arXiv:2305.00786v1 [math.DG] 1 May 2023

反常抵消公式和 E_8 丛

YONG WANG, YUCHEN YANG

Abstract. 利用 E_8 丛，我们构造了若干关于 $SL(2,\mathbb{Z})$、 $\Gamma^0(2)$和 $\Gamma_0(2)$的模形式。借助这些模形式，我们得到了若干新的特征形式反常抵消公式。

1. Introduction

1983 年，物理学家 Alvarez-Gaum´e 和 Witten [1]发现了引力反常的“奇妙抵消”公式，该公式揭示了 12维光滑黎曼流形的 Hirzebruch L-形式与 A-形式的顶次分量之间的优美关系。Kefeng Liu [11]通过研究特征形式的模不变性，建立了 $(8k+4)$ 维黎曼流形上的高维“奇妙抵消”公式。这些公式可用于推导一些整除性结果。在 [9], [10], [3], ，人们建立了涉及复线丛的更一般抵消公式及其应用。在 [7], ，利用 Eisenstein 级数推导出了一个更一般的抵消公式。在 [8], ，Han、Liu 和 Zhang 证明，规范群 $E_8 \times E_8$ 的 Green-Schwarz 反常分解公式和规范群 E_8 的 Horava-Witten 反常分解公式都可以通过权 14 的模形式推导出来。这回答了 J. H. Schwarz 提出的问题。他们还建立了这些分解公式的推广，并在 12 维流形上得到了一个新的 Horava-Witten 型分解公式。在[6], ，Han、Huang、Liu 和 Zhang 通过 E_8 丛引入了 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上的权 14 模形式和 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上的权重 10 模形式，并在 12 维流形上得到了一些有趣的反常抵消公式。在 [5], ，Chen、Han 和 Zhang 为 $4k+2$ 维自旋流形定义了一个权 $2k$ 的整模形式。本文将 Chen-Han-Zhang $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式用 E_8 丛扭曲，并为 14 维和 10 维 $spin^c$ 流形得到权 14 和 10 的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式。在 [11], ，Liu 引入了一些 $\Gamma^0(2)$ 和 $\Gamma_0(2)$ 模形式，并得到了若干有趣的反常抵消公式。本文还将 Liu 模形式用 E_8丛扭曲，并为 12 维自旋流形得到权 14 和 10 的 $\Gamma^0(2)$ 和 $\Gamma_0(2)$ 模形式。借助这些模形式，我们得到了若干新的特征形式反常抵消公式。

2010 Mathematics Subject Classification: 58C20；57R20；53C80。
Key words and phrases: 模形式；反常抵消公式； E_8 丛。

本文结构如下：第 2 节中，我们将 Chen-Han-Zhang $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式用 E_8 丛扭曲，为 14 维和 10 维 $spin^c$ 流形得到权 14 和 10 的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式，并得到若干特征形式的反常抵消公式。第 3 节中，我们将 Liu 模形式用 E_8 丛扭曲，为 12 维自旋流形得到权 14 和 10 的 $\Gamma^0(2)$ 和 $\Gamma_0(2)$ 模形式。借助这些模形式，我们得到了若干新的特征形式反常抵消公式。

2. Anomaly cancellation formulas for 14 and 10-dimensional $spin^c$manifolds

关于仿射 E_8 的基本表示理论，可参见 [8] 的第 1 节。此处略去。对于主 E_8 丛 P_i, $i=1,2$，考虑关联丛$\mathcal{V}_i=\sum_{k=0}^{\infty}(P_i\times_{\rho_k}V_k)q^k\in K(M)[[q]]$. 令 $W_i=P_i\times_{\rho_1}V_1$。设 M 是一个 14 维自旋复流形， L 是与 M 上给定的自旋复结构相关联的复线丛。我们还将 L 视为一个实向量丛，记作 L_R。

用 $c=c_1(L)=2\pi\sqrt{-1}u$ 表示 L 的第一陈类。令 $\varphi(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$，其中 $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ 和 $\tau\in H$ 为上半平面。我们回顾四个雅可比 theta 函数定义如下（参见 [2]）：

$$\theta(v,\tau)=2q^{\frac{1}{8}}\sin(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.1}$$

$$\theta_1(v,\tau)=2q^{\frac{1}{8}}\cos(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.2}$$

$$\theta_2(v,\tau)=\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.3}$$

$$\theta_3(v,\tau)=\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.4}$$

由 [8], 中的 (2.3)-(2.7) 可知，存在形式二形式 y_l^i、$1\le l\le 8$、$i=1,2$，使得

$$\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)=\frac{1}{2}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right), \tag{2.5}$$

and

$$\sum_{l=1}^{8}(2\pi\sqrt{-1}y_l^i)^2=-\frac{1}{30}c_2(W_i), \tag{2.6}$$

其中 $c_2(W_i)$ 表示 W_i 的第二陈类。令 $E_2(\tau)$ 为满足以下条件的 Eisenstein 级数:

$$E_2(\tau+1)=E_2(\tau),\ E_2(-\frac{1}{\tau})=\tau^2E_2(\tau)-\frac{6\sqrt{-1}\tau}{\pi}, \tag{2.7}$$

and

$$E_2(\tau)=1-24q-72q^2+O(q^3). \tag{2.8}$$

设 $A:=p_1(M)-p_1(L_R)+\frac{1}{30}(c_2(W_i)+c_2(W_j))$, 其中 $p_1(M)$ $p_1(L_R)$ 表示 M 和 L_R 的第一 Pontryagin 类。设

$$Q(M,P_i,P_j,\tau)=\Bigg\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right] \cdot\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\Big\}^{(14)}. \tag{2.9}$$

Then

(2.10)

$$Q(M,P_i,P_j,\tau)=\Bigg\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A}\left(\prod_{j=1}^{7}\frac{x_j\theta'(0,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\right)\frac{\sqrt{-1}\theta(u,\tau)}{\theta_1(0,\tau)\theta_2(0,\tau)\theta_3(0,\tau)}$$

$$\frac{1}{4}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^j,\tau)\right)\Bigg\}^{(14)},$$

其中 $\pm2\pi\sqrt{-1}x_j, 1\le j\le 7$表示 T_CM的陈根。θ函数满足以下变换律（参见 [2] ）:

$$\theta(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta(v,\tau),\ \theta(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta(\tau v,\tau); \tag{2.11}$$

$$\theta_1(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_1(v,\tau),\ \theta_1(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_2(\tau v,\tau); \tag{2.12}$$

$$\theta_2(v,\tau+1)=\theta_3(v,\tau),\ \theta_2(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_1(\tau v,\tau); \tag{2.13}$$

$$\theta_3(v,\tau+1)=\theta_2(v,\tau),\ \theta_3(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_3(\tau v,\tau), \tag{2.14}$$

$$\theta'(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta'(v,\tau),\ \theta'(0,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\tau\theta'(0,\tau). \tag{2.15}$$

定义 2.1. 设 Γ是 SL_2(Z)的一个子群。模形式是定义在 H 上的全纯函数$f(\tau)$，满足

$$f(g\tau) := f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi(g)(c\tau+d)^k f(\tau),\ \forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \tag{2.16}$$

其中 $\chi:\ \Gamma \to \mathbb{C}^\star$ 是 Γ 的特征标。 k 称为 f 的权。

由 (2.7) 和 (2.11)-(2.15)，可得

引理 2.2. $Q(M, P_i, P_j, \tau)$ 是定义在 SL_2(Z) 上的模形式，权为 14。

By

$$\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i) = 1 + (248 - c_2(W_i) + \cdots)q + \cdots, \tag{2.17}$$

结合 (2.8)，通过展开 q-级数可得:

(2.18)

$$\begin{aligned}
&e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(\widetilde{T_C M}) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\\
&= (e^{\frac{1}{24}A} - e^{\frac{1}{24}A}Aq + O(q^2))\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[(1 + q\widetilde{T_C M} + O(q^2))(1 - q\widetilde{L_C} + O(q^2))\right]\\
&\cdot (1 - 16q + O(q^2))(1 + \mathrm{ch}(W_i)q + O(q^2))(1 + \mathrm{ch}(W_j)q + O(q^2))\\
&= e^{\frac{1}{24}A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2}) + \Big[e^{\frac{1}{24}A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_C M} - \widetilde{L_C} - 16 + W_i + W_j)\\
&- e^{\frac{1}{24}A}A\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\Big]q + O(q^2).
\end{aligned}$$

众所周知，定义在 SL_2(Z) 上的模形式可以表示为 Eisenstein 级数 $E_4(\tau)$ 和 $E_6(\tau)$ 的多项式，其中

$$E_4(\tau) = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + \cdots, \tag{2.19}$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 + \cdots. \tag{2.20}$$

它们的权分别为 4 和 6。由于 $Q(M, P_i, P_j, \tau)$ 是SL_2(Z)上的权 14 模形式，因此它必定是.....的倍数

$$E_4(\tau)^2 E_6(\tau) = 1 - 24q - 196632q^2 + \cdots. \tag{2.21}$$

So

$$\begin{aligned}
&\left\{e^{\frac{1}{24}A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_C M} - \widetilde{L_C} - 16 + W_i + W_j) - e^{\frac{1}{24}A}A\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}\\
&= -24\left\{e^{\frac{1}{24}A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

由式 (2.22)，我们有

定理 2.3。存在以下等式:

(2.23)

$$\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}+8+W_i+W_j)\right\}^{(14)}$$
$$=A\left\{e^{\frac{1}{24}A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})-\frac{e^{\frac{1}{24}A}-1}{A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}+8+W_i+W_j)\right\}^{(10)}.$$

推论 2.4. 当 $A=0$ 时，我们有

$$\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-16+W_i+W_j)\right\}^{(14)}=-24\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}. \tag{2.24}$$

当 M 是一个 14 维 $spin^c$ 流形时，$\mathrm{Ind}D^c\otimes(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-16+W_i+W_j)_+$ 是 24 的倍数。

令 $A_1:=p_1(M)-p_1(L_R)+\frac{1}{30}c_2(W_i)$。令

$$Q(M,P_i,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\cdot\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\right\}^{(14)}. \tag{2.25}$$

Then

$$Q(M,P_i,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\left(\prod_{j=1}^{7}\frac{x_j\theta'(0,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\right)\frac{\sqrt{-1}\theta(u,\tau)}{\theta_1(0,\tau)\theta_2(0,\tau)\theta_3(0,\tau)}\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\right\}^{(14)}. \tag{2.26}$$

与引理 2.2 类似，我们有

引理 2.5. $Q(M,P_i,\tau)$ 是定义在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的权重 10 模形式。

与（2.18）类似，我们有

$$e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i) \tag{2.27}$$
$$=e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})+\left[e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-8+W_i)\right.$$
$$\left.-e^{\frac{1}{24}A_1}A_1\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right]q+O(q^2).$$

由于 $Q(M,P_i,\tau)$ 是定义在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的权重 10 模形式，因此它必定是以下形式的倍数

$$E_4(\tau)E_6(\tau)=1-264q-135432q^2+\cdots. \tag{2.28}$$

So

$$\begin{aligned}&\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-8+W_i)-e^{\frac{1}{24}A_1}A_1\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}\\&=-264\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

定理 2.6. 有如下等式:

(2.30)

$$\begin{aligned}&\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}+256+W_i)\right\}^{(14)}\\&=A_1\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})-\frac{e^{\frac{1}{24}A_1}-1}{A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}+256+W_i)\right\}^{(10)}.\end{aligned}$$

推论 2.7. 当 $A_1=0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}&\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-8+W_i)\right\}^{(14)}\\&=-264\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

当 M 是一个 14 维 $spin^c$ 流形时，则 $\mathrm{Ind}D^c\otimes(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-8+W_i)_+$ 是 264 的倍数。

若 M 是一个 10 维 $spin^c$ 流形，我们令

$$\begin{aligned}R(M,P_i,\tau)=&\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\right.\\&\left.\cdot\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\right\}^{(10)}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Then

$$\begin{aligned}Q(M,P_i,\tau)=&\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\left(\prod_{j=1}^{5}\frac{x_j\theta'(0,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\right)\frac{\sqrt{-1}\theta(u,\tau)}{\theta_1(0,\tau)\theta_2(0,\tau)\theta_3(0,\tau)}\right.\\&\left.\frac{1}{2}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\right\}^{(10)}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

与引理 2.2 类似，我们有

引理 2.8. $R(M,P_i,\tau)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的模形式，权为 8。

根据 (2.27) 和引理 2.8，它必定是下式的倍数：

$$E_4(\tau)^2 = 1 + 480q + 61920q^2 + \cdots . \tag{2.34}$$

So

$$\begin{aligned}&\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C} - 8 + W_i) - e^{\frac{1}{24}A_1}A_1\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(10)}\\ &= 480\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(10)}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

定理 2.9。存在如下等式：

(2.36)

$$\begin{aligned}&\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C} - 488 + W_i)\right\}^{(10)}\\ &= A_1\left\{e^{\frac{1}{24}A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2}) - \frac{e^{\frac{1}{24}A_1}-1}{A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C} - 488 + W_i)\right\}^{(6)}.\end{aligned}$$

推论 2.10。当 $A_1 = 0$ 时，我们有

$$\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C} + W_i)\right\}^{(10)} = 488\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(10)}.$$

当 M 是一个 10 维 $spin^c$ 流形时，$\mathrm{Ind}D^c \otimes (T_CM - L_C + W_i)_+$ 是 488 的倍数。

下文中，我们考虑 $Q(M, P_i, P_j, \tau)$ $Q(M, P_i, \tau)$、$R(M, P_i, \tau)$ 的 q 展开式中的 q^2 项。令 $\overline{W_i} = P_i \times_{\rho_2} V_2$。假设 $A = 0$，则

(2.37)

$$\begin{aligned}&e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\\ &= \widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[1 + qB_1 + q^2B_2 + O(q^3)\right]\\ &\cdot(1 - 16q + 104q^2))(1 + \mathrm{ch}(W_i)q + q^2\mathrm{ch}(\overline{W_i}) + O(q^3))(1 + \mathrm{ch}(W_j)q + q^2\mathrm{ch}(\overline{W_j}) + O(q^3))\\ &= \widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2}) + \left[\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C} - 16 + W_i + W_j)\right]q\\ &+ \left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})(\mathrm{ch}(\overline{W_j}) + \mathrm{ch}(\overline{W_i}) + \mathrm{ch}(W_i)\mathrm{ch}(W_j) - 16\mathrm{ch}(W_j) - 16\mathrm{ch}(W_i) + 104\right.\\ &\left.+B_1\wedge[\mathrm{ch}(W_j) + \mathrm{ch}(W_i) - 16] + B_2)\right\}q^2 + O(q^3).\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}B_1 &= \widetilde{T_CM} - \widetilde{L_C},\\ B_2 &= \wedge^2\widetilde{L_C} - \widetilde{L_C} - \widetilde{T_CM}\otimes\widetilde{L_C} + S^2\widetilde{T_CM} + \widetilde{T_CM}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

由（2.21）和（2.37），可得

定理 2.11。当 $A=0$ 时，我们有

(2.39)

$$\begin{aligned}&\Big\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})(\mathrm{ch}(\overline{W_j})+\mathrm{ch}(\overline{W_i})+\mathrm{ch}(W_i)\mathrm{ch}(W_j)-16\mathrm{ch}(W_j)-16\mathrm{ch}(W_i)+104\\&+B_1\wedge[\mathrm{ch}(W_j)+\mathrm{ch}(W_i)-16]+B_2)\Big\}^{(14)}\\&=-196632\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}.\end{aligned}$$

假设 $A_1=0$，则

$$\begin{aligned}(2.40)\qquad &e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_1}\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^m}(\widetilde{L_C})\right]\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\\&=\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}\left[1+qB_1+q^2B_2+O(q^3)\right]\\&\cdot(1-8q+20q^2))(1+\mathrm{ch}(W_i)q+q^2\mathrm{ch}(\overline{W_i})+O(q^3)))\\&=\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})+\left[\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}-\widetilde{L_C}-8+W_i)\right]q\\&+\Big\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})(20+\mathrm{ch}(\overline{W_i})-8\mathrm{ch}(W_i)\\&+B_1\wedge[\mathrm{ch}(W_i)-8]+B_2)\Big\}q^2+O(q^3).\end{aligned}$$

由 (2.28) 和 (2.40)，可得

定理 2.12。当 $A_1=0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}(2.41)\qquad &\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})(20+\mathrm{ch}(\overline{W_i})-8\mathrm{ch}(W_i)+B_1\wedge[\mathrm{ch}(W_i)-8]+B_2)\right\}^{(14)}\\&=-135432\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(14)}.\end{aligned}$$

类似地，我们有：

定理 2.13。当 $A_1=0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}(2.42)\qquad &\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})(20+\mathrm{ch}(\overline{W_i})-8\mathrm{ch}(W_i)+B_1\wedge[\mathrm{ch}(W_i)-8]+B_2)\right\}^{(10)}\\&=61920\left\{\widehat{A}(TX)\exp(\frac{c}{2})\right\}^{(10)}.\end{aligned}$$

3. Anomaly cancellation formulas for 12-dimensional manifolds

本节中，设 M为一个 12 维流形。令 $\widehat{L}(TM,\nabla^{TM})$ 为由 ([13]) 定义的 Hirzebruch 特征形式

$$\widehat{L}(TM,\nabla^{TM})=\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{TM}}{\tanh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}R^{TM})}\right).$$

令 $A_2:=\frac{1}{30}(c_2(W_i)+c_2(W_j))$。令

$$Q_1(M,P_i,P_j,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_2}\widehat{L}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{q^m}(\widetilde{T_CM})\right]\right.$$
$$\left.\cdot\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\right\}^{(12)},\tag{3.1}$$

$$Q_2(M,P_i,P_j,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_2}\widehat{A}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CM})\right]\right.$$
$$\left.\cdot\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\right\}^{(12)},\tag{3.2}$$

Then

$$Q_1(M,P_i,P_j,\tau)=2^6\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_2}\left(\prod_{j=1}^{6}\frac{x_j\theta'(0,\tau)\theta_1(x_j,\tau)}{\theta(x_j,\tau)\theta_1(0,\tau)}\right)\right.$$
$$\left.\frac{1}{4}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^j,\tau)\right)\right\}^{(12)},\tag{3.3}$$

and

$$Q_2(M,P_i,P_j,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_2}\left(\prod_{j=1}^{6}\frac{x_j\theta'(0,\tau)\theta_2(x_j,\tau)}{\theta(x_j,\tau)\theta_2(0,\tau)}\right)\right.$$
$$\left.\frac{1}{4}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^j,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^j,\tau)\right)\right\}^{(12)},\tag{3.4}$$

Let

$$\Gamma_0(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$
$$\Gamma^0(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$

是 $SL_2(\mathbf{Z})$ 的两个模子群。记作 $\theta_j=\theta_j(0,\tau)\ \ 1\le j\le 3$, 我们引入四个显式模形式（[11]）,

$$\delta_1(\tau)=\frac{1}{8}(\theta_2^4+\theta_3^4),\ \varepsilon_1(\tau)=\frac{1}{16}\theta_2^4\theta_3^4,$$
$$\delta_2(\tau)=-\frac{1}{8}(\theta_1^4+\theta_3^4),\ \varepsilon_2(\tau)=\frac{1}{16}\theta_1^4\theta_3^4.\tag{3.5}$$

它们在 $q^{\frac{1}{2}}$ 中有如下傅里叶展开:

$$\begin{aligned}(3.6)\qquad &\delta_1(\tau)=\frac{1}{4}+6q+6q^2+\cdots,\ \varepsilon_1(\tau)=\frac{1}{16}-q+7q^2+\cdots,\\ &8\delta_2(\tau)=-1-24q^{\frac{1}{2}}-24q-96q^{\frac{3}{2}}+\cdots,\ \varepsilon_2(\tau)=q^{\frac{1}{2}}+8q+28q^{\frac{3}{2}}+\cdots.\end{aligned}$$

它们还满足以下变换律,

$$(3.7)\qquad \delta_2(-\frac{1}{\tau})=\tau^2\delta_1(\tau),\ \varepsilon_2(-\frac{1}{\tau})=\tau^4\varepsilon_1(\tau),$$

引理 3.1. ([11])$\delta_1(\tau)$（分别为 $\varepsilon_1(\tau)$）是关于 $\Gamma_0(2)$ 的权 2（分别为权 4）模形式，$\delta_2(\tau)$（分别为 $\varepsilon_2(\tau)$）是关于 $\Gamma^0(2)$ 的权 2（分别为权 4）模形式，而且 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}(\Gamma^0(2))=\mathrm{R}[\delta_2(\tau)\ \varepsilon_2(\tau)]$。

由 (2.11)-(2.15) 和 (2.7)，我们有

引理 3.2. $Q_1(M,P_i,P_j,\tau)$ 是关于 $\Gamma_0(2)$ 的权 14 模形式，而 $Q_2(M,P_i,P_j,\tau)$ 是关于 $\Gamma^0(2)$ 的权 14 模形式。此外，以下恒等式成立,

$$(3.8)\qquad Q_1(M,P_i,P_j,-\frac{1}{\tau})=2^6\tau^{14}Q_2(M,P_i,P_j,\tau).$$

定理 3.3. 我们有以下等式:

(3.9)

$$\begin{aligned}&32\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{L}(TM)\right\}^{(12)}=\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[2240+309\widetilde{T_CM}+24(\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i+W_j)\right.\\ &\left.+\widetilde{T_CM}\otimes\widetilde{T_CM}+\widetilde{T_CM}\otimes(W_i+W_j)+\wedge^3\widetilde{T_CM}]-\frac{1}{24}e^{\frac{1}{24}A_2}A_2\widehat{A}(TX)\mathrm{ch}(576+24\widetilde{T_CM})\right\}^{(12)}.\end{aligned}$$

证明。由引理 3.1 和 3.2，可得

$$(3.10)\qquad Q_2(M,P_i,P_j,\tau)=h_0(8\delta_2)^7+h_1(8\delta_2)^5\varepsilon_2+h_2(8\delta_2)^3\varepsilon_2^2+h_3(8\delta_2)\varepsilon_2^3,$$

$$(3.11)\qquad Q_1(M,P_i,P_j,\tau)=2^6[h_0(8\delta_1)^7+h_1(8\delta_1)^5\varepsilon_1+h_2(8\delta_1)^3\varepsilon_1^2+h_3(8\delta_1)\varepsilon_1^3],$$

其中每个 h_r、 $0 \le r \le 3$ 都是 x 处体积形式的实数倍。

(3.12)

$$
\begin{aligned}
& e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_2}\widehat{A}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CM})\right]\cdot\varphi(\tau)^{16}\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\mathrm{ch}(\mathcal{V}_j)\\
&=(e^{\frac{1}{24}A_2}-e^{\frac{1}{24}A_2}A_2q+O(q^2))\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}\left[(1+q\widetilde{T_CM}+O(q^2))\right.\\
&\left.\otimes(1-q^{\frac{1}{2}}\widetilde{T_CM}+q\wedge^2\widetilde{T_CM}-q^{\frac{3}{2}}\wedge^3\widetilde{T_CM}+O(q^2))\otimes(1-q^{\frac{3}{2}}\widetilde{T_CM})\right]\\
&\cdot(1-16q+O(q^2))(1+\mathrm{ch}(W_i)q+O(q^2))(1+\mathrm{ch}(W_j)q+O(q^2))\\
&=e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)-q^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TX)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM})\\
&+q[e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}+\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i+W_j-16)-e^{\frac{1}{24}A_2}A_2\widehat{A}(TM)]\\
&+q^{\frac{3}{2}}\left[-e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TX)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}\otimes\widetilde{T_CM}+\widetilde{T_CM}\otimes(W_i+W_j-16)+\widetilde{T_CM}+\wedge^3\widetilde{T_CM})\right.\\
&\left.+e^{\frac{1}{24}A_2}A_2\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM})\right]+O(q^2).
\end{aligned}
$$

由 (3.10)、(3.12) 和 (3.6)，比较 (3.10) 中的常数项、 $q^{\frac{1}{2}}$、 q、 $q^{\frac{3}{2}}$ 项，可得

(3.13)

$$
\begin{aligned}
h_0&=-\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\right\}^{(12)}\\
h_1&=\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}+168)\right\}^{(12)}\\
h_2&=\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(-9224-129\widetilde{T_CM}-\wedge^2\widetilde{T_CM}-W_i-W_j)+e^{\frac{1}{24}A_2}A_2\widehat{A}(TM)\right\}^{(12)}\\
h_3&=\left\{e^{\frac{1}{24}A_2}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}\otimes\widetilde{T_CM}+\widetilde{T_CM}\otimes(W_i+W_j-16)+\widetilde{T_CM}+\wedge^3\widetilde{T_CM}\right.\\
&+508704-6868(\widetilde{T_CM}+168)+88\times9224+88\times129\widetilde{T_CM}\\
&\left.+88\wedge^2\widetilde{T_CM}+88W_i+88W_j)-e^{\frac{1}{24}A_2}A_2\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}+88)\right\}^{(12)}.
\end{aligned}
$$

由 (3.13)、(3.11) 和 (3.6)，比较 (3.11) 中的常数项，可得定理 3.3。□

推论 3.4。当 $A_2=0$ 时，有如下等式:

$$
\begin{aligned}
32\left\{\widehat{L}(TM)\right\}^{(12)}&=\left\{\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[2240+309\widetilde{T_CM}+24(\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i+W_j)\right.\\
&\left.+\widetilde{T_CM}\otimes\widetilde{T_CM}+\widetilde{T_CM}\otimes(W_i+W_j)+\wedge^3\widetilde{T_CM}]\right\}^{(12)}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

当 M 为自旋时，式 (3.14) 右侧的示性数是 32 的倍数。

设 $A_3 := \frac{1}{30}c_2(W_i)$。设

$$Q_1(M,P_i,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_3}\widehat{L}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{q^m}(\widetilde{T_CM})\right]\cdot\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\right\}^{(12)}, \tag{3.15}$$

$$Q_2(M,P_i,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_3}\widehat{A}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CM})\right]\cdot\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\right\}^{(12)}. \tag{3.16}$$

Then

$$Q_1(M,P_i,\tau)=2^6\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_3}\left(\prod_{j=1}^{6}\frac{x_j\theta'(0,\tau)\theta_1(x_j,\tau)}{\theta(x_j,\tau)\theta_1(0,\tau)}\right)\frac{1}{2}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\right\}^{(12)}, \tag{3.17}$$

and

$$Q_2(M,P_i,\tau)=\left\{e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_3}\left(\prod_{j=1}^{6}\frac{x_j\theta'(0,\tau)\theta_2(x_j,\tau)}{\theta(x_j,\tau)\theta_2(0,\tau)}\right)\frac{1}{2}\left(\prod_{l=1}^{8}\theta_1(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_2(y_l^i,\tau)+\prod_{l=1}^{8}\theta_3(y_l^i,\tau)\right)\right\}^{(12)}. \tag{3.18}$$

我们有

引理 3.5. $Q_1(M,P_i,\tau)$ 是 $\Gamma_0(2)$ 上的权重 10 模形式，而 $Q_2(M,P_i,\tau)$ 是 $\Gamma^0(2)$ 上的权重 10 模形式。此外，以下恒等式成立：

$$Q_1(M,P_i,-\frac{1}{\tau})=2^6\tau^{10}Q_2(M,P_i,\tau). \tag{3.19}$$

定理 3.6. 我们有以下等式：

$$\left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{L}(TM)\right\}^{(12)}=-\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[17\widetilde{T_CM}+\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i+128]\right\}^{(12)}+\frac{1}{60}\left\{c_2(W_i)e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TX)\right\}^{(12)}. \tag{3.20}$$

证明。由引理 3.1 和 3.5，得

$$Q_2(M,P_i,\tau)=h_0'(8\delta_2)^5+h_1'(8\delta_2)^3\varepsilon_2+h_2'(8\delta_2)\varepsilon_2^2, \tag{3.21}$$

$$Q_1(M,P_i,\tau)=2^6[h_0'(8\delta_1)^5+h_1'(8\delta_1)^3\varepsilon_1+h_2'(8\delta_1)\varepsilon_1^2], \tag{3.22}$$

其中每个 h'_r、 $0 \le r \le 2$ 都是 x 处体积形式的实数倍。

$$
\begin{aligned}
(3.23)\quad & e^{\frac{1}{24}E_2(\tau)A_3}\widehat{A}(TM,\nabla^{TM})\mathrm{ch}\left[\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(\widetilde{T_CM})\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\wedge_{-q^{m-\frac{1}{2}}}(\widetilde{T_CM})\right]\cdot\varphi(\tau)^8\mathrm{ch}(\mathcal{V}_i)\\
&=(e^{\frac{1}{24}A_3}-e^{\frac{1}{24}A_3}A_3q+O(q^2))\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}\Big[(1+q\widetilde{T_CM}+O(q^2))\\
&\otimes(1-q^{\frac{1}{2}}\widetilde{T_CM}+q\wedge^2\widetilde{T_CM}+O(q^{\frac{3}{2}}))\\
&\cdot(1-8q+O(q^2))(1+\mathrm{ch}(W_i)q+O(q^2))\\
&=e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)-q^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM})\\
&+q[e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}+\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i-8)-e^{\frac{1}{24}A_3}A_3\widehat{A}(TM)]+O(q^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}
$$

根据（3.21）、（3.23）和（3.6），比较（3.21）中的常数项以及$q^{\frac{1}{2}}$、q项，得到

$$
\begin{aligned}
(3.24)\quad & h'_0=-\left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\right\}^{(12)}\\
& h'_1=\left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM}+120)\right\}^{(12)}\\
& h'_2=\left\{-e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(3712+81\widetilde{T_CM}+\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i)+e^{\frac{1}{24}A_3}A_3\widehat{A}(TM)\right\}^{(12)}
\end{aligned}
$$

根据（3.22）、（3.24）和（3.6），比较（3.22）中的常数项，得到定理 3.6。□

推论 3.7。当 c_2（W_i） $=0$时，有如下等式：

$$
-2\left\{\widehat{L}(TM)\right\}^{(12)}=\left\{\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[17\widetilde{T_CM}+\wedge^2\widetilde{T_CM}+W_i+128]\right\}^{(12)}.
$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$当 M是自旋流形时，Ind($D\otimes$（$17T_CM+\wedge^2T_CM+W_i+128$）$_+$)是 2 的倍数。

比较（3.22）中 q 的系数，根据（3.24），有

定理 3.8。我们有以下等式：

$$
\begin{aligned}
(3.25)\quad & \left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{L}(TM)[-A_3+2\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM})-8+\mathrm{ch}(W_i)]\right\}^{(12)}\\
&=\left\{e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[2116\widetilde{T_CM}+4\wedge^2\widetilde{T_CM}+4W_i-15872]\right\}^{(12)}\\
&-\frac{2}{15}\left\{c_2(W_i)e^{\frac{1}{24}A_3}\widehat{A}(TX)\right\}^{(12)}.
\end{aligned}
$$

推论 3.9。当 $c_2(W_i)=0$ 时，我们有以下等式：

$$\begin{aligned}(3.26)\qquad &\left\{\widehat{L}(TM)[2\mathrm{ch}(\widetilde{T_CM})-8+\mathrm{ch}(W_i)]\right\}^{(12)}\\ &=\left\{\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}[2116\widetilde{T_CM}+4\wedge^2\widetilde{T_CM}+4W_i-15872]\right\}^{(12)}.\end{aligned}$$

注：在 [4], Chen 和 Han 构造了奇数维流形上的一些模形式。我们可以通过用 E_8 丛扭曲 Chen-Han 模形式，构造奇数维流形上的一些新模形式。

4. Acknowledgements

作者的研究部分得到了国家自然科学基金项目（编号：11771070）的资助。第一作者谨向 F. Han 教授致谢，感谢他给予的宝贵讨论。作者还感谢审稿人细致审阅稿件并提出有益意见。

References

[1] L. Alvarez-Gaum´e, E. Witten, 引力反常, Nucl. Phys. B234 (1983), 269-330.[2] K. Chandrasekharan,《椭圆函数》，Spinger-Verlag, 1985.[3] Q. Chen, F. Han, 示性数的模不变性与扭曲反常抵消, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 1463-1493.[4] Q. Chen, F. Han, 椭圆亏格、转移与环空间陈-西蒙斯形式, Comm. Anal. Geom. 17 (2009), no. 1, 73-106.[5] Q. Chen, F. Han, W. Zhang, 广义 Witten 亏格与消失定理. J. Differential Geom. 88(2011), no. 1, 1-40.[6] F. Han, R. Huang, K. Liu and W. Zhang, 三次型、反常抵消与模性. Adv. Math. 394(2022), Paper No. 108023,46pp.[7] F. Han, K. Liu and W. Zhang, 模形式与广义反常抵消公式, J. Geom. Phys, 62 (2012) 1038-1053.[8] F. Han, K. Liu and W. Zhang, 反常抵消与模性，II：$E_8\times E_8$ 情形. Sci. China Math. 60(2017), no. 6, 985-994.[9] F. Han, W. Zhang, 自旋^c-流形与椭圆亏格, C. R. Acad. Sci. Paris Serie I., 336 (2003), 1011-1014.[10] F. Han, W. Zhang, 模不变性、示性数与 eta 不变量, J. Diff. Geom. 67 (2004), 257-288.[11] K. Liu, 模不变性与示性数. Commu. Math. Phys. 174 (1995), 29-42.[12] K. Liu, 关于椭圆亏格与 θ 函数. Topology 35 (1996), no. 3, 617–640.[13] W. Zhang,《陈-韦伊理论与 Witten 变形讲义》。南开数学讲义第 4 卷，World Scientific, Singapore, 2001.

1.Yong Wang，通讯作者，东北师范大学数学与统计学院，中国吉林省长春市，130024。电子邮箱：wangy581@nenu.edu.cn

2. Yuchen Yang，东北师范大学数学与统计学院，中国吉林省长春市 130024，电子邮箱：yangyc580@nenu.edu.cn