arXiv:2305.00791v1 [math-ph] 1 May 2023

# 通过多元超几何函数的部分合流极限构造量子可积粒子系统的波函数

J.F. VAN DIEJEN 和 E. EMSIZ

Abstract. 从 Heckman 和 Opdam 的超八面体多元超几何函数（与 $BC_n$ 根系相关）出发，我们通过 Oshima 和 Shimeno 意义下的部分合流极限，得到具有单侧边界扰动的 P¨oschl-Teller 型 Toda 链以及处于 Morse 势中的双曲 Calogero-Sutherland 系统的本征值方程的解。借助 Heckman-Opdam 超八面体超几何函数的相应退化（双谱对偶）差分方程，可以推 deduced 出所讨论的本征解关于谱变量是全纯的。

## 1. 引言

本文构造了两类基本量子可积粒子模型的本征值方程的解析解，即带有 P¨oschl-Teller 型单侧边界扰动的量子 Toda 哈密顿量

$$L_x^{\mathrm{t}} = \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_{1\leq j<n} a_j e^{-x_j+x_{j+1}} - a_{n-1}e^{-x_{n-1}-x_n} - \frac{\frac{1}{4}g_S(g_S+2g_L-1)}{\sinh^2\frac{1}{2}(x_n)} - \frac{g_L(g_L-1)}{\sinh^2(x_n)} \tag{1.1}$$

以及处于 Morse 势中的双曲量子 Calogero-Sutherland 哈密顿量

$$L_x^{\mathrm{cs}} = \sum_{1\leq j\leq n}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - g_S e^{-x_j} - a_n e^{-2x_j}\Big) - \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{\frac{1}{2}g_M(g_M-1)}{\sinh^2\frac{1}{2}(x_j-x_k)}. \tag{1.2}$$

在相应的定态 Schr¨odinger 方程中，变量 $x_1$、.....、$x_n$表示沿直线排列的粒子位置，而（可能为复数的）常数$g_S$、$g_M$、$g_L$和 $a_1$、.....、$a_n$表示调节相互作用强度的耦合参数。

Toda 哈密顿量 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 最初由 Inozemtsev [I89], 在经典力学层面引入，他为相应的

*Date*：2018年1月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：35Q40；次要分类号：33C67、35C05、35P10、39A14、81Q80、81R12。*Key words and phrases.* 量子可积粒子模型、定态 Schr¨odinger 方程、解析解、谱变量中的差分方程、Calogero-Sutherland 系统、Toda 链、P¨oschl-Teller 势、Morse 势、多元（合流）超几何函数、Whittaker 函数、超八面体对称性。本研究部分得到 *Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico(FONDECYT)* 资助，基金编号为 # 1170179 和 # 1181046。

哈密顿流构造了 Lax 对表示。关于其完全可积性的问题，在杨-巴克斯特方程框架下分别于文献 [KJC95, K97]（经典层面）和文献 [T98]（量子层面）中进行了探讨。Oshima [O07], 找到了生成 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 完备对易量子积分代数的显式偏微分算子，而文献 [GLO11] 则以积分表示的形式提出了本征解的一个猜想公式。

对于特定耦合情形，M. Adler 通过 Lax 对表示研究了具有 Morse 势的 Calogero-Sutherland 哈密顿量的经典动力学，并由此确定了该粒子系统的完全可积性和散射行为。对于一般耦合情形，文献 [W84] 借助 Lax 对在经典层面推导出$L_x^{\mathrm{cs}}$ (1.2) 的完全可积性；文献 [H09] 则通过递归构造相应的对易偏微分算子，在量子层面推导出其完全可积性。对于 $L_x^{\mathrm{cs}}$ (1.2)，当 Morse 势允许粒子束缚时，其离散谱中的本征态便与之相关；文献 [IM86] 构造了接近基态的本征态，文献 [H09] 则构造了任意激发态。事实上，后一项工作指出，这些本征函数可以理解为经典贝塞尔多项式的多变量推广。

尽管关于 Toda 和 Calogero-Sutherland 可积族这两类著名体系的研究已取得诸多进展，但如何在任意谱值下以数学上严格的方式构造其本征解，这一难题至今已持续三十余年，唯有微扰参数为零的标准情形例外（即当 $g_S = g_L = a_n = 0$ 时）。更具体地说，对于 $g_S = g_L = 0$， $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 的本征函数是与根系 $D_n$ [相关、研究充分的多元惠特克函数 K79, H82, GW86, BO11, GLO12, R12], ；而对于 $g_S = a_n = 0$， $L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2) 的本征函数则可用与根系 $A_{n-1}$ [相关、著名的 Heckman-Opdam 多元超几何函数来表示 HS94, S99, O00, HR15]。本文的主要目标是在微扰参数非零的情形 $g_S, g_L, a_n$ 下，构造相应的本征值方程解，并阐明 P¨oschl-Teller 势和 Morse 势的存在如何影响表示波函数的多元（合流）超几何函数的结构。简言之，尽管所考虑的微扰显然保留了 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 中的反射对称性以及 $L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2) 中的置换对称性，但就谱变量而言，惠特克函数的 $D_n$-对称性和超几何函数的 $A_{n-1}$-对称性，实际上源于更强的超八面体对称性的破缺；当存在微扰势时，波函数具有这种对称性，该对称性源自根系 $BC_n$。

假设 $a_j \neq 0 (j \in \{1, \ldots, n\})$ 成立后，我们将利用 $k = 1$（其中 $c_j \in \mathbb{C}$）的平移自由度 $x_k \to x_k + c_j$， ...，$j$，从现在起将这些辅助耦合常数归一化为固定值

$$a_j \equiv 2 \quad (j = 1, \ldots, n-1) \quad \text{and} \quad a_n \equiv \tfrac{1}{4} \tag{1.3}$$

（除非另有明确说明）。众所周知（例如参见文献 [IM86、I89、D95、O07] 及其中的参考文献）， $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 和 $L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2) 均可由下述与根系相关的超八面体 Calogero-Sutherland 哈密顿量退化而来，

$BC_n$ [OP83、HS94]:

$$L_x^{\mathrm{bc}} = \sum_{1\le j\le n}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\frac{1}{4}g_S(g_S+2g_L-1)}{\sinh^2\frac{1}{2}(x_j)} - \frac{g_L(g_L-1)}{\sinh^2(x_j)}\Big) \tag{1.4}$$
$$- \sum_{1\le j<k\le n}\left(\frac{\frac{1}{2}g_M(g_M-1)}{\sinh^2\frac{1}{2}(x_j+x_k)} + \frac{\frac{1}{2}g_M(g_M-1)}{\sinh^2\frac{1}{2}(x_j-x_k)}\right).$$

事实上，将位置向量 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 平移如下

$$x \to x + c\rho_M, \quad \rho_M = \sum_{1\le j\le n}(n-j)e_j \tag{1.5a}$$

并将 $g_M \to g_M^{(c)}$ 代换为

$$g_M^{(c)}(g_M^{(c)}-1) = e^c \quad (g_M^{(c)}>0), \tag{1.5b}$$

$L_x^{\mathrm{bc}}$(1.4) 的势趋于 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1)、(1.3) 在 $c\to+\infty$ 下的势。同样，坐标平移

$$x \to x + c\rho_L, \quad \rho_L = \sum_{1\le j\le n} e_j \tag{1.6a}$$

在 $L_x^{\mathrm{bc}}$(1.4) 中进行，并伴随参数代换 $g_S \to g_S^{(c)}$ 、 $g_L \to g_L^{(c)}$ 为

$$g_S^{(c)} = 2g_S \quad \text{and} \quad g_L^{(c)}(g_L^{(c)}-1) = \tfrac{e^{2c}}{16} \quad (g_L^{(c)}>0), \tag{1.6b}$$

即可恢复 $L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2)、(1.3) 在 $c\to+\infty$ 下的形式。（这里，向量 $e_1$、$\dots$、$e_n$ 指的是 $\mathbb{C}^n$ 的标准单位基。）

$L_x^{\mathrm{bc}}$(1.4) 的本征函数已知还可以用 Heckman 和 Opdam 与根系 $BC_n$ [HS94, O00] 相关联的超八面体超几何函数来表示。遵循 Oshima 和 Shimeno 最近提出的方法 [S08, OS10], ，我们将推导出， $L_x^{\mathrm{t}}$(1.1) 和 $L_x^{\mathrm{cs}}$ (1.2) 的特征解可以通过部分合流极限，从这个多元超几何函数中严格地获得；这些合流极限相当于将极限过渡 $L_x^{\mathrm{bc}} \to L_x^{\mathrm{t}}$ 和 $L_x^{\mathrm{bc}} \to L_x^{\mathrm{cs}}$ 谨慎地提升到特征解层面。对于参数化离散谱中本征态的特殊谱变量取值，超八面体超几何级数会截断并成为多元雅可比多项式 [HS94, O00, F10, HL10]。Halln̈已利用相应的极限过渡，将 $L_x^{\mathrm{bc}}$(1.4) 的雅可比多项式本征函数转化为 $L_x^{\mathrm{cs}}$ (1.2) 的多元贝塞尔多项式本征函数 [HL10] ，从而求得上述 $L_x^{\mathrm{cs}}$ [H09]的离散谱本征态。从这一角度看，本文采用的 bc $\to$cs 合流应被视为 [H09] 中极限过渡在任意谱变量情形下的推广。文献 [J06, RV04, BO05a, BO05b, RV16], 研究了略有不同的超几何合流，并确立了从双曲量子Calogero-Sutherland系统的超几何本征函数到有理量子Calogero系统的多元贝塞尔本征函数的极限过渡；文献 [RKV13] 则揭示了类型 $BC_n$ 与 $A_{n-1}$ 的 Heckman-Opdam 超几何函数之间的（对偶）极限过渡。此外，在先前的工作 [DE18] 中，我们通过一个合流极限，从 $BC_n$型 Heckman-Opdam 超几何函数中得到了一个单参数族的超八面体惠特克函数；该函数对具有 Morse型单侧边界扰动的量子 Toda 链进行对角化 [S88] 。

该超几何函数通过一个合流极限得到；这一极限结合了 bc $\to$t 合流和 bc $\to$ cs 合流。后一个惠特克函数统一了广为人知的 $B_n$ 型正交惠特克函数（例如参见 [I13, BZ17]）与 $C_n$ 型辛惠特克函数；而正如上文所强调的，我们在此得到的则是 $D_n$ 型正交惠特克函数的双参数超几何变形。

众所周知，Heckman-Opdam 超几何函数及其合流 Whittaker 类似函数满足一组在谱变量中的双谱对偶 [DG86, G01] 差分方程 [R90b, C97, C00, KL01, B03, HR12, S13, K13, BC14, DE15]。这些差分方程本身可解释为量子可积粒子系统的本征值方程，该系统由有理型 Macdonald-Ruijsenaars 型差分算子刻画 [R87, D95]。换言之，所讨论的多变量特殊函数在交换位置变量与谱变量的作用后，会对角化这些有理型 Macdonald-Ruijsenaars 型量子系统（另见 [R88, R90a, FK09, P12, P13, F13, FG14, FM17] ，了解经典力学领域中相应的对偶性）。在这一引人注目的双谱对偶性图景中，部分超几何合流会为 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1)和$L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2)的特征解导出相应的对偶差分方程。借助这些差分方程，我们证实， $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1)和 $L_x^{\mathrm{cs}}$ (1.2)的特征解实际上关于谱变量是全纯的。

本文的结构安排如下。第 2 节介绍 $L_x^{\mathrm{t}}$ (1.1) 和 $L_x^{\mathrm{cs}}$(1.2) 的特征值方程的 Harish-Chandra 解。第 3 节通过对适当归一化的 Harish-Chandra 级数在带符号置换的超八面体群作用下进行对称化，构造相应 Schr¨odinger 算子的 $n$ 粒子波函数。第 4 节为所讨论的波函数建立一组关于谱变量的差分方程，第 5 节则说明这些差分方程如何揭示波函数关于谱变量是整函数。为了便于阅读，Harish-Chandra 级数的构造，以及有关特征解层面的 bc $\to$t 和 bc $\to$cs 合流的大部分细节，均放在文末的两个技术附录中。

## 2. Harish-Chandra series solution of the eigenvalue equation

For $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{C}^n$, let

$$\langle \xi, x \rangle := \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n,$$

并记 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ 为

$$\nu \geq 0 \Leftrightarrow \nu_1 + \cdots + \nu_k \geq 0 \text{ for } k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

且当 $\nu \geq 0$ 和 $\nu \neq 0$ 时， $\nu > 0$ 。

给定 r $\in$ {bc、t、cs}，我们定义相应的 Harish-Chandra级数

$$\phi_\xi^{\mathrm{r}}(x; g) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu^{\mathrm{r}}(\xi; g) e^{\langle \xi - \nu, x \rangle}, \tag{2.2a}$$

其展开系数 $a_\nu^{\mathrm{r}}(\xi;\ g)$ 由递推关系确定

$$\langle \nu - 2\xi, \nu \rangle a_\nu^{\mathrm{r}}(\xi; g) = \sum_{\substack{\alpha \in R \\ l \geq 1}} \mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{r}}(g) a_{\nu - l\alpha}^{\mathrm{r}}(\xi; g) \qquad (\nu > 0) \tag{2.2b}$$

结合初始条件

$$a_\nu^{\mathrm{r}}(\xi;g) := \begin{cases} 1 & \text{if } \nu = 0, \\ 0 & \text{if } \nu \ngeq 0. \end{cases} \tag{2.2c}$$

此处 $g := (g_S, g_M, g_L) \in \mathbb{C}^3$, $R := R_S \cup R_M^+ \cup R_M^- \cup R_L$ 其中 $R_S := \{e_j \mid 1 \le j \le n\}$, $R_M^\pm = \{e_j \pm e_k \mid 1 \le j < k \le n\}$ $R_L = \{2e_j \mid 1 \le j \le n\}$ :,:,以及

$$\mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{bc}}(g) := \begin{cases} g_S(g_S + 2g_L - 1)l & \text{if } \alpha \in R_S, \\ 2g_M(g_M - 1)l & \text{if } \alpha \in R_M^+ \cup R_M^-, \\ 4g_L(g_L - 1)l & \text{if } \alpha \in R_L, \end{cases}$$

$$\mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{t}}(g) := \begin{cases} g_S(g_S + 2g_L - 1)l & \text{if } \alpha = e_n, \\ a_j\delta_{l-1} & \text{if } \alpha = e_j - e_{j+1}\ (1 \le j < n), \\ a_{n-1}\delta_{l-1} & \text{if } \alpha = e_{n-1} + e_n, \\ 4g_L(g_L - 1)l & \text{if } \alpha = 2e_n, \end{cases}$$

$$\mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{cs}}(g) := \begin{cases} g_S\delta_{l-1} & \text{if } \alpha \in R_S, \\ 2g_M(g_M - 1)l & \text{if } \alpha \in R_M^-, \\ a_n\delta_{l-1} & \text{if } \alpha \in R_L \end{cases}$$

（隐含假设为 $\mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{r}}(g) \equiv 0$ 否则），而 $\delta_l := 1$ 若 $l = 0$ 且$\delta_l := 0$ 若 $l \neq 0$。

命题1（Harish-Chandra级数解）。设 $\mathrm{r} \in \{\mathrm{bc}, \mathrm{t}, \mathrm{cs}\}$。(i) Harish-Chandra级数 $\phi_\xi^r(x;g)$ (2.2a)–(2.2c) 构成关于 $(\xi, x, g) \in \mathbb{C}_{+,\mathrm{reg}}^n \times \mathbb{A}^{\mathrm{r}} \times \mathbb{C}^3$ 的解析函数，其中

$$\mathbb{C}_{\mathrm{reg},+}^n := \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid 2\xi_j \notin \mathbb{Z}_{>0},\, \xi_j \pm \xi_k \notin \mathbb{Z}_{>0}\,(j < k)\} \tag{2.3a}$$

*and*

$$\mathbb{A}^{\mathrm{r}} := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0\} & \textit{if } \mathrm{r} = \mathrm{bc}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} & \textit{if } \mathrm{r} = \mathrm{t}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > x_2 > \cdots > x_n\} & \textit{if } \mathrm{r} = \mathrm{cs}, \end{cases} \tag{2.3b}$$

它作为谱变量 $\xi \in \mathbb{C}^n$ 的（亚纯）函数，在属于 $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}_{+,\ \mathrm{reg}}^n$ 的超平面上至多有一阶极点。

（ii）所讨论的函数是 $L_x^{\mathrm{r}}$ (1.1)、(1.2)、(1.4) 的一个特征解 :

$$L_x^{\mathrm{r}}\phi_\xi^{\mathrm{r}}(x;g) = \langle \xi, \xi \rangle \phi_\xi^{\mathrm{r}}(x;g) \tag{2.4a}$$

其平面波渐近行为具有如下形式

$$\lim_{x \to +\infty} |\phi_\xi^{\mathrm{r}}(x;g) - e^{\langle \xi, x \rangle}| = 0 \quad \textit{for} \quad \mathrm{Re}(\xi) = 0, \tag{2.4b}$$

其中记号 $x \to +\infty$ 表示，对于 $k = 1$, ....., $n$，有 $x_k - x_{k+1} \to +\infty$ （约定 $x_{n+1} \equiv 0$）。

当 $\mathrm{r}$ =bc 时，本命题的 (i) 部分归功于 Opdam，参见 [O88, Cor. 2.2, Cor. 2.10] 以及 [HS94, Prp. 4.2.5], ；而（更直接的）(ii) 部分则可直接由 Opdam 早先与 Heckman 的工作推出 [HO87], ，另见[HS94, Sec. 4.2] 以及 [O00, Sec. 6.1]。对于这一情形， $L_x^{\mathrm{bc}}$的可积性结合留数计算，可给出 (i) 部分的一个初等证明；该证明已在 [O00, Lem. 6.5]中勾勒。若要将后一证明用于 $\mathrm{r}$ = t 和 $\mathrm{r}$ = cs 的情形，我们就必须借助高阶对易量子积分

分别见文献 [O07, Thm. 8] 和 [H09, Sec. 5], 。相反，我们此处将避免明确使用高阶量子积分，而是在下文附录 A 中采用 Harish-Chandra 型分析，并结合部分合流极限过渡 $\phi_\xi^{\mathrm{bc}} \to \phi_\xi^{\mathrm{t}}$ ，沿用 Oshima 和 Shimeno 的思路[S08, OS10], ，从而直接由已知的 $\mathrm{r} = \mathrm{bc}$ 情形推导出 $\mathrm{r} = \mathrm{t}$ 和 $\mathrm{r} = \mathrm{cs}$ 情形下相应的结论。

## 3. $n$-Particle wave function

对于 $(\xi, x, g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{r}} \times \mathbb{C}^3$，其中

$$\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} := \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid 2\xi_j \notin \mathbb{Z},\, \xi_j \pm \xi_k \notin \mathbb{Z}\}, \tag{3.1}$$

我们考虑如下形式的 $n$ 粒子波函数

$$\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g) := \sum_{\mathrm{w} \in W} C^{\mathrm{r}}(\mathrm{w}\xi; g)\phi^{\mathrm{r}}_{\mathrm{w}\xi}(x; g), \tag{3.2a}$$

with

$$C^{\mathrm{r}}(\xi; g) := \prod_{1 \le j \le n} c_w(\xi_j) \prod_{1 \le j < k \le n} c_v(\xi_j + \xi_k)c_v(\xi_j - \xi_k), \tag{3.2b}$$

$$c_v(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(g_M + z)} & \text{if r=bc or r=cs,} \\ \Gamma(z) & \text{if r=t,} \end{cases} \tag{3.2c}$$

and

$$c_w(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2z)\Gamma(\frac{1}{2}g_S + z)}{\Gamma(g_S + 2z)\Gamma(\frac{1}{2}g_S + g_L + z)} & \text{if r=bc or r=t,} \\ \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(\frac{1}{2} + g_S + z)} & \text{if r=cs.} \end{cases} \tag{3.2d}$$

这里， $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数，而谱变量的对称化是相对于超八面体群 $W := \{1, -1\}^n \rtimes S_n$ （由带符号排列 $\mathrm{w} = (\epsilon, \sigma)$ 构成）在 $\mathbb{C}^n$ 上的作用而言：

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\mathrm{w}} (\epsilon_1\xi_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \epsilon_n\xi_{\sigma^{-1}(n)}) =: \mathrm{w}\xi, \tag{3.3}$$

其中 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma\,1 & \sigma\,2 & \cdots & \sigma\,n \end{pmatrix}$ 属于对称群 $S_n$ ，且 $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$，其中 $\epsilon_j \in \{1, -1\}$ （对于 $j = 1, \ldots, n$）。由其定义和命题1可知，该波函数在 $(\xi, x, g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{r}} \times \mathbb{C}^3$ 上解析。此外，超八面体对称性还保证了——作为 $\xi \in \mathbb{C}^n$ 的亚纯函数—— $\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g)$ (3.2a)–(3.2d) 沿超平面 $\xi_j = 0$ 和 $\xi_j \pm \xi_k = 0$ （源自 $C^{\mathrm{r}}(\xi; g)$）的一阶极点均可去。由命题1可立即得到以下命题。

命题 2（$n$-粒子波函数）。对于任意 $\mathrm{r} \in \{\mathrm{bc}, \mathrm{t}, \mathrm{cs}\}$， $n$-粒子波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g)$ (3.2a)–(3.2d), $(\xi, x, g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{r}} \times \mathbb{C}^3$，提供了本征值方程的解析解。

$$L^{\mathrm{r}}_x \Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g) = \langle \xi, \xi \rangle \Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g) \tag{3.4a}$$

具有如下平面波渐近行为：

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x; g) - \sum_{\mathrm{w} \in W} C^{\mathrm{r}}(\mathrm{w}\xi; g) e^{\langle \mathrm{w}\xi, x \rangle} \right| = 0 \quad \textit{for} \quad \mathrm{Re}(\xi) = 0. \tag{3.4b}$$

当 $\mathsf{r} = \mathsf{bc}$ 时，命题 2 可追溯至 Heckman 和 Opdam [HS94、O00]。事实上，此时，$n$ 粒子波函数 $\Phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x;g)$ (3.2a)–(3.2d) 本质上就是他们的 $BC_n$ 型超八面体超几何函数 $F_{BC_n}(\xi,x;\,g)$ [O88、HS94、O00]:

$$\Phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x;g) = \delta(x;g)C^{\mathrm{bc}}(\rho_g;g)F_{BC_n}(\xi,x;g) \tag{3.5a}$$

$((\xi,x,g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{bc}} \times \mathbb{C}^3)$，其中

$$\begin{aligned}\delta(x;g) := &\prod_{1\le j\le n} (e^{\frac12 x_j} - e^{-\frac12 x_j})^{g_S}(e^{x_j} - e^{-x_j})^{g_L} \\ &\times \prod_{1\le j<k\le n} (e^{\frac12(x_j+x_k)} - e^{-\frac12(x_j+x_k)})^{g_M}(e^{\frac12(x_j-x_k)} - e^{-\frac12(x_j-x_k)})^{g_M}\end{aligned} \tag{3.5b}$$

and

$$\rho_g := ((n-1)g_M + \tfrac12 g_S + g_L, (n-2)g_M + \tfrac12 g_S + g_L, \ldots, \tfrac12 g_S + g_L). \tag{3.5c}$$

## 4. Difference equations in the spectral variable

在 [DE15 中，定理 2] 提出了一个关于 Heckman 和 Opdam 的$BC_n$型超几何函数的（双谱对偶）差分方程组。以下定理将这一双谱对偶性扩展到情形 $= \mathsf{bc}$，从而涵盖 $\mathsf{r} = \mathsf{t}$ 和 $\mathsf{r} = \mathsf{cs}$ 的情形。

定理 3（差分方程）。对于任意 $\mathsf{r} \in \{\mathsf{bc}、\mathsf{t}、\mathsf{cs}\}$、$\ell \in \{1,\ldots,n\}$ 以及 $(\xi,x,g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{r}} \times \mathbb{C}^3$，波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;\,g)$（3.2a）–（3.2d）满足以下关于谱变量的差分方程:

$$\sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\},\,0\le|J|\le\ell\\ \epsilon_j\in\{1,-1\},\,j\in J}} U^{\mathrm{r}}_{J^c,\,\ell-|J|}(\xi;g)V^{\mathrm{r}}_{\epsilon J}(\xi;g)\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+e_{\epsilon J}}(x;g) = E^{\mathrm{r}}_\ell(x)\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g), \tag{4.1a}$$

其中

$$\begin{aligned}V^{\mathrm{r}}_{\epsilon J}(\xi;g) = &\prod_{j\in J} w(\epsilon_j\xi_j)\prod_{\substack{j\in J\\ k\notin J}} v(\epsilon_j\xi_j+\xi_k)v(\epsilon_j\xi_j-\xi_k) \\ &\times \prod_{\substack{j,j'\in J\\ j<j'}} v(\epsilon_j\xi_j+\epsilon_{j'}\xi_{j'})v(\epsilon_j\xi_j+\epsilon_{j'}\xi_{j'}+1),\end{aligned} \tag{4.1b}$$

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{r}}_{K,p}(\xi;g) = (-1)^p \sum_{\substack{I\subset K,\,|I|=p\\ \epsilon_i\in\{1,-1\},\,i\in I}} \Bigg(&\prod_{i\in I} w(\epsilon_i\xi_i)\prod_{\substack{i\in I\\ k\in K\setminus I}} v(\epsilon_i\xi_i+\xi_k)v(\epsilon_i\xi_i-\xi_k) \\ &\times \prod_{\substack{i,i'\in I\\ i<i'}} v(\epsilon_i\xi_i+\epsilon_{i'}\xi_{i'})v(-\epsilon_i\xi_i-\epsilon_{i'}\xi_{i'}-1)\Bigg),\end{aligned} \tag{4.1c}$$

*with*

$$v(z) = \begin{cases} 1+g_M z^{-1} & \text{if r=bc or r=cs,}\\ z^{-1} & \text{if r=t,}\end{cases} \tag{4.1d}$$

$$w(z) = \begin{cases} \left(1+(\frac12 g_S+g_L)z^{-1}\right)\left(1+g_S(1+2z)^{-1}\right) & \text{if r=bc or r=t,}\\ \frac12 z^{-1}\left(\frac12+g_S(1+2z)^{-1}\right) & \text{if r=cs,}\end{cases} \tag{4.1e}$$

*and*

$$E^{\mathrm{r}}_{\ell}(x)=\begin{cases}2^{2\ell}\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}\atop |J|=\ell}\prod_{j\in J}\sinh^2\left(\frac{x_j}{2}\right) & \textit{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{bc},\\ e^{x_1+\cdots+x_\ell}+\delta_{n-l}e^{x_1+\cdots+x_{n-1}}(e^{-x_n}-2) & \textit{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{t},\\ \sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}\atop |J|=\ell}\prod_{j\in J}e^{x_j} & \textit{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{cs}.\end{cases} \tag{4.1f}$$

此处， $|J|$ 表示 $J\subset\{1,\ldots,n\}$的基数， $J^c:=\{1,\ldots,n\}\setminus J$，以及 $e_{\epsilon J}:=\sum_{j\in J}\epsilon_j e_j$。

在下文的附录 B 中，我们借助 Oshima-Shimeno 型汇合 $\Phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}\to\Phi^{\mathrm{t}}_{\xi}$ 和 $\Phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}\to\Phi^{\mathrm{cs}}_{\xi}$证明该定理。这些汇合是通过将附录 A 中 Harish-Chandra级数 $\phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}\to\phi^{\mathrm{t}}_{\xi}$ 和 $\phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}\to\phi^{\mathrm{cs}}_{\xi}$之间的转换提升到 $n$粒子波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}$ (3.2a)–(3.2d)的层次而得到的。

定理 3 中的差分方程表明，在互换位置变量与谱变量的作用后，波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ (3.2a)–(3.2d)是 [D95] 中引入的、具有超八面体对称性的有理型 Macdonald-Ruijsenaars 差分算子交换族的联合特征函数。对于 $\ell=1,2$，相关差分方程归结为以下两个恒等式：

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ \epsilon\in\{1,-1\}}}V^{\mathrm{r}}_{\epsilon j}(\xi;g)\Big(\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+\epsilon e_j}(x;g)-\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)\Big)=E^{\mathrm{r}}_1(x)\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g) \tag{4.2a}$$

and

$$\sum_{\substack{1\leq j<j'\leq n\\ \epsilon,\epsilon'\in\{1,-1\}}}V^{\mathrm{r}}_{\{\epsilon j,\epsilon' j'\}}(\xi;g)\left(\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+\epsilon e_j+\epsilon' e_{j'}}(x;g)-\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)\right)+ \tag{4.2b}$$

$$\sum_{1\leq j\leq n,\epsilon\in\{1,-1\}}U^{\mathrm{r}}_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\},1}(\xi;g)V^{\mathrm{r}}_{\epsilon j}(\xi;g)\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+\epsilon e_j}(x;g)=E^{\mathrm{r}}_2(x)\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g),$$

分别，其中

$$V^{\mathrm{r}}_{\epsilon j}(\xi;g)=w(\epsilon\xi_j)\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}v(\epsilon\xi_j+\xi_k)v(\epsilon\xi_j-\xi_k),$$

$$\begin{aligned}V^{\mathrm{r}}_{\{\epsilon j,\epsilon' j'\}}(\xi;g)=&w(\epsilon\xi_j)w(\epsilon'\xi_{j'})v(\epsilon\xi_j+\epsilon'\xi_{j'})v(1+\epsilon\xi_j+\epsilon'\xi_{j'})\\ &\times\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j,j'}}v(\epsilon\xi_j+\xi_k)v(\epsilon\xi_j-\xi_k),\end{aligned}$$

$$U^{\mathrm{r}}_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\},1}(\xi;g)=-\sum_{\substack{1\leq i\leq n,\,i\neq j\\ \epsilon\in\{1,-1\}}}w(\epsilon\xi_i)\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j,i}}v(\epsilon\xi_i+\xi_k)v(\epsilon\xi_i-\xi_k),$$

and

$$E^{\mathrm{r}}_1(x)=\begin{cases}2^2\sum_{1\leq j\leq n}\sinh^2(\frac{x_j}{2}) & \text{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{bc},\\ e^{x_1}+\delta_{n-1}(e^{-x_1}-2) & \text{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{t},\\ \sum_{1\leq j\leq n}e^{x_j} & \text{if } \mathrm{r}{=}\mathrm{cs},\end{cases}$$

$$E_2^{\mathrm{r}}(x)=\begin{cases}2^4\sum_{1\le j<k\le n}\sinh^2(\frac{x_j}{2})\sinh^2(\frac{x_k}{2}) & \text{if r=bc,}\\ e^{x_1+x_2}+\delta_{n-2}e^{x_1}(e^{-x_2}-2) & \text{if r=t,}\\ \sum_{1\le j<k\le n}e^{x_j+x_k} & \text{if r=cs.}\end{cases}$$

对于 r = bc，公式 (4.2a) 中的差分方程（对应于 $\ell=1$）最初归功于 Chalykh [C00，定理 6.12]。

## 5. Analyticity in the spectral variable

Opdam 的一项重要结果指出，对于 r = bc，$n$粒子波函数$\Phi^r_\xi(x;g)$ (3.2a)–(3.2d) 关于 $\xi$ 可解析延拓为谱变量的整函数，参见 [O88，定理 2.8], [HS94，定理 4.3.14]以及 [O00，定理 6.13]。虽然基于我们目前掌握的工具，将 Opdam 的证明推广到 r = t 和 r = cs 的情形似乎并非易事，但我们注意到，借助方程 (4.2a)、(4.2b) 中的差分方程，将这一结果推广到这两种情形相对直接。

定理 4（解析性）。对于任意 r $\in$ {bc, t, cs}，波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ (3.2a)–(3.2d) 可（唯一地）延拓为 $(\xi,x,g)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 的解析函数。

证明。由于——将 Harish-Chandra级数 $\phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ (2.2a)–(2.2c) 视为谱变量 $\xi\in\mathbb{C}^n$ 的亚纯函数时 —— 它在 $\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{C}^n_{+,\mathrm{reg}}$ 的超平面上至多有一阶极点（根据命题 1），且 $c$- 函数 $C^{\mathrm{r}}(\xi;g)$ (3.2b) 中的伽马因子至多会在 $\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{C}^n_{-,\mathrm{reg}}$ 的超平面上产生一阶极点，其中 $\mathbb{C}^n_{-,\mathrm{reg}}:=\{\xi\in\mathbb{C}^n\mid 2\xi_j\notin\mathbb{Z}_{\le 0},\,\xi_j\pm\xi_k\notin\mathbb{Z}_{\le 0}\,(j<k)\}$，显然，波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ (3.2a)–(3.2d) 在 $\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}$ 的超平面上至多有一阶极点。根据 Hartogs定理，只需证明相关奇点均可去。此外，鉴于超八面体对称性，只需验证留数

$$\mathrm{Res}_{1;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g):=\lim_{2\xi_1\to m}(2\xi_1-m)\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g),$$
$$\mathrm{Res}_{12;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g):=\lim_{\xi_1+\xi_2\to m}(\xi_1+\xi_2-m)\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$$

在 $m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 时，$\mathrm{H}_{1;m}:=\{\xi\in\mathbb{C}^n\mid 2\xi_1=m\}$ 和 $\mathrm{H}_{12;m}:=\{\xi\in\mathbb{C}^n\mid \xi_1+\xi_2=m\}$ 消失。正如命题 2 之前所述，对于 $m=0$，由超八面体对称性可立即得出这里所考虑的留数消失。对于 $m>0$，我们假设当 $0\le k<m$ 时，$\mathrm{Res}_{1;k}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)=0$ 和 $\mathrm{Res}_{12;k}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)=0$，并利用差分方程 (4.2a)、(4.2b) 归纳地推出这些留数消失。为此，在分别取相应极限 $2\xi_1-m+2\to 0$ 和 $\xi_1+\xi_2-m+2\to 0$ 之前，先将方程 (4.2a) 和 (4.2b) 分别乘以适当的幂 $(2\xi_1-m+2)^d$ 和 $(\xi_1+\xi_2-m+2)^d$。由此得到关于 $\mathrm{Res}_{1;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ 和 $\mathrm{Res}_{12;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ 的简单线性关系，从中可明显看出，相关留数消失。

对于每种情形，相关留数计算的细节都编码在表1和表2中：表中给出了由差分方程导出的相应留数线性关系，以及一些简单的附加关系，借此即可推导出所讨论留数的消失。请注意，出于排版考虑，上标 r 和对变量的依赖均予以省略（只要这样做不会造成混淆）。

$m$ $d$ 线性关系源自公式 (4.2a) 附加关系 1 2 $\mathrm{Res}_{1;-1}V_1\mathrm{Res}_{1;1}\Phi = 0$ $\mathrm{Res}_{1;-1}V_1 \not\equiv 0$2 2 Res $_{1;0}V_1\mathrm{Res}_{1;2}\Phi + \mathrm{Res}_{1;0}V_{-1}\mathrm{Res}_{1;-2}\Phi = 0$ $\begin{cases}\mathrm{Res}_{1;-2}\Phi = -\mathrm{Res}_{1;2}\Phi \text{ Res}\end{cases}$

$_{1;0}V_{-1} = -$ $_{1;0}V_1 \not\equiv 0$ Res ( )

3 1 $[V_1\ \xi\ ]_{2\xi_1=1}$ $_{1;3}\Phi+$ $\begin{cases}[\Phi_{\xi-e_1}]_{2\xi_1=1} = [\Phi_\xi]_{2\xi_1=1}\\ [V_1\ \xi\ ]_{2\xi_1=1} \not\equiv 0\end{cases}$ ( )$\geq 4$ 1 $[V_1(\xi)$

$]_{2\xi_1=m-2}\mathrm{Res}_{1;m}\Phi = 0$ $[V_1(\xi)]_{2\xi_1=m-2} \not\equiv 0$

TABLE 1. 验证 $\mathrm{Res}_{1;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g) \equiv 0$ 的计算

$m$ $d$ 源自公式 (4.2b) 的线性关系 附加关系 1 2 $\mathrm{Res}_{12;-1}V_{\{+1,+2\}}\Big(\mathrm{Res}_{12;1}\Phi - \mathrm{Res}$ $_{12;-1}\Phi\Big) = 0$ $\begin{cases}\mathrm{Res}_{12;-1}\Phi = -\mathrm{Res}_{12;1}\Phi\ \mathrm{Res}_{12;-1}V_{\{+1,+2\}} \not\equiv 0\end{cases}$2 2 $\mathrm{Res}_{12;0}V_{\{+1,+2\}}\mathrm{Res}_{12;2}\Phi+$ Res $_{12;0}V_{\{-1,-2\}}\mathrm{Res}_{12;-2}\Phi = 0$ $\begin{cases}\mathrm{Res}_{12;2}\Phi = -\mathrm{Res}_{12;-2}\Phi\ \text{Res}-\end{cases}$ $^{12;0}V_{\{+1,+2\}} =$ Res

$_{12;0}V_{\{-1,-2\}} \not\equiv 0$ 3 1 $[V_{\{+1,+2\}}(\xi)]_{\xi_1+\xi_2=1}$Res $_{12;3}\Phi+$ $[\Phi_{\xi-e_1-e_2} - \Phi_\xi]_{\xi_1+\xi_2=1} = 0$ $\begin{cases}[\Phi_{\xi-e_1-e_2}]_{\xi_1+\xi_2=1} = [\Phi_\xi]_{\xi_1+\xi_2=1}\\ [V_{\{+1,+2\}}\ \xi\end{cases}$ $= \mathrm{Res}_{12;1}V_{\{-1,-2\}}(\xi)\ (\ )]_{\xi_1+\xi_2=1} \not\equiv 0$

$\geq 4$ 1 $[V_{\{+1,+2\}}(\xi)]_{\xi_1+\xi_2=m-2}\mathrm{Res}_{12;m}\Phi = 0$ $[V_{\{+1,+2\}}(\xi)]_{\xi_1+\xi_2=m-2} \not\equiv 0$

TABLE 2. 验证 $\mathrm{Res}_{12;m}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g) \equiv 0$ 的计算

例如，为了验证 $\mathrm{Res}_{1;2}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g) \equiv 0$ 在 $\mathrm{H}_{1;2}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 上成立，先将式 (4.2a) 乘以 $4\xi_1^2$，再取极限 $2\xi_1 \to 0$，由此得到关系 $\mathrm{Res}_{1;0}V\mathrm{r}1\ (\xi;\ g)\mathrm{Res}_{1;0}\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+e_1}(x;\ g) + \mathrm{Res}_{1;0}V\mathrm{r}{-}1(\xi;\ g)$ $\mathrm{Res}_{1;0}\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi-e_1}(x;\ g) = 0$。将 $\mathrm{Res}_{1;0}\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi+e_1}(x;\ g)$ 改写为 $\mathrm{Res}_{1;2}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;\ g)$，并将 $\mathrm{Res}_{1;0}\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi-e_1}(x;\ g)$ 改写为 $\mathrm{Res}_{1;-2}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g)$ 后，可知 $\mathrm{Res}_{1;2}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g) \equiv 0$ 在 $\mathrm{H}_{1;2}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 上成立，因为根据超八面体对称性，$\mathrm{Res}_{1;-2}\Phi^{\mathrm{r}}_\xi(x;g) = -\mathrm{Res}_{1;2}\Phi_\xi(x;g)$，且 $\mathrm{Res}_{1;0}V\mathrm{r}{-}1(\xi;g) = -\mathrm{Res}_{1;0}V\mathrm{r}1\ (\xi;$ $g) \not\equiv 0.$ □

请注意，证明定理 4 时所采用的论证对于 $\mathrm{r} = \mathrm{bc}$ 仍然逐字适用。然而，这样做并不能得到关于 $BC_n$ 超几何函数谱变量解析性的另一种新证明。原因在于，定理 3 中相应的 $\mathrm{r} = \mathrm{bc}$ 差分方程是在参考文献 [DE15] 中由 $BC_n$ Jacobi 多项式的 Pieri 递推公式通过解析延拓推导得到的，也就是说，首先调用了 Opdam 的解析性结果。结合定理 4 的当前证明，这一情况表明：给定 $BC_n$ Jacobi 多项式的 Pieri 公式（以及来自 [O95] 的 $BC_n$超几何函数增长估计），谱变量中的 Opdam 的解析性与我们的 $\mathrm{r} = \mathrm{bc}$ 差分方程实际上可以相互推出。

## APPENDIX A. PROOF OF PROPOSTITION 1

为验证命题1，我们将 Heckman 和 Opdam 针对 $\mathrm{r} = \mathrm{bc}$ [O88, HS94, O00] 情形所做的 Harish-Chandra 型分析加以扩展，以纳入

r = t 和 r = cs 两种情形。为了确认 r = bc [O88] 时谱变量中 Harish-Chandra 级数的正则性域在 r = t 和 r =cs 时仍然成立，我们采用 Oshima 和 Shimeno [S08, OS10] 所研究的一类部分超几何（bc → t 和 bc → cs）合流。

A.1. Harish-Chandra 系数的局部正则化。给定任意选取的有界域 $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}^n$ 及其闭包 $\overline{\mathrm{U}}$，令

$$\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) := \prod_{\substack{\mu>0 \\ \mathrm{H}_\mu \cap \overline{\mathrm{U}} \neq \emptyset}} \langle \mu - 2\xi, \mu \rangle, \tag{A.1}$$

其中 $\mathrm{H}_\mu := \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \langle \mu - 2\xi, \mu \rangle = 0\}$。由方程 (2.2b)、(2.2c) 中 $a^{\mathrm{r}}_\nu(\xi; g)$ 的递推关系可立即得到，对于任意 $\nu \geq 0$ 及任意紧集 $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}^3$，正则化 Harish-Chandra 系数 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a^{\mathrm{r}}_\nu(\xi;\ g)$ 关于 $(\xi, g)$ 在 $\mathrm{U} \times \mathrm{K}$ 上全纯且有界。

A.2. 正则化 Harish-Chandra 级数的收敛。在本小节中，我们暂时偏离方程 (1.3) 中的归一化约定，允许辅助耦合常数 $a$ 取任意配置：$= (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$。按照 [H00，第 IV 章，引理 5.3] 以及 [O88，引理 2.1]，，可证明递推系数的增长满足如下的一致指数界。

引理 5（递推系数的界）。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $A > 0$ （仅取决于上述对 U、K 和 $\varepsilon$ 的选择），使得对于所有 $(\xi, g) \in \mathrm{U} \times \mathrm{K}$:

$$|\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a^{\mathrm{r}}_\nu(\xi; g)| \leq A e^{\varepsilon \langle \nu, \rho \rangle} \quad (\forall \nu \geq 0), \tag{A.2}$$

其中 $\rho := \rho_M + \rho_L = \sum_{1 \leq j \leq n} (n + 1 - j) e_j$。

证明。取 $\mathrm{c} > 0$ 和 $N > 0$，使得对于所有 $\xi \in \mathrm{U}$:

$$\langle \nu, \nu - 2\xi \rangle \geq \mathrm{c} \langle \nu, \rho \rangle^2 \qquad \forall \nu \geq 0 \text{ with } \langle \nu, \rho \rangle \geq N.$$

给定 $\varepsilon > 0$，固定一个正整数 $M \geq N$，使得 $\forall g \in \mathrm{K}$:

$$\frac{1}{\mathrm{c}} \sum_{\substack{\alpha \in R \\ l \geq 1}} e^{-\varepsilon l \langle \alpha, \rho \rangle} |\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\alpha, l}(g)| \leq M.$$

固定 $A > 0$ 足够大，使得 $\forall (\xi, g) \in \mathrm{U} \times \mathrm{K}$: $|\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a^{\mathrm{r}}_\nu(\xi;\ g)| \leq A e^{\varepsilon \langle \nu,\ \rho \rangle}$ 对于所有满足 $\langle \nu, \rho \rangle < M$ 的 $\nu \geq 0$，由方程 (2.2b) 中的递推关系可归纳推出，对于所有满足 $\langle \nu, \rho \rangle \geq M$ 的 $\nu \geq 0$ 也成立:

$$\begin{aligned} |\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a^{\mathrm{r}}_\nu(\xi; g)| &\leq \frac{1}{\mathrm{c} \langle \nu, \rho \rangle^2} \sum_{\substack{\alpha \in R \\ l \geq 1}} |\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\alpha, l}(g) \Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a^{\mathrm{r}}_{\nu - l\alpha}(\xi; g)| \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{c} \langle \nu, \rho \rangle^2} \sum_{\substack{\alpha \in R \\ l \geq 1}} |\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\alpha, l}(g)| A e^{\varepsilon \langle \nu - l\alpha, \rho \rangle} \\ &\leq \tfrac{M}{\langle \nu, \rho \rangle^2} A e^{\varepsilon \langle \nu, \rho \rangle} \leq A e^{\varepsilon \langle \nu, \rho \rangle}. \end{aligned}$$

□

由引理 5 可知，对于任意 $\epsilon>0$，级数 $e^{-\langle \xi,\ x\rangle}\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ (2.2a)– (2.2c) 当 $(\xi,x,g)$ 限定在 $\mathrm{U}\times(\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}+\epsilon\rho)\ \times\mathrm{K}$ 内时绝对值一致收敛。事实上，有

$$\sum_{\nu\geq 0}|\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)a^{\mathrm{r}}_{\nu}(\xi;g)e^{-\langle\nu,x\rangle}|\leq A\sum_{\nu\geq 0}e^{-\langle\nu,x-\varepsilon\rho\rangle},\tag{A.3}$$

并且，只要满足 $0<\varepsilon<\epsilon$，右端的级数就在 $x$ 上关于 $(\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}+\epsilon\rho)$ 一致收敛。

由此可知，正则化 Harish-Chandra 级数 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ 对于 $\mathrm{U}\times\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}\times\mathbb{C}^3$ 中的 $(\xi,x,g)$，在绝对值意义下局部一致收敛。为推得当 $\mathrm{r}=\mathrm{t}$ 且 $\mathrm{r}=\mathrm{cs}$ 时，这种局部一致绝对收敛实际上扩展到更大的区域 $\mathrm{U}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$，只需注意到，平移 (1.5a) 在级数 $e^{-\langle\xi,x\rangle}\phi^{\mathrm{t}}_{\xi}(x;\ g)$ 中相当于参数平移 $a_j\to a_je^{-c}(j=1,\ldots,n-1)$，而平移 (1.6a) 在级数 $e^{-\langle\xi,x\rangle}\phi^{\mathrm{cs}}_{\xi}(x;g)$ 中相当于参数平移 $g_S\to g_Se^{-c}$, $a_n\to a_ne^{-2c}$ ($c\in\mathbb{R}$)。在此还需注意，$\mathbb{A}^{\mathrm{t}}=\cup_{c\in\mathbb{R}}(\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}+c\rho_M)$ 且 $\mathbb{A}^{\mathrm{cs}}=\cup_{c\in\mathbb{R}}(\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}+c\rho_L)$。

A.3. 本征值方程。对正则化 Harish-Chandra 级数 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;\ g)$ 施加 Schr¨odinger 算子 $L^{\mathrm{r}}_x$ 后，可见对于 $(\xi,x,g)\ \in\mathrm{U}\ \times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$:

$$L^{\mathrm{r}}_x\big(\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)\big)=\\ \sum_{\nu\geq 0}\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)a^{\mathrm{r}}_{\nu}(\xi;g)e^{\langle\xi-\nu,x\rangle}\Big(\langle\xi-\nu,\xi-\nu\rangle-\sum_{\substack{\alpha\in R\\ l\geq 1}}\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\alpha,l}(g)e^{-l\langle\alpha,x\rangle}\Big).$$

这里，$\sinh^{-2}(\cdot)$ 势通过级数 $\sinh^{-2}(z)\ =\sum_{l\geq 1}4le^{-2lz}(\mathrm{Re}(z)\ >0)$ 展开，而逐项微分则由 Harish-Chandra 级数在绝对值意义下的局部一致收敛性得到证明。重新排列各项并调用递推关系 (2.2b)、(2.2c) 可得

$$\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\sum_{\nu\geq 0}e^{\langle\xi-\nu,x\rangle}\Big(\big(\langle\xi,\xi\rangle+\langle\nu,\nu-2\xi\rangle\big)a^{\mathrm{r}}_{\nu}(\xi;g)-\sum_{\substack{\alpha\in R\\ l\geq 1}}\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\alpha,l}(g)a^{\mathrm{r}}_{\nu-l\alpha}(\xi;g)\Big)\\ =\langle\xi,\xi\rangle\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\sum_{\nu\geq 0}a^{\mathrm{r}}_{\nu}(\xi;g)e^{\langle\xi-\nu,x\rangle}=\langle\xi,\xi\rangle\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g).$$

A.4. 平面波渐近行为。对于任意有界域 $\mathrm{U}\subset\imath\mathbb{R}^n$ （其中 $\imath:=\sqrt{-1}$），乘积 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)$ (A.1) 变为空，即在这种情况下 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\ \equiv 1$。引理 5 中的界现表明，对于任意 $\xi\in\imath\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{x\to+\infty}|\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)-e^{\langle\xi,x\rangle}|\leq\lim_{x\to+\infty}\sum_{\nu>0}|a^{\mathrm{r}}_{\nu}(\xi;g)e^{-\langle\nu,x\rangle}|\\ \leq\lim_{x\to+\infty}A\sum_{\nu>0}e^{-\langle\nu,x-\varepsilon\rho\rangle}=A\sum_{\nu>0}\Big(\lim_{x\to+\infty}e^{-\langle\nu,x-\varepsilon\rho\rangle}\Big)=0$$

（由控制收敛得出）。这里我们利用了对于 $\nu>0$: $\lim_{x\to+\infty}e^{-\langle\nu,\ x-\varepsilon\rho\rangle}=0$以及 $e^{-\langle\nu,\ x-\varepsilon\rho\rangle}<1$，若 $x\in(\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}+\varepsilon\rho)$。

A.5. 部分超几何合流。现在，我们按照 Oshima 和 Shimeno [S08, OS10] 提出的策略，将上述 $L_x^{\mathrm{bc}} \to L_x^{\mathrm{t}}$和 $L_x^{\mathrm{bc}} \to L_x^{\mathrm{cs}}$极限过渡提升到 Harish-Chandra 级数的层面。

命题 6（Harish-Chandra级数的部分合流极限）。令 $(\xi, x, g) \in \mathsf{U} \times \mathbb{A}^{\mathrm{bc}} \times \mathbb{C}^3$。

(i) 平移 $x \to x + c\rho_M$ (1.5a) 和参数代换 $g \to g^{(c)}$(1.5b) 导致 bc $\to$t 合流

$$\lim_{c\to+\infty} e^{-c\langle \xi, \rho_M\rangle} \Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x + c\rho_M; g^{(c)}) = \Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi_\xi^{\mathrm{t}}(x; g). \tag{A.4a}$$

(ii) 平移 $x \to x + c\rho_L$ (1.6a) 和参数代换 $g \to g^{(c)}$(1.6b) 导致 bc $\to$cs 合流

$$\lim_{c\to+\infty} e^{-c\langle \xi, \rho_L\rangle} \Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x + c\rho_L; g^{(c)}) = \Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi_\xi^{\mathrm{cs}}(x; g). \tag{A.4b}$$

证明。Harish-Chandra级数 $\phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x; g)$ (2.2a)–(2.2c) 中的代换 (1.5a)、(1.5b) 和 (1.6a)、(1.6b) 表明

$$e^{-c\langle \xi, \rho_K\rangle} \Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi_\xi^{\mathrm{bc}}(x + c\rho_K; g^{(c)}) = \sum_{\nu\geq 0} \hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) e^{\langle \xi-\nu, x\rangle}, \tag{A.5}$$

其中，$\hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)})$，$\nu \geq 0$ 由下式给出

$$\langle \nu - 2\xi, \nu\rangle \hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) = \sum_{\substack{\alpha\in R\\ l\geq 1}} e^{-c\,l\langle \alpha, \rho_K\rangle} \mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{bc}}(g^{(c)}) \hat{a}_{\nu-l\alpha}^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) \qquad (\nu > 0) \tag{A.6a}$$

and

$$\hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) := \begin{cases} \Delta_{\mathrm{U}}(\xi) & \text{if } \nu = 0, \\ 0 & \text{if } \nu \not\geq 0, \end{cases} \tag{A.6b}$$

其中分别为 $K = M$ 或 $K = L$。

由于方程 (A.6a) 右侧的求和是有限的（因为当 $\nu - l\alpha \geq 0$ 时，$l \leq \langle \nu、\ \rho\rangle$），并且

$$\lim_{c\to+\infty} e^{-c\,l\langle \alpha, \rho_K\rangle} \mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{bc}}(g^{(c)}) = \begin{cases} \mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{t}}(g) & \text{if } K = M, \\ \mathrm{a}_{\alpha,l}^{\mathrm{cs}}(g) & \text{if } K = L, \end{cases} \tag{A.7}$$

根据递推关系，对 $\nu$ 归纳可得，对所有 $\xi \in \mathsf{U}$ 和 $\nu \geq 0$ 均有：

$$\lim_{c\to+\infty} \hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) = \begin{cases} \Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a_\nu^{\mathrm{t}}(\xi; g) & \text{if } K = M, \\ \Delta_{\mathrm{U}}(\xi) a_\nu^{\mathrm{cs}}(\xi; g) & \text{if } K = L. \end{cases} \tag{A.8}$$

借助于与引理 5 中类似的递推系数 $\hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)})$ 的指数增长界，由方程 (A.5) 和 (A.8) 通过控制收敛即可得到所述极限过渡。事实上，仿照引理 5 的证明并利用方程 (A.8)，容易看出，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $A > 0$（仅依赖于 $\xi \in \mathsf{U}$、$g \in \mathbb{C}^3$ 和 $\varepsilon$），使得

$$\forall c \geq 0, \nu \geq 0: \quad |\hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)})| \leq A\, e^{\varepsilon\langle \nu, \rho\rangle}. \tag{A.9}$$

因此，在选取足够小的 $\varepsilon > 0$，使得 $x \in (\mathbb{A}^{\mathrm{bc}} + \varepsilon\rho)$ 成立之后，式 (A.5) 右端的级数可逐项地被以下绝对收敛级数一致控制（参见式 (A.3)）：

$$\sum_{\nu\geq 0} |\hat{a}_\nu^{\mathrm{bc}}(\xi; g^{(c)}) e^{\langle \xi-\nu, x\rangle}| \leq A|e^{\langle \xi, x\rangle}| \sum_{\nu\geq 0} e^{-\langle \nu, x-\varepsilon\rho\rangle} < +\infty.$$

□

A.6. 正则性域。正则化 Harish-Chandra 级数的局部一致收敛保证 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;\,g)$ 在 $(\xi,x,g)\in\mathrm{U}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 上解析。此外，Opdam 已证明（参见 [O88, 推论 2.2 、推论 2.10], [HS94, 命题 4.2.5] 以及 [O00, 引理 6.5]），级数 $\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ 在 $(\xi,x,g)\in\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg},+}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 时解析，其中 $\mathrm{r}=\mathrm{bc}$。换言之，在这种情况下，若超平面 $\mathrm{H}_\mu$, $\mu>0$ 不属于 $\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg},+}$，则 $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi)\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;\,g)$ 在 $(\xi,x,g)\in(\mathrm{U}\cap\mathrm{H}_\mu)\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 上消失。根据命题 6，当 $\mathrm{r}=\mathrm{t}$ 且 $\mathrm{r}=\mathrm{cs}$ 时，这一消失性质仍然成立（这里我们利用 $x$ 上的解析性，将结论从 $\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}$ 延拓至 $\mathbb{A}^{\mathrm{r}}$）。由于有界域 $\mathrm{U}\subset\mathbb{C}^n$ 是任意选取的，最终可得：当 $\mathrm{r}=\mathrm{t}$ 且 $\mathrm{r}=\mathrm{cs}$ 时，级数 $\phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ 也必定在 $(\xi,x,g)\in\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg},+}\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 上解析；若超平面 $\mathrm{H}_\mu$, $\mu>0$ 属于 $\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg},+}$，则至多沿 $\mathrm{H}_\mu\times\mathbb{A}^{\mathrm{r}}\times\mathbb{C}^3$ 存在一个简单极点。

## Appendix B. Proof of Theorem 3

从 $\mathrm{r}=\mathrm{bc}$ 情形的差分方程 (4.1a)–(4.1f) 出发（参见 [DE15，定理 2],），通过以下 $\mathrm{bc}\to\mathrm{t}$ 和 $\mathrm{bc}\to\mathrm{cs}$ 汇合，可得到 $\mathrm{r}=\mathrm{t}$ 和 $\mathrm{r}=\mathrm{cs}$ 两种情形；这些汇合将命题6推广到了 $n$ 粒子波函数 $\Phi^{\mathrm{r}}_{\xi}(x;g)$ (3.2a)–(3.2d) 的层次（参见 [S08，OS10]）。

命题 7（波函数的部分合流极限）。设 $(\xi,x,g)\in\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}}\times\mathbb{A}^{\mathrm{bc}}\times\mathbb{C}^3$。

(i) 平移 $x\to x+c\rho_M$ (1.5a) 和参数代换 $g\to g^{(c)}$ (1.5b) 导出 $\mathrm{bc}\to\mathrm{t}$ 合流

$$\lim_{c\to+\infty}\gamma_M(g^{(c)})\Phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}(x+c\rho_M;g^{(c)})=\Phi^{\mathrm{t}}_{\xi}(x;g),\tag{B.1a}$$

其中

$$\gamma_M(g):=(\Gamma(g_M))^{n(n-1)}.$$

(ii) 平移 $x\to x+c\rho_L$ (1.6a) 和参数代换 $g\to g^{(c)}$ (1.6b) 产生了 $\mathrm{bc}\to\mathrm{cs}$ 合流

$$\lim_{c\to+\infty}\gamma_L(g^{(c)})\Phi^{\mathrm{bc}}_{\xi}(x+c\rho_L;g^{(c)})=\Phi^{\mathrm{cs}}_{\xi}(x;g),\tag{B.1b}$$

其中

$$\gamma_L(g):=\left(\frac{\Gamma(g_S)\Gamma(\frac{1}{2}g_S+g_L)}{\Gamma(\frac{1}{2}g_S)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g_S)}\right)^n.$$

证明。由众所周知的渐近行为 $\lim_{c\to+\infty}c^{z}\Gamma(c)\,\Gamma(z+c)=1$ 以及倍增公式 $\Gamma(2z)=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2}+z)$ $(2z\notin\mathbb{Z}_{\leq 0})$，立即可知，代入 $g\to g^{(c)}$ (1.5b) 后：

$$\lim_{c\to+\infty}\gamma_M(g^{(c)})\,e^{c\langle\xi,\rho_M\rangle}C^{\mathrm{bc}}(\xi;g^{(c)})=C^{\mathrm{t}}(\xi;g),\tag{B.2a}$$

并代入 $g\to g^{(c)}$ (1.6b)：

$$\lim_{c\to+\infty}\gamma_L(g^{(c)})\,e^{c\langle\xi,\rho_L\rangle}C^{\mathrm{bc}}(\xi;g^{(c)})=C^{\mathrm{cs}}(\xi;g).\tag{B.2b}$$

所述极限过渡现可借助命题 6 和方程 (B.2a)、(B.2b)，直接由方程 (3.2a)–(3.2d) 中的显式公式推出。□

(i) 为了得到 $\mathsf{r} = \mathsf{t}$ 的差分方程，在关于 $\mathsf{r} = \mathsf{bc}$ 的第 $\ell$ 个差分方程中实施变换 (1.5a) 和参数代换 (1.5b)。再乘以一个形式为 $e^{-\frac{c}{2}\ell(2n-1-\ell)}\gamma_M(g^{(c)})$ 的整体缩放因子，即可得到 $c \to +\infty$ 对应的 $\mathsf{r} = \mathsf{t}$ 型差分方程。这里使用命题 7 和以下初等极限

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to+\infty} e^{-\frac{c}{2}|J|(2n-1-|J|)} V^{\mathrm{bc}}_{\varepsilon J}(\xi; g^{(c)}) = V^{\mathrm{t}}_{\varepsilon J}(\xi; g),\\
&\lim_{c\to+\infty} e^{-\frac{c}{2}p(2|K|-1-p)} U^{\mathrm{bc}}_{K,p}(\xi; g^{(c)}) = U^{\mathrm{t}}_{K,p}(\xi; g),\\
&\lim_{c\to+\infty} e^{-\frac{c}{2}\ell(2n-1-\ell)} E^{\mathrm{bc}}_{\ell}(x + c\rho_M) = E^{\mathrm{t}}_{\ell}(x),
\end{aligned}$$

其中 $|K| = n - |J|$，$p = \ell - |J|$。

(ii) 为了推导 $\mathsf{r} = \mathsf{cs}$ 的差分方程，在 $\mathsf{r} = \mathsf{bc}$ 的第 $\ell$ 个差分方程中进行平移 (1.6a) 和参数代换 (1.6b)。再乘以形如 $e^{-c\ell}\gamma_L(g^{(c)})$ 的整体缩放因子，即可得到对应于 $c \to +\infty$ 的 $\mathsf{r} = \mathsf{cs}$ 型差分方程。这里用到了命题 7 和以下初等极限

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to+\infty} e^{-c|J|} V^{\mathrm{bc}}_{\varepsilon J}(\xi; g^{(c)}) = V^{\mathrm{cs}}_{\varepsilon J}(\xi; g),\\
&\lim_{c\to+\infty} e^{-cp} U^{\mathrm{bc}}_{K,p}(\xi; g^{(c)}) = U^{\mathrm{cs}}_{K,p}(\xi; g),\\
&\lim_{c\to+\infty} e^{-c\ell} E^{\mathrm{bc}}_{\ell}(x + c\rho_L) = E^{\mathrm{cs}}_{\ell}(x),
\end{aligned}$$

其中 $|K| = n - |J|$，$p = \ell - |J|$。

在这两种情况下，首先得到的都是在受限区域 $(\xi, x, g) \in \mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{bc}} \times \mathbb{C}^3$ 内成立的差分方程。通过解析延拓，可直接将其推广至 $\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{t}} \times \mathbb{C}^3$ 和 $\mathbb{C}^n_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{A}^{\mathrm{cs}} \times \mathbb{C}^3$ 中的 $(\xi, x, g)$。

## References


A77. M. Adler, 《某些有限维可积系统及其散射行为》, 《数学物理通讯》55（1977）, 195–230。
B03. O. Babelon, 《Whittaker 函数的对偶变量方程》, 《数学物理快报》65（2003）, 229–240。
BO11. F. Baudoin 和 N. O'Connell, 《布朗运动的指数泛函与一类 Whittaker 函数》, 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》47（2011）, 1096–1120。BO05a. S. Ben Sa¨ıd 和 B. Ørsted, 《平坦对称空间上的分析》, 《纯粹与应用数学杂志》84（2005）, 1393–1426。BO05b. , 《通过三角函数情形研究根系的贝塞尔函数》, 《国际数学研究通报》IMRN 2005(9), 551–585。BZ17. E. Bisi 和 N. Zygouras, 《点到线聚合物与正交 Whittaker 函数》, 《美国数学会汇刊》（即将出版）。BC14. A. Borodin 和 I. Corwin, 《Macdonald 过程》, 《概率论及相关领域》158（2014）, 225–400。C00. O.A. Chalykh, 《量子 Ruijsenaars 模型的双谱性及其可积变形》, 《数学物理杂志》41（2000）, 5139–5167。C97. I. Cherednik, 《逆 Harish-Chandra 变换与差分算子》, 《国际数学研究通报》IMRN 1997(15), 733–750。D95. J.F. van Diejen, 《差分 Calogero-Moser 系统与有限 Toda 链》, 《数学物理杂志》36（1995）, 1299–1323。DE15. J.F. van Diejen 和 E. Emsiz, 《Heckman-Opdam 超几何函数的差分方程及其合流 Whittaker 极限》, 《数学进展》285（2015）, 1225–1240。DE18. , 《具有边界扰动的量子 Toda 链的双谱对偶差分方程》, 《国际数学研究通报》IMRN, DOI: 10.1093/imrn/rnx219

DG86. J.J. Duistermaat 和 F.A. Gr¨unbaum，《谱参数中的微分方程》，《数学物理通讯》103（1986），177–240。F13. L. Feh´er，《从哈密顿约化视角看开放托达格的作用-角映射与对偶性》，《物理快报 A》377（2013），2917–2921。FG14. L. Feh´er 和 T.F. G¨orbe，《三角 Sutherland 系统与完备有理 Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 系统之间的对偶性》，《数学物理杂志》55（2014），102704。FK09. L. Feh´er 和 C. Klim˘c´ık，《双曲 Sutherland 模型与有理 Ruijsenaars-Schneider 模型之间的对偶性》，《物理学杂志 A》42（2009），185202。FM17. L. Feh´er 和 I. Marshall，《Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 型可积哈密顿系统的作用-角对偶》，《物理学杂志 A》50（2017），314004。F10. P.J. Forrester，《对数气体与随机矩阵》，《伦敦数学会专著系列》第34卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010。GLO11. A. Gerasimov、D. Lebedev 和 S. Oblezin，《相互交织的量子 Toda 链》，《圣彼得堡数学杂志》22（2011），411–435。GLO12.，《经典李群上 Whittaker 函数的新积分表示》，《俄罗斯数学调查》67（2012），1–92。GW86. R. Goodman 和 N.R. Wallach，《Toda-格型经典与量子力学系统 III：量子化系统的联合特征函数》，《数学物理通讯》105（1986），473–509。G01. F.A. Gr¨unbaum，《双谱问题：综述》，载于《2000 年特殊函数：当前观点与未来方向》，J. Bustoz、M.E.H. Ismail 和 S.K. Suslov（编），北约科学丛书 II：数学、物理与化学，第30卷，Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，2001，129–140。H09. M. Halln¨as，《与具有外部莫尔斯势的双曲 Sutherland 模型相关的多变量贝塞尔多项式》，《国际数学研究通报》IMRN 2009(9)，1573–1611。HL10. M. Halln¨as 和 E. Langmann，《与 Calogero-Sutherland 型算子相关的广义经典多项式的统一构造》，《构造性逼近》31（2010），309–342。HR12. M. Halln¨as 和 S.N.M. Ruijsenaars，《相对论性 Calogero-Moser 与 Toda 系统的核函数和 B¨acklund 变换》，《数学物理杂志》53（2012），123512。HR15.，《双曲非相对论性 Calogero-Moser 哈密顿量的联合特征函数的递归构造》，《国际数学研究通报》IMRN 2015(20)，10278–10313。H82. M. Hashizume，《半单李群上的 Whittaker 函数》，《广岛数学杂志》12（1982），259–293。HO87. G.J. Heckman 和 E.M. Opdam，《根系与超几何函数 I》，《组合数学》64（1987），329–352。HS94. G. Heckman 和 H. Schlichtkrull，《对称空间上的调和分析与特殊函数》，《数学展望》第16卷，学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1994。H00. S. Helgason，《群与几何分析：积分几何、不变微分算子与球函数》，《数学调查与专著》第83卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。I89. V.I. Inozemtsev，《有限 Toda 格》，《数学物理通讯》121（1989），629–638。IM86. V.I. Inozemtsev 和 D.V. Meshcheryakov，《与李代数相关的有限维量子系统的离散谱态》，《物理学文稿》33（1986），99–104。I13. T. Ishii，《奇数阶正交群上的 Whittaker 函数》，《李理论杂志》23（2013），85–112。J06. M. de Jeu，《Dunkl 变换的 Paley-Wiener 定理》，《美国数学会汇刊》358（2006），4225–4250。KL01. S. Kharchev 和 D. Lebedev，《由 QISM 形式体系得到的量子开放与周期托达链本征函数的积分表示》，《物理学杂志 A》34（2001），2247–2258。K79. B. Kostant，《量子化与表示论》，载于《李群表示论》（G.L. Luke 编），《伦敦数学会讲义系列》第34卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1979，287–316。

K13. K.K. Kozlowski, 《Toda 链逆问题的若干方面》, J. Math. Phys. 54 (2013), 121902. K97. V.B. Kuznetsov, $\mathcal{D}_n$ 型周期 Toda 格的变量分离, J. Phys. A 30 (1997), 2127–2138. KJC95. V.B. Kuznetsov、M.F. Jørgensen 和 P.L. Christiansen, 《可积格的新边界条件》, J. Phys. A 28 (1995), 4639–4654. OP83. M.A. Olshanetsky 和 A.M. Perelomov, 《与李代数相关的量子可积系统》, Phys. Rep. 94 (1983), 313–404. O88. E.M. Opdam, 《根系与超几何函数 IV》, 《组合数学》67 (1988), 191–209. O95. , 《分次 Hecke 代数某些表示的调和分析》, Acta Math. 175 (1995), 75–121. O00. , 《实反射群和复反射群的 Dunkl 算子讲义》, MSJ Memoirs, Vol. 8, 日本数学会, 东京, 2000. O07. T. Oshima, 《与经典根系相关的完全可积系统》, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 3 (2007), Paper 061. OS10. T. Oshima 和 N. Shimeno, 《Heckman-Opdam 超几何函数及其特化》, 载于: 《表示论与非交换调和分析的新观点》, M. Itoh 和 H. Ochiai（编）, RIMS Kˆokyˆuroku Bessatsu, Vol. B20, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), 京都, 2010, 129–162. P12. B.G. Pusztai, 《双曲 $BC_n$ Sutherland 模型与有理 $BC_n$ Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 模型: Lax 矩阵与对偶性》, Nuclear Phys. B 856 (2012), 528–551. P13. , 《双曲 $BC_n$ Sutherland 模型与有理 $BC_n$ Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 模型的散射理论》, Nuclear Phys. B 874 (2013), 647–662. R12. K. Rietsch, 《量子 Toda 格的镜像对称解》, 《数学物理通讯》309 (2012), 23–49. RKV13. M. R¨osler、T. Koornwinder 和 M. Voit, 《BC 型与 A 型超几何函数之间的极限过渡》, 《组合数学》149 (2013), 1381–1400. RV04. M. R¨osler 和 M. Voit, 《通过三角函数情形证明 Dunkl 交织算子的正性》, 《国际数学研究通报》IMRN 2004(63), 3379–3389. RV16. , 《某些 BC 型 Heckman-Opdam 超几何函数的积分表示与一致极限》, 《美国数学会汇刊》368 (2016), 6005–6032. R87. S.N.M. Ruijsenaars, 《相对论性 Calogero-Moser 系统的完全可积性与椭圆函数恒等式》, 《数学物理通讯》110 (1987), 191–213. R88. , 《某些有限维可积系统的作用角映射与散射理论。I. 纯孤子情形》, 《数学物理通讯》115 (1988), 127–165. R90a. , 《相对论性 Toda 系统》, 《数学物理通讯》133 (1990), 217–247. R90b. , 《有限维孤子系统》, 载于: 《可积与超可积系统》, B.A. Kupershmidt（编）, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1990, 165–206. S99. P. Sawyer, 《与根系 $A_{n-1}$ 相关的 Schr¨odinger 算子的本征函数》, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50 (1999), 71–86. S08. N. Shimeno, 《从 Heckman-Opdam 超几何函数到与根系相关的 Whittaker 函数的极限过渡》, arXiv.0812.3773. S88. E.K. Sklyanin, 《量子可积系统的边界条件》, J. Phys. A 21 (1988), 2375–2389. S13. , 《量子开放 Toda 链的双谱性》, J. Phys. A 46 (2013), 382001. T98. A.V. Tsiganov, 《可积格的动力学边界条件》, J. Phys. A 31 (1998), 8049–8061. W84. S. Wojciechowski, 《外部四次势中的 Calogero-Moser 系统及其他多体系统的可积性》, 《物理快报 A》102 (1984), 85–88.

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile
*Email address*: diejen@inst-mat.utalca.clFacultad de Matemáticas,
Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306,Correo 22, Santiago, Chile
*Email address*: eemsiz@mat.uc.cl