arXiv:2305.00796v1 [math.GR] 1 May 2023

关于直线上的分段射影群的一些评论

NICOLAS MONOD

摘要。我们研究直线上的分段射影同胚群。借助 Carrière–Ghys 关于遍历等价关系的定理，已知这些群是非可和的。通过用显式的不动点论证替代该定理，我们可以加强这一结论，并在各种分段射影群之间展示不可数多个“均 amen 性间隙”。

谨以此文向 *Rostislav Grigorchuk* 致以敬意，纪念他的 *70* 岁生日。*Slava* 在我还是学生时向我介绍了 *Thompson* 群，此后也曾多次如此。

目录

1. 引言 1 2. 记号与预备知识 3 3. 可 amen 性与不动点 5 4. 深化并加强非均 amen 性 10 5. 补充说明 14 参考文献 17

1. 引言

本文旨在重新探讨并加强实数直线上的分段射影同胚群 H(实数集) 及其许多子群的非均 amen 性。

重新审视 [Mon13] 中给出的证明，其动机在于该证明所引入的、用于证明非均 amen 性的方法依赖于等价关系理论，特别是 Carrière–Ghys [CG85]定理。该定理回应了 Connes 和 Sullivan 提出的一个猜想。我们将证明，无须借助 Carrière–Ghys 定理，仅从基本原理出发也能证明非均 amen 性。 这一可能性在[Mon13]的注 11 中已有所提及；这一次，我们给出一个初等的群论证明来证明非均 amen 性。具体而言，在第 3.C 节中，我们展示一些具体的凸紧空间，群在其上作用时没有不动点。这适用于 H(实数集) 以及定义在诸如 有理数集、$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$、$\mathbf{Z}[1/p]$等算术环上的子群，以及它们不可数多个变体。

加强非均 amen 性有两个动机：第一，*Mon* [Mon13], 中证明了若干与 *amenability* 类似的性质， [Mon13], 其中最引人注目的是 $H(\text{实数集})$ 不含非阿贝尔自由子群。第二，最著名的分段射影群是 Thompson 群 F，其 amenability 仍是一个众所周知的开放问题。事实上，我们的判据恰恰不适用于 F ，而我们也一再被问到：其他各群的非均 amen 性能否对 Thompson 群有什么启示，或意味着什么?

针对这个问题，我们将证明，在$H(\mathrm{R})$的子群中，存在无穷多个层层叠加的“非 amenability 层”。对于任意素数S 集，我们将系数限制为S-整数环 $\mathrm{Z}[1/S]$ ，从而得到 $H(\mathrm{R})$ 的子群 Γ_S。这定义了一个由 $2^{\aleph_0}$ 个子群构成的偏序集，而F位于整数系数群 $\Gamma_\varnothing$ 的底部。

定理 I. 设 S、S' 是任意两个素数集，且 $S \subsetneq S'$。

那么， Γ_S 在$\Gamma_{S'}$中不是余 *amenable*。

下面将回顾余可和性的定义（第 4.A节）；通俗地说，这意味着$\Gamma_{S'}$“amenable 程度更低”，比 Γ_S还要低。

特别地，我们为上述问题的启发式回答给出了一个数学上定义严谨的版本：不，我们在$H(\mathrm{R})$中的各种子群的非可和性，并不能为 Thompson 群提供任何线索。非正式地说：对于非空的S，无论F是否 amenable， Γ_S 都是非可和的。如果F 在 Γ_S中余 amenable，那么我们的非可和性结果便会推出F非可和。反过来，如果F 非可和，那么 Γ_S 仍然比F“amenable 程度更低”。

读者或许会遗憾：能够嵌套成一条链的两两不余 amenable 子群只能有可数多个 Γ_S ，而所有 Γ_S 子群构成的偏序集却包含可数群$H(\text{有理数集})$的连续统多个子群。

不必担心：定理 I 源自一个更一般的结论，而该结论确实允许我们从“相互非均 amen 性”的角度区分任意两个 Γ_S。下面给出一种具体表述：

定理 II. 设 S、S' 是任意两个素数集，且 $S \neq S'$。

那么，存在一个凸紧(显式) $H(\text{有理数集})$-空间，其中只有子群 Γ_S 和$\Gamma_{S'}$ 中的一个拥有不动点。

事实证明，即使在 I 中 $S \subsetneq S'$ 的情形下，后一结论在形式上也强于定理。这将在第 4.A 节中解释，届时我们会回顾 相对余可和性 的概念。子群间这种“均 amen 性间隙”也可以反映在 相对Furstenberg边界 $\partial(G, G_1)$ 中；该边界由 [BK21、Mon21] 引入；定理 II 意味着：

推论 III. 相对 *Furstenberg* 边界 $\partial(H(\text{有理数集}), \Gamma_S)$，其中 S 遍历所有素数子集，构成两两不同构的紧致 $H(\text{有理数集})$-空间。

下一个结果追溯到完全一般的环，并指出，$H(A)$ 的非均 amen 性可以加强为相对于整系数群 的 amenability 间隙。与本引言中陈述的其他所有结果不同，该结果将使用 [Mon13]中引入的关系方法予以证明。

定理 IV。 如果 A ＜ 实数集 是除 $\mathbf{Z}$以外的任意环，那么 $\Gamma_{\varnothing}$ ，从而汤普森群也不余 *amenable* 于 $H(A)$。

最后，我们指出，本短文中使用的方法很容易推广到上述群的某些变体。例如，我们将在下文的定理 5.1 中证明，汤普森群在一个更大的 C^1-微分同胚群中也不是余 amenable 的。

各种子群之间相对余可和性的考察可以利用某种与给定群 G 函子性地关联的不动点谱G来表述，它是一个偏序集G。粗略地说，的点G 由 G的子群定义；如果两个子群在任意给定的凸紧 G-空间中同时具有或同时不具有不动点，则将它们视为相同，参见第5.B节。

那么定理 II 可以重新表述为：所有素数集构成的偏序集可忠实且满嵌入 G 中，G =H(有理数集) 中。更一般地，每个 Γ_S 都包含一个与 S 的所有子集构成的偏序集同构的副本，见推论 5.4。

2. 记号与预备知识

群 H(实数集) 由实数直线上的所有同胚h 组成，其中直线可分解为有限个区间，使得在每个区间上，h 由$h(x) = g(x) = ax + b\,cx + d$ 给出，其中 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$! 属于 SL_2(实数集)。这里的g 取~~决于区~~间；由于我们考虑的是直线上的同胚，奇点$x = -d/c$ 不能位于相应的区间内。

元素g 在 PSL_2(实数集) 中局部唯一确定；但只要不会引起混淆，我们就使用 SL_2(实数集) 中的矩阵代表元。

我们用射影坐标$[x : 1]$ 来将射影直线 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 表示为 R $\cup\{\infty\}$，其中x $\in$ 属于 R，且 $\infty = [1 : 0]$, ； 不过，我们也使用带符号的符号 $\pm\infty$ ，以便说明 R 中各点的相对位置，以及它们如何可能在 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$中收敛到$\infty$。

通过限制矩阵g 的系数和 R 中断点的位置，我们可以得到H(R) 的各种子群：

给定一个（含幺）环 A ＜R，以及一个集合 B $\subseteq$R，使得 B $\cup\{\infty\}$ $\subseteq \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 在 $\mathrm{SL}_2(A)$ 作用下保持不变，我们将 $H_B(A)$ 记为这样一个子群：其矩阵取自 $\mathrm{SL}_2(A)$，断点取自 B。第一个例子是 $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})$，它与 Thompson 群 F 同构，正如 Thurston 所指出的那样（这一事实可通过将 Q 的 Stern–Brocot 细分树 $\cup\{\infty\}$ 与

更常见的 PL 定义中所用的 $[0,1]$ 二进划分树F [Imb97]; [CFP96, §7] 中给出的证明 $[0,1]$ 是这一论证的一个变体，其中使用了 R 本身上的分段射影变换。

构造直线上的分段射影变换，最简单的方法是将 实数集沿 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 一分为二。任意双曲的 $g \in \mathbf{SL}_2(A)$ 都恰有两个不动点位于 $\mathbf{P}^1$，因此将 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 分成两个区间。接着，我们可以在包含 ∞ 的连通分支上取恒等映射，在另一个分支上取 g，从而定义 $H(\mathbf{R}$中的一个元素。因此，我们在 [Mon13] 中使用由所有此类不动点构成的集合 B，并将所得的群简记为 $H(A)$。

或许更简单的做法是只限制矩阵系数，并使用直线上的所有分段-$\mathrm{SL}_2(A)$ 同胚所构成的群。用上述记号表示，这个群是$H_{\mathbf{R}}(A)$。在本文的主要情形中，也就是 S-整数环 $A = \mathbf{Z}[1/S]$,，这两种约定恰好一致：

引理 2.1。 设 S 是任意非空的素数集合。那么，任何具有$\mathbf{Z}[1/S]$中矩阵系数的 H(实数集) 元素的所有断点，都是$\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[1/S])$中双曲元素的不动点。

因此，引言中定义的群 Γ_S 与可数群 $H(\mathbf{Z}[1/S])$ 重合。

证明。 设 $A = \mathbf{Z}[1/S]$。首先注意到，由于 S 至少包含某个素数 p，点 ∞ 和 0 是 $\mathrm{SL}_2(A)$ 中双曲元素 $h = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right)$的不动点。

现在设 $x \in R$ 是元素 $g \in \Gamma_S$的任意断点。考虑在 x 左侧和右侧区间上描述 g 的矩阵代表元 g_-、$g_+ \in \mathrm{SL}_2(A)$，由连续性可得 $g_- x = g_+ x$。因此，$g_-^{-1} g_+$ 是 $\mathrm{SL}_2(A)$ 中固定 x 的元素。由于 x 是断点，该元素非平凡；因此它是双曲的或抛物的。在第一种情况下结论成立；在第二种情况下，x 是有理数，因为 $g_-^{-1} g_+$的特征多项式只有一个解，且其系数属于 $A < \mathbf{Q}$。由于 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ 上传递地作用，存在 $k \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 使得 $k.0 = x$。现在，共轭元 khk^{-1} 是 $\mathrm{SL}_2(A)$ 中固定 x 的双曲元素。□

接下来，我们回顾 [Mon13]中的弗兰肯斯坦式剪切拼接。由于我们的目标是给出非均 amen 性的初等证明，因此我们同时介绍基本的动力学解释和 [Mon13中的显式代数计算，命题 9]（尤其是后者，因为期刊版本中有一些“≠”而不是“=”。）

命题 2.2。 对于每个 $g \in \mathbf{SL}_2$(实数集) 以及满足 $gx \neq \infty$ 的 $x \in$ 实数集，都存在一个实数集上的分段射影同胚 h，使其在 x 的某个邻域内与 g 重合。

此外，只要 $A <$ 实数集 是一个包含 g 的系数的环，就可以取 $h \in H(A)$。

动力学解释。 实数集上的同胚h 按如下方式构造：在x 附近的一个小区间上保持g 不变，并在其他所有地方继续延拓。

某个平移 $y \mapsto y + n$。因此，我们只需让区间边界成为x 左右两侧的两个点，在这两点处，g 与n平移重合。g 这类射影变换的基本动力学性质表明，对于任意 足够大的$n \in$实数集，都恰有两个点满足这一条件，对应n 或可能的 $-n$。唯一的例外是g 本来就是仿射变换，此时命题显然成立。□

现在我们给出一个完全明确的代数证明，以便追踪所涉及的系数ffi，遵循 [Mon13]。上面的平移 n 现在将对应于矩阵上的列运算 g，因此我们取 $n \in \mathbf{Z}$ 保留在 A 中。

代数证明。 我们可以假设 $g\infty, \infty$。断言：存在 $q_0 \in \mathrm{SL}_2(A)$，使得$q_0\infty = g\infty$，并且具有两个不动点 ξ_-，$\xi_+ \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$，使得由 ξ_-，ξ_+ 确定的 R 的开区间包含 gx 但不包含 $g\infty$。

为从这一断言推出该命题，考虑 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 上的分段-$\mathrm{SL}_2(A)$同胚q，它在上述区间上为恒等映射，并且在其补集上由 q_0 给出。由于该区间由q_0的不动点确定，这确实是一个同胚。现在 $h = q^{-1}g$ 固定了 ∞，并且是所需的元素$h \in H(A)$。（注意，h 的断点是$g^{-1}\xi_\pm$，它们是双曲矩阵 $g^{-1}q_0g$的不动点。）

为证明这一结论，将g 表示为$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，并定义$q^0$ 为$\begin{pmatrix} a & b + na \\ c & d + nc \end{pmatrix}$，其中$n \in \mathbf{Z}$是一个尚待选定的整数。于是$q_0\infty = [a : c] = g\infty$ 成立。此外，gx，∞ 迫使c，0，因此我们可以假设$c > 0$。因此，迹

$$\tau = a + d + nc \in A$$

只要 $|n|$ 足够大，便满足 $\tau^2 > 4$。于是有两个实特征值 $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4})$，以及相应的特征向量$\begin{pmatrix} x_\pm \\ c \end{pmatrix}$，其中$x_\pm = \lambda_\pm - d - nc$，它们表示点 $\xi_\pm = [x_\pm : c]$。现在计算$\lim_{n\to+\infty} \xi_- = -\infty$和$\lim_{n\to+\infty} \xi_+ = [a : c] = g\infty$，后一极限从左侧趋近，因为$x_+ < a$。结论：若$gx < g\infty$，则任何足够大的$n$ 都将确保

$$\xi_- < gx < \xi_+ < g\infty,$$

由此得出该情形下的结论。另一种情形下，当 $gx > g\infty$ 时，同样可以完全照此方法得出结果，只需令 $n \to -\infty$。□

3. 可 amen 性与不动点

3.A. 凸紧空间。如果我们的目标是给出一个简单明了、透明易懂的非均 amen 性证明，就应该从 amenability 的诸多等价定义中选择一种：

定义 3.1。若每个凸紧G 空间G-空间K 都具有不动点，则称群 G 是 amenable 的，$\varnothing$。

该定义隐含着：G 通过仿射同胚映射作用于K，并且K 的凸紧结构由某个包含K的环境局部凸豪斯多夫拓扑向量空间所诱导。

不过，我们的出发点是一个非常具体的例子：空间 K 没有不动点。也许这是此类例子中最简单、最广为人知的一个：

例3.2（射影直线上的测度）。令 K =概率测度$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}})$为 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$上概率测度所构成的空间，并赋予弱-*拓扑。当测度被视为 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$上连续函数空间 C 上的泛函时，这就是逐点收敛拓扑。于是，对于 G =SL_2(实数集)，K 是一个凸紧的G-空间，且没有 G-不动点。事实上，若 g $\in G$ 是一个双曲矩阵，那么任何被 g 固定的概率测度，其支集都包含在被 g固定的两个点 $\xi_\pm$ $\in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 中，也就是由 g的特征向量确定的两个点。更准确地说，对任意 x , $\xi_\pm$，当 $g^n x$ 趋近于无穷大时，它会收敛到具有最大特征值的特征向量 ∞ （对 g进行对角化后，这一点尤为明显）。由于这迫使 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ r $\{\xi_\pm\}$中的任意紧区间都具有相同的收敛性，因此对测度也能推出上述结论。

总之，两个没有公共特征向量的双曲矩阵不可能同时固定K 中的任何一点。这个经典的“乒乓”论证还能说明更多：这两个矩阵的适当次幂可以自由生成一个自由群。

注3.3. 将定义3.1中的作用要求为联合连续，即映射 $G \times K \to K$连续，便可将 amenability 的定义推广到拓扑群。因此，这比底层抽象群 G 具有 amenability 的条件更弱。对于 G上的通常拓扑，例3.2中的作用是联合连续的。因此，这也证明了将 G 视为拓扑群时，它仍是非可和的。

例3.4（p进射影直线上的测度）。 例3.2中的论证原样适用于有理数集p 中的任意素数p。这说明$\mathbf{K}$ = 概率测度$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p})$ 是一个没有不动点的凸紧G-空间，其中G = $\mathbf{SL}_2$(有理数集p)。然而请注意，子群 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}p)$ 在K 中存在一个不动点，因为它在p进拓扑下是一个紧群，且该作用是连续的。

接下来，我们介绍唯一的另一种凸紧空间来源：一种以凸紧空间 K_0 为输入并生成新空间K 的构造方法，该方法通过考察K_0值映射来实现。我们只会在 K_0 由例 3.2 或例 3.4 给出时应用这一构造。

例3.5（函数空间）。从一个凸紧的G-空间K_0 出发，并将K 定义为所有可测映射f: $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$! K_0，组成的空间，其中两个映射若在零测集之外相同，则视为相同。

为定义K上的紧拓扑，简单起见，我们假设K0可度量化，且可实现为某个巴拿赫空间C'的对偶空间中的子集，并赋予弱-*拓扑。例3.2 和例3.4都属于这种情况，即$C(\mathbf{P}^1)$是射影直线上的连续函数空间，而C'是测度空间。现在K 赋予弱-*拓扑，此拓扑是将其视为$L^1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}},C)$的对偶空间中的子集而得到的。根据阿劳格鲁定理，它是紧的。

（即使超出本文的简单需求，上述假设也并不苛刻：不需要可度量性，而且总可以通过令C'为C 上的连续仿射函数空间，得到在某个K中的实现。）

3.B. 映射上的分段作用。现在，我们为例3.5中的映射凸紧空间赋予群作用。如果 K0 是一个凸紧 G-空间，并且 G 还作用在 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$上，那么 G 对 $\mathrm{f}:\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}\to \mathrm{K}_0$ 的作用定义为 $(\mathrm{g.f})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{g}^{-1}\mathrm{x}))$，其中 $\mathrm{x}\in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$。因此，$\mathrm{f}\in \mathrm{K}$ 是 G-不动点，当且仅当 f 作为映射是 G-等变的。这里假定 G 对 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 的作用是非奇异的，即保持零测集不变。这保证了 G 的作用定义良好，且由同胚构成。

例如，如果 G = SL_2(实数集) 且 K_0 = 概率测度($\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$)，那么这个$G$在$K$上的作用存在一个不动点，即将$x$ 映射到x处的狄拉克测度的映射。

例子3.5 的关键意义在于，上述定义的作用可以更一般地适用于分段群：

令 H 为 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 上由分段 $\mathrm{SL}_2(A)$ 变换构成的一个群，其中 A <实数集是任意一个子环。此时，甚至不要求 $h\in H$ 必须是一个同胚；我们只需要知道，各个“片段”的内点覆盖了 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$，至多相差一个零测集。显然，当我们有有限个区间作为片段时，这一条件便成立。因此，除了 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 中的一个我们将忽略的零测集之外，可以在 $x\in\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$处定义 h 的射影部分 $h|_x\in \mathrm{PSL}_2(A)$。注意，对于 $h,h'\in H$，我们有链式法则：$(hh')|_x = (h|_{h'x})(h'|_x)$。

现在给定一个凸紧致的 $\mathrm{PSL}_2(A)$-空间 K_0，我们通过下式定义空间 K 上可测映射 f：$\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}\to K_0$ 的 H-作用

$$(h.f)(x) = h|_{h^{-1}x}(f(h^{-1}x)),\qquad x\in\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}.$$

这个 H-作用在 K 上非常适用于第 2节回顾的剪贴法。事实上，注意到链式法则给出 $h|_{h^{-1}x} = (h^{-1}|_x)^{-1}$，我们看到，当且仅当

$$f(hx) = h|_x(f(x))\quad \text{for all } h\in H \text{ and a.e. } x\in\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}.$$

关键在于，这个方程只涉及 h 在x处的局部 行为。因此，它立即推出以下结论。

命题 3.6。 假设对于每个 $g\in \mathbf{PSL}_2(A)$ 以及几乎处处的 $x\in\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$，都存在 $h\in H$，使得 $h|_x = g$。

那么，$f \in K$ 是 H-不动的，当且仅当它是 $\mathbf{PSL}_2(A)$-不动的。

证明。 假设 f 是 H-不变的。我们要证明：给定 $g \in \mathrm{PSL}_2(A)$ 和 $x \in \mathrm{P}^1_{\mathbf{R}}$，有 $f(gx) = gf(x)$成立。假设中的元素 h 满足 $f(hx) = h|_x f(x)$，这正是所要证明的，因为 $h|_x = g$。反向命题显然成立。 □

3.C. 基本的非 amenability 论证。我们已经具备了所有要素，可以推导出许多分段射影群$H(A)$是非可和的。我们先讨论$A = \mathrm{Z}[1/p]$ 的情形，以及更一般的整数系数S-情形。

定理 3.7. 设 S 是任意非空的素数集合，并取 $p \in S$。

那么，群 $\Gamma_S = H(\mathbf{Z}[1/S])$ 在由可测映射构成的凸紧空间 K 中没有不动点 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to$ 概率测度$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p})$。

特别是，这个群是非可和的。

证明。 只需考虑 $S = \{p\}$。命题2.2 的剪切拼接原理表明，我们处于命题3.6的情形。因此，只需证明 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[1/p])$ 在映射空间 K 中没有不动点$f\colon \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to$ 概率测度 $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p})$。

记 $\Lambda = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[1/p])$, $G_{\mathbf{R}} = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, $G^{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}p)$ 和 $G = G_{\mathbf{R}} \times G^{\mathbf{Q}_p}$。根据初等约化理论（见下文注 3.8 ），在 Λ 中的对角像G 是离散的，且具有有限余体积。

我们将K 上的 Λ作用扩展为一个G作用，定义如下：

$$((g_1, g_2).f)(x) = g_2(f(g_1^{-1}x)), \qquad g_1 \in G_{\mathbf{R}}, g_2 \in G_{\mathbf{Q}_p}.$$

这是一个没有不动点的连续作用：被$G_{\mathbf{R}}$ 固定的映射必为常值映射，其常值必被$G^{\mathbf{Q}_p}$固定；然而$G^{\mathbf{Q}_p}$ 在概率测度$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p})$上没有不动点，见例3.4。不过，任何被$\Lambda$ 固定的点，都能通过对商空间G/Λ上的积分，得到另一个被G 固定的点。具体而言，若$f \in K$ 被 Λ固定，则轨道映射$g \mapsto g.f$可下降到G/Λ，因此 $\mathrm{R}_{G/\Lambda} g.f\, d(g\Lambda) \in K$ 被G固定。□

注 3.8 (约化理论)。 由于定理 3.7 的证明用到了Λ 在 $G_{\mathbf{R}} \times G^{\mathbf{Q}_p}$中是离散的且具有有限余体积，因此值得回顾一下这一初等事实：

离散性成立，因为根据 p进拓扑的定义，$\mathrm{Z}[1/p]$ 在 $\mathrm{R} \times \mathrm{Q}^p$ 中是离散的。至于基本域，只要 $D \times$ 是模群 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}p)$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{R})$ 中的基本域，我们就可以取 $D \times \mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}p)$。事实上，$\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}p)$ 是 $G^{\mathbf{Q}_p}$ 的紧开子群（同样，这是因为根据拓扑的定义，$\mathrm{Z}p$ 在 $\mathrm{Q}p$ 中具有相应的性质），并且 $\Lambda \cap \mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}p)$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z})$。最后，一个非常具体的有限体积域自高斯以来就已为人所熟知，即上半平面中条带 $|\mathrm{Re}(z)| \le 1/2, |z| \ge 1$ 的在 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{R})$ 中的原像。

其他数域的情形，如下文例 3.9 所示，可通过标量限制处理，例如参见 Siegel，《Satz》12，第 233 页 [Sie39]。（推广到任意约化群的情形远远超出我们的需要，即 Borel–Harish-Chandra 定理 [BHC62，定理 12。3], [Bor63，§8]。）

定理 3.7的证明基于数域 p-进完备化$\mathbf{Q}$。对于另外两类赋值，即实完备化和复完备化，证明完全同样成立：

例 3.9（其他赋值）。 上面对环 $A = \mathbf{Z}[1/p]$ 所给出的论证可应用于任意其他实数域 $F < \mathbf{R}$中的 S-整数（或整数）环 $A < \mathbf{R}$，但 $A = \mathbf{Z}$除外。事实上，在定理 3.7p的证明中使用 Q时，我们只需要在给定的完备化 F 之外，再取 $\mathbf{Q}$ 的某个完备化，它用于定义变量 $\mathbf{x} \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$上的作用。

特别是，即使第二个完备化也恰好是 R，这种做法仍然适用。例如，考虑 $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$，它是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ [Sam70, §2.5] 的整数环。我们通过第二个嵌入 $\Lambda \to G_{\mathbf{R}} \times G_{\mathbf{R}}$（由负的二的平方根给出），令 $\Lambda = \mathrm{SL}_2(A)$ 作用于 $\mathrm{Prob}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}})$。完全按照上面的推理，$\Lambda$ 在由映射 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathrm{Prob}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}})$ 构成的空间 K 上的作用没有不动点，因为 Λ 是 $G_{\mathbf{R}} \times G_{\mathbf{R}}$中的一个格。因此，命题 3.6 表明，H(A) 在 K 中没有不动点，特别是它不是 amenable。

同样，如果一个实数域 $F \subset \mathbf{R}$ 不是全实的，那么它的另一个阿基米德完备化可能是复数域。例如，纯三次域就是如此，如 $F = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$。将其整数环记为 $\mathcal{O}_F$，于是我们可以利用$H(\mathcal{O}_F)$在映射 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathrm{Prob}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}})$构成的凸紧空间中没有不动点这一事实。

注 3.10（生成空间）。众所周知，如果一个（离散）群Γ 包含一个非可和群 $\Lambda < \Gamma$，那么 Γ 也非可和。鉴于$\Gamma = H(\mathbf{R})$，读者可能会问：这个事实能否也用凸紧空间中的不动点给出一个初等证明？这个问题合情合理，因为一般的拓扑群并不具有这一性质，而不动点条件则完全具有普遍性。

确实存在这样一个直接论证。设 K_0 , $\varnothing$ 是一个没有不动点的凸紧Λ-空间。定义生成空间 K 如下

$$K = \left\{ f : \Gamma \to K_0 : f(hg) = hf(g) \ \forall h \in \Lambda, g \in \Gamma \right\}$$

它在乘积拓扑（即映射 $\Gamma \to K_0$ 的逐点收敛拓扑）下是凸且紧的。这是右平移作用 $(\gamma f)(g) = f(g\gamma)$ 下的一个 Γ-空间。现在，任何 Γ-不动点 $f$in K 都必为常数，而按构造，常数值 $f(g)$ 将是 K_0 中的一个 Λ-不动点。

我们唯一需要斟酌的，或许是验证K 非空；注意，任意横截$S \subseteq \Gamma$ 通过限制可给出一个同构$K \cong K_0^S$。

4. 深化并加强非均 amen 性

4.A. 相对化。 这里的一个关键概念是子群 余可和性，$G_1 < G$ 在群 G中的余可和性；这一概念由 Eymard 提出 [Eym72]。通俗地说，它表示 G “和 G_1一样 amenable”，或者说“在 G_1amenable 的条件下，G_1 也 G 就 amenable”。提出余可和性问题时，G_1 和 G都不必是 amenable。比如，若 G_1 是 G的正规子群，那么余可和性简单地等价于商群G/G_1的 amenable 性。

群G 是 amenable 的，当且仅当每个非空凸紧G集都有一个G不动点。

定义4.1。群G 的子群$G_1 < G$ 在G 中是余 amenable 的，如果每个具有G_1-不动点的凸紧G集都有一个G-不动点。

这一概念适用于拓扑群及其子群这一一般情形，Eymard 在局部紧群的语境中对其进行了广泛研究。[Eym72] 。

还有一种推广（[Por13，§2。3], [CM14，§7.C]），用于比较两个不一定包含彼此的子群$G_1, G_2 < G$：

定义 4.2. 子群 G_1 相对于 G 对 G_2 是余 amenable 的，是指每个具有 G_1-不动点的凸紧 G-空间也具有 G_2-不动点。

同样，只需要求凸紧空间上的所有作用都是联合连续的，这一定义即可推广到任意拓扑群。

回到离散情形，我们记录以下标准等价条件。

引理 4.3. 给定群 G 中的两个子群 G_1, G_2，以下条件等价：

(i) G_1 相对于 G_2 对 G 是余 *amenable* 的；*(ii)* G_2在 G/G_1 上的作用存在不变均值；*(iii)* 准正则 G-表示 λ_{G/G_1} 在 G_2 上的限制弱包含平凡表示。

这一改述（iii）提示我们将定理 II 作为 C*-代数论证的输入；这一思路将在 [GM23]中继续探讨。

引理的证明 4.3。 (ii) 和 (iii) 的等价性是适用于任意集合上任意作用的通常 Hulanicki–Reiter 条件；此处考虑的是 G_2 对 G/G_1 的作用。(i)⇒(ii) 可由考虑 G 在 G/G_1，上所有均值所构成的凸紧空间得到；注意该空间确实有一个G_1-不动点，即平凡陪集上的狄拉克质量。

最后，对于（ii）⇒（i），考虑任意一个凸紧G-空间 K，它包含某个G_1-不动点$x \in K$。轨道映射$g \mapsto gx$ 诱导出一个G-等变映射$G/G_1 \to K$，因此通过推前可得到一个定义在K上的$_2$-不变均值。该均值的重心是一个G_2-不动点。（这里提醒一下，概率测度通常所说的重心概念

同样适用于均值。事实上，概率测度是连续函数上的态，而均值是有界函数上的态；但K 上的任意连续函数都是有界的。）□

结合定理I 和定理II 的陈述，相对余可和性的重要性如下。通过展示一个由子群构成的大偏序集$G_i < G$，其中任意两个子群都不相对于G余 amenable，我们强化了G的非均 amen 性。此类偏序集中的每条包含链都可以看作递增不可和性的梯度。

我们强调，即使这些子群是嵌套的$G_1 < G_2 <G$，这种相对非均 amen 性也比单纯指出G_1 在G_2中不余 amenable 更强：

例 4.4。考虑$G_1 < G_2 < G$ 的情形，其中G_1 在G 中余 amenable，但在G_2中不余 amenable。[MP03]和 [Pes03], 中给出了例如$G = (\mathbb{L}\ \mathbb{z}F_2)\rtimes\mathbb{Z}$、$G^2 = \mathbb{L}\ \mathbb{z}F_2$ 以及$G^1 = \mathbb{L}\ \mathbb{N}\ F_2$的例子。于是$G_1$ 相对于G仍与G_2 相对余 amenable。

现在我们可以完成引言中定理 I 和定理 II 的证明。回顾一下，对于任意素数集 S， Γ_S 表示直线上的分段 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[1/S]$ 同胚群；当 S 非空时， Γ_S 与 $H(\mathbf{Z}[1/S])$ 相同。更明确地说：

定理 4.5。 设 S、S' 为任意素数集。若 p 属于 $S'\smallsetminus S$，则凸紧 H(有理数集)-空间中的可测映射 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{R}} \to$ 概率测度$(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}_p})$ </style}存在一个 Γ_S-不动点，但不存在 $\Gamma_{S'}$-不动点。

特别地， Γ_S 相对于 H(有理数集)并非余 *amenable* 于 $\Gamma_{S'}$。
更有甚者，若 $S \subsetneq S'$，则子群 $\Gamma_S < \Gamma_{S'}$ 在 $\Gamma_{S'}$ 中并非余 *amenable*。

证明。 我们在定理 3.7 中证明了 $\Gamma_{S'}$ 没有不动点。相比之下，Γ_S 固定了一个常值映射，其值为 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$-不变测度，该测度定义在$\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ 上（见例 3.4），因为 $\mathbf{Z}[1/S]$ 包含于 $\mathbf{Z}_p$。 □

推论 III 由定理 4.5 推出这一事实，已在 [Mon21] 的推论4.2中得到确立。

正如引言中所讨论的，上述结果还表明，Thompson 群$H\mathbb{Q}(\mathbb{Z})$ 的（非）amenability 这一公开问题，与各种$H(A)$ 群在 A 为非离散时的非均 amen 性完全无关。在上述偏序集中，$H\mathbb{Q}(\mathbb{Z})$ 位于 $\Gamma_\varnothing$ 中，因此它对于其他任何 Γ_S 都不是余 amenable，甚至相对于 $H(\mathbb{Q})$ 而言，它对 Γ_S 也不是余 amenable。

4.B. 其他环。 到目前为止，这篇短文的目标是确立 [Mon13],中的非可 amen 性定理的各种变体和更强形式，但不借助测度等价关系理论。相反，我们从基本原理出发，通过简单的剪切拼接进行论证，并利用一个非常基础的事实：$\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ 在$\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ 中具有有限余体积。

这足以让我们处理环 $A = \mathbf{Z}[1/S]$，并且同样适用于其他任意实数域的整数环，例如 $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$，或它们的 S-算术推广。

为了证明引言中的定理 IV 即使在 A 并非某个 S-算术环时仍然成立，我们证明以下结果，而该结果确实依赖于 Carrière–Ghys 定理。

定理 4.6。 设 $\Lambda < H$(实数集) 为任意一个包含 $\Gamma_\varnothing$ 的子群。假设 Λ 在 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 中具有与一个可数稠密子群 $\Delta < \mathbf{SL}_2$(实数集) 相同的轨道（在$\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$中舍弃一个零测集之后）。

那么， $\Gamma_\varnothing$ 在 Λ 中不是余 *amenable* 的。

将全文中的 $\Gamma_\varnothing$ 都替换为 *Thompson* 群后，同一结论仍然成立。

例如，当 Λ 是 Lodha–Moore 所研究的群 [LM16]时。

为证明定理 4.6，我们需要关于关系中相对 amenability 的以下一般事实；它是[Mon22]中命题9所述相关事实的一个变体。

命题 4.7. 设 Λ 是一个可数群，在标准概率空间 X 上有非奇异作用。设 $\Gamma < \Lambda$ 是 Λ 的余 *amenable* 子群。

若 Γ 在 X 上产生的轨道等价关系是 *amenable* 的，则 Λ产生的关系也如此。

命题 4.7 的证明。设 L 是一个紧致可度量空间，并设$\alpha\colon \Lambda \times X \to \mathrm{Homeo}(L)$ 是取值于 L 的同胚群的关系余循环。称其为余循环，是指对每个$\lambda \in \Lambda$， $\alpha(\lambda, \cdot)$ 都是可测映射，并且对 $\lambda, \eta \in \Lambda$，链式法则 $\alpha(\lambda\eta, x) = \alpha(\lambda, \eta x)\alpha(\eta, x)$ 对几乎处处的 $x \in X$ 成立。称其为关系余循环，是指 $\alpha(\lambda, x)$ 仅取决于点对 $(\lambda x, x)$。

Hjorth 证明（见 [Hjo06]中的定理 1.1），由Λ 在X 上生成的关系是 amenable，当且仅当对于任意这样的L 和 α，存在一个可测映射$f\colon X \to$概率测度(L)，使得对每个 $\lambda \in \Lambda$ 以及几乎处处的$x \in X$

$$f(\lambda x) = \alpha(\lambda, x) f(x).$$

这等价于f在该作用下为 Λ-不动的

$$(\lambda . f)(x) = \alpha(\lambda, \lambda^{-1} x)(f(\lambda^{-1} x)).$$

与第3.B节完全一样，现在我们有一个由映射构成的凸紧 Λ空间K 。Hjorth 判据告诉我们， Γ 在K中有一个不动点，因此 Γ 在 Λ 中的余可和性□

定理的证明 4.6。 Carrière–Ghys 定理指出， Δ 在 $\mathbf{SL}_2$(实数集) 上产生的轨道等价关系不是可平均等价关系。正如 [Mon13], 中所回顾的，这意味着所产生的关系

在 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 上也不是 amenable。（这是因为 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 可以实现为 SL_2(实数集) 对一个 amenable 子群取商所得的商空间，该子群即上三角矩阵。）因此， Λ 所产生的关系不是 amenable。

另一方面，由 $\Gamma_\varnothing$ 产生的关系是 amenable 的，因为它与 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ 产生的关系重合，而后者是 amenable 的，因为$\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ 中是离散的，参见 [Zim84，4.3。2]。

至此，该结论由命题 4.7 得出。 □

注意，定理 4.6 特别推出：对于任意可数环 $\mathbf{Z} \subsetneq A < \mathbf{R}$，定理 IV 均成立。

还有一个问题：定理 IV 并未假设该环可数。解决办法应是考虑 $\Gamma_\varnothing < H(A') < H(A)$，其中 $\mathbf{Z} \subsetneq A' < A$ 是某个可数环。此方法的问题在于，对于嵌套子群 $\Gamma < \Lambda_1 < G$，一般而言， Γ 在 Λ_1 中或在 G 中的余可和性之间并无蕴含关系。事实上，正如例 4.4 中已提及的，[Pes03] 和 [MP03]，中可以找到此类例子。

如果注意到（余）amenability 是一种解析性质，且由可数数据决定，我们就能克服这一困难：

命题 4.8. 设 $\Gamma < G$ 是群 G 的一个可数余 *amenable* 子群。对于每个包含 Γ 的可数 $\Lambda_1 < G$，都存在一个包含 Λ_1 的可数子群 $\Lambda < G$，使得 Γ 在 Λ 中是余 *amenable* 的。

此外，若给定任意一个可数子群 $H < G$ 的共终族 $\mathscr{H}$，且该族对可数递增并封闭，则我们可以选取 $\Lambda \in \mathscr{H}$。

(共终 是指 G 的每个可数子群都包含于某个$H \in \mathscr{H}$ 中。在我们的情形下， $\mathscr{H}$ 将由形如$H(A)$ 的群构成。)

我们注意到，命题 4.8 有一个显然的逆命题：

设 $\mathscr{H}$ 是如上所述的一个族，且设 $\Gamma < G$ 是一个可数子群。假设对于每个包含 Γ 的可数 $\Lambda_1 < G$，都存在一个包含 Λ_1 的 $\Lambda \in \mathscr{H}$，使得 Γ 在 Λ 中是余 amenable 的。那么 Γ 在 G 中是余 amenable 的。

这直接由余可和性的定义（定义 4.1）通过紧致性论证得出。

命题 *4.8* 的证明。 我们归纳地构造一个递增的可数子群序列 $\Lambda_n < G$，其中每个子群均按 $\{\lambda_{n,j} : j \in \mathbf{N}\}$ 的形式枚举，并构造一个函数序列 $v_n \in l^1(G/\Gamma)$，使得

$$\left\|\lambda_{i,j} v_n - v_n\right\| < \frac{1}{n}\|v_n\| \quad \forall\, i, j \le n$$

适用于准正则（平移）G表示，其中定义在 $l^1(G/\Gamma)$ 上。假设 Λ_n 已给定，则由 v_n 是 Γ 在 G 中的余可和性可知，[Eym72，第 44]页）。接着，我们定义 Λ_{n+1} 为由以下集合的并生成的子群： Λ_n 以及 G 中 v_n的支集的原像；注意后者是可数集。若给定某个 $\mathscr{H}$，则我们将Λ_{n+1} 替换为一个包含它的 $\mathscr{H}$中的元素。

现在定义 Λ 为所有 Λ_n的并。由于每个 v_n 的支集都包含于 $\Lambda/\Gamma \subseteq G/\Gamma$ 中，因此在 $l^\infty(G/\Gamma)$ 上均值空间中，序列 v_n 的任意聚点实际上都定义了 $l^\infty(\Lambda/\Gamma)$ 上的一个均值。此均值是 Λ-不变的，从而验证了 Γ 在 Λ中余可和性的另一种等价刻画 [Eym72]。□

定理 IV 的证明。反设 $\Gamma_\varnothing$ 在群 $G = H(A)$ 中余 amenable，其中 A 是满足 $Z \subsetneq A < R$ 的环。设 $\mathscr{H}$ 为所有 $H(A')$ 的族，其中 A' 遍历所有满足 $Z \subsetneq A' < A$ 的可数环。令 $\Lambda_1 = H(A')$ 为这样一个群，并令 $\Lambda = H(A'')$ 为命题 4.8 给出的可数群。因此，A'' 是 A 中的可数环，并且 $SL_2(A'')$ 在 $SL_2(R)$ 中稠密，因为 $A' < A''$。因此，$\Gamma_\varnothing$ 在 Λ 中的余可和性与定理 4.6 矛盾。□

5. 补充说明

5.A. 平滑且有理地分解。 在 [Mon13] 中用于定义 $H(A)$ 的断点约定在$A = \mathbf{Z}$的情形下有一个美学上的缺点。也就是说，双曲元素的不动点是二次无理数（二次方程的解），而抛物元素的不动点是有理数。特别是，引理 2.1 在这种情形下并不成立。

因此，汤普森群 $H_{\mathbb{Q}}(\mathbf{Z})$ 和群 $H(\mathbf{Z})$ 是两个不同的子群 $\Gamma_\varnothing$ (尽管 $H(\mathbf{Z})$ 包含汤普森群的同构副本，参见 [Sta21])。

除了具有有理断点外，汤普森群 $H_{\mathbb{Q}}(Z)$ 还具有另一项令人欣喜的性质：由于 Z 没有非平凡的正单位，这些分段射影元素实际上是 C^1-光滑的。就断点而言，这是最高的光滑度，因为射影变换完全由其在任意一点处的 C^2-喷射确定。因此，我们也可以尝试加强关于 C^1-微分同胚群的非均 amen 性结果。

上述证明方法确实可以调整后用于这一情形；下面给出一个例子。

定理 5.1. 汤普森群 $H_{\mathbb{Q}}(\mathbf{Z})$ 在直线上带有有理断点的分段-$\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q})$同胚群 $H_{\mathbb{Q}}(\mathbf{Q})$ 中不是余 *amenable*。

它在较小的 $C^{C^1}{}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{Q})$ 微分同胚子群中也不是余 *amenable*。

所需要做的只是重新审视命题 2.2 中的剪切拼接，并进行一种更偏向外观修饰的手术：

命题 5.2。 对于每个 $g \in \mathbf{SL}_2$(有理数集) 以及每个满足 $gx \neq \infty$ 的 $x \in$ 实数集，存在一个分段 $\mathbf{SL}_2$(有理数集) 同胚 h：实数集，其断点均位于有理数集 中，并且在 x 的某个邻域内与 g 重合。

此外，我们可以选择 h，使其成为 $\mathbf{R}$ 上的 C^1 微分同胚。

命题 5.2 的证明。 我们首先说明为什么可以将断点取在 有理数集 中。因此，在命题 2.2 的证明中，我们希望不动点 $\xi_{\pm}$ of q_0 是有理数。等价地，根 $\sqrt{\tau^2-4}$ 必须是有理数，回顾一下，τ 是迹 $a+d+nc$。

关键在于，只要我们能够令 $|n|$ 任意大，并且其符号由 gx 与 $g\infty$的相对位置预先确定，我们就完全可以自由选择 n 。由于现在我们在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中工作，只需证明存在这样的 $n\in\mathbb{Q}$，并且还满足 $\sqrt{\tau^2-4}\in\mathbb{Q}$。

这个丢番图问题欧几里得早已知晓（见《几何原本》中的第十卷命题 29），如下所述。给定任意整数N，定义 $n\in\mathbb{Q}$，使得 $n=(N+1/N-a-d)/c$。那么 $\tau=N+1/N$，因而 $\tau^2-4=(N-1/N)^2$ 确实是一个平方数。此外，只需令$N\to\pm\infty$ 取遍 $\mathbb{Z}$ 中的值，n 确实可以取任意大的正值或负值。

现在我们转而讨论C^1 条件，这需要进一步的剖析，以拼接出一个多段样条。

命题 2.2 的证明中引入的唯一奇点 $\xi_{\pm}$出现在这两个点处，q 在此处有断点，并从q_0 过渡到恒等映射，再过渡回来。我们的策略是每次在一个断点附近对q 进行平滑处理；只要能在断点足够小的邻域内完成修改，这就足够了。由于 $\xi_{\pm}$ 是有理数，且$\mathbf{SL}_2$(有理数集) 在射影直线的有理点上具有双重传递性，因此只需证明以下命题：

对于任意$\epsilon>0$ 以及任意固定 0 和 ∞ 的$p_0\in\mathrm{SL}_2$(有理数集)，存在一个C^1-光滑的分段 SL_2(有理数集) 同胚p_1 ，其定义在实数集上，断点均属于有理数集，并且在 $(-\infty,-\epsilon]$ 上与恒等映射一致，在 $[\epsilon,+\infty)$ 上与p_0一致。

对p_0 的假设意味着它由一个对角矩阵给出，或者等价地，存在一个$a\in$∈有理数集，使得$p_0(x)=a^2x$ 对所有x都成立；不失一般性，$a>0$。取$\epsilon_1>0$ 为满足$\epsilon_1\le\epsilon,\epsilon/a$ 的有理数，并定义u ∈∈SL_2(有理数集)，使得

$$u=\frac{1}{a+1}\begin{pmatrix}2a & \epsilon_1 a(a-1)\\ (1-a)/(\epsilon_1 a) & 2\end{pmatrix}$$

（作出这一选择的概念性解释是：u 是一个幺幂元，这使我们能够匹配导数。）现在，对于x ∈实数集，定义p_1 如下：

$$p_1(x)=\begin{cases}x & \text{if } x\in(-\infty,-\epsilon_1 a],\\ u(x)=\dfrac{2ax+\epsilon_1 a(a-1)}{(1-a)x/(\epsilon_1 a)+2} & \text{if } x\in(-\epsilon_1 a,\epsilon_1],\\ p_0(x)=a^2x & \text{if } x\in(\epsilon_1,+\infty).\end{cases}$$

因此，我们只需验证p_1 确实是一个C^1光滑同胚。首先注意，分母$u(x)$仅在$x=2\epsilon_1 a/(a-1)$处为零，而该点不在u 所作用的区间$(-\epsilon_1 a,\epsilon_1]$ 内。现在来看断点处的情况：由于$u(-\epsilon_1 a)=-\epsilon_1 a$ 且$u(\epsilon_1)$ =，p_1 是连续的。

$a^2\epsilon_1$。此外，计算

$$u'(x) = \left(\frac{(1+a)a\epsilon_1}{(1-a)x + 2a\epsilon_1}\right)^2$$

我们发现，在$u'(x) = 1$ 处$x = -\epsilon_1 a$ 时，且在$u'(x) = a^2$ 处$x = \epsilon_1$时。这验证了p_1 是一个C^1-光滑同胚。□

注 5.3。 如果我们将 h 视为 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 上保持 ∞ 的不变变换，而不是 $\mathbf{R}$上的变换，那么 h 仍然是 C^1。事实上，回顾命题 2.2 的证明可知，h 在 ∞的某个邻域内只是一个平移；上述证明中的光滑化操作并未改变这一事实。因此，h 在 ∞ 的 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ 中某个邻域内是射影的（尤其是光滑的）。

定理 5.1 的证明。只需举出一个凸紧的 HQ(有理数集)-空间，它存在一个 Hz(有理数集)-不动点，但不存在被光滑群 H^{C^1} Q (有理数集)固定的不动点。任取一个素数 p。可取可测映射空间 $\mathrm{P}^1_{\mathbf{R}}$! 概率测度($\mathrm{P}^1_{\mathbf{Q}_p}$)。事实上，命题 5.2 允许我们应用命题 3.6。因此，只需证明 SL_2(有理数集)在 K 中没有不动点。这由其子群 $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z}[1/\mathrm{p}])$ 的情形推出，该情形已在定理 3.7 的证明中确立。□

5.B. 非 amen 性层次的组织。本节最后部分纯属描述性内容，置于完全一般的拓扑群 G 及其任意子群的背景下。

˙我们建议考虑某种“谱”G ，用以记录子群G之间存在的˙非均 amen 性层次；特别地，当且仅当G 本身是 amenable 时，G 才会缩减为一个点。

回想一下，给定任意两个子群$L,H < G$，若任意一个（联合连续的）凸紧G空间只要有一个L-不动点，就必有一个H-不动点，我们就称L 相对于G 对H 余 amen。

当环境群不变时，我们记$L \geq_G H$，或只记$L \geq H$ 。这是一种预序关系。

˙我们用G 表示G 的所有子群组成的集合，按由预序关系 $\geq_G$所确定的˙等价关系取商所得的集合。因此，G 是一个偏序集，其序关系仍记作 $\geq_G$ 或 $\geq$。子群$H < G$ 的等价类记作 $[H]_G \in G$，或简记为 $[H]$。

只需考虑G 的闭子群，因为G 中H 的闭包$\overline{H}$ 满足 $[H] = [\overline{H}]$。此外，$\overline{[H]}$ 仅取决于H的共轭类。对于$H,L < G$ 中的两个子群，我们显然有

$$H < L \implies [H] \leq_G [L].$$

在完全一般的情况下，˙G 具有一个上界，$[G]$,和一个下界，$[1]$。前者与G的所有余 amenable 子群的集合重合，而后者与所有相对 amenable 子群的集合重合

的G。（在 [CM14], 中定义的相对 amenability，在离散群的情形下归结为 amenability。）

特别是，$\dot{G}$当且仅当 $[\dot{G}] = [1]$ 时退化为一点，而这当且仅当 G 是 amenable 时成立。G 也可能恰好由两点组成，例如，当G 是一个非可和的塔斯基怪物群时。

关于函子性，我们注意到，任意拓扑群态射 $\varphi\colon G \to H$ 都会诱导一个偏序集态射 $\dot{G} \to \dot{H}$，其中对于 $L < G$，点 $[L]_G$ 被映射到 $[\varphi(L)]_H$。这可由沿 φ将凸紧H-空间拉回为G-空间直接得到。

若 $G \to H$ 是满射，则该映射 $\dot{G} \to \dot{H}$ 也是满射；但单态射可能诱导非单射，例如在例 4.4 的情形中。确实，若 $L < G < H$ 满足 L 在 H 中余 amenable、但在 G 中不余 amenable，则包含态射 $G \to H$ 将点 $[L]_G \in \dot{G}$ 映射到 $[L]_H \in \dot{H}$，但我们有 $[L]_G, [G]_G$ 且 $[L]_H = [H]_H = [G]_H$。

寻找一些这样的例子会很有意思（非平凡情形）。我们预计，对于大多数熟悉的离散群而言，这个对象过于庞大，难以描述，尽管塔斯基怪物群的情形表明也存在例外。

定理 II 可以重新表述为：对于各种分段射影群 G，其中有一大部分可以如下展示。所有素数集构成的偏序集与子群偏序集 $\Gamma_S < H$(有理数集) 同构。因此，定理 II 指出，这个不可数偏序集被完全忠实地表示（作为一个偏序集）嵌入到 $\dot{H}$(有理数集) 中。

更一般地，固定 S，我们可以考虑所有子集 $T \subseteq S$所构成的偏序集，这同样为我们提供了一个由子群构成的偏序集，只要 S 是无限集，该偏序集就是不可数的。各种 Γ_T 相对于 H(有理数集) 的非余可和性，显然也意味着相对于 Γ_S 的非余可和性。因此，定理 II 意味着：

推论 5.4. 典范映射 $T \to [\Gamma_T]$ 是所有子集 $T \subseteq S$ 的偏序集到 $\dot{\Gamma}_S$中的全忠实嵌入。□

另一方面，我们预期非离散群会提供更容易处理的例子。例如，对于$G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\dot{G}$ 是什么?

参考文献

[BHC62] 阿尔芒·博雷尔和哈里什-钱德拉，代数群的算术子群，《数学年刊》（第2辑）75（1962），485–535。[BK21] Alex Bearden 和 Mehrdad Kalantar，酉表示的拓扑边界，《国际数学研究通知》（2021），第12期，9425–9457。[Bor63] 阿尔芒·博雷尔，数域上阿代尔群的某些有限性性质，《高等科学研究所数学出版物》16（1963），101–126。[CFP96] James Welden Cannon、William J. Floyd 和 Walter R. Parry，理查德·汤普森群入门札记，《数学教学》（第2辑）42（1996），第3-4期，215–256。[CG85] Yves Carrière 和 Étienne Ghys，李群上的可均化等价关系，《巴黎科学院报告·数学系列I》300（1985），第19期，677–680。[CM14] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Nicolas Monod，相对 *amenability*，《群、几何与动力系统》8（2014），第3期，747–774。

[Eym72] 皮埃尔·埃马尔，不变均值与酉表示，Springer-Verlag，柏林，1972，数学讲义，第300卷。[GM23] Maria Gerasimova 和 Nicolas Monod，一族奇异群 C*-代数，预印本，2023年。[Hjo06] 格雷格·约特，Furstenberg 引理刻画 amenability，《美国数学会会刊》134（2006），第10期，3061–3069。[Imb97] 米歇尔·安贝尔，论理查德·汤普森群与托勒密群的同构，《几何伽罗瓦作用》第2卷，伦敦数学会讲义丛书第243卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997年，第313–324页。[LM16] 亚什·洛达和贾斯汀·塔奇·摩尔，一个由分段射影同胚构成的非可平均有限表示群，《群、几何与动力系统》10（2016），第1期，177–200。[Mon13] Nicolas Monod，分段射影同胚群，《美国国家科学院院刊》110（2013），第12期，4524–4527。[Mon21] ———，群对的 Furstenberg 边界，《遍历理论与动力系统》41（2021），第5期，1514–1529。[Mon22] ———，灯笼群与 Thompson 群的有界上同调，《几何与泛函分析》32（2022），第3期，662–675。[MP03] Nicolas Monod 和索林·波帕，论群与冯·诺依曼代数的余可和性，《加拿大皇家学会数学科学评论》25（2003），第3期，82–87。[Pes03] 弗拉基米尔·格尔曼诺维奇·佩斯托夫，论 Eymard 和贝卡关于齐性空间的 amenability 与诱导表示的一些问题，《加拿大皇家学会数学科学评论》25（2003），第3期，76–81。[Por13] 于尔格·波特曼，在仿射齐性簇上计数整点与帕特森–沙利文理论，博士论文，苏黎世联邦理工学院，2013年。[Sam70] 皮埃尔·萨缪尔，代数数论，Houghton Mifflin 公司，波士顿，1970年，由艾伦·J·西尔伯格从法文译出。[Sie39] 卡尔·路德维希·西格尔，二次型的单位，《汉堡大学数学研讨班论文集》13（1939），第1期，209–239。[Sta21] 博格丹·斯坦科夫，Monod 群 H(Z) 上随机游走的泊松边界非平凡性，《遍历理论与动力系统》41（2021），第4期，1160–1189。[Zim84] 罗伯特·杰弗里·齐默尔，遍历理论与半单群，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1984年。

洛桑联邦理工学院 (EPFL)，瑞士洛桑 CH–1015