arXiv:2305.00819v1 [math.QA] 1 May 2023

新型量子群的 Hopf PBW 变形

Yongjun Xu[1], Jialei Chen[†2]

1 School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, P. R. China

2 Department of Mathematics, Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, P. R. China

摘要。本文主要研究一种新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 及其 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，其中包括 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,0) = U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 和经典 Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$。我们证明了有限维$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模范畴是非半单的。对于每个$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，我们建立了有限维权模范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的统一块分解，并将对 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的研究归结为其主块。我们引入了 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中本原对象的概念，为验证有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-模范畴的半单性提供了一种新颖且初等的方法。作为本文的核心，我们得到了 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块与 Dynkin 类型 $\mathbb{A}$ （形变）预投射代数的有限维表示范畴之间的张量等价关系。

关键词：Hopf PBW 变形、量子群、变形预投射代数、块分解、权表示、张量等价 数学主题分类：17B37, 16G20, 18M05。

0. Introduction

基于在 2×2 矩阵上的一种新的结合乘法，Aziziheris 等人引入了一种新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$和一种新型量子化坐标环 $\mathcal{O}_q(SL_2^*)$，二者之间存在 Hopf 配对 [2]。在 [34], 中，Walton 和 Witherspoon 给出了确定交叉积代数 $B\sharp H$的 PBW 变形的充要条件，其中 H 是 Hopf 代数，而 B 是 Koszul H-模代数。新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$最初吸引我们的地方在于，它可以实现为一个交叉积代数（命题 1.4 (3)），而经典 Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$是它的一个 PBW 变形（推论 1.7）。作为本文的首项工作，我们确定了 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$的所有 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$（推论 1.7），随后证明 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$几乎是唯一的非平凡者（注 1.9）。事实上， $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$的所有非平凡 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，均在 [23] 中作为 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$的推广加以定义（另见 [33]）。

交叉积代数的表示论是否在 PBW 变形下保持不变是一个非常有趣的问题（参见 34）。在 [23], 中，证明了任意非平凡 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的每个有限维模都可通过处理 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的类似方法证明为半单的。作为本文的第二项任务，我们刻画了所有有限维单的$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模（命题 2.2），随后证明范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模中的有限维$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模并非半单（推论 2.4）。因此， $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的表示论无法在非平凡 Hopf PBW 变形下保持不变。

块的概念对于整理那些非半单模范畴中的对象非常有用（参见 [21] 中的第 1.13 节）。对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，每个有限维模都可以

† 通讯作者：chenjialei@bjut.edu.cn

表示为其权空间的直和。作为第三项任务，我们研究 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维权模范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$。当 $\kappa=0$ 时， $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 的真非半单全子范畴；当 $\kappa\neq 0$ 时， $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 则恰好等于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod（注 3.7）。令人惊讶的是，无论 κ 是否为零，我们都得到了范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的统一块分解定理（定理 3.16）。接着我们证明， $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的每个块都与一个主块同构（推论 3.21）。值得注意的是，当 $\kappa=0$ 时，范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 只有一个主块；而当 $\kappa\neq 0$ 时，则有两个主块（定义 3.22）。

范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中各块之间的同构，使我们能够聚焦于主块中的不可分解对象。因此，我们引入并研究 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的本原对象，并利用它们构造所有不可分解对象（命题 4.5 和定理 4.12 (1)）。对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$，我们只能构造一些显式的本原模（定理 4.8）。而对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的任意非平凡 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，我们可以利用其本原模构造 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 中的所有单对象（定理 4.12 (2)），并证明 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 的半单性（定理 4.14），这为 Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示论提供了一种新的处理方法。

假设 $\mathbb{K}$ 是一个域， Q 是顶点集为 Q_0的有限箭图。Ringel 在 [31], 中明确给出了 Q 的预投射代数 Π_Q，而 Crawley-Boevey 和 Holland 在 [9]中引入了权为 $\lambda\in\mathbb{K}^{|Q_0|}$ 的变形预投射代数 Π_Q^λ。 Π_Q 的表示论具有一个显著的三分法：表示型分为有限型、温和型或野型（参见 [10, 18, 19]）。记 $\mathfrak{g}_Q$ 为与 Q对应的 Kac-Moody 李代数。在 [8], 中，Crawley-Boevey 得到了一个开创性结果，精确刻画了 $\mathfrak{g}_Q$ 的正根：它们对应于代数闭域 $\mathbb{K}$上 Π_Q^λ 的简单表示。 Π_Q^λ 的半单表示至关重要，因为只有由具有固定维数向量的这类表示的等价类构成的模空间才是光滑流形（见 [8, 32]）。

预投射代数和变形预投射代数与量子群及其受限形式的实现密切相关。记 Q 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$的 Dynkin 箭图。对于每个单边量子群 $U_q(\mathfrak{g})$，Lusztig 运用层 perversity 方法构造了其负部分 $U_q^-(\mathfrak{g})$，并赋予其一个典范基，其中预投射代数 Π_Q 上的模簇 Q 发挥了重要作用 [28, 29]。对于受限单边量子群 $\overline{U}_q(\mathfrak{g})$，Cibils 将其 Borel 部分 $\overline{U}_q^{\leq 0}(\mathfrak{g})$表示为带有容许理想 [5, 6], 的某些路径代数的商模，而 Huang 和 Yang 则将其实现为带有非容许理想 [20]的双箭图代数的商模 [20] 。事实上，本文工作沿袭了 [35] ，其中受限量子群 $\overline{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$恰好被实现为附属于一个循环箭图的变形预投射代数的商模。

具有双射反 antipode 的 Hopf 代数的有限维模范畴自然构成一个张量范畴 [13]。一些卓越而优美的结果可视为 Drinfeld-Jimbo 量子群的张量范畴实现。在 [11, 12], 中，证明了与 $\mathfrak{g}$ 对应的 Drinfeld 范畴，与形式幂级数上的量子群 $U_\hbar(\mathfrak{g})$ 的有限维模范畴张量等价。继 Drinfeld 的工作之后，Kazhdan 和 Lusztig 建立了著名的 Kazhdan-Lusztig 等价：将具有无理数 $q\in\mathbb{C}$ 的单边量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的有限维模范畴与以下对象的一个张量范畴

在 [25–27] 中的仿射李代数的模。迄今为止，Kazhdan-Lusztig 等价的一些推广版本仍是一个充满活力的研究领域（参见 [4, 14–17, 30]）。

基于上述动机与任务，我们最终旨在通过 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 的（变形）预投射代数，实现新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的所有 Hopf PBW 变形。具体而言，我们得出以下主要结论：$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的有限维权模范畴 category $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的唯一主块，与附属于 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 预投射代数的一个张量范畴张量等价（定理 5.11）；而范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-mod 中的两个主块的直和，与附属于两类 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 变形预投射代数的一个张量范畴张量等价（定理 5.19）。

本文结构安排如下。第 1 节回顾新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的定义，并确定其所有 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$，直至同构。第 2 节证明 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的有限维模范畴 category $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 是非半单的。第 3 节研究 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的有限维权模范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$，其中包括 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 和 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$。我们证明 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的 Krull-Schmidt 定理和块分解定理，进而将对 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的研究化归为对其主块的研究。第 4 节介绍并研究 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的本原对象。当 $\kappa \neq 0$ 时，我们以一种新方法重新证明 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的有限维模范畴是半单的。第 5 节介绍 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 变形预投射代数的有限维表示范畴，进而得到 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块的若干张量范畴实现。

全文中，记号 $\mathbb{C}$、$\mathbb{C}^\times$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}^{\geq 0}$ 和 $\mathbb{Z}^{>0}$ 分别表示复数域、所有非零复数的集合、所有整数的集合、所有非负整数的集合以及所有正整数的集合。我们始终假设 $q \in \mathbb{C}^\times$ 不是单位根。对于 n、$m \in \mathbb{Z}$，我们固定如下记号

$$[n]_m = \frac{q^{mn} - q^{-mn}}{q^m - q^{-m}} = \sum_{i=0}^{n-1} q^{m(2i+1-n)}.$$

所有线性空间、代数、模以及未加修饰的张量均定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上。我们用 $(-)^\star$ 表示对偶函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \mathbb{C})$。我们将张量范畴理解为局部有限的单体刚性阿贝尔 $\mathbb{C}$-线性范畴，且 $\mathrm{End}(\mathbf{1}) \cong \mathbb{C}$；其中 $\mathbf{1}$ 是单位对象。张量函子则指 $\mathbb{C}$-线性单体函子。记 $(\mathrm{Vec}, \otimes, \mathbb{C}, \mathsf{a}, \mathsf{l}, \mathsf{r})$ 为有限维 $\mathbb{C}$-向量空间构成的张量范畴，其单位对象为 $\mathbb{C}$，结合约束与单位约束为 a、l、r。

1. THE NEW TYPE QUANTUM GROUP $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ AND ITS HOPF PBW-DEFORMATIONS $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$

首先，我们回顾新型量子群的定义。

定义 1.1. [2] 新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 是一个带单位元 $\mathbf{1}$ 的结合代数，由四个生成元 K、K^{-1}、E、F生成，并满足以下关系

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KE = q^2EK, \quad KF = q^{-2}FK, \quad EF = FE.$$

命题 1.2. [2] 新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 是一个 Hopf 代数，其余乘法 Δ、余单位 ε 以及反 antipode S 定义如下

$$\begin{aligned} &\Delta(K)=K\otimes K,\quad \Delta(E)=E\otimes K+1\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes 1+K^{-1}\otimes F,\\ &\varepsilon(K)=1,\quad \varepsilon(E)=0,\quad \varepsilon(F)=0,\\ &S(K)=K^{-1},\quad S(E)=-EK^{-1},\quad S(F)=-KF. \end{aligned} \tag{1.1}$$

注记 1.3. 量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 可视为 Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 在根基过滤下的伴随分次代数（参见 [13] 第 5.11 节）。

假设 $\mathbb{C}[E,F]$ 是由 E 和 F 生成的多项式代数，且 G 是由 K、K^{-1} 作为生成元并满足关系 $KK^{-1}=K^{-1}K=1$ 的阿贝尔群。注意，代数 $\mathbb{C}[E,F]$ 可视为一个 $\mathbb{C}G$-模代数，其作用如下:

$$\begin{aligned} \cdot:\mathbb{C}G\otimes\mathbb{C}[E,F] &\longrightarrow \mathbb{C}[E,F],\\ K\otimes E &\longmapsto K\cdot E=q^2E,\\ K\otimes F &\longmapsto K\cdot F=q^{-2}F, \end{aligned} \tag{1.2}$$

于是，可以将 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 实现为交叉积代数 $\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G$。

命题 1.4. (1) 代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 是诺特的，且没有零因子。
(2) 集合 $\{E^iF^jK^k|i,j\in\mathbb{Z}^{\geq 0},k\in\mathbb{Z}\}$ 是代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一组基。(3) 作为一个 $\mathbb{C}$-代数，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 与交叉积代数 $\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G$ 同构。

证明. 容易验证，代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$可实现为迭代 Ore 扩张$\mathbb{C}[K,K^{-1}][E,\alpha_1,0][F,\alpha_2,0]$，其中 α_1: $\mathbb{C}[K,K^{-1}]\longrightarrow\mathbb{C}[K,K^{-1}]$和 α_2: $\mathbb{C}[K,K^{-1}][E,\alpha_1,0]\longrightarrow\mathbb{C}[K,K^{-1}][E,\alpha_1,0]$ 分别是由 $\alpha_1(K)=q^{-2}K$和 $\alpha_2(E^iK^k)=q^{2k}E^iK^k$定义的自同构。因此，(1) 和 (2) 中的结论成立。

现在我们证明 (3)。定义代数同态 φ: $\mathbb{C}\langle K,K^{-1},E,F\rangle\longrightarrow\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G$ by

$$\varphi(K)=1\sharp K,\quad \varphi(K^{-1})=1\sharp K^{-1},\quad \varphi(E)=E\sharp 1\ \text{ and }\ \varphi(F)=F\sharp 1,$$

则 φ 是满射。记由以下元素生成的 $\mathbb{C}\langle K,K^{-1},E,F\rangle$ 的理想 J

$$KK^{-1}-1,\quad K^{-1}K-1,\quad KE-q^2EK,\quad KF-q^{-2}FK\quad\text{and}\quad EF-FE.$$

可以验证，$\varphi(J)=0$，那么 φ 可以诱导出一个自然的满射代数同态

$$\overline{\varphi}:U_q(\mathfrak{sl}_2^*)\longrightarrow\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G.$$

由于 $\{E^iF^jK^k|i,j\in\mathbb{Z}^{\geq 0},k\in\mathbb{Z}\}$（分别为 $\{E^iF^j\sharp K^k|i,j\in\mathbb{Z}^{\geq 0},k\in\mathbb{Z}\}$）是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$（分别为 $\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G$）的一组基，因此 $\overline{\varphi}$是一个同构。因此，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)\cong\mathbb{C}[E,F]\sharp\mathbb{C}G$。□

令 V为具有基 $\{E,F\}$ 的二维向量空间。通过 (1.2) 中的 $\mathbb{C}G$-作用，可以将 V视为一个 $\mathbb{C}G$-模。用 $T_{\mathbb{C}}(V)$ 表示由 V 生成的张量代数。于是 $T_{\mathbb{C}}(V)$ 具有自然的 $\mathbb{C}G$-模代数结构，并且可以构造交叉积代数 $T_{\mathbb{C}}(V)\sharp\mathbb{C}G$。多项式代数 $\mathbb{C}[E,F]$ 可与 $T_{\mathbb{C}}(V)/\langle I\rangle$ 等同，其中 $I=\text{Span}_{\mathbb{C}}\{EF-FE\}$。取 κ: $I\longrightarrow\mathbb{C}G\oplus(V\otimes\mathbb{C}G)$ 为一个 $\mathbb{C}$-线性映射。滤过的 $\mathbb{C}$-代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 定义为以下商代数。

$$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)=\frac{T_{\mathbb{C}}(V)\sharp\mathbb{C}G}{\langle EF-FE-\kappa(EF-FE)\rangle}, \tag{1.3}$$

其中， $\mathbb{C}G$ 中每个元素的次数均为 0，而 E 和 F 的次数均为 1。事实上，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$可以由四个生成元 K、K^{-1}、E、F及其关系来表示。

$$KK^{-1}=K^{-1}K=1,\quad KE=q^2EK,\quad KF=q^{-2}FK,\quad EF-FE=\kappa(EF-FE).$$

现在我们刻画 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 何时是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 PBW 变形。

定理 1.5. 过滤 $\mathbb{C}$-代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 PBW 变形，当且仅当$_m\kappa(EF-FE)=\sum_{l=-m} a_lK^l$，其中 $m\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$ 且 $a_l\in\mathbb{C}$ $(-m\leq l\leq m)$。

证明。令 $f_a=\sum_{l=-m_1}^{m_1} a_lK^l$、$f_b=\sum_{l=-m_2}^{m_2} b_lK^l$ 和 $f_c=\sum_{l=-m_3}^{m_3} c_lK^l$，其中 $m_i\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$ $(1\leq i\leq 3)$。那么我们总可以假设 $\kappa(EF-FE)$ $=f_a+E\otimes f_b+F\otimes f_c$.。由 [34] 中的定理 3.1 可知，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 PBW 变形，当且仅当

$$\kappa(K\cdot(EF-FE))=K\cdot\kappa(EF-FE), \tag{1.4}$$

其中 $\cdot$o 右侧是作用于 $\mathbb{C}G\oplus(V\otimes\mathbb{C}G)$ 上的左 $\mathbb{C}G$-伴随作用（见 [34, 第 1A 节]）。由 ce

$$\begin{aligned}
\kappa(K\cdot(EF-FE)) &= \kappa[(K\cdot E)(K\cdot F)-(K\cdot F)(K\cdot E)]\\
&= \kappa[(q^2E)(q^{-2}F)-(q^{-2}F)(q^2E)]\\
&= \kappa(EF-FE)\\
&= f_a+E\otimes f_b+F\otimes f_c,\\
K\cdot\kappa(EF-FE) &= K\cdot(f_a+E\otimes f_b+F\otimes f_c)\\
&= f_a+q^2E\otimes f_b+q^{-2}F\otimes f_c,
\end{aligned}$$

且 $q\in\mathbb{C}^\times$ 不是单位根，则当且仅当 $f_b=f_c=0.$时，(1.4) 成立。 □

下文将引入 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 Hopf PBW 变形这一概念。

定义 1.6. 若 PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是一个 Hopf 代数，且具有 K,K^{-1} 类群元素和 E,F斜本原元，则称其为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 Hopf PBW 变形。

A c定理 1.5 的推论回答了何时 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 Hopf PBW 变形).

推论 1.7. 代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 Hopf PBW 变形，当且仅当

$$\kappa(EF-FE)=a(K^m-K^{-m}), \tag{1.5}$$

其中 $a\in\mathbb{C}$ 和 $m\in\mathbb{Z}$。在此情况下，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 Hopf 代数结构映射为

$$\begin{gathered}
\Delta(K)=K\otimes K,\quad \Delta(E)=E\otimes K^t+K^s\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes K^{-s}+K^{-t}\otimes F,\\
\varepsilon(K)=1,\quad \varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0,\\
S(K)=K^{-1},\quad S(E)=-K^{-s}EK^{-t},\quad S(F)=-K^tFK^s,
\end{gathered} \tag{1.6}$$

其中 s、$t\in\mathbb{Z}$ 满足 $t-s=m$。

$_m$证明。Ji 等人在 [23, 命题 3.3] 中证明，当 $\kappa(EF-FE)=\sum_{l=-m} a_lK^l$时，代数$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是一个 Hopf 代数，且其 K,K^{-1} 类群元素和 E,F斜本原元当且仅当（1.5）成立；他们还通过公式（1.6）明确描述了 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$上的 Hopf 代数结构。于是该推论由定理 1.5 得出。□

在同构意义下，我们可以对 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的所有非平凡 Hopf PBW 变形进行分类。

命题 1.8. 对于任意一对 (s,t)，满足 $s,t\in\mathbb{Z}$ and $t-s=m$。记由 (1.5) 和 (1.6) 定义的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的非平凡 Hopf PBW 变形为 $U^{s,t}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$。则作为 Hopf 代数

$$U_q^{s,t}(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)\cong U_q^{0,m}(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m),$$

其中 $\kappa_m(EF-FE)=\frac{K^m-K^{-m}}{q^m-q^{-m}}$。

证明。为避免混淆，记 $U^{s,t}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的生成元为 K,K^{-1},E,F（相应地，$U^{0,m}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m)$ 的生成元为 K',K'^{-1},E',F'）。令 $a_m=\frac{1}{q^m-q^{-m}}$，并定义代数同态$\vartheta\colon U^{0,m}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m)\longrightarrow U^{s,t}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，使得

$$\vartheta(K')=K,\quad \vartheta(E')=(\frac{a_m}{a})^{\frac{1}{2}}K^{-s}E,\quad \vartheta(F')=(\frac{a_m}{a})^{\frac{1}{2}}FK^s.$$

它是 验证 $\vartheta\colon U^{0,m}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_0)\longrightarrow U^{s,t}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 是一个 Hopf 代数同构的步骤 . □

注 1.9. 推论 1.7 表明，Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 恰好就是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的非平凡 Hopf PBW 变形 $U^{0,1}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_1)$，而命题 1.8 表明，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的每一种非平凡 Hopf PBW 变形都可以在同构意义下化为形式 $U^{0,m}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m)$。注意，$U^{0,m}_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m)$ 具有一个由 K^m,K^{-m},E,F 生成的 Hopf 子代数，该子代数恰好与 $U_{q^m}(\mathfrak{sl}_2)$ 同构。因此，从某种意义上说，我们可以认为 Drinfeld-Jimbo 量子群几乎是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 唯一的非平凡 Hopf PBW 变形。

从现在起，我们总可以假设

$$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)=\begin{cases}U_q(\mathfrak{sl}_2^*), & \text{if } \kappa=0,\\ U_q^{0,m}(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa_m), & \text{if } \kappa\neq 0.\end{cases}$$

2. Non-semisimplicity of the category of finite dimensional modules of $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$

本节将证明，有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模的范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 不是半单的，这表明 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 之间存在很大差异。

与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的情形类似，根据命题 2.1], , 我们可以同样验证，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模上的 E 和 F 的作用都是幂零的。

引理 2.1. 设 M 是一个有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模。那么存在整数 r、$s>0$，使得 $E^rM=0$ 且 $F^sM=0$。

在 th 下面的命题对所有有限维单的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模进行了分类。

命题 2.2. 设 M 是一个有限维单的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模。则 $\dim(M)=1$，且 M 上的模结构可表示如下

$$Kv_0=\lambda v_0,\quad Ev_0=Fv_0=0, \tag{2.1}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ 和 $\{v_0\}$ 是 M的一组基。

证明。由引理 2.1 可知，0 是线性变换 $E\colon M\longrightarrow M$ 的特征值。设 $M_0=\{v\in M|Ev=0\}$。由于对任意 $v\in M_0$，都有 $EFv=FEv=0$ 且 $EKv=q^{-2}KEv=$0，因此 M_0 是 M 的子模。类似地，$N_0=\{v\in M_0|Fv=0\}$ 也是 M 的子模。

假设 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 是线性变换 K: $N_0 \longrightarrow N_0$ 的特征值，且 $v_0 \in N_0$ 是 K 对应于 λ 的特征向量，即 $Kv_0 = \lambda v_0$，那么 $L = \mathbb{C}v_0$ 也是 M 的子模。由于 M 是单的，因此 $M = L$。证明完毕。

□

从现在起，我们将由（2.1）定义的 $\mathbb{C}_\lambda$ $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模记为 $\mathbb{C}_\lambda$。由 $\mathbb{C}_\mu$ 扩张 $\mathbb{C}_\lambda$ 所构成的扩张群 $\mathrm{Ext}^1_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda, \mathbb{C}_\mu)$ 可如下刻画。

命题 2.3. 假设 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^\times$，
(1) 若 $\lambda \neq q^2\mu$ 且 $\lambda \neq q^{-2}\mu$，则有 $\mathrm{Ext}^1_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda, \mathbb{C}_\mu) \cong \begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda \neq \mu, \\ \mathbb{C}, & \text{若 } \lambda = \mu. \end{cases}$
(2) 若 $\lambda = q^2\mu$ 或 $\lambda = q^{-2}\mu$，则有 $\mathrm{Ext}^1_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda, \mathbb{C}_\mu) \cong \mathbb{C}$。

证明。考虑一个 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模的短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\sigma} N \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}_\mu \longrightarrow 0.$$

令 $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}v_0$ 和 $\mathbb{C}_\mu = \mathbb{C}w_0$。于是我们可以选取 N 的一组基 $\{v_1, v_2\}$，使得 $\sigma(v_0) = v_1$ 且 $\tau(v_2) = w_0$。由（2.1）可得

$$\begin{cases} Kv_1 = \lambda v_1, \\ Kv_2 = f(K)v_1 + \mu v_2, \\ Ev_1 = Fv_1 = 0, \\ Ev_2 = f(E)v_1, \\ Fv_2 = f(F)v_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

where $f(K), f(E), f(F) \in \mathbb{C}$. Obviously $\begin{cases} KEv_1 = q^2EKv_1 = 0, \\ KFv_1 = q^{-2}FKv_1 = 0, \\ EFv_i = FEv_i = 0 \ (i = 1, 2). \end{cases}$ Moreover, the condition $\begin{cases} KEv_2 = q^2EKv_2, \\ KFv_2 = q^{-2}FKv_2 \end{cases}$ 等价于

$$\begin{cases} f(E)(\lambda - q^2\mu) = 0, \\ f(F)(\lambda - q^{-2}\mu) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(1) 若 $\lambda \neq q^2\mu$ 且 $\lambda \neq q^{-2}\mu$，则由 (2.3) 可得 $f(E) = f(F) = 0$.。由 (2.2) 可知，二维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模 N 可表示如下

$$\begin{cases} Kv_1 = \lambda v_1, \\ Kv_2 = f(K)v_1 + \mu v_2, \\ Ev_i = Fv_i = 0 \ (i = 1, 2). \end{cases} \tag{2.4}$$

现在我们知道，N 完全由 $f(K)$确定，因此我们将其重写为 $N_{\lfloor f(K) \rfloor}$.

当 $\lambda \neq \mu$时，我们可以得到 $\mathbb{C}_\lambda$ 通过 $\mathbb{C}$的两个扩张之间的以下等价关系 μ

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_\lambda & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & N_{\lfloor f(K) \rfloor} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & \mathbb{C}_\mu & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{bmatrix} 1 & \frac{f(K)}{\lambda - \mu} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_\lambda & \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}]{} & \mathbb{C}_\lambda \oplus \mathbb{C}_\mu & \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}]{} & \mathbb{C}_\mu & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

因此，扩张群$\overset{1}{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda,\mathbb{C}_\mu)=0$.

当 $\lambda=\mu$ 时，容易验证 $\mathbb{C}_\lambda$ 的两个由 $\mathbb{C}_\mu$ 给出的扩张

$$0\longrightarrow\mathbb{C}_\lambda\xrightarrow{\sigma_a}N_{\lfloor a\rfloor}\xrightarrow{\tau_a}\mathbb{C}_\mu\longrightarrow 0\quad\text{and}\quad 0\longrightarrow\mathbb{C}_\lambda\xrightarrow{\sigma_b}N_{\lfloor b\rfloor}\xrightarrow{\tau_b}\mathbb{C}_\mu\longrightarrow 0$$

等价当且仅当 $a=b$。因此，扩张群$\overset{1}{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda,\mathbb{C}_\lambda)=\mathbb{C}$。

(2) 我们只证明 $\lambda=q^2\mu$ 时的这一结论，另一种情形的证明类似。若 $\lambda=q^2\mu$，则 $\lambda\neq q^{-2}\mu$（因为 q 不是单位根）。由 (2.3) 可得 $f(F)=0$。结合 (2.2)，二维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模 N 可表示如下

$$\begin{cases} Kv_1=\lambda v_1,\\ Kv_2=f(K)v_1+\mu v_2,\\ Ev_1=Fv_1=Fv_2=0,\\ Ev_2=f(E)v_1. \end{cases}\tag{2.5}$$

在这种情况下，N 完全由 $f(K)$ 和 $f(E)$ 确定，因此我们将其改写为 $N_{\lceil f(K),f(E)\rceil}$。特别地，当 $f(K)=0$ 时，我们将 N 改写为 $N_{\lceil f(E)\rceil}$。

固定 $f(E)\in\mathbb{C}$，对于任意 $f(K)\in\mathbb{C}$，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_\lambda & \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} & N_{\lceil f(K),f(E)\rceil} & \xrightarrow{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}} & \mathbb{C}_\mu & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{bmatrix}1 & \frac{f(K)}{\lambda-\mu}\\ 0 & 1\end{bmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_\lambda & \xrightarrow[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}]{} & N_{\lceil f(E)\rceil} & \xrightarrow[\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}]{} & \mathbb{C}_\mu & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

另一方面，容易验证，$\mathbb{C}_\lambda$ 被 $\mathbb{C}_\mu$ 扩张的两个扩张

$$0\longrightarrow\mathbb{C}_\lambda\xrightarrow{\sigma_a}N_{\lceil a\rceil}\xrightarrow{\tau_a}\mathbb{C}_\mu\longrightarrow 0\quad\text{and}\quad 0\longrightarrow\mathbb{C}_\lambda\xrightarrow{\sigma_b}N_{\lceil b\rceil}\xrightarrow{\tau_b}\mathbb{C}_\mu\longrightarrow 0$$

当且仅当 $a=b$ 时等价。因此，扩张群$\overset{1}{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(\mathbb{C}_\lambda,\mathbb{C}_{q^{-2}\lambda})=\mathbb{C}$。 □

下一个推论可由命题 2.3 或注 3.7 立即得出。

推论 2.4. 有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模的范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 是非半单的。

3. The category $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$ of finite dimensional weight modules of $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$

本节中，我们研究 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维权表示论。

3.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$的有限维权模与权群。

定义 3.1. 设 M 是一个有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模。
(1) 非平凡线性空间

$$M_\lambda=\{v\in M|Kv=\lambda v\},$$

即 K 在 M 上特征值为 λ 的特征子空间，称为 M 的权空间。(2) 若 M

是其权空间的直和，则称 M 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权模

(3) 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维权模，并记为

$$\Lambda_M=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$$

K 作用于 M 所得到的所有互不相同特征值的集合。我们称 Λ_M 为 M 的权集。

用 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 表示 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维模范畴。记号 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 表示 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维权模范畴，它是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 的全子范畴。

定义 3.2. 设 M 是范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的一个对象。对于任意给定的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的自同构 σ，我们可以如下定义一个新的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模 M^σ。
(1) 作为一个线性空间，$M^\sigma = M$。(2) $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 在 M^σ 上的作用定义为

$$\begin{aligned} \circ_\sigma : U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)\otimes M^\sigma &\longrightarrow M^\sigma,\\ K\otimes m &\longmapsto K\circ_\sigma m=\sigma(K)m,\\ E\otimes m &\longmapsto E\circ_\sigma m=\sigma(E)m,\\ F\otimes m &\longmapsto F\circ_\sigma m=\sigma(F)m. \end{aligned}$$

模 M^σ 称为 M 的 σ-扭曲。

容易看出，范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 具有以下性质。

命题 3.3. 范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 对子模、商模、直和项、直和、张量积以及 σ_0-扭变封闭，其中 σ_0 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的对合自同构，由 $\sigma_0(K)=K^{-1}$、$\sigma_0(E)=F$ 和 $\sigma_0(F)=E$ 定义。

证明. 对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 中任意对象 M，记 $m_M(x)$ 为 K 在 M 上作用的最小多项式。众所周知，M 是权模当且仅当 $m_M(x)$ 没有重根。设 M 的任意子模为 L。由于 $m_L(x)$ 和 $m_{M/L}(x)$ 是 $m_M(x)$ 的因子，因此 $\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 对取子模、直和项和商模封闭。现在设 N 和 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的两个权模，其权集分别为 Λ_M 和 Λ_N。注意到

$$\begin{cases} m_{M\oplus N}(x)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_M\cup\Lambda_N}(x-\lambda),\\ m_{M\otimes N}(x)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_M\diamond\Lambda_N}(x-\lambda),\\ m_{M^{\sigma_0}}(x)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda_M}(x-\lambda^{-1}), \end{cases}$$

其中 $\Lambda_M\diamond\Lambda_N=\{\mu\nu\mid\mu\in\Lambda_M,\nu\in\Lambda_N\}$，我们得到 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$ 对取直和、张量积和扭转封闭。□

对于给定的 Hopf PBW 变形 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，定义 Λ_κ 为 $\mathbb{C}^\times$ 的子集，如下所示

$$\Lambda_\kappa=\{\lambda\in\mathbb{C}|\exists\text{ an object }M\text{ in }U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)\text{-}\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}\text{ such that }\lambda\in\Lambda_M\}.$$

我们称 Λ_κ 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权集。然后可以验证，Λ_κ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的子群。

推论 3.4. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权集 Λ_κ 总是 $\mathbb{C}^\times$ 的子群。

证明。由于 K 可逆，因此 $\Lambda_\kappa\subseteq\mathbb{C}^\times$。总存在一个一维模 $\mathbb{C}_1=\mathbb{C}v$，它属于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，其作用由 $Kv=v$ 和 $Ev=Fv=0$ 给出。注意到 $\mathbb{C}_1$ 的权集 $\Lambda_{\mathbb{C}_1}$ 等于 $\{1\}$，我们推得 $1\in\Lambda_\kappa$，这意味着 $\Lambda_\kappa\neq\emptyset$。

对于任意 μ、$\nu \in \Lambda_\kappa$，在范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中存在两个对象 M 和 N，使得 $\mu \in \Lambda_M$ 和 $\nu \in \Lambda_N$。由命题 3.3 可知，$\mu\nu \in \Lambda_{M\otimes N}$ 和 $\mu^{-1} \in \Lambda_{M^\sigma}$，这意味着 Λ_κ 在乘法和取逆运算下封闭。□

定义 3.5. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权集 Λ_κ 称为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权群。

接下来，我们将明确刻画 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权群。为此，我们需要证明以下结论。

命题 3.6. 假设 $\kappa \neq 0$。设 M 是一个有限维的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模。那么 (1) M 是其权空间的直和。(2) M 的所有权均具有 $q^c\omega$ 的形式，其中 $c \in \mathbb{Z}$ 和 $\omega^{2m} = 1$。

证明. 令 $U_{q^m}(\mathfrak{sl}_2)$ 为由 K^m、K^{-m}、E、F 生成的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的子代数。这里，$U_{q^m}(\mathfrak{sl}_2)$ 就是 Drinfeld-Jimbo 型量子群。由引理 2.1，存在一个整数 $s > 0$，使得 $F^sM = 0$。将 M 视为 $U_{q^m}(\mathfrak{sl}_2)$-模。根据第 2 节 [22, 中的命题 2.3 及其证明，可得

$$\left(\prod_{j=-(s-1)}^{s-1}(K^m - q^{-jm})(K^m + q^{-jm})\right)M = 0.$$

$^{s-1}$因此，M 上的 K 的最小多项式 $m_M(x)$整除$\prod$ $(x^m - q^{-jm})(x^m + q^{-jm})$。$_{j=-(s-1)}$因此，$m_M(x)$可以分解为线性因子 $x - q^c\omega$ $(c \in \mathbb{Z}, \omega^{2m} = 1)$，且每个因子至多出现一次。因此，(1)和(2)中的陈述成立。□

注 3.7. 命题 3.6 表明，当 $\kappa \neq 0$ 时，范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模和 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$ 是相同的。然而，当 $\kappa = 0$ 时，它们是不同的。事实上，$\mathbb{C}[K,K^{-1}]$ 的每个有限维不可分解模都可以诱导出 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模中的一个不可分解对象，其中 E 和 F 的作用均为平凡作用。对于任意整数 $n \geq 1$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$，总是存在一个维数为 $(n+1)$-$_n$ 的 $\mathbb{C}[K,K^{-1}]$ 的模 $M(\lambda,n) = \bigoplus \mathbb{C}v_i$，其 K 的作用由 $_{i=0}$ 给出。

$$K(v_0,v_1,\cdots,v_n) = (v_0,v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

那么，每个 $M(\lambda,n)$ 都可以诱导出 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模中的一个对象，但不能诱导出 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模$_{\mathrm{wt}}$中的对象。

推论 3.8. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权群 Λ_κ 可表示如下

$$\Lambda_\kappa = \begin{cases} \mathbb{C}^\times, & \text{if } \kappa = 0, \\ \left\{q^c\omega | c \in \mathbb{Z},\ \omega^{2m} = 1\right\}, & \text{if } \kappa \neq 0. \end{cases}$$

证明. 由命题 2.2 可得 $\Lambda_\kappa = \mathbb{C}^\times$ 当 $\kappa = 0$。现在假设 $\kappa \neq 0$。命题 3.6 表明 $\Lambda_\kappa \subseteq \left\{q^c\omega | c \in \mathbb{Z},\ \omega^{2m} = 1\right\}$。此外，对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$，存在一个一维

模 $M=\mathbb{C}v$，其定义为 $Kv=\omega v$和 $Ev=Fv=0$，以及一个二维模 $N=\mathbb{C}v_1\oplus\mathbb{C}v_2$，其定义为

$$\begin{cases} Kv_1=q^{-1}v_1, & Ev_1=v_2, & Fv_1=0,\\ Kv_2=qv_2, & Ev_2=0, & Fv_2=v_1. \end{cases}$$

因此 $\omega\in\Lambda_M\subseteq\Lambda_\kappa$ 和 $q\in\Lambda_N\subseteq\Lambda_\kappa$。由推论 3.4 可得 $\left\{q^c\omega|c\in\mathbb{Z},\ \omega^{2m}=1\right\}\subseteq\Lambda_\kappa$。□

3.2. 范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的 Krull-Schmidt 定理。

定义 3.9. (1) 设 $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}$ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的子集。若存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得

$$\Lambda=\left\{\lambda,q^2\lambda,\cdots,q^{2(l-1)}\lambda\right\},$$

则称 Λ 为 q^2-链。
(2) 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的有限维权模。若 M 的权集 Λ_M 是 q^2-链，则称 M 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 q^2-链模。

命题 3.10. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的每个有限维不可分解权模都是一个 q^2-链模。

证明。设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$的一个有限维不可分解权模。在 M的权集 $\Lambda_M=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$ 上定义关系$\sim$ 如下： $\lambda_i\sim\lambda_j\Longleftrightarrow$存在

$$\lambda_i=\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_r}=\lambda_j\in\Lambda_M\quad\text{ or }\quad\lambda_j=\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_r}=\lambda_i\in\Lambda_M$$

使得对于 $1\le l\le r-1$，有 $\lambda_{i_{l+1}}=q^2\lambda_{i_l}$。不难验证，关系 $\sim$ 是 Λ_M上的等价关系。记 $\Lambda_M/\sim=\{\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_s\}$ 为所有等价类构成的集合。那么 Λ_M可以表示为 Λ_1、Λ_2、$\cdots$、Λ_s 的不交并，即 $\Lambda_M=\dot{\bigcup\limits_{1\le i\le s}}\Lambda_i$。注意到每个 $\Lambda_i(1\le i\le s)$ 都是一个 q^2-链，因此我们可以假设

$$\Lambda_i=\left\{\lambda_{i_0},q^2\lambda_{i_0},\cdots,q^{2(m_i-1)}\lambda_{i_0}\right\}.$$

令 $M_{\Lambda_i}=\bigoplus\limits_{j=1}^{m_i}M_{q^{2(j-1)}\lambda_{i_0}}$，则根据定义 3.9，$M_{\Lambda_i}$是 M的子模，也是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 q^2-链模。由于 $\Lambda_M=\dot{\bigcup\limits_{1\le i\le s}}\Lambda_i$，因此 $M=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}M_{\Lambda_i}$。因为 M 是不可分解的，我们知道 $s=1$。因此，M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 q^2-链模。□

现在我们可以在范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中陈述并证明 Krull-Schmidt 定理。

定理 3.11. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的每个有限维权模都可以唯一地分解为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的若干不可分解 q^2-链模的直和。

证明。经典的 Krull-Schmidt 定理（参见 [1, 第 12.9]节）告诉我们，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的每个有限维权模 M 都有唯一的分解 $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_t$（除排列和同构外），其中 M_1、M_2、$\cdots$、M_t 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的不可分解模。由命题 3.3 可知，M_1、M_2、$\cdots$、M_t 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权模。由命题 3.10 可知，M_1、M_2、$\cdots$、M_t 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的不可分解 q^2-链模。□

3.3. 范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 的块分解。

定义 3.12。对于任意 λ、$\mu\in\mathbb{C}^\times$，如果存在一个整数 $l\in\mathbb{Z}$ 使得 $\lambda=q^{2l}\mu$，那么我们称 λ 和 μ 是 q^2-关联的，记作 $\lambda\overset{q^2}{\sim}\mu$。

容易验证，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的权群 Λ_κ 上的关系 $\overset{q^2}{\sim}$ 是一个等价关系。记 $\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}$ 为由所有等价类构成的集合。$\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}$ 可视为商群 $\Lambda_\kappa/\langle q^2\rangle$，其中 $\langle q^2\rangle$ 是由 q^2 生成的 Λ_κ 的循环子群。对于 $\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}$ 中的每个等价类 $[\lambda]$，我们固定其代表元 λ。记 $[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 为由上述所有固定代表元构成的集合。由推论 3.8 可知，当 $\kappa=0$ 时，$[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 是无限集；而当 $\kappa\neq0$ 时，$[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 是基数为 $4m$ 的有限集。事实上，当 $\kappa\neq0$ 时，我们可以任意选取奇整数 t_0 和偶整数 t_1，使得

$$[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]=\left\{q^{t_0}\omega,q^{t_1}\omega|\omega^{2m}=1\right\}.$$

在任一种情况下，我们始终可以假设 $1\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$。

定义 3.13。对于 $\lambda\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$，我们将范畴 $\mathcal{O}_\lambda^\kappa$ 定义为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$ 的全子范畴，其对象为满足 $\Lambda_M\subseteq[\lambda]$的 M。我们称 $\mathcal{O}_\lambda^\kappa$ 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$的一个块。

引理 3.14。对于包含于 Λ_κ中的每个 q^2-链 Λ，存在唯一的三元组 (λ,k,l)，使得

$$\Lambda=\left\{q^{2i}\lambda|k\leq i\leq l\right\}\subseteq[\lambda]=\left\{q^{2i}\lambda|i\in\mathbb{Z}\right\},$$

其中 $\lambda\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$，且 k、$l\in\mathbb{Z}$ 满足 $k\leq l$。

证明。对于任意给定的 q^2-链 $\Lambda\subseteq\Lambda_\kappa$，我们可以假设 $\Lambda=\left\{\mu,q^2\mu,\cdots,q^{2(j-1)}\mu\right\}$，其中 $\mu\in\mathbb{C}^\times$ 且 $j\in\mathbb{Z}^{\geq1}$。由于 $\mu\in\Lambda\subseteq\Lambda_\kappa$，因此存在唯一的 $\lambda\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 使得$[\lambda]=[\mu]$，由此我们推得 λ和 μ 是 q^2-相连的。因为 q 不是单位根，所以存在唯一的整数 k使得 $\mu=q^{2k}\lambda$。因此，我们可以取 $l=k+j-1$。□

命题 3.15. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 中的每个不可分解对象都唯一属于$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$的一个块 $\mathcal{O}_\lambda^\kappa$。

证明. 根据命题 3.10，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 中的每个不可分解对象 M 都是一个 q^2-链模。由于 M 的权集 Λ_M 是一个包含于 Λ_κ中的 q^2-链，根据引理 3.14，存在唯一的 $\lambda\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 使得 $\Lambda_M\subseteq[\lambda]$。因此，该结论由定义 3.13 得出。□

现　我们可以得到范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{w}}$的如下块分解　t·

定理 3.16. 范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 是子范畴 $\mathcal{O}_\lambda^\kappa$ 的直和，其中 λ遍历集合 $[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$，即 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}=\bigoplus_{\lambda\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]}\mathcal{O}_\lambda^\kappa$.

证明。根据定理 3.11，我们知道，每个属于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 的对象 M 都可以分解为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 中有限个不可分解 q^2-链模 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 的直和，即 $M=\bigoplus M_i$。随后由命题 3.15 可知，每个直和项 M_i of$_{i=1}M$ 都属于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 的唯一一个块。因此，$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 中的每个对象都可以分解为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 的块中的有限个对象的直和。

现在假设 $M \in \mathcal{O}_\lambda^\kappa$ 和 $N \in \mathcal{O}_\mu^\kappa$ 与 $\lambda, \mu \in [\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$ 不 q^2-相连。接下来只需证明 $\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)}(M,N) = 0$. 对于任意 $\phi \in \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)}(M,N)$, $\nu \in \Lambda_M$ 和 $w \in M_\nu$, 均有 $K\phi(w) = \phi(Kw) = \phi(\nu w) = \nu\phi(w)$, 这意味着 $\phi(w) \in N_\nu$。注意到 $[\lambda] \cap [\mu] = \emptyset$ 蕴含 $\nu \notin \Lambda_N$, 可得 $N_\nu = 0$。因此 $\phi = 0$。□

注 3.17. 正如第 1.13 节 *[21],* 所述, $\mathcal{C}$ 一个既是阿廷的又是诺特的模范畴的块总具有以下性质:

(1) 两个单模 M 和 N 属于同一个块, 当且仅当存在一个由单模组成的有限序列

$$M = M_1, M_2, \cdots, M_n = N$$

使得对于任意 $1 \le i < n$, 都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M_i, M_{i+1}) \neq 0$ 或 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M_{i+1}, M_i) \neq 0$。
(2) 若模 M 的所有合成因子都属于 $\mathcal{C}$ 中的某个块, 则该模也属于该块。(3) $\mathcal{C}$ 中的任意模 M 都唯一地分解为若干子模的直和, 且每个子模都属于单个块。特别地, 每个不可分解模都属于单个块。

当 $\kappa = 0$时, 由命题 2.3、命题 3.15 和定理 3.16 可知, 定义 3.13 中 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的块满足上述性质。

3.4. 范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的块之间的同构。对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$, 我们在下面的引理中给出一些自然的自同构, 这些自同构可通过直接验证证明。

引理 3.18。(1) 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, 存在唯一的自同构 τ_λ of $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$, 定义为

$$\tau_\lambda(K) = \lambda K, \quad \tau_\lambda(E) = E, \quad \tau_\lambda(F) = F.$$

(2) 对于任意满足 $\omega^{2m} = 1$ 的 ω, 存在唯一的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的自同构 σ_ω, 其定义为

$$\sigma_\omega(K) = \omega K, \quad \sigma_\omega(E) = \omega^m E, \quad \sigma_\omega(F) = F.$$

借助引理 3.18 中给出的自同构所对应的扭曲, 我们可以在 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的各块之间定义一些函子。

定义 3.19。(1) 假设 $\kappa = 0$。
(i) 对于任意 $i \in \mathbb{Z}$, 我们将 i-平移函子 Σ_i 定义如下。

$$\begin{aligned} \Sigma_i : \mathcal{O}_1^0 &\longrightarrow \mathcal{O}_1^0, \\ M &\longmapsto \Sigma_i(M) = M^{\tau_{q^{2i}}}, \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Sigma_i(M) \xrightarrow{\Sigma_i(f)} \Sigma_i(N), \end{aligned}$$

其中, 作为映射 $\Sigma_i(f) = f$。特别地, 我们将 Σ_1 重新记作 Σ, 并称之为平移函子。(ii) 对任意 $(\mu, \lambda) \in [\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}] \times [\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$, 我们定义 (μ, λ)-传递函子 $\Theta_{\mu,\lambda}$ 如下。

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu,\lambda} : \mathcal{O}_\mu^0 &\longrightarrow \mathcal{O}_\lambda^0, \\ M &\longmapsto \Theta_{\mu,\lambda}(M) = M^{\tau_{\mu^{-1}\lambda}}, \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Theta_{\mu,\lambda}(M) \xrightarrow{\Theta_{\mu,\lambda}(f)} \Theta_{\mu,\lambda}(N), \end{aligned}$$

其中, 作为一个映射 $\Theta_{\mu,\lambda}(f) = f$。特别地, 我们将 $\Theta_{1,\lambda}$ 重新记为 Θ_λ, 并称之为传递函子。

(2) 假设 $\kappa \neq 0$。选取 $[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}] = \{\omega, q\omega | \omega^{2m} = 1\}$。对于任意满足 $(\mu^{-1}\lambda)^{2m} = 1$ 的 $(\mu, \lambda) \in [\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}] \times [\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$，我们定义 (μ, λ)-传递函子 $\Upsilon_{\mu,\lambda}$ 如下：

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\mu,\lambda} : \mathcal{O}_\mu^\kappa &\longrightarrow \mathcal{O}_\lambda^\kappa, \\ M &\longmapsto \Upsilon_{\mu,\lambda}(M) = M^{\sigma_{\mu^{-1}\lambda}}, \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Upsilon_{\mu,\lambda}(M) \xrightarrow{\Upsilon_{\mu,\lambda}(f)} \Upsilon_{\mu,\lambda}(N), \end{aligned}$$

其中 $\Upsilon_{\mu,\lambda}(f) = f$。对于 $\lambda_0 \in \{1, q\}$，我们将 $\Upsilon_{\lambda_0,\lambda_0\omega}$ 重新记为 $\Upsilon_\omega^{\lambda_0}$，并称其为传递函子。

现在我们可以证明，上面定义的函子都是同构。

定理 3.20. (1) 当 $\kappa = 0$ 时，i-平移函子 $\Sigma_i : \mathcal{O}_1^0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^0$ 和 (μ, λ)-传递函子 $\Theta_{\mu,\lambda} : \mathcal{O}_\mu^0 \longrightarrow \mathcal{O}_\lambda^0$ 是范畴同构。
(2) 当 $\kappa \neq 0$ 时，(μ, λ)-传递函子 $\Upsilon_{\mu,\lambda} : \mathcal{O}_\mu^\kappa \longrightarrow \mathcal{O}_\lambda^\kappa$ 是范畴同构。

证明。它容易验证，$\Sigma_i, \Sigma_{-i}, \Theta_{\mu,\lambda}, \Theta_{\lambda,\mu}, \Upsilon_{\mu,\lambda}$ 和 $\Upsilon_{\lambda,\mu}$ 都是良定义的函子，并且 d

$$\begin{cases} \Sigma_i\Sigma_{-i} = \Sigma_{-i}\Sigma_i = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_1^0}, \\ \Theta_{\mu,\lambda}\Theta_{\lambda,\mu} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\lambda^0}, \quad \Theta_{\lambda,\mu}\Theta_{\mu,\lambda} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\mu^0}, \\ \Upsilon_{\mu,\lambda}\Upsilon_{\lambda,\mu} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\lambda^\kappa}, \quad \Upsilon_{\lambda,\mu}\Upsilon_{\mu,\lambda} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_\mu^\kappa}. \end{cases}$$

因此，$\Sigma_i, \Theta_{\mu,\lambda}$ 和 $\Upsilon_{\mu,\lambda}$ 都是范畴同构。 □

推论 3.21. (1) 当 $\kappa = 0$ 时，每个块 $\mathcal{O}_\lambda^0$ 都与 $\mathcal{O}_1^0$ 同构。
(2) 当 $\kappa \neq 0$ 时，块 $\mathcal{O}_\omega^\kappa$ 与 $\mathcal{O}_1^\kappa$ 同构，而 $\mathcal{O}_{q\omega}^\kappa$ 与 $\mathcal{O}_q^\kappa$ 同构，其中 $\omega^{2m} =$ 1.

推论 3.21 表明，要研究范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$，我们可以关注下文定义的主块。

定义 3.22。(1) 当 $\kappa = 0$ 时，我们称块 $\mathcal{O}_1^0$ 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块。(2) 当 $\kappa \neq 0$ 时，我们称块 $\mathcal{O}_1^\kappa$（分别为 $\mathcal{O}_q^\kappa$）为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的偶数（分别为奇数）主块。

4. Primitive objects in the category $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}$

在本节中，我们将介绍并研究范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的本原对象；这些对象可用于构造 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的所有不可分解对象。作为一个应用，我们重新得到 Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示论。

4.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的拟本原对象。

定义 4.1。若 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的有限维 q^2-链模，其权集为 $\Lambda_M = \{q^{s+2i} \mid 0 \leq i \leq l\}$，其中 s、$l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ 为某些元素，则称 M 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的拟本原模。

设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的一个 $(n+1)$ 维准本原模，其权集为 $\Lambda_M = \{q^{s+2i} \mid 0 \leq i \leq l\}$，则 $M = \bigoplus_{i=0}^{l} M_{q^{s+2i}}$. 对于每个 $0 \leq i \leq l$，设 $\dim M_{q^{s+2i}} = n_i$ 且 $\{v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in_i}\}$ 是 $M_{q^{s+2i}}$ 的一个基，则 $n+1 = \sum n_i$ 和 $_{i=0}$

$$B_M = \{v_{01}, v_{02}, \cdots, v_{0n_0}, \cdots, v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in_i}, \cdots, v_{l1}, v_{l2}, \cdots, v_{ln_l}\}$$

是 M 的一个有序基。由于 $KE = q^2EK$ 和 $KF = q^{-2}FK$，因此 $EM_{q^{s+2i}} \subseteq M_{q^{s+2(i+1)}}$ 和 $FM_{q^{s+2i}} \subseteq M_{q^{s+2(i-1)}}$。因此，$K$、$E$、$F$ 作用在 M 上，并且相对于有序基 B_M，其矩阵分别为

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} q^s I_{n_0} & & & \\ & q^{s+2} I_{n_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{s+2l} I_{n_l} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \mathcal{E}_0 & 0 & & & \\ & \mathcal{E}_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & \mathcal{E}_{l-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_0 & & & \\ & 0 & \mathcal{F}_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \mathcal{F}_{l-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中，I_{n_i} 是 $n_i \times n_i$ 单位矩阵，$\mathcal{E}_i$ 是 $n_{i+1} \times n_i$ 矩阵，$\mathcal{F}_i$ 是 $n_i \times n_{i+1}$ 矩阵。除非另有说明，我们总是假设当 $i \leq -1$ 或 $i \geq l$时，$\mathcal{E}_i = 0$ 和 $\mathcal{F}_i = 0$。

现在，我们可以如下给出范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$ 中的拟本原对象。

命题 4.2. 保持上述记号不变。若 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$的一个（$n+1$）维拟本原模，且 $\Lambda_M = \{q^{s+2i} \mid 0 \leq i \leq l\}$，则 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$的生成元 K、E、F作用在 M 的基 B_M 上可表示如下

$$\begin{cases} KB_M = B_M\mathcal{K}, \\ EB_M = B_M\mathcal{E}, \\ FB_M = B_M\mathcal{F}, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0, \quad s = 0, & \text{if } l = 0, \\ \mathcal{E}_{i-1}\mathcal{F}_{i-1} - \mathcal{F}_i\mathcal{E}_i = (1 - \delta_{\kappa,0})[s+2i]_m I_{n_i} \ (0 \leq i \leq l), & \text{if } l \geq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

证明。由以下事实可知，$\mathcal{E}\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{E} = (1 - \delta_{\kappa,0})\frac{\mathcal{K}^m - \mathcal{K}^{-m}}{q^m - q^{-m}}$ 等价于（4.2）。 □

准本原 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模的自同态代数可由下述方式刻画。

命题 4.3. 设 M 是由 (4.1) 和 (4.2) 定义的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的 $(n+1)$ 维准本原模。则 M 的自同态代数 $\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)}(M)$ 同构于

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \mathcal{E}_i A_i = A_{i+1}\mathcal{E}_i (0 \leq i \leq l-1), \\ A_i\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i A_{i+1} (0 \leq i \leq l-1) \end{array} \right\}, \tag{4.3}$$

其中 A_i 是 $0 \leq i \leq l$的 $n_i \times n_i$ 矩阵。

证明。假设 $\phi \in$端同态环$_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\ \kappa)}(M)$。由于对于任意 $v \in M$， $\phi(Kv) = K\phi(v)$，因此对于任意 $\lambda \in \Lambda_M$， $\phi(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$，这意味着

$$\phi B_M = B_M \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}.$$

此外，对于 $v \in M$， $\phi(Ev) = E\phi(v)$ 且 $\phi(Fv) = F\phi(v)$ 这一事实等价于说：

$$\mathcal{E}_i A_i = A_{i+1}\mathcal{E}_i (0 \le i \le l-1),$$
$$A_i \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i A_{i+1} (0 \le i \le l-1).$$

因此，这个命题成立。 □

4.2. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的本原模。

定义 4.4. 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一个有限维准本原模。若 M 不可分解，且其权集 $\Lambda_M = \{1, q^2, \cdots, q^{2i}, \cdots, q^{2l}\}$ 对某个整数 $l \ge 0$ 成立，则称 M 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一个本原模。

本原模的重要性在于这样一个事实：范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的每个不可分解模，都可以通过对某个本原模应用平移函子 $\Sigma : \mathcal{O}_1^0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^0$ 和传递函子 $\Theta_\lambda : \mathcal{O}_1^0 \longrightarrow \mathcal{O}_\lambda^0$ 得到。具体而言，我们有以下命题。

命题 4.5. 对于范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 中的任意不可分解模 N，存在唯一的三元组 (M, λ, k)，使得 $N \cong \Theta_\lambda \Sigma^k M$，其中 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的本原模，$\lambda \in [\Lambda_\kappa / \overset{q^2}{\sim}]$ 且 $k \in \mathbb{Z}$。

证明. 根据命题 3.15，存在唯一的 $\lambda \in [\Lambda_\kappa / \overset{q^2}{\sim}]$，使得 N 属于块 $\mathcal{O}_\lambda^0$。根据命题 3.10 和定理 3.20 (1)，我们知道 $\Theta_\lambda^{-1} N$ 是主块 $\mathcal{O}_1^0$ 中的不可分解 q^2-链模。根据引理 3.14，存在唯一的一对整数 (k, l)，满足 $k \le l$，使得 $\Lambda_{\Theta_\lambda^{-1} N} = \left\{ q^{2i} | k \le i \le l \right\}$. 。根据定理 3.20 (1)， $\Sigma^{-k}\Theta_\lambda^{-1} N$ 是一个本原模。因此，我们可以选取 $M = \Sigma^{-k}\Theta_\lambda^{-1} N$，使得 $N \cong \Theta_\lambda \Sigma^k M$。$(M, \lambda, k)$ 的唯一性可由 Σ 和 Θ_λ 的定义得出。□

将命题 4.2 和命题 4.3 应用于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$，可得到以下两个推论。

推论 4.6. 设 $n \in \mathbb{Z}^{\ge 0}$。若 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一个维数为 $(n+1)$、基为 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 且权集为 $\Lambda_n = \{q^{2i} | 0 \le i \le n\}$ 的准本原模，则有

$$\begin{cases} Kv_i = q^{2i} v_i, \\ Ev_i = \begin{cases} \mathcal{E}_i v_{i+1}, & \text{if } i < n, \\ 0, & \text{if } i = n, \end{cases} \\ Fv_i = \begin{cases} \mathcal{F}_{i-1} v_{i-1}, & \text{if } i > 0, \\ 0, & \text{if } i = 0, \end{cases} \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 $\mathcal{E}_i$、 $\mathcal{F}_i \in \mathbb{C}$ 满足

$$\mathcal{E}_0 \mathcal{F}_0 = \mathcal{E}_1 \mathcal{F}_1 = \cdots = \mathcal{E}_{n-1} \mathcal{F}_{n-1} = 0. \tag{4.5}$$

推论 4.7. 设 $L_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ 是由 (4.4) 和 (4.5) 定义的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的 $(n+1)$ 维准本原模。则以下结论成立。

(1) 端同态环$_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(L_{\mathcal{E},\mathcal{F}}) \cong \underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{r}$，其中 $r=\{i|\mathcal{E}_i=\mathcal{F}_i=0, 0\le i\le n-1\}^\sharp+1$.

(2) $L_{\mathcal{E},\ \mathcal{F}}$是不可分解的，当且仅当 $\{i|\mathcal{E}_i=\mathcal{F}_i=0, 0\le i\le n-1\}^\sharp=0$.

证明。(1) 由命题 4.2 可知，我们只需证明存在一个同构。 sm

$$\left\{\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_i\mathcal{E}_i=a_{i+1}\mathcal{E}_i(0\le i\le n-1),\\ a_i\mathcal{F}_i=a_{i+1}\mathcal{F}_i(0\le i\le n-1)\end{array}\right\} \cong \underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{r}. \tag{4.6}$$

考虑彩票娱乐

$$\begin{cases} a_i\mathcal{E}_i=a_{i+1}\mathcal{E}_i\ (0\le i\le n-1),\\ a_i\mathcal{F}_i=a_{i+1}\mathcal{F}_i\ (0\le i\le n-1)\end{cases} \tag{4.7}$$

作为关于 a_0、a_1、$\cdots$、a_n 的线性方程组，则（4.5）中的条件意味着（4.7）的基础解个数等于 r。因此，（4.6）中的同构存在。
(2) $L_{\mathcal{E},\ \mathcal{F}}$ 不可分解当且仅当 End$_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)}(L_{\mathcal{E},\ \mathcal{F}})$ 是局部环，这等价于说 (4.6) 中的 $r=1$，即 $\{i|\mathcal{E}_i=\mathcal{F}_i=0, 0\le i\le n-1\}^\sharp=0$. □

利用推论4.6和4.7，我们可以显式地给出 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一类本原模，直到同构为止。

定理 4.8. 假设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 的一个 $(n+1)$ 维本原模，其权集为 $\Lambda_M=\{q^{2i}|0\le i\le n\}$。那么 M 同构于一个 $(n+1)$ 维模 $L_{\mathcal{E}^{\mathbf{P}},\ \mathcal{F}^{\mathbf{P}}}$，其基为 $w_0, w_1, \cdots, w_n$，且 K, E, F 的作用定义如下:

$$\begin{cases} Kw_i=q^{2i}w_i,\\ Ew_i=\begin{cases}\mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}w_{i+1}, & \text{if } i<n,\\ 0, & \text{if } i=n,\end{cases}\\ Fw_i=\begin{cases}\mathcal{F}_{i-1}^{\mathbf{P}}w_{i-1}, & \text{if } i>0,\\ 0, & \text{if } i=0,\end{cases}\end{cases} \tag{4.8}$$

其中，对于任意 $n\ge 1$ 和 $0\le i\le n-1$，系数 $\mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}$、$\mathcal{F}_i^{\mathbf{P}}\in\mathbb{C}$ 满足

$$\mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}\mathcal{F}_i^{\mathbf{P}}=0 \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}+\mathcal{F}_i^{\mathbf{P}}=1. \tag{4.9}$$

证明。由推论 4.6 和 4.7 (2)， M 可由 (4.4) 表示，其中 $\mathcal{E}_i\mathcal{F}_i=0$ 和 $\mathcal{E}_i+\mathcal{F}_i\neq 0$.对于任意 $c\in\mathbb{C}$, 定义 $\delta_c=\begin{cases}1, & \text{若 } c\neq 0,\\ 0 & c=0\end{cases}$，若，则令 $\mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}=\delta_{\mathcal{E}_i}$ 和 $\mathcal{F}_i^{\mathbf{P}}=\delta_{\mathcal{F}_i}$。由于下列线性方程

$$\begin{cases} \mathcal{E}_i\lambda_{i+1}=\mathcal{E}_i^{\mathbf{P}}\lambda_i\ (0\le i\le n-1),\\ \mathcal{F}_i\lambda_i=\mathcal{F}_i^{\mathbf{P}}\lambda_{i+1}\ (0\le i\le n-1)\end{cases}$$

存在非零解 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，且所有 $\lambda_i\neq 0$ 均成立，那么容易验证，由 $M\xrightarrow{\varphi} L_{\mathcal{E}^{\mathbf{P}},\mathcal{F}^{\mathbf{P}}}$ 定义的映射 $\varphi(v_i)=\lambda_i w_i$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模的同构。□

4.3. $\kappa \neq 0$的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$本原模。

定义 4.9. 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的有限维准本原模。如果 M 是单的，则称 M 为 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的本原模。

为了描述 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的本原模，我们需要以下基本命题。

命题 4.10. 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的一个 $(n+1)$-维准本原模。假设 M 的所有权空间维数相等。如果 M 不可分解，那么 M 的所有权空间维数都等于 1，且 M 的权集 Λ_M 由下式给出

$$\Lambda_M = \{q^{-n}, q^{-n+2}, \cdots, q^{n-2}, q^n\}. \tag{4.10}$$

证明。在命题 4.2 中，任何 $(n+1)$ 维的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的准本原模 M 都由 (4.1) 和 (4.2) 刻画。本证明中，我们沿用命题 4.2 中的记号。由于 M 的所有权空间维数相等，因此对于所有 $0 \leq i \leq l.$, $\dim M_{q^{s+2i}} = n_0$ 。当 $l = 0$ 时，注意到 M 不可分解，由命题 4.2 可知 $n_0 = n = 1$ 和 $\Lambda_M = \{1\}$。

从现在起，我们假设 $l \geq 1$。对于任意 $0 \leq i \leq l-1$，分别将 (4.2) 中上面的 $i+1$ 个公式与下面的 $l-i$ 个公式相加，可得

$$\mathcal{F}_i\mathcal{E}_i = a_i I_{n_0} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_i\mathcal{F}_i = b_i I_{n_0}, \tag{4.11}$$

其中

$$\begin{cases} a_i = \sum\limits_{k=0}^{i} [-s-2k]_m = [-s-i]_m[i+1]_m, \\ b_i = \sum\limits_{k=i+1}^{l} [s+2k]_m = [l-i]_m[s+l+i+1]_m. \end{cases} \tag{4.12}$$

我们断言，对于任意 $0 \leq i \leq l-1$， $a_i = b_i \neq 0$ 。显然，由 (4.11) 可推出$a_i \neq 0$ 当且仅当 $b_i \neq 0$，此时 $a_i = b_i \neq 0$。为证明该断言，我们只需排除情形 $a_i = b_i = 0$。事实上，$a_i = b_i = 0$ 当且仅当 $s+i = 0$ 且 $i = l$，这与 $0 \leq i \leq l-1$ 矛盾。因此，对于任意 $0 \leq i \leq l-1$ ，有

$$\mathcal{E}_i\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i\mathcal{E}_i = a_i I_{n_0}. \tag{4.13}$$

结合 (4.13) 与命题 4.3，可得

$$\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)}(M) \cong \mathbf{Mat}_{n_0}(\mathbb{C}), \tag{4.14}$$

其中，$\mathbf{Mat}_{n_0}(\mathbb{C})$ 是由所有 $n_0 \times n_0$ 复矩阵构成的矩阵代数。由于 M 不可分解，因此 $\mathbf{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)}(M)$ 是局部环，这意味着 $n_0 = 1$。

接下来我们证明 $\Lambda_M = \{q^{-n}, q^{-n+2}, \cdots, q^{n-2}, q^n\}$. 由于 M是（$n+1$）维的，因此l $n+1 = \sum n_i = l+1$。所以我们可以将 M的权集表示如下$i=0$

$$\Lambda_M = \{q^s, q^{s+2}, \cdots, q^{s+2(n-1)}, q^{s+2n}\}.$$

由 (4.12) 可得

$$a_i - b_i = \sum_{k=0}^{n} [-s-2k]_m = [-s-n]_m[n+1]_m. \tag{4.15}$$

由于 $a_i = b_i$ 和 $q \in \mathbb{C}^\times$ 不是单位根，必有 $s = -n$。证明完毕。□

对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，令

$$[K;n]_m=\frac{q^{nm}K^m-q^{-nm}K^{-m}}{q^m-q^{-m}}.$$

容易验证，在 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 中有

$$FE^r-E^rF=-[r]_mE^{r-1}[K;r-1]_m. \tag{4.16}$$

$U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的中心是由卡西米尔元生成的多项式代数

$$C_q=EF+\frac{q^{-m}K^m+q^mK^{-m}}{(q^m-q^{-m})^2}=FE+\frac{q^mK^m+q^{-m}K^{-m}}{(q^m-q^{-m})^2},$$

这在 [23] 中的定理 4.15 中得到了证明。

借助 命题 4.10，我们可以清楚地描述 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa$ 的本原模).

定理 4.11. 设 M 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的一个 $(n+1)$ 维本原模。则以下陈述成立。

(1) M 的所有权空间的维数均为 1 .

(2) M同构于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 的 $(n+1)$ 维本原模 $L_{\mathbf{p}}(n,+)$，其基为 $w_0,w_1,\cdots,w_n$，且 K,E,F 在 M 上的作用如下

$$\begin{cases} Kw_i=q^{2i-n}w_i,\\ Ew_i=\begin{cases}[n-i]_m[i+1]_mw_{i+1}, & \text{if } i<n,\\ 0, & \text{if } i=n,\end{cases}\\ Fw_i=\begin{cases}w_{i-1}, & \text{if } i>0,\\ 0, & \text{if } i=0.\end{cases}\end{cases} \tag{4.17}$$

(3) C_q 在 M 上的作用与其在 $L_{\mathbf{p}}(n,+)$ 上的作用相同，均为标量 $c_q(n)$，其中

$$c_q(n)=\frac{q^{(n+1)m}+q^{-(n+1)m}}{(q^m-q^{-m})^2}.$$

证明。(1) 在此证明中，我们也沿用命题 4.2 中的记号，并分别将矩阵 $\mathcal{E}_i$ 和 $\mathcal{F}_i$ 视为线性映射 $M_{q^{s+2i}}\xrightarrow{E}M_{q^{s+2(i+1)}}$ 和 $M_{q^{s+2(i+1)}}\xrightarrow{F}M_{q^{s+2i}}$。由命题 4.10 可知，要证明 (1)，只需证明 M 的所有权空间维数相等，即

$$\dim M_{q^{s+2i}}=n_i=n_{i+1}=\dim M_{q^{s+2(i+1)}}\ (0\le i\le l-1). \tag{4.18}$$

当 $l=0$ 时，断言 (4.18) 显然成立。现在假设 $l\ge1$，我们将对 i 作归纳来证明 (4.18)。

当 $i=0$ 时，由 (4.2) 可得

$$\mathcal{F}_0\mathcal{E}_0=[-s]_mI_{n_0}. \tag{4.19}$$

由 $FM_{q^s}=0$ 和 (4.16) 可得

$$FE^{j+1}M_{q^s}=\left(E^{j+1}F-[j+1]_mE^j[K;j]_m\right)M_{q^s}\subseteq E^jM_{q^s}. \tag{4.20}$$

我们断言 $\mathcal{F}_0\mathcal{E}_0\neq0$。否则，若 $\mathcal{E}_0=0$，则 M_{q^s} 是 M 的非平凡子模；当 $_{l-1}\mathcal{E}_0\neq0$ 时，由 $\mathcal{F}_0\mathcal{E}_0=0$ 和 (4.20) 可知，$\bigoplus E^{j+1}M_{q^s}$ 是 M 的非平凡子模。$_{j=0}$现在 (4.19) 蕴含 $n_0\le n_1$。若 $n_0<n_1$，则 $\mathrm{Im}\mathcal{E}_0=EM_{q^s}$ 是 $_{l-1}M_{q^{s+2}}$ 的非零真子空间。容易根据 (4.20) 验证，$N=M_{q^s}\oplus\bigoplus E^{j+1}M_{q^s}$ 是 M 的非平凡子模，$_{j=0}$这与 M 的单纯性矛盾。因此 $n_0=n_1$。

现在假设 $n_0 = n_1 = \cdots = n_i$，我们将验证 $n_i = n_{i+1}$。在这种情况下，我们也可以类似于 (4.11) 推导出 $\mathcal{F}_i\mathcal{E}_i = a_i I_{n_i}$，并证明

$$N = \begin{cases} \bigoplus_{j=0}^{i} M_{q^{s+2j}}, & \text{when } \mathcal{E}_i = 0, \\ \bigoplus_{j=0}^{l-i-1} E^{j+1} M_{q^{s+2i}}, & \text{when } \mathcal{F}_i\mathcal{E}_i = 0 \text{ and } \mathcal{E}_i \neq 0, \\ \bigoplus_{j=0}^{i} M_{q^{s+2j}} \oplus \bigoplus_{j=0}^{l-i-1} E^{j+1} M_{q^{s+2i}}, & \text{when } \mathcal{F}_i\mathcal{E}_i \neq 0 \text{ and } n_i < n_{i+1} \end{cases}$$

是 M 的非平凡子模。接着，我们可以用与情形 $i = 0$ 类似的方法证明 $\mathcal{F}_i\mathcal{E}_i \neq 0$ 和 $n_i = n_{i+1}$。

(2) 首先，容易验证 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 的一个模。

接下来我们将证明 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 是本原的。否则， $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 的长度 t 至少为 2，也就是说， $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 存在如下合成列

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_t = L_{\mathbf{p}}(n, +).$$

由于 L_1 是单的，且 $\Lambda_{L_1} \subseteq \Lambda_{L_{\mathbf{p}}(n,+)}$，由命题 3.6 和 3.10 可知 L_1 是本原的。于是，由 (1) 和命题 4.10 可得 $\Lambda_{L_1} = \{q^{-l_1}, q^{-l_1+2}, \cdots, q^{l_1-2}, q^{l_1}\}$，其中 $l_1 = \underline{\dim} L_1 - 1 < n$。因此，$L_1 = \bigoplus_{i=\frac{n-l_1}{2}}^{\frac{n+l_1}{2}} \mathbb{C} w_i$。然而，公式 (4.17) 表明 L_1 不是 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 的子模，这与此矛盾。

最后，我们将验证 M 与 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 同构。由 (1)、命题 4.10 和命题 4.2， M 可表示为

$$\begin{cases} Kv_i = q^{2i-n} v_i, \\ Ev_i = \begin{cases} \mathcal{E}_i v_{i+1}, & \text{if } i < n, \\ 0, & \text{if } i = n, \end{cases} \\ Fv_i = \begin{cases} \mathcal{F}_{i-1} v_{i-1}, & \text{if } i > 0, \\ 0, & \text{if } i = 0, \end{cases} \end{cases}$$

其中 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 是 M的一组基，且 $\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i \in \mathbb{C}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ 满足 $\mathcal{E}_i\mathcal{F}_i = [n-i]_m[i+1]_m$.由于下面的线性方程组

$$\begin{cases} \mathcal{E}_i \lambda_{i+1} = [n-i]_m [i+1]_m \lambda_i \ (0 \leq i \leq n-1), \\ \mathcal{F}_i \lambda_i = \lambda_{i+1} \ (0 \leq i \leq n-1) \end{cases}$$

有一个非零解 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，其中所有 $\lambda_i \neq 0$ 均成立，因此不难验证，由 $\phi(v_i) = \lambda_i w_i$ 定义的映射$M \xrightarrow{\phi} L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模之间的一个同构。

(3) 注意到，对于 M 和 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$，以及 $\Lambda_M = \Lambda_{L_{\mathbf{p}}(n,+)}$，(4.11) 和 (4.13) 均成立，因此通过直接计算可推知， C_q 在 M 上的作用与其在 $L_{\mathbf{p}}(n, +)$ 上的作用相同，均为标量 $c_q(n)$。□

定义 4.9 中的“本原”一词也是恰当的，因为我们很快将证明以下两个事实：（1） $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-mod 中的每个单对象，都可以通过对某个本原对象应用传递函子 $\Upsilon_\omega^{\lambda_0}: \mathcal{O}_{\lambda_0}^\kappa \longrightarrow \mathcal{O}_{\lambda_0\omega}^\kappa$ 来得到；（2）范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-mod 是半单的。

定理 4.12. (1) 对于任意维数为 $n+1$ 的单的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模 L，存在唯一的一对 (λ_0, ω)，使得 $L \cong \Upsilon_\omega^{\lambda_0}(L_{\mathbf{p}}(n, +))$，其中 $\omega^{2m} = 1$，且若 n 为偶数，则 $\lambda_0 = \begin{cases} 1, \\ \end{cases}$；若为奇数，则 q n 。。

(2) 每个维数为 $n+1$ 的单的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模都同构于一个 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模 $L(n,\omega)$，其基为 v_0、v_1、$\cdots$、v_n 和 $\omega^{2m}=1$，且对所有 $0\le i\le n$

$$\begin{cases} Kv_i=\omega q^{2i-n}v_i,\\ Ev_i=\begin{cases}\omega^m[n-i]_m[i+1]_m v_{i+1}, & \text{if } i<n,\\ 0, & \text{if } i=n,\end{cases}\\ Fv_i=\begin{cases}v_{i-1}, & \text{if } i>0,\\ 0, & \text{if } i=0.\end{cases}\end{cases} \tag{4.21}$$

证明。（1）根据定义 3.19 (2)，我们选取 $[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]=\{\omega,q\omega|\omega^{2m}=1\}$.。由命题 3.15，存在唯一的 $\lambda_0\omega\in[\Lambda_\kappa/\overset{q^2}{\sim}]$，使得 L 属于块 $\mathcal{O}^\kappa_{\lambda_0\omega}$，其中 $\lambda_0\in\{1,q\}$。由定理 3.20 (2)，我们知道 $(\Upsilon^{\lambda_0}_\omega)^{-1}L$ 是主块 $\mathcal{O}^\kappa_{\lambda_0}$ 中的本原模。由定理 4.11 (2) 可得 $(\Upsilon^{\lambda_0}_\omega)^{-1}L\cong L_{\mathbf{p}}(n,+)$。因此 $L\cong\Upsilon^{\lambda_0}_\omega(L_{\mathbf{p}}(n,+))$。$(\lambda_0,\omega)$ 的唯一性源于 $\lambda_0\omega$ 的唯一性。

（2） $\Upsilon^{\lambda_0}_\omega$ 的定义意味着 $L(n,\omega)=\Upsilon^{\lambda_0}_\omega(L_{\mathbf{p}}(n,+))$。因此，（2）由（1）推出。 □

推论 4.13. (1) 偶数（分别为奇数）主块 $\mathcal{O}^\kappa_1$（分别为 $\mathcal{O}^\kappa_q$）中维数为 $n+1$ 的每个单 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模都同构于模 $L(n,1)$，其中 n 为偶数（分别为奇数）。(2) 给定 $\lambda_0\in\{1,q\}$，设 L 和 L' 是主块 $\mathcal{O}^\kappa_{\lambda_0}$ 中有限维单 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模。若 C_q 在 L 上的作用与在 L' 上的作用为同一标量，则 L 同构于 L'。

证明。(1) 这直接由定理 4.12 (2) 得出。

(2) 假设 $\dim L=n+1$ 和 $\dim L'=n'+1$，则由 (1) 可得 $L\cong L(n,1)=L_{\mathbf{p}}(n,+)$，且 $L'\cong L(n',1)=L_{\mathbf{p}}(n',+)$。由定理 4.11 (3)，$C_q$ 在 L（分别在 L'）上的作用与其在 $L_{\mathbf{p}}(n,+)$（分别在 $L_{\mathbf{p}}(n',+)$）上的作用相同，均为标量 $c_q(n)$（分别为 $c_q(n')$）。若 C_q 在 L 上的作用与其在 L' 上的作用相同，均为同一标量，则 $c_q(n)=c_q(n')$。通过直接计算，$c_q(n)=c_q(n')$ 当且仅当

$$q^{-(n+1)m}(q^{(n+n'+2)m}-1)(q^{(n-n')m}-1)=0,$$

这等价于说 $n=n'$。因此，$L\cong L(n,1)\cong L'$。 □

定理 4.14. 每个有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模都是半单的。

证明. 根据命题 3.6、定理 3.11 和定理 3.20 (2)，我们只需证明主块 $\mathcal{O}^\kappa_1$ 和 $\mathcal{O}^\kappa_q$ 中的每个不可分解 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-模 M 都是单的，即其长度 $l(M)$ 为 1。

假设 $g(x)=(x-\mu_1)^{r_1}(x-\mu_2)^{r_2}\cdots(x-\mu_s)^{r_s}$ 是 C_q 在 M 上作用的特征多项式。那么 M 是对应于 C_q 的广义特征空间的直和，即 $M=\bigoplus M^{\mu_i},k=1$，其中 $M^{\mu_i}=\{v\in M|(C_q-\mu_i)^{r_i}v=0\}$。由于 C_q 在 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$ 中是中心的，每个 M^{μ_i} 都是 M 的子模。因此，由于 M 不可分解，对某个 μ，有 $M=M^\mu=\{v\in M|(C_q-\mu)^r v=0\}$。

设 $l(M)=l$。取一个合成列

$$0=M_0\subset M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_l=M \tag{4.22}$$

M 的。由于 $M=M^\mu$，因此 $C_q-\mu$ 在每个 $M_i/M_{i-1}(1\le i\le l)$ 上幂零地作用。另一方面，由舒尔引理，C_q 通过标量 ν_i 在 M_i/M_{i-1} 上作用。因此，对于所有 $1\le i\le l$，都有 $\nu_i=\mu$。此外，从命题 3.3 的证明中可以看出，每个 $M_i/M_{i-1}(1\le i\le l)$ 都在 the

与 M 相同的主块。因此，由推论 4.13 可知，存在一个整数 $n_0 \geq 0$，使得每个 M_i/M_{i-1}($1 \leq i \leq l$) 都同构于 $L(n_0,1)$。

设 N 是 M 的子模。由于对于任意 $\nu \in \Lambda_M$，$\dim M_\nu = \dim N_\nu + \dim(M/N)_\nu$，因此我们将此结论反复应用于合成列 (4.22)，得到

$$\dim M_\nu = \sum_{i=1}^{l} \dim(M_i/M_{i-1})_\nu = l \dim L(n_0,1)_\nu = l$$

对于任意 $\nu \in \Lambda_M$。由命题 4.10 可知，M 的所有权空间的维数都等于 1，即 $l = 1$。因此，M 是单的。□

5. Tensor-categorical realizations of the principle blocks of $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$

在本节中，我们将介绍与某些 $\mathbb{A}$ 型（变形）预投射代数序列相关的若干范畴，然后利用它们在张量范畴层面实现范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模$_{\mathrm{wt}}$ 的主块。

5.1. 变形预投射代数的有限维表示范畴。

设 (Q_∞, I_∞) 是如下的无限有界箭图，其中

$$Q_\infty: \quad \cdots\cdots \underset{-m}{\circ} \underset{\alpha_{-m}}{\rightleftarrows} \underset{1-m}{\circ} \cdots\cdots \underset{-1}{\circ} \underset{\alpha_{-1}}{\rightleftarrows} \underset{0}{\circ} \underset{\alpha_0}{\rightleftarrows} \underset{1}{\circ} \cdots\cdots \underset{m-1}{\circ} \underset{\alpha_{m-1}}{\rightleftarrows} \underset{m}{\circ} \cdots\cdots$$

以及由下式给出的关系集合 I_∞

$$\alpha_i \alpha_i^* - \alpha_{i+1}^* \alpha_{i+1} - \lambda_{i+1} s_{i+1},$$

其中，$\lambda_i \in \mathbb{C}$ 和 s_i 是 $i \in \mathbb{Z}$的平凡路径。

定义 5.1. 无限有界箭图（Q_∞, I_∞）的有限维表示 V 由以下数据定义：

(1) 对于 Q_∞ 中的每个顶点 i，都关联一个有限维向量空间 V_i，其维数为 $\dim V_i = n_i$，且非零向量空间 V_i 仅有有限个（$i \in \mathbb{Z}$）。
(2) 对于 Q_∞ 中的每个箭头 $i \xrightarrow{\alpha_i} i+1$（分别为 $i \xleftarrow{\alpha_i^*} i+1$），都关联一个线性映射 $V_i \xrightarrow{E_i^V} V_{i+1}$（分别为 $V_{i+1} \xrightarrow{F_i^V} V_i$），且 E_i^V、F_i^V（$i \in \mathbb{Z}$）满足

$$E_i^V F_i^V - F_{i+1}^V E_{i+1}^V = \lambda_{i+1} I_{n_{i+1}} \ (i \in \mathbb{Z}). \tag{5.1}$$

这样的表示记为 $V = (V_i, E_i^V, F_i^V)_{i \in \mathbb{Z}}$。

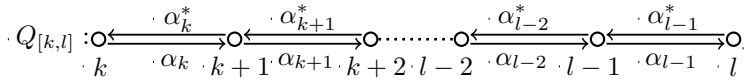
Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 的变形预投射代数的有限维表示范畴定义如下。

定义 5.2. 设 $\vec{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$。定义范畴 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\vec{\lambda}}$ 如下：
(1) $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\vec{\lambda}}$ 恰好是 (Q_∞, I_∞) 的所有有限维表示。(2) 对于任意两个对象 $V = (V_i, E_i^V, F_i^V)_{i \in \mathbb{Z}}$ 和 $W = (W_i, E_i^W, F_i^W)_{i \in \mathbb{Z}}$，若它们属于 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\vec{\lambda}}$，则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\vec{\lambda}}}(V,W) = \left\{ f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}} \middle| E_i^W f_i = f_{i+1} E_i^V, F_i^W f_{i+1} = f_i F_i^V \text{ for } i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

我们称 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 为权为 $\overrightarrow{\lambda}$ 的 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 变形预投射代数的有限维表示范畴。特别地，当 $\overrightarrow{\lambda}=0$ 时，我们称 repPI_∞^0 为 Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 预投射代数的有限维表示范畴。

对于任意两个整数 $k\le l$，令 $(Q_{[k,l]},I_{[k,l]})$ 为如下有界箭图，其具有



以及由以下集合 $I_{[k,l]}$ 给出的关系

$$\alpha_k^*\alpha_k-\lambda_k s_k,\quad \alpha_i\alpha_i^*-\alpha_{i+1}^*\alpha_{i+1}-\lambda_{i+1}s_{i+1}\ (k\le i\le l-2),\quad \alpha_{l-1}\alpha_{l-1}^*-\lambda_l s_l.$$

有界箭图代数 $kQ_{[k,l]}/I_{[k,l]}$ 正是 [9]，中引入的 Dynkin 类型 $\mathbb{A}_{l-k+1}$ 的变形预投射代数 $\Pi^{\lambda_{[k,l]}}$，其中 $\lambda_{[k,l]}=(\lambda_i)_{k\le i\le l}$。代数 $\Pi^{\lambda_{[k,l]}}$ 是有限维的（参见 [9, 10, 18]），且 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 中有限多个对象可同时视为某些整数 $k\le l$ 对应的有限维 $\Pi^{\lambda_{[k,l]}}$-模。因此，我们得到以下命题。

命题5.3。范畴 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 是一个局部有限 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴。

定义 5.4. 设 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 中的一个对象。若存在两个整数 k 和 l，满足 $k\le l$，使得 $V_i\ne 0$ 当且仅当 $k\le i\le l$ 时，则称 V 为链表示。

根据定义 5.4，我们可以立即得到以下命题。

命题 5.5. 若 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 中的一个不可分解对象，则 V 是 $\mathrm{repPI}_\infty^{\overrightarrow{\lambda}}$ 中的链表示。

5.2. $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块的张量范畴实现。

定义 5.6. 设 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是范畴 repPI_∞^0 中的一个对象。若 V 不可分解，且存在一个整数 $m\ge 1$，使得 $V_i\ne 0$ 当且仅当 $0\le i\le m-1$，则称 V 为本原对象。

对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，定义移位函子如下

$$\begin{aligned}[k]:\mathbf{repPI}_\infty^0 &\longrightarrow \mathbf{repPI}_\infty^0,\\ V &\longmapsto V[k],\\ V\xrightarrow{f}W &\longmapsto V[k]\xrightarrow{f[k]}W[k],\end{aligned}$$

其中 $V[k]=(V[k]_i,E[k]_i,F[k]_i)_{i\in\mathbb{Z}}=\left(V_{i-k},E_{i-k}^V,F_{i-k}^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $f[k]=(f[k]_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(f_{i-k})_{i\in\mathbb{Z}}$。

下面的命题表明，范畴 repPI_∞^0 中的每个不可分解对象，都可以通过对某个本原对象施加移位函子得到。

命题 5.7. 设 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是范畴 repPI_∞^0 中的一个不可分解对象。那么存在 repPI_∞^0 中的一个本原对象 $W=\left(W_j,E_j^W,F_j^W\right)_{j\in\mathbb{Z}}$，使得 $W[-i_0]=V$，其中 $i_0=\min\{i\in\mathbb{Z}|V_i\ne 0\}$。

证明. 根据命题 5.5， V 是一个链表示。取 $W = V[i_0]$，则容易验证 W 是一个本原对象，使得 $W[-i_0] = V$。□

定义函子 $\Omega : \mathrm{rep}\Pi^0_\infty \longrightarrow \mathcal{O}^0_1$ 如下

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbf{rep}\Pi^0_\infty &\longrightarrow \mathcal{O}^0_1, \\ V &\longmapsto \Omega(V), \\ V \xrightarrow{f} W &\longmapsto \Omega(V) \xrightarrow{\Omega(f)} \Omega(W), \end{aligned}$$

其中，作为向量空间，$\Omega(V) = \bigoplus V_i$，而 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$在$\Omega(V)$上的作用由$_{i\in\mathbb{Z}}$给出

$$\begin{cases} Kv = q^{2i}v, \\ Ev = E_i^V(v), \\ Fv = F_{i-1}^V(v) \end{cases}$$

对任意 $v \in V_i$，而$\Omega(f) = \bigoplus f_{i\circ}$ 定义函子Ω^{-1}： $\mathcal{O}^0_1 \longrightarrow \mathrm{rep}\Pi^0_\infty$ 如下$_{i\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} : \mathcal{O}^0_1 &\longrightarrow \mathbf{rep}\Pi^0_\infty, \\ M &\longmapsto \Omega^{-1}(M), \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Omega^{-1}(M) \xrightarrow{\Omega^{-1}(f)} \Omega^{-1}(N), \end{aligned}$$

其中$\Omega^{-1}(M) = V = (V_i, E_i^V, F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}}$由下式给出

$$\begin{cases} V_i = M_{q^{2i}}, \\ E_i^V := M_{q^{2i}} \xrightarrow{E} M_{q^{2(i+1)}}, \\ F_i^V := M_{q^{2(i+1)}} \xrightarrow{F} M_{q^{2i}}, \end{cases}$$

而$\Omega^{-1}(f) = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 g_i是 f在$M_{q^{2i}}$上的限制。

现在，我们可以在范畴层面实现 $\mathcal{O}^0_1$ of $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块。

定理 5.8。函子 $\Omega : \mathrm{rep}\Pi^0_\infty \longrightarrow \mathcal{O}^0_1$ 是范畴同构，并保持本原对象。

证明。容易验证 Ω 是可加的，且 $\Omega\Omega^{-1} = \mathrm{Id}^{\mathcal{O}^0_1}$， $\Omega^{-1}\Omega = \mathrm{Id}^{\mathbf{rep}\Pi^0_\infty}$。因此，$\Omega : \mathrm{rep}\Pi^0_\infty \longrightarrow \mathcal{O}^0_1$ 是范畴同构。此外，由定义 4.4、定义 5.6 以及 Ω 的定义可知， V 是本原的，当且仅当 $\Omega(V)$是本原的。□

定理 5.8 告诉我们，Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 的预投射代数理论能为研究新型量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$ 提供许多有用的信息，反之亦然。

记 Π_m 为 Dynkin 型 $\mathbb{A}_m$ 对应于有界箭图（$Q_{[0,m-1]}, I_{[0,m-1]}$）的预投射代数，记 $\mathrm{rep}\Pi_m$ 为 Π_m 的有限维表示范畴。对于 $\mathrm{rep}\Pi_m$ 中任意对象 $V = (V_i, E_i, F_i)_{0\le i\le m-1}$，记 V 的维数向量为 $\mathbf{dim}V \in \mathbb{N}^m$。令 $(-,-)$ 为 $\mathbb{Z}^m$ 上定义的对称双线性型

$$(\beta, \gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} 2\beta_i\gamma_i - \sum_{i\to j\in Q_{[0,m-1]}} \beta_i\gamma_j,$$

其中 $\beta=(\beta_i)_{0\le i\le m-1}$ 且 $\gamma=(\gamma_i)_{0\le i\le m-1}$。对于 $\mathrm{rep}\Pi_m$ 中任意两个对象 V 和 W，Crawley-Boevey 在 [7] 中证明了预投射代数的以下同调公式

$$\text{扩张群维数}^1_{\Pi_m}(V,W)=\text{同态空间维数}_{\Pi_m}(V,W)+\text{同态空间维数}_{\Pi_m}(W,V)-(\underline{\text{维数}V},\underline{\text{维数}W})。\tag{5.2}$$

由定理 3.16、定理 3.20、定理 5.8 和（5.2），我们可以得到范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模$_{\mathrm{wt}}$中的以下公式，它们与命题2.3中范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模中的公式略有不同。

命题 5.9. 假设 $q\in\mathbb{C}^\times$ 不是单位根，且 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}^\times$。则有

$$\mathrm{Ext}^1_{U_q(\mathfrak{sl}_2^*)\text{-}\mathbf{mod}_{\mathrm{wt}}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathbb{C}_\mu)\cong\begin{cases}\mathbb{C}, & \text{if } \lambda=q^2\mu \text{ or } \lambda=q^{-2}\mu,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

下面我们旨在建立主块 $\mathcal{O}_1^0$ （$\mathfrak{sl}_2^*$）-模$_{\mathrm{wt}}$ 的U_q与 Dynkin 型 $\mathbb{A}$的预投射代数的有限维表示范畴 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$ 之间的张量等价关系。

定理 5.10. (1) 主块 $\mathcal{O}_1^0$ $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模$_{\mathrm{wt}}$ 是一个张量范畴。(2) Dynkin 型 $\mathbb{A}$ 的预投射代数的有限维表示范畴 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$ 是一个张量范畴。

证明。（1）由于 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$是具有双射反 antipode 的 Hopf 代数，因此有限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-模的范畴 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 是张量范畴（参见 [3], 第 1.1 节、 [13] 推论 5.3.7 或 [24]命题 X1.3.1）。 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod$_{\mathrm{wt}}$ 的主块 $\mathcal{O}_1^0$ 只是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$-mod 的一个张量子范畴，其中结合约束与单位约束 a,l,r 正是有限维 $\mathbb{C}$-向量空间的 Vec 范畴 Vec 的结合约束与单位约束。

(2) 对于任意两个对象 $V=(V_i,E_i^V,F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}},W=(W_j,E_j^W,F_j^W)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$，定义张量积 $V\otimes W=((V\otimes W)_k,E_k^{V\otimes W},F_k^{V\otimes W})_{k\in\mathbb{Z}}$ by

$$\begin{cases}(V\otimes W)_k=\bigoplus\limits_{i+j=k}(V_i\otimes W_j),\\ E_k^{V\otimes W}=\bigoplus\limits_{i+j=k}(E_i^V\otimes q^{2j}1_{W_j}+1_{V_i}\otimes E_j^W),\\ F_k^{V\otimes W}=\bigoplus\limits_{i+j=k+1}(F_{i-1}^V\otimes 1_{W_j}+q^{-2i}1_{V_i}\otimes F_{j-1}^W).\end{cases}$$

对于任意两个态射

$$V=(V_i,E_i^V,F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}}\xrightarrow{f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}}V'=(V_i',E_i^{V'},F_i^{V'})_{i\in\mathbb{Z}},$$
$$W=(W_j,E_j^W,F_j^W)_{j\in\mathbb{Z}}\xrightarrow{g=(g_j)_{j\in\mathbb{Z}}}W'=(W_j',E_j^{W'},F_j^{W'})_{j\in\mathbb{Z}}$$

在 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$ 中，将张量积 $f\otimes g=((f\otimes g)_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 定义为

$$(f\otimes g)_k=\bigoplus_{i+j=k}(f_i\otimes g_j).$$

取 $\mathbb{1}=(\mathbb{1}_i,E_i^{\mathbb{1}},F_i^{\mathbb{1}})_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$，满足 $\mathbb{1}_i=0$，但 $\mathbb{1}_0=\mathbb{C}$且 $E_i^{\mathbb{1}},F_i^{\mathbb{1}}=0$对所有 $i\in\mathbb{Z}$均成立。显然，End($\mathbb{1}$)$\cong\mathbb{C}$。对于任意对象 $U,V,W\in\mathrm{rep}\Pi_\infty^0$，定义结合约束$\mathfrak{a}_{U,V,W}$：$(U\otimes V)\otimes W\longrightarrow U\otimes(V\otimes W)$、左单位约束 $\mathfrak{l}_V$：$\mathbb{1}\otimes V\longrightarrow V$以及右单位约束 $\mathfrak{r}_V$：$V\otimes\mathbb{1}\longrightarrow V$如下

$$(\mathfrak{a}_{U,V,W})_s=\bigoplus_{i+j+k=s}\mathbf{a}_{U_i,V_j,W_k},\quad(\mathfrak{l}_V)_s=\mathbf{l}_{V_s},\quad(\mathfrak{r}_V)_s=\mathbf{r}_{V_s}$$

其中，$\mathsf{a}_{U_i,\ V_j,\ W_k}$、$\mathsf{l}_{V_s}$和$\mathsf{r}_{V_s}$分别是Vec范畴中的结合约束、左单位约束和右单位约束。对于任意对象 $V=(V_i,E_i^V,F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathsf{rep}\Pi_\infty^0$，定义 V 的左对偶 $V^*=(V_i^*,E_i^{V^*},F_i^{V^*})_{i\in\mathbb{Z}}$和右对偶 ${}^*V=({}^*V_i,E_i^{{}^*V},F_i^{{}^*V})_{i\in\mathbb{Z}}$如下

$$\begin{cases} V_i^*=(V_{-i})^\star, & E_i^{V^*}=-q^{2(i+1)}(E_{-i-1}^V)^\star, & F_i^{V^*}=-q^{-2(i+1)}(F_{-i-1}^V)^\star,\\ {}^*V_i=(V_{-i})^\star, & E_i^{{}^*V}=-q^{2i}(E_{-i-1}^V)^\star, & F_i^{{}^*V}=-q^{-2i}(F_{-i-1}^V)^\star. \end{cases}$$

对于左对偶 V^*，求值 $\mathsf{ev}_V=((\mathsf{ev}_V)_i)_{i\in\mathbb{Z}}\colon V^*\otimes V\longrightarrow\mathbb{1}$ 由 b 确定。 y

$$\begin{aligned}(\mathbf{ev}_V)_0:\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(V_i^*\otimes V_{-i}) &\longrightarrow \mathbb{C},\\ f\otimes v &\longmapsto f(v),\end{aligned}$$

对任意 $f\otimes v\in V_i^*\otimes V_{-i}$，而余求值 $\mathsf{coev}_V\colon\mathbb{1}\longrightarrow V\otimes V^*$ 由此确定。

$$\begin{aligned}(\mathbf{coev}_V)_0:\mathbb{C} &\longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\left(V_i\otimes V_{-i}^*\right),\\ 1 &\longmapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{\dim V_i}\left(v_{ij}\otimes f_{ij}\right),\end{aligned}$$

其中 $\{v_{ij}|1\le j\le\dim\ V_i\}$是 V_i的基，$\{f_{ij}|1\le j\le\dim\ V_i\}$是 V_{-i}^*的对偶基。右对偶 ${}^*V$的求值和余求值可以类似地定义。可以直接验证，$\left(\mathsf{rep}\Pi_\infty^0、\otimes、\mathbf{1}、\mathfrak{a}、\mathfrak{l}、\mathfrak{r}\right)$是一个刚性幺半范畴。现在，(2)中的陈述由命题5.3得出。□

定理 5.11。函子 $\Omega:\mathsf{rep}\Pi_\infty^0\longrightarrow\mathcal{O}_1^0$ 是张量等价关系。

证明。显然，$\Omega(\mathbf{1})=\mathbb{C}_1$，其中由（2.1）定义的 $\mathbb{C}_1$ 是 $\mathcal{O}_1^0$中的单位对象。定义自然同构 $\mathrm{J}:\Omega(-)\otimes\Omega(-)\longrightarrow\Omega(-\otimes-)$如下。

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{V,W}:\Omega(V)\otimes\Omega(W)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}V_i\otimes\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j &\longrightarrow \Omega(V\otimes W)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{i+j=k}\left(V_i\otimes W_j\right),\\ (v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\otimes(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} &\longmapsto \left(\sum_{i+j=k}(v_i\otimes w_j)\right)_{k\in\mathbb{Z}},\end{aligned}\tag{5.3}$$

其中 V、$W\in$ 表示 Π_∞^0。然后我们可以直接验证 (Ω,J) 是从 $\mathsf{rep}\Pi_\infty^0$ 到 $\mathcal{O}_1^0$ 的张量函子。因此，由定理 5.8 可知，Ω 是张量等价。□

5.3. 十 $\kappa\neq0$ 的 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*,\kappa)$-mod 主块的张量范畴实现 .

定义 5.12. 设 $V=\left(V_i、\ E_i^V、\ F_i^V\right)_{k\le i\le l}$ 是 Dynkin 类型 $\mathbb{A}_{l-k+1}$的变形预投射代数 $\Pi^{\lambda_{[k,l]}}$ 的有限维单表示。若对于所有 $k\le i\le l$，$V_i\neq0$，则称 V 为 $\Pi^{\lambda_{[k,l]}}$的本原表示。

在本小节中，我们始终采用以下记号

$$\begin{aligned}\lambda_{\overline{0}}&:=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}=([2i]_m)_{i\in\mathbb{Z}},\\ \lambda_{\overline{1}}&:=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}=([2i+1]_m)_{i\in\mathbb{Z}}.\end{aligned}$$

命题 5.13。(1) $V=\left(V_i、\ E_i^V、\ F_i^V\right)_{k\le i\le l}$是 $\Pi^{\lambda_{\overline{0}[k,l]}}$的本原表示，当且仅当 V的维数向量 α_V等于 $(\underbrace{1\ 1\cdots\ 1}_{l-k+1},\ ,\ ,\ )$ 且 $k+l=0$。

(2) $V=\left(V_i、\ E_i^V、\ F_i^V\right)_{k\le i\le l}$是 $\Pi^{\lambda_{\overline{1}[k,l]}}$的本原表示，当且仅当 V的维数向量 α_V等于（$\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{l-k+1}$，，，）和 $k+l+1=0$。

证明。我们只证明（1），因为（2）的证明类似。Crawley-Boevey 得出的变形预投射代数的简单表示的维数向量分类结果（见 [8] 中的定理 1.2）表明，V 是 $\Pi^{\lambda_{\overline{0}[k,l]}}$ 的本原表示，当且仅当维数向量 $\alpha_V=(\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{l-k+1}，，，)$ 且 $\lambda_{\overline{0}[k,l]}\cdot\alpha_V=0$。由于

$$\lambda_{\overline{0}[k,l]}\cdot\alpha_V=[l-k+1]_m[l+k]_m$$

且 $q\in\mathbb{C}^\times$ 不是单位根，因此（1）成立。 □

定义 5.14。（1）若 $V=\left(V_i、\ E_i^V、\ F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$ 满足

$$\begin{cases}\dim V_i=\dim V_{-i} & \text{for }\forall\ i\in\mathbb{Z},\\ \dim V_i\ge\dim V_j & \text{for }\forall\ 0\le i\le j,\end{cases}\tag{5.4}$$

则称 $V=\left(V_i、\ E_i^V、\ F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$中是平衡的。

(2) 若 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$ 满足

$$\begin{cases}\dim V_i=\dim V_{-(i+1)} & \text{for }\forall\ i\in\mathbb{Z},\\ \dim V_i\ge\dim V_j & \text{for }\forall\ 0\le i\le j,\end{cases}\tag{5.5}$$

则称 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$中是平衡的。

命题 5.15. (1) 范畴 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$ 和 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$ 中的每个单对象都是平衡的。(2) 范畴 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$ 和 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$ 中的每个对象都是平衡的。

证明. (1) 假设 $V=\left(V_i,E_i^V,F_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$中的一个单对象。由命题 5.5，$V$ 是一个链表示，即存在两个整数 k 和 l，满足 $k\le l$，使得 $V_i\ne0$ 当且仅当 $k\le i\le l$。因此，V 可视为 $\Pi^{\lambda_{\overline{0}[k,l]}}$的一个本原表示。由命题 5.13 (1) 和定义 5.14 (1)，V 是平衡的。类似地，范畴 $\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$中的每个单对象也都是平衡的。

(2) 每个对象 $V=\left(V_iE_i^VF_i^V\right)_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$都可以看作某个 $\Pi^{\lambda_{\overline{0}[k,l]}}$ 的有限维表示，其中 $k\le l$。取一条合成列

$$0=\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}_1\subset\mathcal{V}_2\subset\cdots\subset\mathcal{V}_m=V\tag{5.6}$$

$_{m-1}$关于 V。由于维数向量 $\mathbf{dim}V=\sum\mathbf{dim}\,(\mathcal{V}_{i+1}/\mathcal{V}_i)$，因此根据命题 5.13 (1) 和$_{i=0}$定义 5.14 (1)，$V$是平衡的。同样，$\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$中的每个对象也是平衡的。

□

我们定义函子 $\Omega_1:\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}\longrightarrow\mathcal{O}_1^\kappa$ 如下

$$\begin{aligned}\Omega_1:\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} &\longrightarrow \mathcal{O}_1^\kappa,\\ V &\longmapsto \Omega_1(V),\\ V\xrightarrow{f}W &\longmapsto \Omega_1(V)\xrightarrow{\Omega_1(f)}\Omega_1(W),\end{aligned}$$

其中，作为一个向量空间，$\Omega_1(V) = \bigoplus V_i$，而 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 在 $\Omega_1(V)$ 上的作用由$_{i\in\mathbb{Z}}$给出

$$\begin{cases} Kv = q^{2i}v, \\ Ev = E_i^V(v), \\ Fv = F_{i-1}^V(v) \end{cases}$$

对任意 $v \in V_i$，而 $\Omega(f) = \bigoplus f_i$ （此表达式中只有有限多个非零的 f_i ）。定义一个$_{i\in\mathbb{Z}}$函子 Ω_1^{-1}: $\mathcal{O}_1^\kappa \longrightarrow$**rep**$\Pi_\infty^{\lambda_0}$ 如下

$$\begin{aligned} \Omega_1^{-1} : \mathcal{O}_1^\kappa &\longrightarrow \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_0}, \\ M &\longmapsto \Omega_1^{-1}(M), \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Omega_1^{-1}(M) \xrightarrow{\Omega_1^{-1}(f)} \Omega_1^{-1}(N), \end{aligned}$$

其中 $\Omega_1^{-1}(M) = V = (V_i, E_i^V, F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}}$ 由下式给出

$$\begin{cases} V_i = M_{q^{2i}}, \\ E_i^V := M_{q^{2i}} \xrightarrow{E} M_{q^{2(i+1)}}, \\ F_i^V := M_{q^{2(i+1)}} \xrightarrow{F} M_{q^{2i}} \end{cases}$$

对于 $i \in \mathbb{Z}$，而 $\Omega_1^{-1}(f) = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 f 在 $M_{q^{2i}}$ 上的限制为 g_i。

类似地，我们可以定义另一个函子 $\Omega_q : \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_\mathrm{T}} \longrightarrow \mathcal{O}_q^\kappa$ 如下

$$\begin{aligned} \Omega_q : \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_1} &\longrightarrow \mathcal{O}_q^\kappa, \\ V &\longmapsto \Omega_q(V), \\ V \xrightarrow{f} W &\longmapsto \Omega_q(V) \xrightarrow{\Omega_q(f)} \Omega_q(W), \end{aligned}$$

其中，作为向量空间，$\Omega_q(V) = \bigoplus V_i$，且 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$ 在 $\Omega_q(V)$ 上的作用由$_{i\in\mathbb{Z}}$给出

$$\begin{cases} Kv = q^{2i+1}v, \\ Ev = E_i^V(v), \\ Fv = F_{i-1}^V(v) \end{cases}$$

对于任意 $v \in V_i$，而 $\Omega_q(f) = \bigoplus f_i$ （此表达式中只有有限个非零的 f_i ）。定义一个函子 Ω_q^{-1}: $\mathcal{O}_q^\kappa \longrightarrow$**rep**$\Pi_\infty^{\lambda_\mathrm{T}}$，如下所示。

$$\begin{aligned} \Omega_q^{-1} : \mathcal{O}_q^\kappa &\longrightarrow \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_\mathrm{T}}, \\ M &\longmapsto \Omega_q^{-1}(M), \\ M \xrightarrow{f} N &\longmapsto \Omega_q^{-1}(M) \xrightarrow{\Omega_q^{-1}(f)} \Omega_q^{-1}(N), \end{aligned}$$

其中 $\Omega_q^{-1}(M) = V = (V_i, E_i^V, F_i^V)_{i\in\mathbb{Z}}$ 由以下给出

$$\begin{cases} V_i = M_{q^{2i+1}}, \\ E_i^V := M_{q^{2i+1}} \xrightarrow{E} M_{q^{2i+3}}, \\ F_i^V := M_{q^{2i+3}} \xrightarrow{F} M_{q^{2i+1}} \end{cases}$$

对于 $i \in \mathbb{Z}$，而 $\Omega^{-1}(f) = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 g_i 是 f 在 $M_{q^{2i+1}}$ 上的限制。

现在我们可以将 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-mod $(\kappa \neq 0)$ 的主块 $\mathcal{O}_1^\kappa$ 和 $\mathcal{O}_q^\kappa$ 实现为范畴。

定理 5.16. 函子 $\Omega_1 : \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \longrightarrow \mathcal{O}_1^\kappa$ 和 $\Omega_q : \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}} \longrightarrow \mathcal{O}_q^\kappa$ 是保持简单对象的范畴同构。

证明。容易验证

$$\begin{cases} \Omega_1\Omega_1^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_1^\kappa}, \quad \Omega_1^{-1}\Omega_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}}, \\ \Omega_q\Omega_q^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_q^\kappa}, \quad \Omega_q^{-1}\Omega_q = \mathrm{Id}_{\mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}}. \end{cases}$$

因此，Ω_1 和 Ω_q 是范畴同构。此外，根据 Ω_1和 Ω_q 的定义可知，它们都保持简单对象不变。□

以下推论由 Ω_1 和 Ω_q的定义、定理 4.14 以及定理 5.16 得出。

推论 5.17。范畴 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}$ 和 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$ 是半单的。

接下来我们将在范畴 $\mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$和 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$之间建立张量等价。

定理 5.18。（1） $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{wt}}$ 的主块的直和 $\mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$ 是一个张量范畴。

(2) 范畴 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$ 是一个张量范畴。

证明. (1) 由定理 5.10 (1) 中的类似论证可知，范畴 $\mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$是 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*, \kappa)$-模的一个张量子范畴，其结合约束与单位约束 a, l, r 与有限维 $\mathbb{C}$-向量空间的 Vec范畴相同。在此情形下， $\mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$ 中的单位对象 $\mathbb{1}_\kappa$ 是定理 4.11 (2) 中定义的本原表示 $L_{\mathbf{p}}(0, +)$。

(2) 假设 $U = U^{\overline{0}} \oplus U^{\overline{1}}, V = V^{\overline{0}} \oplus V^{\overline{1}}, W = W^{\overline{0}} \oplus W^{\overline{1}}, X = X^{\overline{0}} \oplus X^{\overline{1}}, Y = Y^{\overline{0}} \oplus Y^{\overline{1}} \in$rep $\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$。定义张量积

$$V \otimes W = (V^{\overline{0}} \oplus V^{\overline{1}}) \otimes (W^{\overline{0}} \oplus W^{\overline{1}}) = T^{\overline{0}} \oplus T^{\overline{1}} = (T_k^{\overline{0}}, E_k^{T^{\overline{0}}}, F_k^{T^{\overline{0}}})_{k\in\mathbb{Z}} \oplus (T_k^{\overline{1}}, E_k^{T^{\overline{1}}}, F_k^{T^{\overline{1}}})_{k\in\mathbb{Z}},$$

其中

$$\begin{aligned}
T_k^{\overline{0}} &= \bigoplus_{i+j=k} (V_i^{\overline{0}} \otimes W_j^{\overline{0}}) \oplus \bigoplus_{i+j=k-1} (V_i^{\overline{1}} \otimes W_j^{\overline{1}}), \qquad T_k^{\overline{1}} = \bigoplus_{i+j=k} (V_i^{\overline{0}} \otimes W_j^{\overline{1}} \oplus V_i^{\overline{1}} \otimes W_j^{\overline{0}}), \\
E_k^{T^{\overline{0}}} &= \bigoplus_{i+j=k} (E_i^{V^{\overline{0}}} \otimes q^{2jm} 1_{W_j^{\overline{0}}} + 1_{V_i^{\overline{0}}} \otimes E_j^{W^{\overline{0}}}) \oplus \bigoplus_{i+j=k-1} (E_i^{V^{\overline{1}}} \otimes q^{(2j+1)m} 1_{W_j^{\overline{1}}} + 1_{V_i^{\overline{1}}} \otimes E_j^{W^{\overline{1}}}), \\
E_k^{T^{\overline{1}}} &= \bigoplus_{i+j=k} \left[(E_i^{V^{\overline{0}}} \otimes q^{(2j+1)m} 1_{W_j^{\overline{1}}} + 1_{V_i^{\overline{0}}} \otimes E_j^{W^{\overline{1}}}) \oplus (E_i^{V^{\overline{1}}} \otimes q^{2jm} 1_{W_j^{\overline{0}}} + 1_{V_i^{\overline{1}}} \otimes E_j^{W^{\overline{0}}}) \right], \\
F_k^{T^{\overline{0}}} &= \bigoplus_{i+j=k} (F_{i-1}^{V^{\overline{0}}} \otimes 1_{W_j^{\overline{0}}} + q^{-2im} 1_{V_i^{\overline{0}}} \otimes F_{j-1}^{W^{\overline{0}}}) \oplus \bigoplus_{i+j=k-1} (F_{i-1}^{V^{\overline{1}}} \otimes 1_{W_j^{\overline{1}}} + q^{-(2i+1)m} 1_{V_i^{\overline{1}}} \otimes F_{j-1}^{W^{\overline{1}}}), \\
F_k^{T^{\overline{1}}} &= \bigoplus_{i+j=k} \left[(F_{i-1}^{V^{\overline{0}}} \otimes 1_{W_j^{\overline{1}}} + q^{-2im} 1_{V_i^{\overline{0}}} \otimes F_{j-1}^{W^{\overline{1}}}) \oplus (F_{i-1}^{V^{\overline{1}}} \otimes 1_{W_j^{\overline{0}}} + q^{-(2i+1)m} 1_{V_i^{\overline{1}}} \otimes F_{j-1}^{W^{\overline{0}}}) \right].
\end{aligned}$$

对于任意两个态射

$$\begin{aligned}
V = V^{\overline{0}} \oplus V^{\overline{1}} &\xrightarrow{f=f^{\overline{0}}\oplus f^{\overline{1}}=(f_i^{\overline{0}})_{i\in\mathbb{Z}}\oplus(f_i^{\overline{1}})_{i\in\mathbb{Z}}} X = X^{\overline{0}} \oplus X^{\overline{1}}, \\
W = W^{\overline{0}} \oplus W^{\overline{1}} &\xrightarrow{g=g^{\overline{0}}\oplus g^{\overline{1}}=(g_i^{\overline{0}})_{i\in\mathbb{Z}}\oplus(g_i^{\overline{1}})_{i\in\mathbb{Z}}} Y = Y^{\overline{0}} \oplus Y^{\overline{1}}
\end{aligned}$$

在 $\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda(1)} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda(q)}$ 中，定义张量积

$$f \otimes g = (f \otimes g)^{\overline{0}} \oplus (f \otimes g)^{\overline{1}} = ((f \otimes g)_k^{\overline{0}})_{k\in\mathbb{Z}} \oplus ((f \otimes g)_k^{\overline{1}})_{k\in\mathbb{Z}},$$

其中 $(f\otimes g)^{\overline{0}}_{k}=\bigoplus\limits_{i+j=k}(f_i^{\overline{0}}\otimes g_j^{\overline{0}})\oplus\bigoplus\limits_{i+j=k-1}(f_i^{\overline{1}}\otimes g_j^{\overline{1}})$，且 $(f\otimes g)^{\overline{1}}_{k}=\bigoplus\limits_{i+j=k}($ $f_i^{\overline{0}}\otimes g_j^{\overline{1}}\oplus f_i^{\overline{1}}\otimes g_j^{\overline{0}})$。取$\mathbb{1}=(\mathbb{1}_i,\ E_i^{\mathbb{1}},\ F_i^{\mathbb{1}})_{i\in\mathbb{Z}}$表示$\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$，其中 $\mathbb{1}_i=0$，但 $\mathbb{1}_0=\mathbb{C}$和 $E_i^{\mathbb{1}}$除外，对所有 $i\in\mathbb{Z}$，$F_i^{\mathbb{1}}=0$成立。显然，端同态环$(\mathbf{1})\cong\mathbb{C}$。定义结合约束$\mathfrak{a}_{U,V,W}\colon(U\otimes V)\otimes W\longrightarrow U\otimes(V\otimes W)$，左单位约束 $\mathfrak{l}_V\colon\ \mathbb{1}\otimes V\longrightarrow V$和右单位约束 $\mathfrak{r}_V\colon\ V\otimes\mathbb{1}\longrightarrow V$如下：

$$(\mathfrak{a}_{U,V,W})^{\overline{0}}_{s}=\bigoplus_{i+j+k=s}\mathbf{a}_{U_i^{\overline{0}},V_j^{\overline{0}},W_k^{\overline{0}}}\oplus\bigoplus_{\substack{(d_1,d_2,d_3)\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{(\overline{0},\overline{0},\overline{0})\}\\ d_1+d_2+d_3=\overline{0}\\ i+j+k=s-1}}\mathbf{a}_{U_i^{d_1},V_j^{d_2},W_k^{d_3}},$$

$$(\mathfrak{a}_{U,V,W})^{\overline{1}}_{s}=\bigoplus_{\substack{(d_1,d_2,d_3)\in\mathbb{Z}_2^3\setminus\{(\overline{1},\overline{1},\overline{1})\}\\ d_1+d_2+d_3=\overline{1}\\ i+j+k=s}}\mathbf{a}_{U_i^{d_1},V_j^{d_2},W_k^{d_3}}\oplus\bigoplus_{i+j+k=s-1}\mathbf{a}_{U_i^{\overline{1}},V_j^{\overline{1}},W_k^{\overline{1}}},$$

$$(\mathfrak{l}_V)^{\overline{0}}_{s}=\mathbf{l}_{V_s^{\overline{0}}},\quad(\mathfrak{l}_V)^{\overline{1}}_{s}=\mathbf{l}_{V_s^{\overline{1}}},\quad(\mathfrak{r}_V)^{\overline{0}}_{s}=\mathbf{r}_{V_s^{\overline{0}}},\quad(\mathfrak{r}_V)^{\overline{1}}_{s}=\mathbf{r}_{V_s^{\overline{1}}},$$

其中，$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{r}$ 分别是 Vec 范畴中的结合约束、左单位约束和右单位约束。对于任意对象 $V=V^{\overline{0}}\oplus V^{\overline{1}}\in\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}\oplus\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$，定义左对偶 $V^*=V^{*\overline{0}}\oplus V^{*\overline{1}}=(V_i^{*\overline{0}},E_i^{V^{*\overline{0}}},F_i^{V^{*\overline{0}}})_{i\in\mathbb{Z}}\oplus(V_i^{*\overline{1}},E_i^{V^{*\overline{1}}},F_i^{V^{*\overline{1}}})_{i\in\mathbb{Z}}$和右对偶 ${}^*V={}^*V^{\overline{0}}\oplus{}^*V^{\overline{1}}=({}^*V_i^{\overline{0}},E_i^{{}^*V^{\overline{0}}},F_i^{{}^*V^{\overline{0}}})_{i\in\mathbb{Z}}\oplus({}^*V_i^{\overline{1}},E_i^{{}^*V^{\overline{1}}},F_i^{{}^*V^{\overline{1}}})_{i\in\mathbb{Z}}$的 V，作者为

$$\begin{cases}V_i^{*\overline{0}}=(V_{-i}^{\overline{0}})^\star, & E_i^{V^{*\overline{0}}}=-q^{2(i+1)m}(E_{-i-1}^{V^{\overline{0}}})^\star, & F_i^{V^{*\overline{0}}}=-q^{-2(i+1)m}(F_{-i-1}^{V^{\overline{0}}})^\star,\\ V_i^{*\overline{1}}=(V_{-i-1}^{\overline{1}})^\star, & E_i^{V^{*\overline{1}}}=-q^{(2i+3)m}(E_{-i-2}^{V^{\overline{1}}})^\star, & F_i^{V^{*\overline{1}}}=-q^{-(2i+3)m}(F_{-i-2}^{V^{\overline{0}}})^\star,\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}{}^*V_i^{\overline{0}}=(V_{-i}^{\overline{0}})^\star, & E_i^{{}^*V^{\overline{0}}}=-q^{2im}(E_{-i-1}^{V^{\overline{0}}})^\star, & F_i^{{}^*V^{\overline{0}}}=-q^{-2im}(F_{-i-1}^{V^{\overline{0}}})^\star,\\ {}^*V_i^{\overline{1}}=(V_{-i-1}^{\overline{1}})^\star, & E_i^{{}^*V^{\overline{1}}}=-q^{(2i+1)m}(E_{-i-2}^{V^{\overline{1}}})^\star, & F_i^{{}^*V^{\overline{1}}}=-q^{-(2i+1)m}(F_{-i-2}^{V^{\overline{1}}})^\star.\end{cases}$$

对于左对偶 V^*，求值 $V^*\otimes V\xrightarrow{\quad V=\quad V^{\overline{0}}\oplus\quad V^{\overline{1}}\quad}\mathbb{1}$ $(\mathbf{ev})(\mathbf{ev})$由下式确定

$$\begin{aligned}(\mathbf{ev}_V)^{\overline{0}}_0:\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\left[(V_i^{*\overline{0}}\otimes V_{-i}^{\overline{0}})\oplus(V_i^{*\overline{1}}\otimes V_{-i-1}^{\overline{1}})\right]&\longrightarrow\mathbb{C},\\ f\otimes v+g\otimes w&\longmapsto f(v)+g(w),\end{aligned}$$

而余求值 $\mathbf{1}\xrightarrow{\mathbf{coev}\quad V=\quad V^{\overline{0}}\oplus\quad V^{\overline{1}}}V\otimes V^*$ $(\mathbf{coev})(\mathbf{coev})$由下式确定

$$\begin{aligned}(\mathbf{coev}_V)^{\overline{0}}_0:\mathbb{C}&\longrightarrow\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\left[(V_i^{\overline{0}}\otimes V_{-i}^{*\overline{0}})\oplus(V_i^{\overline{1}}\otimes V_{-i-1}^{*\overline{1}})\right],\\ 1&\longmapsto\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{j=1}^{\dim V_i^{\overline{0}}}(v_{ij}\otimes f_{ij})+\sum_{j=1}^{\dim V_i^{\overline{1}}}(w_{ij}\otimes g_{ij})\right],\end{aligned}$$

其中，$\{v_{ij}|1\le j\le\dim V_i^{\overline{0}}\}$（分别地，$\{w_{ij}|1\le j\le\dim V_i^{\overline{1}}\}$）是 $V_i^{\overline{0}}$（分别地，$V_i^{\overline{1}}$）的基，而$\{f_{ij}|1\le j\le\dim V_i^{\overline{0}}\}$（分别地，$\{g_{ij}|1\le j\le\dim V_i^{\overline{1}}\}$）是 $V_{-i}^{*\overline{0}}$（分别地，$V_{-i-1}^{*\overline{1}}$）的对偶基。右对偶 ${}^*V$ 的求值和余求值可以类似地定义。可以直接验证，$\left(\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}}\oplus\mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}},\otimes,\mathbf{1},\mathfrak{a},\mathfrak{l},\mathfrak{r}\right)$是一个刚性幺半范畴。现在，结论（2）由命题5.3得出。□

定义一个新的函子 $\Omega^\lambda : \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}} \longrightarrow \mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$ 如下

$$\begin{aligned}\Omega^\lambda : \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathbf{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}} &\longrightarrow \mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa,\\ V = V^{\overline{0}} \oplus V^{\overline{1}} &\longmapsto \Omega^\lambda(V) = \Omega_1(V^{\overline{0}}) \oplus \Omega_q(V^{\overline{1}}),\\ V \xrightarrow{f=f^{\overline{0}}\oplus f^{\overline{1}}} W &\longmapsto \Omega^\lambda(V) \xrightarrow{\Omega^\lambda(f)=\Omega_1(f^{\overline{0}})\oplus\Omega_q(f^{\overline{1}})} \Omega^\lambda(W).\end{aligned}$$

Th定理 5.19. 函子 $\Omega^\lambda : \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}} \longrightarrow \mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$ 是张量等价关系 .

证明. 显然, $\Omega^\lambda(\mathbf{1}) = \mathbb{1}_\kappa$, 其中 $\mathbb{1}_\kappa \in \mathcal{O}_1^\kappa \oplus \mathcal{O}_q^\kappa$ 是定理 4.11 (2) 中定义的本原表示 $L_{\mathbf{p}}(0,+)$。定义自然同构 $\mathrm{J}^\lambda : \Omega^\lambda(-)\otimes\Omega^\lambda(-) \longrightarrow \Omega^\lambda(-\otimes-)$ 如下

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^\lambda_{V,W} : \Omega^\lambda(V)\otimes\Omega^\lambda(W) = \bigoplus_{(d_1,d_2)\in\mathbb{Z}_2^2}\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i^{d_1}\otimes\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j^{d_2}\right) &\longrightarrow \Omega^\lambda(V\otimes W) = \bigoplus_{(d_1,d_2)\in\mathbb{Z}_2^2}\bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ i+j=k}}\left(V_i^{d_1}\otimes W_j^{d_2}\right),\\ (v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\otimes(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} &\longmapsto \left(\sum_{i+j=k}(v_i\otimes w_j)\right)_{k\in\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

其中 $V, W \in \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{0}}} \oplus \mathrm{rep}\Pi_\infty^{\lambda_{\overline{1}}}$, $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i^{d_1}$ 和 $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j^{d_2}$。然后我们可以验证 $(\Omega^\lambda, \mathrm{J}^\lambda)$ 是一个张量函子。由定理 5.16 可知, Ω^λ 是张量等价关系。□

ACKNOWLEDGEMENTS

Y.J. Xu 部分得到国家自然科学基金（项目编号：11501317、12271292）、中国博士后科学基金（项目编号：2016M600530）以及曲阜师范大学自然科学基金（项目编号：BSQD20130142）的资助。J.L. Chen 部分得到国家自然科学基金（项目编号：11701019）和北京市教育委员会科技计划项目（项目编号：KM202110005012）的资助。

两位作者感谢 Huixiang Chen、Libin Li 和 Zhankui Xiao 在由中国西南大学主办的2021年全国霍普夫代数会议期间提出的宝贵意见。两位作者还感谢 Dingguo Wang 和 Shilin Yang 提出的宝贵建议。Y.J. Xu 感谢 Xiaowu Chen 和 Zerui Zhang 与其进行的有益交流。Y.J. Xu 感谢 Bangming Deng 及清华大学数学科学系在其访问期间给予的热情接待。

DECLARATIONS

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

REFERENCES

[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller, 《环与模范畴》（第 2 版）, 《数学研究生教材》第 13 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1992 年。[2] K. Aziziheris, H. Fakhri, S.Laheghi, 基于矩阵 2×2 上的一种新结合乘法的量子群 $SL_q^*(2)$与量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2^*)$, 《数学物理杂志》61（2020）063504。[3] B. Bakalov, A.Jr. Kirillov, 《张量范畴与模函子讲义》, 大学讲座丛书, 第 21 卷, 美国数学会, 罗得岛州, 2001 年。[4] L. Chen, Y.C. Fu, Kazhdan-Lusztig 等价的一种扩展, arXiv: 1810.09054v5。[5] C. Cibils, 箭图量子群, 《数学物理通讯》157（1993）459-477。

[6] C. Cibils，单位根处的半量子群、路径代数与表示型，Int. Math. Res. Noticies 12（1997）541-553。[7] W. Crawley-Boevey，Kleinian 奇点的例外纤维，Am. J. Math. 122（2000）1027-1037。[8] W. Crawley-Boevey，箭图表示的矩映射几何，Compos. Math. 126（2001）257-293。[9] W. Crawley-Boevey, M.P. Holland，Kleinian 奇点的非交换变形，Duke Math. J. 92（3）（1998）605-635。[10] V. Dlab, C.M. Ringel，拟遗传代数的模论方法，载于：《代数表示与相关主题》，京都，1990 年，伦敦数学会讲义丛书，第 168 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1992 年，第 200-224 页。[11] V.G. Drinfeld，拟 Hopf 代数，Leningr. Math. J. 1（1990）1419-1457。[12] V.G. Drinfeld，关于拟三角拟 Hopf 代数及一个与 Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) 密切相关的群，Leningr. Math. J. 2（1991）829-860。[13] P.I. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik，《张量范畴》，数学调查与专著，第 205 卷，美国数学会，罗得岛州，2015 年。[14] P.I. Etingof, A.A. Moura，关于量子 Kazhdan-Lusztig 函子，Math. Res. Lett. 9（2002）449-463。[15] D. Gaitsgory，Kazhdan-Lusztig 等价的一种猜想性扩展，Publ. RIMS Kyoto Univ. 57（2021）1227-1376。[16] S. Gautam, V.T. Laredo，杨氏算子、量子环代数与阿贝尔差分方程，《美国数学会杂志》29（3）（2016）775-824。[17] S. Gautam, V.T. Laredo，杨氏算子与量子环代数的亚纯张量等价，Publ. math. IHES 125（2017）267-337。[18] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schr¨oer，半典范基与预投射代数，Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 38（2005）193-253。[19] C. Geiss, J. Schr¨oer，管状代数上的模簇，Colloq. Math. 95（2003）163-183。[20] H.-L. Huang, S.-L. Yang，量子群与双箭图代数，Lett. Math. Phys. 71（2005）49-61。[21] J.E. Humphreys，《BGG 范畴 $\mathcal{O}$中的半单李代数表示》，数学研究生教材，第 94 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008 年。[22] J.C. Jantzen，《量子群讲义》，数学研究生教材，第 6 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996 年。[23] Q.-Z. Ji, D.-G. Wang, X.-Q. Zhou，量子群 $U_q(f(K))$的有限维表示，East-West J. Math. 2（2）（2000）201-213。[24] C. Kassel，《量子群》，《数学研究生教材》第 155 卷，施普林格出版社，纽约，1995 年。[25] D. Kazhdan, G. Lusztg，仿射李代数与量子群，Int. Math. Res. Noticies 2（1991）21-29。[26] D. Kazhdan, G. Lusztg，源自仿射李代数的张量结构。I、II，《美国数学会杂志》6（4）（1993）905-947，949-1011。[27] D. Kazhdan, G. Lusztg，源自仿射李代数的张量结构。III，《美国数学会杂志》7（2）（1994）335-381。[28] G. Lusztig，量子化包络代数产生的典范基，《美国数学会杂志》3（2）（1990）447-498。[29] G. Lusztig，箭图、上同调层与量子化包络代数，《美国数学会杂志》4（1991）365-421。[30] S. Neshveyev, L. Tuset，关于 Drinfeld 范畴与 $U_q(\mathfrak{g})$-模范畴等价性的 Kazhdan-Lusztig 定理的注记，Algebr. Represent. Theor. 14（2011）897-948。[31] C.M. Ringel，箭图的预投射代数，载于：《代数与模 II》，Geiranger，1996 年，CMS 会议论文集，第 24 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998 年，第 467-480 页。[32] A.V. Silantyev，箭图预投射代数表示论中的反射函子与可积系统，Phys. Particles Nuclei 49（3）（2018）397-430。[33] D.-G. Wang, Q.-Z. Ji, S.-L. Yang，量子群 $U_q(f(K,H))$的有限维表示，Commun. Algebra 30（5）（2002）2191-2211。[34] C. Walton, S. Witherspoon，Hopf 作用于 Koszul 代数所产生的交叉积代数的 Poincar´e-Birkhoff-Witt 变形，Algebr. Number. Theory 8（7）（2014）1701-1731。[35] S.-L. Yang，量子群与预投射代数的变形，J. Algebra 279（2004）3-21。

SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, QUFU NORMAL UNIVERSITY, QUFU 273165, P. R. CHINA
Email address: yjxu2002@163.com

FACULTY OF SCIENCE, BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, BEIJING 100124, P. R. CHINA

Email address: chenjialei@bjut.edu.cn