 A. Cross，“近似GKP态的容错制备”，New Journal of Physics，第 21 卷，第 9 期，第 093007 页，2019 年。[20] A. Rodriguez-Blanco、A. Bermudez、M. M¨uller 和 F. Shahandeh，“含噪量子纠错电路中真正多体纠缠的高效稳健认证”，PRX Quantum，第 2 卷，第 020304 页，2021 年 4 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/10.1103/ PRXQuantum. 2 020304 。 D. M. Debroy 和 K. R. Brown，“用于低开销电路验证的扩展旗标组件”，《物理评论A》，第 102 卷，第 052409 页，2020 年 11 月。 [在线]。获取地址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA. 102.052409 [22] L. Lao 和 C. G. Almudever，“使用标记量子比特和桥接量子比特在近期量子处理器上实现容错量子纠错”，《物理评论A》，第101卷，页码032333，2020年3月。 [在线]。网址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 101 032333 。/PhysRevA.。C. Ryan-Anderson、J. Bohnet、K. Lee、D. Gresh、A. Hankin、J. Gaebler、D. Francois、A. Chernoguzov、D. Lucchetti、N. Brown等，“实时容错量子纠错的实现”，《物理评论X》，第11卷，第4期，页码041058，2021年。[24] J. Hilder、D. Pijn、O. Onishchenko、A. Stahl、M. Orth、B. Lekitsch、A. Rodriguez-Blanco、M. M¨uller、F. Schmidt-Kaler 和 U. Poschinger，“基于离子穿梭的囚禁离子量子计算机上的容错奇偶校验读出”，《物理评论X》，第12卷，第1期，页码011032，2022年。[25] M. Abobeih、Y. Wang、J. Randall、S. Loenen、C. Bradley、M. Markham、D. Twitchen、B. Terhal 和 T. Taminiau，“金刚石量子处理器中逻辑量子比特的容错操作”，《自然》，第606卷，第7916期，第884–889页，2022年。[26] L. Postler、S. Heuβen、I. Pogorelov、M. Rispler、T. Feldker、M. Meth、C. D. Marciniak、R. Stricker、M. Ringbauer、R. Blatt等，“容错通用量子门操作的演示”，《自然》，第605卷，第7911期，第675–680页，2022年。[27] N. Delfosse 和 B. W. Reichardt，“简短的Shor式错误症状序列”，arXiv预印本 arXiv:2008.05051，2020年。[28] Qiskit贡献者，“Qiskit：用于量子计算的开源框架”，2023年。[29] M. Nielsen 和 I. Chuang，《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2010年，ISBN 978-1-107-00217-3。[30] 代尔夫特高性能计算中心（DHPC），“DelftBlue超级计算机（第一阶段）”，https://www.tudelft.nl/dhpc/ark: /44463/DelftBluePhase1，2022年。[31] A. Jayashankar、M. D. H. Long、H. K. Ng 和 P. Mandayam，“实现对振幅阻尼噪声的容错”，《物理评论研究》，第4卷，页码023034，2022年4月。 [在线]。网址：https://link.aps.org/doi/ 10 1103 4 023034 。 /PhysRevResearch.。M. A. Steinberg、S. Feld、C. G. Almudever、M. Marthaler 和 J.-M. Reiner，“启发式量子比特分配算法的拓扑图依赖关系和缩放特性”，《IEEE量子工程汇刊》，第3卷，第1–14页，2022年。[33] M. Bandic、H. Zarein、E. Alarcon 和 C. G. Almudever，“关于量子算法映射的结构化设计空间探索”，载于2020年第35届电路与集成系统设计会议（DCIS），2020年，第1–6页。[34] ——，“关于量子算法映射的结构化设计空间探索”，载于2020年第35届电路与集成系统设计会议（DCIS），2020年，第1–6页。[35] M. Bandic、S. Feld 和 C. G. Almudever，“NISQ时代的全栈量子计算系统：算法驱动和硬件感知编译技术”，载于2022年欧洲设计、自动化与测试会议暨展览（DATE），2022年，第1–6页。[36] H. Bombin、D. Litinski、N. Nickerson、F. Pastawski 和 S. Roberts，“利用ZX演算统一容错的不同形式”，arXiv预印本 arXiv:2303.08829，2023年。