arXiv:2305.00823v1 [math.NA] 1 May 2023

利用 Walsh 函数求解随机 Volterra 积分方程的数值近似

Prit Pritam Paikaray、Sanghamitra Beuria 和 Nigam Chandra Parida数学系，
基础科学与人文学院，OUAT，布巴内斯瓦尔，奥迪沙邦，751003，印度。
{paikaraypritpritam@gmail.com, sbeuria108@gmail.com, ncparida@gmail.com}

摘要

本文提出了一种利用沃尔什函数逼近及相应的积分运算矩阵求解线性随机 Volterra 积分方程的数值方法。对所提出方法在具有利普希茨函数的随机沃尔泰拉积分方程中的收敛性分析和误差分析进行了论述。大量具有已知解析解的示例表明，与现有技术相比，所提出的方法能够更加精确地求解线性随机 Volterra 积分方程。此外，还展示了该方法在一个未知解析解问题中的数值表现。

关键词 随机沃尔泰拉积分方程 · 布朗运动 · Itˆo 积分 · 沃尔什逼近 · 利普希茨条件

1 引言

包括物理科学、生物科学、农业科学以及金融数学（包括期权定价）在内的众多领域，都广泛应用随机微分方程（SDE） [2–4]。在这些领域中，随机沃尔泰拉积分方程（随机 Volterra 积分方程）发挥着至关重要的作用。与其他微分方程类似，许多 SDE 在实际中几乎无法求解，而随机 Volterra 积分方程使问题变得更加棘手。因此，在求解此类问题时，数值逼近方法至关重要。许多随机 Volterra 积分方程的近似解可以通过各种数值方法估算。近年来，人们利用包括块脉冲函数（BPF）、哈尔小波、勒让德多项式、拉盖尔多项式和切比雪夫多项式在内的正交函数来逼近随机 Volterra 积分方程的解 [5–12, 15]。

沃尔什函数构成一个仅取值 -1 和 1 的标准正交系统。因此，许多数学家将沃尔什系统视为一种人工标准正交系统；该系统于 1923 [14] 提出，并在数字技术中有许多应用。计算机能够在任意给定时刻准确估算任何沃尔什函数的当前值，这使其相较于传统三角函数具有显著优势。1975 年，Chen 和 Hsiao 使用沃尔什函数求解了变分问题 [12]。1979 年，他们又运用类似的思路求解了积分方程 [13]。该方法的关键特性是将问题转化为一个代数系统，再通过求解该系统得到问题的近似解。本文应用沃尔什函数 [14] 来逼近以下线性随机伏尔泰拉积分方程的解 $x(t)$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k_1(s,t)x(s)ds + \int_0^t k_2(s,t)x(s)dB(s) \tag{1}$$

其中， $x(t)$、 $f(t)$、 $k_1(s,t)$ 和 $k_2(s,t)$（对于 $s,t \in [0,T)$），表示基于同一概率空间 $(\Omega\ F,P)$ 的随机过程，而 $x(t)$ 是未知的。这里， $B(t)$ 是一个布朗运动 $[2,3]$，而 $\int_0^t k_2(s,t)x(s)dB(s)$ 是 Itô 积分。

在以往的大多数研究中，评估主要基于这样的假设：导数 $f'(t)$、 $\frac{\partial^2 k_i}{\partial s \partial t}$ 对于 $i = 1$、2 存在且有界。而本文通过将 BPF 近似转换为沃尔什函数近似，只要求函数 $f(t)$ $k_1(s,t)$ 和 $k_2(s,t)$ 满足利普希茨连续性，即可获得相同的

线性收敛速度，同时还允许考虑更一般形式的、需要积分的随机 Volterra 积分方程。最后一节通过数值比较近似解与精确解，检验该方法的有效性。

2 沃尔什函数及其性质

定义 1（拉德马赫函数）。拉德马赫函数 $r_i(t)$，$i = 1$，2，..，对于 $t \in [0, 1)$ 定义为 [14]

$$r_i(t) = \begin{cases} 1 & i = 0, \\ sgn(sin(2^i \pi t)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

定义 2（沃尔什函数）。对于 $n = 0$，1，2，$\cdots$，$w_n(t)$，$t \in [0, 1)$ 所表示的 n^{th} 沃尔什函数定义[14] 为

$$w_n(t) = (r_q(t))^{b_q} . (r_{q-1}(t))^{b_{q-1}} . (r_{q-2}(t))^{b_{q-2}} \ldots (r_1(t))^{b_1}$$

其中，$n = b_q 2^{q-1} + b_{q-1} 2^{q-2} + b_{q-2} 2^{q-3} + \ldots + b_1 2^0$ 是 n的二进制表示。因此，q，n 的二进制表示中所含的位数可通过 $q = \left[\log_2 n\right] + 1$ 计算，其中 $\left[\cdot\right]$ 是不大于 $'\cdot'$的最大整数。

对于 $m \in \mathbb{N}$，前 m 个沃尔什函数可以表示为一个 m维向量:

$$W(t) = \left[w_0(t) \quad w_1(t) \quad w_2(t) \ldots w_{m-1}(t)\right]^T .$$

沃尔什函数满足以下性质:

正交归一性

沃尔什函数集是正交归一的，即:

$$\int_0^1 w_i(t) w_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{i=j,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

完备性

对于每个 $f \in L^2([0, 1))$

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 ||w_i(t)||^2$$

其中 $f_i = \int_0^1 f(t) w_i(t) dt$。

沃尔什函数逼近

任何实值函数 $f(t) \in L^2[0, 1)$ 都可以近似表示为

$$f_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i w_i(t)$$

其中，$c_i = \int_0^1 f(t) w_i(t) dt$。该近似的矩阵形式为

$$f(t) = F^T T_W W(t) \tag{2}$$

其中，$F = \left[f_0 \quad f_1 \quad f_2 \ldots f_{m-1}\right]^T$和 $f_i = \int_{ih}^{(i+1}{}^{h} f)(s) ds$ 和 T_W称为沃尔什函数运算矩阵。由 [15] 可知,

$$T_W T_W^T = mI \text{ and } T_W^T = T_W$$

类似地， $k(s,t) \in L^2([0,1) \times [0,1))$可以近似表示为

$$k_m(s,t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} w_i(s) w_j(t)$$

其中， $c_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t) w_i(s) w_j(t) dt ds$。

其矩阵形式为

$$k(s,t) = W^T(s) T_W K T_W W(t) = W^T(t) T_W K^T T_W W(s) \tag{3}$$

其中 $K = [k_{ij}]_{m\times m}, k_{ij} = \int_{ih}^{(i+1)h} \int_{jh}^{(j+1)h} k(s,t) dt ds$。

下一节中，我们将探讨块脉冲函数与沃尔什函数之间的关系，随后利用该关系将随机 Volterra 积分方程转化为代数方程。

3 Walsh 函数与块脉冲函数（分段常数基函数）之间的关系

定义 3（块脉冲函数）。对于固定正整数 m，BPFs 的 m-集合 $\phi_i(t)\ t \in [0,1)$，其中 $i = 0, 1, ..., m-1$，定义为

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{i}{m} \le t < \frac{(i+1)}{m}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ϕ_i 被称为第 i个BPF。

所有 m 分段常数基函数都可以简洁地写成一个 m 向量： $\Phi(t) = [\phi_0(t)\ \phi_1(t)\ \phi_2(t) \dots \phi_{m-1}(t)]^T, t \in [0,1)$。这些分段常数基函数彼此不相交、完备且正交 [1]。

向量形式的分段常数基函数满足

$$\Phi(t)\Phi(t)^T X = \tilde{X}\Phi(t) \text{ and } \Phi^T(t) A \Phi(t) = \hat{A}\Phi(t)$$

其中， $X \in \mathbb{R}^{m\times 1}$， $\tilde{X}$是 $m \times m$对角矩阵，其 $\tilde{X}(i,\ i) = X(i)$，其中 $i = 1,\ 2,\ 3 \cdots m$， $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$，而 $\hat{A} = [a_{11}\ \ a_{22}\ \ \dots\ \ a_{mm}]^T$是 m向量，其元素等于 A的对角元素。块脉冲函数向量 $\Phi(t),\ t \in [0,1)$ 的积分可通过 [1] 完成。

$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = P\Phi(t), t \in [0,1), \tag{4}$$

其中， P称为确定性积分运算矩阵。因此，每个函数 $f(t) \in L^2[0,1)$ 的积分都可以近似表示为

$$\int_0^t f(s) ds = F^T P \Phi(t)$$

类似地，块脉冲函数向量 $\Phi(t),\ t \in [0,1)$ 的 Itˆo 积分可通过 [6] 执行，表示为

$$\int_0^t \Phi(\tau) dB(\tau) = P_S \Phi(t), t \in [0,1) \tag{5}$$

其中， P_S o $f\ t\ \in$称为随机积分运算矩阵。因此，每个函数 $L^2[0,1$ ( )) 的 Itˆ [6] 积分都可以近似表示为

$$\int_0^t f(s) dB(s) = F^T P_S \Phi(t).$$

以下定理描述了沃尔什函数与块脉冲函数之间的关系。

定理 3.1。设沃尔什函数向量和块脉冲函数向量的 m 集分别为 $W(t)$ 和 $\Phi(t)$。那么，块脉冲函数向量$\Phi(t)$可用于近似 $W(t)$，其形式为 $W(t) = T_W \Phi(t)$， $m = 2^k$，以及 $k = 0,\ 1, \dots,$ 其中 $T_W = \left[c_{ij}\right]_{m\times m}$，$c_{ij} = w_i(\eta_j)$，对于某些 $\eta_j = \left(\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right)$ 和 $i, j = 0,\ 1, 2, \dots m-1$。

证明。设 $w_i(t)$， $i = 0$， 1, 2, $\dots m-1$， 其中 $m = 2^k$， 为沃尔什函数向量的第 i^{th} 个元素。将$w_i(t)$展开为由 BPF 组成的 m 项向量，可得 $w_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}\phi_j(t) = C_i^T\Phi(t)$， $i = 0$， 1, 2, $\dots m-1$， 其中 C_i^T 是第 i^{th} 行， c_{ij} 是矩阵 T_W 的$(i, j)^{th}$ 元素

$$c_{ij} = \frac{1}{h}\int_0^1 w_i(t)\phi_j(t)dt = \frac{1}{h}\int_{jh}^{(j+1)h} w_i(t)dt.$$

利用积分中值定理，我们可以写出

$$c_{ij} = \frac{1}{h}\int_{jh}^{(j+1)h} w_i(t)dt = \frac{1}{h}\big((j+1)h - jh\big)w_i(\eta_j) = w_i(\eta_j)$$

其中 $\eta_j \in (\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m})$、 $m = \frac{1}{h}$。

由于 $w_i(t)$ 在区间 $(\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m})$ 上为常数，我们取 $c_{ij} = w_i(\frac{2j+1}{2m})$、 i、 $j = 0$、1、2、 $\dots m-1$。

因此 $W(t) = T_W\Phi(t)$。

□

由上述定理可知， $\Phi(t) = \frac{1}{m}T_W W(t)$。
利用上述条件，我们证明以下定理:
引理 3.2（Walsh 函数积分）。假设 $W(t)$ 是一个 Walsh函数向量，则 $W(t)$ 关于 t 的积分为

$\int_0^t W(s)ds = \wedge W(t)$，其中 $\wedge = \frac{1}{m}T_W P T_W$且

$$P = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

证明。设 W （t）为一个沃尔什函数向量，则 W （t）关于 t 的积分为

$$\int_0^t W(s)ds = \int_0^t T_W\Phi(s)ds = T_W\int_0^t \Phi(s)ds$$
$$= T_W P\Phi(t) = \frac{1}{m}\Big(T_W P T_W\Big)W(t) = \wedge W(t)$$

其中 $\wedge = \frac{1}{m}\Big(T_W P T_W\Big)$

□

这里， $\wedge$ 称为 Walsh积分运算矩阵。
引理3.3（Walsh函数的随机积分）。假设 $W(t)$ 是一个 Walsh 函数向量，则 $W(t)$ 的 Itˆo 积分由下式给出。

$\int_0^t W(s)dB(s) = \wedge_S W(t)$，其中 $\wedge_S = \frac{1}{m}T_W P_S T_W$且

$$P_S = \begin{bmatrix} B(\frac{h}{2}) & B(h) & \dots & B(h) \\ 0 & B(\frac{3h}{2}) - B(h) & \dots & B(2h) - B(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B(\frac{(2m-1)h}{2}) - B((m-1)h) \end{bmatrix}.$$

证明。设 $W(t)$ 为Walsh函数向量，则 $W(t)$ 的 Itˆo 积分为

$$\int_0^t W(s)dB(s) = \int_0^t T_W\Phi(s)dB(s) = T_W\int_0^t \Phi(s)dB(s)$$
$$= T_W P_S\Phi(t) = \frac{1}{m}\Big(T_W P_S T_W\Big)W(t) = \wedge_S W(t),$$

其中 $\wedge_S = \frac{1}{m}\Big(T_W P_S T_W\Big)$。

□

这里， $\wedge_S$ 称为 Itˆo 积分的 Walsh运算矩阵。

4 随机沃尔泰拉积分方程的数值解

我们考虑如下线性随机 Volterra 积分方程（SVIE）

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k_1(s,t)x(s)ds + \int_0^t k_2(s,t)x(s)dB(s) \tag{6}$$

其中， $x(t)$、 $f(t)$、 $k_1(s,t)$ 和 $k_2(s,t)$（ $s,t \in [0,T)$ 是在同一概率空间（Ω F,P）上定义的随机过程，而 $x(t)$ 是未知的。此外， $B(t)$ 是布朗运动过程， $\int_0^t k_2(s,t)x(s)dB(s)$ 是伊藤积分。

将方程（2）和（3）代入（6）可得

$$\begin{aligned} X^T T_W W(t) &= F^T T_W W(t) + \int_0^t W^T(t) T_W K_1^T T_W W(s) W^T(s) T_W X ds \\ &\quad + \int_0^t W^T(t) T_W K_2^T T_W W(s) W^T(s) T_W X dB(s) \\ &= F^T T_W W(t) + W^T(t) T_W K_1^T T_W \int_0^t W(s) W^T(s) T_W X ds \\ &\quad + W^T(t) T_W K_2^T T_W \int_0^t W(s) W^T(s) T_W X dB(s) \end{aligned} \tag{7}$$

Now

$$\begin{aligned} &\int_0^t W(s) W^T(s) T_W X ds \\ &= \int_0^t T_W \Phi(s) \Phi^T(s) T_W T_W X ds \\ &= m T_W \int_0^t \Phi(s) \Phi^T(s) X ds \\ &= m T_W \tilde{X} \int_0^t \Phi(s) ds \\ &= m T_W \tilde{X} P \frac{1}{m} T_W W(t). \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^t W(s) W^T(s) T_W X ds = T_W \tilde{X} P T_W W(t) \tag{8}$$

类似地,

$$\int_0^t W(s) W^T(s) T_W X dB(s) = m T_W \tilde{X} P_S \frac{1}{m} T_W W(t) = T_W \tilde{X} P_S T_W W(t) \tag{9}$$

将（8）和（9）代入（7），并利用正交归一性条件，可得

$$\begin{aligned} X^T T_W W(t) &= F^T T_W W(t) + m W^T(t) T_W K_1^T \tilde{X} P T_W W(t) \\ &\quad + m W^T(t) T_W K_2^T \tilde{X} P_S T_W W(t) \\ &= F^T T_W W(t) + W^T(t) T_W H_1 T_W W(t) \\ &\quad + W^T(t) T_W H_2 T_W W(t) \\ &= F^T T_W W(t) + m \hat{H_1}^T T_W W(t) + m \hat{H_2}^T T_W W(t) \end{aligned}$$

这意味着,

$$\left(X^T - F^T - m \hat{H_1}^T - m \hat{H_2}^T \right) T_W W(t) = 0 \tag{10}$$

其中 $H_1 = mK_1^T \tilde{X} P, H_2 = mK_2^T \tilde{X} P_S$。因此

$$\left(X - F - m\hat{H}_1 - m\hat{H}_2\right) = [0]_{m\times 1} \tag{11}$$

can 求解该方程，以获得给定随机沃尔泰拉积分方程 (6) 的一个非平凡解。

5 误差分析

在本节中，我们分析随机沃尔泰拉积分方程的近似解与精确解之间的误差。在开始分析之前，我们先定义 $\|X\|_2 = E(|X|^2)^{\frac{1}{2}}$。

定理5.1. 若 $f \in L^2[0,1)$ 满足利普希茨条件，且利普希茨常数为 C，则 $\|e_m(t)\|_2 = O(h)$，其中 $e_m(t) = |f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i w_i(t)|$ 且 $c_i = \int_0^1 f(s) w_i(s) ds$。

证明。设 $f_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i w_i(t)$，其中 $c_i = \int_0^1 f(s) w_i(s) ds$。
假设 f 满足利普希茨条件。现在，

$$e_m(t) = |f(t) - f_m(t)| \le \omega(\frac{1}{2^k}, f) \le Ch.$$

这里 $\omega(\frac{1}{2^k}, f)$ 称为函数 f [17] 的连续模。因此，

$$\|e_m(t)\|_2 \le Ch = O(h).$$

□

定理5.2. 假设 $k \in L^2\big([0,1) \times [0,1)\big)$ 满足利普希茨条件，其利普希茨常数为 L。如果$k_m(x,y) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} w_i(x) w_j(y)$，$c_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t) w_i(s) w_j(t) dtds$，那么 $\|e_m(x,y)\|_2 = O(h)$，其中$|e_m(x,y)| = |k(x,y) - k_m(x,y)|$。

证明。由 [17] 可知，

$$\begin{aligned} k_m(x,y) &= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_0^1\int_0^1 k(s,t) w_i(s) w_j(t) dtds\right) w_i(x) w_j(y) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}(\int_0^1\int_0^1 k(s,t) w_i(s) w_i(x) w_j(t) w_j(y) dtds) \\ &= \int_0^1\int_0^1 k(s,t) D_m(t\oplus y) D_m(s\oplus x) dtds \\ &= 2^k.2^k \int_{\Delta_i^{(k)}}\int_{\Delta_j^{(k)}} k(s,t) dtds \end{aligned}$$

其中，$D_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(t)$称为狄利克雷核 [17]。Hence,

$$|k_m(X) - k(X)| = 2^{2k}\int_{\Delta_i^{(k)}}\int_{\Delta_j^{(k)}} |k(T) - k(X)| dT$$

其中 $X = (x,y)$，$T = (s,t)$。还需注意，如果 k 是一致利普希茨连续函数，且其利普希茨常数为 L，则

$$|k_m(X) - k(X)| \le 2^{2k}\int_{\Delta_i^{(k)}}\int_{\Delta_j^{(k)}} L|T - X| dT$$

因此，

$$\|k_m(X) - k(X)\|_2 \le \sqrt{2} Lh = O(h).$$

□

定理 5.3。设 $x_m(t)$ 为线性随机伏尔泰拉积分方程 (1) 的近似解。如果

a) $f \in L^2[0,1)$, $k_1(s,t)$ 和 $k_2(s,t) \in L^2\big([0,1) \times [0,1)\big)$ 满足利普希茨条件，其利普希茨常数分别为 C、L_1 和 L_2，

b) $|x(t)| \leq \sigma$, $|k_1(s,t)| \leq \rho_1$ 和 $|k_2(s,t)| \leq \rho_2$

then

$$\|x(t) - x_m(t)\|_2^2 = O(h^2)$$

证明。设 (1) 为给定的随机 Volterra 积分方程， $x_m(t)$ 为使用沃尔什函数得到的解的近似。则

$$\begin{aligned} x(t) - x_m(t) &= f(t) - f_m(t) \\ &+ \int_0^t \big(k_1(s,t)x(s) - k_{1m}(s,t)x_m(s)\big)ds \\ &+ \int_0^t \big(k_2(s,t)x(s) - k_{2m}(s,t)x_m(s)\big)dB(s) \end{aligned}$$

这意味着，

$$\begin{aligned} |x(t) - x_m(t)| &\leq |f(t) - f_m(t)| \\ &+ \left|\int_0^t \big(k_1(s,t)x(s) - k_{1m}(s,t)x_m(s)\big)ds\right| \\ &+ \left|\int_0^t \big(k_2(s,t)x(s) - k_{2m}(s,t)x_m(s)\big)dB(s)\right|. \end{aligned}$$

我们知道，$(a+b+c)^2 \leq 5a^2 + 5b^2 + 5c^2$

$$\begin{aligned} |x(t) - x_m(t)|^2 &\leq 5|f(t) - f_m(t)|^2 \\ &+ 5\left|\int_0^t \big(k_1(s,t)x(s) - k_{1m}(s,t)x_m(s)\big)ds\right|^2 \\ &+ 5\left|\int_0^t \big(k_2(s,t)x(s) - k_{2m}(s,t)x_m(s)\big)dB(s)\right|^2. \end{aligned}$$

这意味着。

$$E\big(|x(t) - x_m(t)|^2\big) \leq 5E\left(|f(t) - f_m(t)|^2\right) + 5I_1 + 5I_2.$$

其中，

$$I_1 = E\left(\left|\int_0^t \big(k_1(s,t)x(s) - k_{1m}(s,t)x_m(s)\big)ds\right|^2\right),$$

and

$$I_2 = E\left(\left|\int_0^t \big(k_2(s,t)x(s) - k_{2m}(s,t)x_m(s)\big)dB(s)\right|^2\right)$$

现在，对于 $i = 1, 2$，我们有

$$\begin{aligned} |k_i(s,t)x(s) - k_{im}(s,t)x_m(s)| \leq & \quad |k_i(s,t)||x(s) - x_m(s)| \\ &+ |k_i(s,t) - k_{im}(s,t)||x(s)| \\ &+ |k_i(s,t) - k_{im}(s,t)||x(s) - x_m(s)| \end{aligned}$$

对于 $i = 1, 2$，令 $|k_i(s,t)| \leq \rho_i$, $|x(s)| \leq \sigma$，并利用定理5.2，得到

$$|k_i(s,t)x(s) - k_{im}(s,t)x_m(s)| \leq \sqrt{2}L_i h\sigma + (\rho_i + \sqrt{2}L_i h)|x(t) - x_m(t)| \tag{12}$$

因此得到,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq E\bigg(\bigg(\int_0^t \Big|k_1(s,t)x(s) - k_{1m}(s,t)x_m(s)\Big| ds\bigg)^2\bigg) \\ &\leq E\bigg(\bigg(\int_0^t \big(\sqrt{2}L_i h\sigma + (\rho_i + \sqrt{2}L_i h)|x(t) - x_m(t)|\big) ds\bigg)^2\bigg) \end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，对于 $t > 0$ 和 $f \in L^2[0,1)$

$$\left|\int_0^t f(s)ds\right|^2 \leq t\int_0^t |f|^2 ds$$

这意味着,

$$I_1 \leq E\bigg(2\int_0^t \Big((\sqrt{2}L_1 h\sigma)^2 + (\rho_1 + \sqrt{2}L_1 h)^2 |x(t) - x_m(t)|^2\Big) ds\bigg)$$

因此,

$$I_1 \leq 2(\sqrt{2}L_1 h\sigma)^2 + 2(\rho_1 + \sqrt{2}L_1 h)^2 E\bigg(\int_0^t |x(t) - x_m(t)|^2 ds\bigg) \tag{13}$$

Now,

$$\begin{aligned} I_2 \leq \quad & E\bigg(\int_0^t \Big|k_2(s,t)x(s) - k_{2m}(s,t)x_m(s)\Big|^2 ds\bigg) \\ \leq \quad & 2E\bigg(\int_0^t \big((\sqrt{2}L_2 h\sigma)^2 + (\rho_2 + \sqrt{2}L_2 h)^2 |x(t) - x_m(t)|^2\big) ds\bigg) \end{aligned}$$

因此,

$$I_2 \leq \quad 2(\sqrt{2}L_2 h\sigma)^2 + 2(\rho_2 + \sqrt{2}L_2 h)^2 E\bigg(\int_0^t |x(t) - x_m(t)|^2 ds\bigg) \tag{14}$$

利用定理5.1，将方程(13)和(14)代入式(12)，可得

$$\begin{aligned} E\big(|x(t) - x_m(t)|^2\big) &\leq 5C^2 h^2 \\ &+ 5\bigg(2(\sqrt{2}L_1 h\sigma)^2 + 2(\rho_1 + \sqrt{2}L_1 h)^2 E\bigg(\int_0^t |x(t) - x_m(t)|^2 ds\bigg)\bigg) \\ &+ 5\bigg(2(\sqrt{2}L_2 h\sigma)^2 + 2(\rho_2 + \sqrt{2}L_2 h)^2 E\bigg(\int_0^t |x(t) - x_m(t)|^2 ds\bigg)\bigg) \end{aligned}$$

$$E\big(|x(t) - x_m(t)|^2\big) \leq R_1 + R_2 \int_0^t E\big(|x(s) - x_m(s)|^2\big) ds \tag{15}$$

其中,

$$R_1 = 5\bigg(C^2 h^2 + 2(\sqrt{2}L_1 h\sigma)^2 + 2(\sqrt{2}L_2 h\sigma)^2\bigg)$$

and

$$R_2 = 5\bigg(2(\rho_1 + \sqrt{2}L_1 h)^2 + 2(\rho_2 + \sqrt{2}L_2 h)^2\bigg)$$

利用 Gronwall不等式，我们得到

$$E\big(|x(t) - x_m(t)|^2\big) \leq R_1 \exp\bigg(\int_0^t R_2 ds\bigg). \tag{16}$$

这意味着,

$$\|x(t) - x_m(t)\|_2^2 = E\big(|x(t) - x_m(t)|^2\big) \leq R_1 e^{R_2} = O(h^2) \tag{17}$$

□

表 1：平均误差， 例 6.1 中 m=8 时平均误差的误差标准差和置信区间

n	$\bar{x}_E$	s_E	误差均值的 95% 置信区间。	
			下限	上界
30	0.00543042339	0.00472214581	0.00374062521	0.00712022157
50	0.00626993437	0.00442989552	0.00504202998	0.00749783876
75	0.00705047567	0.00481071208	0.00596170903	0.00813924231
100	0.00640558992	0.00481776079	0.00546130880	0.00734987103
125	0.00689936851	0.00500025280	0.00602278555	0.00777595148
150	0.00686900260	0.00580316061	0.00594030348	0.00779770171
200	0.00682115439	0.00600805207	0.00598848085	0.00765382792

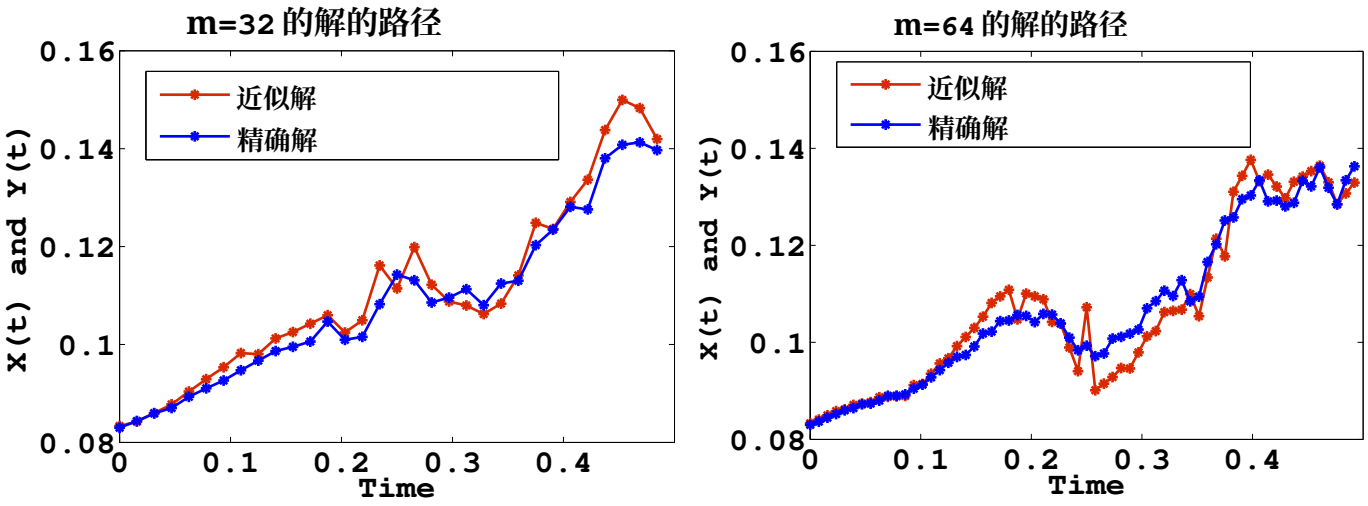

图 1：例 6.1 中 m=32 和 m=64的近似解与精确解

6 数值示例

本节中，我们使用所提出的方法求解多种随机 Volterra 积分方程。前三个例子通过比较近似结果与解析结果来展示该方法的收敛性。由于实际上几乎不可能找到解析解，最后一个例子给出了 $m = 32$、64 和 128 对应的近似解，以说明收敛性。所有计算均使用 Matlab 2013(a) 完成。

定义误差 E 为 $\|E\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |X_i - Y_i|$，其中 X_i、Y_i 分别为精确解和近似解的沃尔什系数。以下实例中的迭代次数为 n，误差 E 的均值为 $\bar{x}_E$，误差 E 的标准差为 s_E。

例 6.1。 [7] 考虑线性随机 Volterra 积分方程

$$x(t) = 1 + \int_0^t cos(s)x(s)ds + \int_0^t sin(s)x(s)dB(s), s, t \in [0, 0.5)$$

其精确解为 $x(t) = \frac{1}{12}e^{\frac{-t}{4}+sin_{(t)}+{}^{sin}{}_{8}^{(2t}+\int_0^t \overline{sin})(s)dB(s)}$，其中 $0 \le t < 0.5$。

示例 6.2。考虑下面所示的线性随机 Volterra 积分方程

$$x(t) = f(t) + \int_0^t (s + t)x(s)ds + \int_0^t e^{-3(s+t)}x(s)dB(s)$$

其中 $s, t \in [0, 1)$，其中 $f(t) = t^2 + sin(1 + t) - cos(1 + t) - 2sin(t) - \frac{7t^4}{12} + \frac{1}{40}B(t)$.

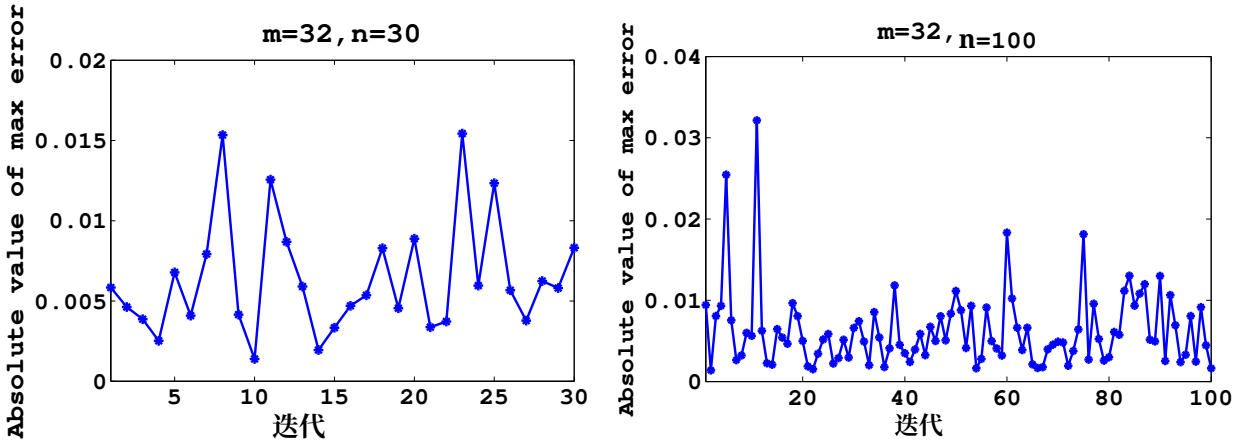

图 2：例 6.1 在 m=32、n=30 和 n=100 时的误差趋势

表 2：平均误差，s 例 6.1 中误差的标准差、平均误差的置信区间，以及 m=3 2

n	$\bar{x}_E$	s_E	误差均值的 95% 置信区间。	
			下限	上界
30	0.00637765274	0.00360745366	0.00508674202	0.00766856345
50	0.00720684095	0.00586365605	0.00558151841	0.00883216349
75	0.00649984610	0.00488908128	0.00539334285	0.00760634936
100	0.00625583011	0.00474702145	0.00532541390	0.00718624631
125	0.00675880050	0.00523369353	0.00584129357	0.00767630743
150	0.00650117417	0.00478655986	0.00573516505	0.00726718328
200	0.00627666571	0.00451326428	0.00565115920	0.00690217223

表 3：示例 6.2 中 n=50 时 m=32、m=64 和 m=128 的数值结果

t	$m = 2^5$	$m = 2^6$	$m = 2^7$
0.1	0.2588463226	0.2786937102	0.2764612638
0.2	0.2385970504	0.2482827054	0.2598350172
0.3	0.2298470282	0.2362610436	0.2560260944
0.4	0.2432612452	0.2547810418	0.2706006264
0.5	0.3326364002	0.3482867788	0.3683207574
0.6	0.3276372986	0.3354036892	0.3570142536
0.7	0.3811228220	0.3973418530	0.4218934758
0.8	0.4407132464	0.4640863230	0.4959036476
0.9	0.5010298772	0.5335500110	0.5753660980

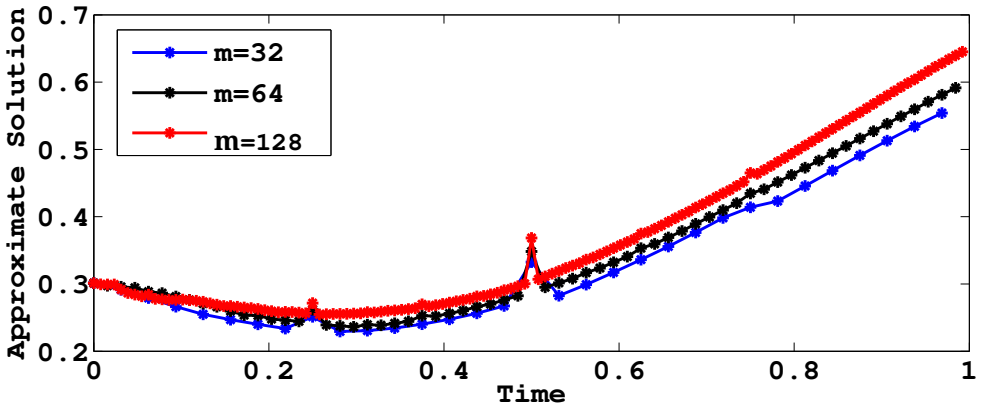

图 3：示例 6.2 中 m=32、m=64 和 m=128 的近似解（迭代 50 次） s

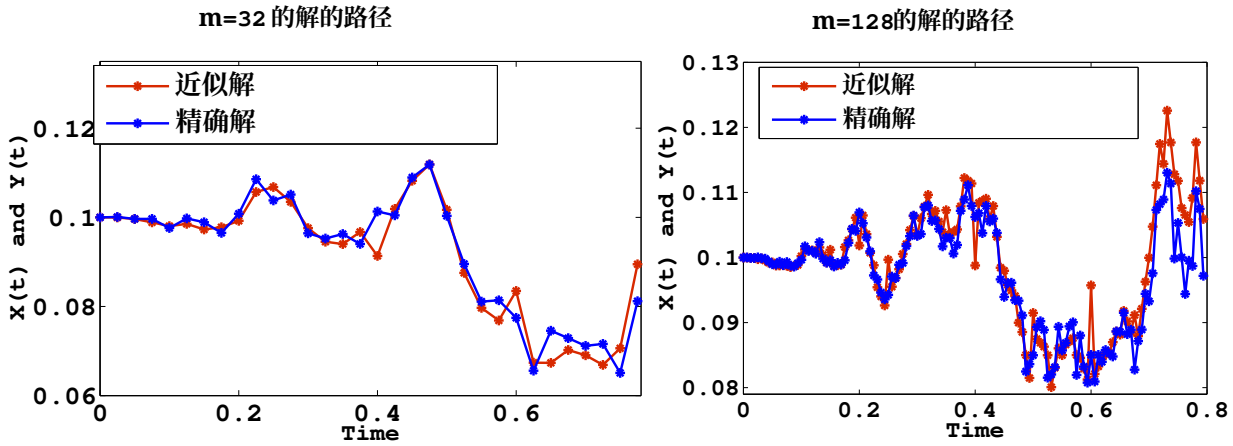

图4：例6.3中股票模型在m=32 和m=128 下的近似解与精确解

例6.3。 [16] 考虑股票模型，其中 $C(t)$ 为无风险现金债券， $S(t)$ 为单一风险资产 set.

$$dC(t) = \sin(t)C(t)dt, C_0 = 1$$

$$S(t) = \frac{1}{10} + \int_0^t ln(1+s)S(s)ds + \int_0^t sS(s)dB(s)$$

其精确解为 $C(t) = e^{1-cos(t)}$ 和 $S(t) = \frac{1}{10}e^{(1+t)ln(1+t)-t-\frac{t^3}{6}+\int_0^t sdB\ (s)}$ 。我们将把 $S(t)$ 的精确解与采用我们的方法得到的近似解进行比较。

表4：平均误差， 误差标准差，以及例6.3在 n=20 时平均误差的置信区间

m	$\bar{x}_E$	s_E	误差均值的95%置信区间。	
			下限	上限
4	0.00483812406	0.00199063228	0.00396569099	0.00571055712
8	0.00380827206	0.00251831518	0.00270457176	0.00491197235
16	0.00432163487	0.00307689213	0.00297312744	0.00567014230
32	0.00673390644	0.00484960640	0.00460847272	0.00885934015
64	0.00714118035	0.00451414584	0.00516276871	0.00911959199
128	0.00713451215	0.00627103849	0.00438610835	0.00988291594

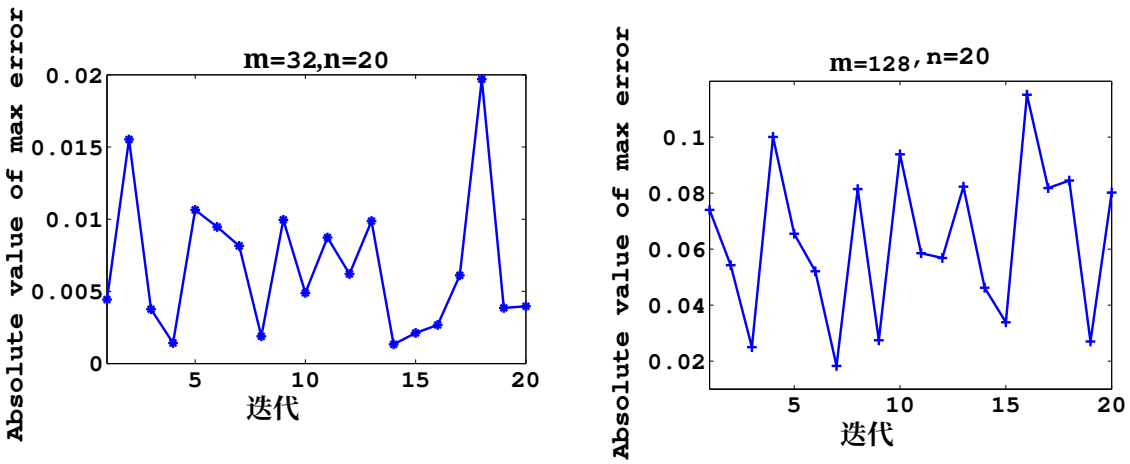

图5：例6.3中 m=32、m=128 和 n=20 的误差趋势。

7 结论

由于大多数随机 Volterra 积分方程的精确解难以确定，因此需要采用数值方法解决这些问题。长期以来，人们已开发出若干数值解法来求取随机 Volterra 积分方程的近似解。此外，本文提出了一种用于近似求解随机 Volterra 积分方程的数值方法，并对特定的随机 Volterra 积分方程给出了定量估计。我们对该方法进行了误差分析，以验证其可靠性。正如前述多个示例所示，数值分析表明，与现有方法相比，沃尔什函数逼近更适合更精确地求解线性随机伏尔泰拉积分方程。这一方法还可扩展至非线性随机沃尔泰拉积分方程以及具有奇异核的随机 Volterra 积分方程，从而用于解决众多物理问题。

参考文献

[1] Saeed Hatamzadeh-Varmazyar、Zahra Masouri、Esmail Babolian，利用一组正交基函数和运算矩阵求解任意线性微分方程的数值方法，Applied Mathematical Modelling 40 (2016) 233–253。[2] B. Oksendal，《随机微分方程》，第五版，载于《随机微分方程导论：及其应用》，Springer-Verlag，纽约，1998。[3] P.E. Kloeden、E. Platen，《随机微分方程的数值解》，载于《数学应用》，Springer-Verlag，柏林，1999。[4] C. Tudor、M. Tudor，伊藤–沃尔泰拉随机方程的近似格式，Boletin Sociedad Matemática Mexicana 3 (1) (1995) 73–85。[5] R. E. A. C. Paley，一类非凡的正交函数级数，Proc. London Math. Soc. 第34卷 (1932) 第241–279页。[6] K. Maleknejad、M. Khodabin、M. Rostami，基于块脉冲函数的随机运算矩阵求解随机沃尔泰拉积分方程的数值方法，Mathematical and Computer Modelling，Mathemati- cal and Computer Modelling 55 (2012) 791–800。[7] F. Mohammadi，利用哈尔小波求解随机伊藤-沃尔泰拉积分方程的数值解，Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications (2016), 9, 第416–431页。[8] S. Singh、S. Saha Ray，用切比雪夫小波的随机运算矩阵求解多维随机伊^藤–沃尔泰拉积分方程。International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing，第17卷，第1期 (2019) 1950007（16页），World Scientific Publishing Company。[9] S. Saha Ray、S. Singh (2020)：求解以分数布朗运动为特征的随机伊藤–沃尔泰拉积分方程的新型随机运算矩阵方法，Stochastic Analysis and Applications，DOI: 10.1080/07362994.2020.1794892

[10] K. Maleknejad、B. Basirat、E. Hashemizadeh，混合勒让德多项式与分块脉冲函数方法求解非线性沃尔泰拉–弗雷德霍姆积分微分方程，Computers and Mathematics with Applications 61 (9) (2011) 2821–2828。[11] K. Maleknejad、S. Sohrabi、Y. Rostami，利用切比雪夫多项式求解第二类非线性沃尔泰拉积分方程的数值解，Applied Mathematics and Computation 188 (2007) 123–128。[12] C. F. Chen 和 C. H. Hsiao，求解变分问题的沃尔什级数直接法，《富兰克林研究所杂志》，第300卷第4期，1975年10月。[13] C. H. Hsiao 和 C. F. Chen，利用沃尔什函数求解积分方程，《计算机与电气工程》第6卷，第279–292页 (1979)。[14] J. L. Walsh，一组闭的标准正交函数，《美国数学杂志》第55卷 (1923) 第5–24页。[15] C. F. Cheng、Y. Tsay、T. T. Wu，用于分数阶微积分及其在分布系统中应用的沃尔什运算矩阵，《富兰克林研究所杂志：工程与应用数学》 (1997)。[16] A. Etheridge，《金融微积分教程》，剑桥大学出版社，2002。[17] B. Golubov、A. Efimov、V. Skvortsov，《沃尔什级数与变换：理论与应用》。