带重数覆盖网格

Anurag Bishnoi * Simona Boyadzhiyska† Shagnik Das ‡ Yvonne den Bakker §
2023年5月2日

arXiv:2305.00825v1 [math.CO] 1 May 2023

摘要

给定实数域中的一个有限网格，至少需要多少条直线才能覆盖除一个点以外的所有点，并且每个点至少被覆盖 k 次？几十年来，人们一直在研究这类问题，Ball 和 Serra 已经证明了一个一般性的下界。我们解决了若干种网格的这一问题，特别是证明了当网格的一边远大于另一边时，Ball–Serra 界是紧的。对于其他情形，我们证明了优于 Ball–Serra 界的新下界，并为几乎所有网格给出了渐近答案。对于标准网格$\{0,\dots,n-1\}\times\{0,\dots,n-1\}$，我们证明了所需直线条数的非平凡上界和下界。为证明这些结果，我们将线性规划对偶性与一些组合论论证结合起来。

1 引言

组合几何中的一个著名结果由 Alon 和 F¨uredi [3] 提出：要覆盖一个 d 维有限网格 $S_1\times\cdots\times S_d\subseteq\mathbb{F}^d$上除一点以外的所有点，超平面多重集 $\mathbb{F}$ 的大小至少必须为 $\sum_{i=1}^{d}(|S_i|-1)$。容易看出，这一下界是紧的：取所有形如 $x_i-a=0$ 的超平面，其中 $1\le i\le d$ 且 $a\in S_i\setminus\{b_i\}$，而 $(b_1,\dots,b_n)$ 是未被覆盖的点。这一定理意义重大，原因有几点；Alon 和 F¨uredi 的证明不仅在多项式方法 [2,7,16], 的发展过程中发挥了重要作用，而且这一结果及其推广也已在众多数学学科中得到多种应用 [1,7,9,10,18]。

多个研究者研究过的一种推广是问题的重数版本，即网格中的点需要被覆盖多次。我们引入一些记号，以正式定义这个问题。

定义 1. 给定域 $\mathbb{F}$ 的有限子集 $S_1,S_2,\dots,S_d$，我们用 $\Gamma=\Gamma(S_1,S_2,\dots,S_d)$ 表示网格 $S_1\times S_2\times\ldots\times S_d\subseteq\mathbb{F}^d$。注意，通过平移，我们可以并且将会假设 $\vec{0}\in\Gamma$。如果 Γ 中某个点的任一坐标等于 0，我们称其为边界点；否则称为内部点。

对于给定的整数 $k\ge1$，如果 $\mathbb{F}^d$ 中的超平面多重集 $\mathcal{H}$ 是 Γ 的一个 k-覆盖，则称之为 k-覆盖；若 Γ 中的每个非零点都至少包含在 k 个超平面中，而 $\vec{0}$ 完全未被覆盖。

*代尔夫特应用数学研究所，代尔夫特理工大学，荷兰代尔夫特，邮编 2628 CD。电子邮件：A.Bishnoi@tudelft.nl。

†伯明翰大学数学学院，英国伯明翰埃德巴斯顿，邮编 B15 2TT。作者开展这项研究时隶属于柏林自由大学数学研究所，地址为德国柏林 14195。电子邮件：s.s.boyadzhiyska@bham.ac.uk。研究经费由德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略——柏林数学研究中心 MATH+ （EXC-2046/1，项目编号：390685689，BMS 奖学金）以及“复杂性的层面”研究生院（GRK 2434）提供支持。

‡数学系，国立台湾大学，台湾。电子邮箱：shagnik@ntu.edu.tw。研究获台湾国家科学及技术委员会资助，项目编号为111-2115-M-002-009-MY2。§代尔夫特理工大学代尔夫特应用数学研究所，荷兰代尔夫特2628 CD。电子邮箱：ym.den.bakker@gmail.com 。

我们用 \(\operatorname{cov}_{\{v1\}}(\{v2\};\{v3\})\) 表示在 \(\{v6\}\) 中对 \(\{v5\}\) 的 \(\{v4\}\)-覆盖的最小基数。当 \(\{v7\}\) 时，我们将在记号中省略域，直接写作 \(\operatorname{cov}_{\{v8\}}(\{v9\})\)。

在这一记号下，Alon–F¨uredi 定理表明，对于任意域 $\mathbb{F}$ 上的任意网格 Γ，$\mathrm{cov}_1(\Gamma,\mathbb{F}) = \sum_{i=1}^{d}(|S_i|-1)$。重数推广要探究重数为 $k \geq 2$ 时 $\mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F})$ 的值，我们可以先从几个显然的观察开始。首先，如果从一个 k-覆盖中移除任意一个超平面，剩下的仍然是一个 $(k-1)$-覆盖，因此 $\mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F}) \geq \mathrm{cov}_{k-1}(\Gamma;\mathbb{F}) + 1$；也就是说，这个极值函数关于 k 严格递增。另一方面，由于一个 k-覆盖与一个 ℓ-覆盖的并集构成一个 $(k+\ell)$-覆盖，我们有 $\mathrm{cov}_{k+\ell}(\Gamma;\mathbb{F}) \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F}) + \mathrm{cov}_\ell(\Gamma;\mathbb{F})$，因此该函数关于 k 是次可加的。反复应用这些递归不等式，直到达到 Alon–F¨uredi 定理的 $k=1$ 情形，我们得到

$$\sum_{i=1}^{d}(|S_i|-1) + k - 1 = \mathrm{cov}_1(\Gamma;\mathbb{F}) + k - 1 \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F}) \leq k\,\mathrm{cov}_1(\Gamma;\mathbb{F}) = k\sum_{i=1}^{d}(|S_i|-1). \quad (1)$$

因此，我们的目标是缩小这些界之间相当大的差距，而此前已有大量研究针对一些具体情形。在 Alon 和 F¨uredi [3],的工作之前，对有限几何中仿射阻挡集的研究，相当于令 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$（其中 q 为某个素数幂）并取 $\Gamma = \mathbb{F}_q^d$。对于这个网格，Jamison 的经典论文 [17] 运用多项式方法证明了 $\mathrm{cov}_1(\Gamma;\mathbb{F}_q) = d(q-1)$。随后，Bruen [12] 运用带重数的多项式方法，为重数版本给出了下界，证明了 $\mathrm{cov}_k(\Gamma,\mathbb{F}_q) \geq (d+k-1)(q-1)$。这改进了式 (1) 的结果，但通常仍不是紧的 [19, 22]。在 [8]„ 前三位作者与 Tam´as M´esz´aros 通过利用 k-覆盖与最小距离为 k 的线性二元码之间的等价关系，得到了情形 $q=2$ 下的新界。

Clifton 和 Huang 最近的工作 [13] 研究了在 $\mathbb{R}$ 上的这个问题，其中网格是超立方体 $\Gamma = \{0,1\}^d$。对于固定维数 d 和不断增大的重数 k，他们利用线性规划渐近地确定了 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$。另一方面，当维数d 相对于重数 k 足够大时，他们运用多项式方法给出了通用下界，并证明这些下界在 $k=2$ 和 $k=3$ 时是紧的。然而，他们猜想，对于 $k \geq 4$，其下界 $d+k+1$ 并不紧；对于所有固定的 k 和足够大的 d，$\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的真实值应为 $d + \binom{k}{2}$（参见 [13, 猜想 4.1]）。随后，Sauermann 和 Wigderson 的一篇论文 [21] 确定了利用多项式方法所能得到的最佳界；该方法旨在寻找一个多项式，使其在原点处不为零，而在网格中所有其他点处都具有重数 k 的零点。尽管他们的结果将 Clifton–Huang 下界改进为 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq d+2k-3$，但对于这种情形，这仍未达到猜想中的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 值，这表明代数问题与几何问题之间存在显著差距。

除了这些特殊情形外，Ball 和 Serra [5, 定理 5.3] 运用多项式方法，为任意域 $\mathbb{F}$ 上的任意网格 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ 得到了一个下界：

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F}) \geq \sum_{i=1}^{d}(|S_i|-1) + (k-1)\max_{1\leq i\leq d}(|S_i|-1). \quad (2)$$

这推广了 Bruen 的界，并显著改进了（1）中的下界，但与上界仍相距甚远。事实上，在对称情形下，当 $|S_i| = n$ 对所有 $i \in [d]$ 都成立时，我们有 $(d+k-1)(n-1) \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma;\mathbb{F}) \leq kd(n-1)$。因此，确定 Ball–Serra 界能否达到紧界，并在无法达到时获得更好的界，具有重要意义。

本文开启了对实数域上二维有限网格覆盖问题的系统研究。我们的第一组结果探讨网格的维度如何影响 Ball–Serra 界的紧致性。我们首先证明，当网格的宽度远大于高度时，Ball–Serra 界是锐的。

定理 1.1. 设 $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $|S_1| = n$, $|S_2| = m$ 和 $0 \in S_1 \cap S_2$，并令 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{R}^2$。若对于某个正整数 k，有 $n \geq (k-1)(m-1) + 1$，则

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma) = k(n-1) + (m-1).$$

我们的下一个结果表明，定理 1.1 中关于 n 的下界一般情况下无法改进。事实上，当 $n \leq (k-1)(m-1)$ 时，对于几乎所有$n \times m$ 网格，Ball–Serra 界都可以得到改进。我们通过以下定义来精确定义“几乎所有”。

定义 2. 设 S_1、$S_2 \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $0 \in S_1 \cap S_2$，设 $\Gamma = \Gamma(S_1$、$S_2)$，并设 $\Delta \geq 0$ 为一个整数。若任意一条包含两个边界点的直线至多包含 Δ 个内部点，则称 Γ Δ-generic。在 $\Delta = 0$ 的情况下，当这类直线避开所有内部点时，我们简称 Γ 为一般位置。

为了说明网格通常处于一般位置，假设从 $[-1, 1]$ 中均匀且独立地抽取 S_1 和 S_2 的非零点。若一条直线包含两个边界点和一个内部点，则这两个边界点必定来自不同的坐标轴，因此不妨设相关的点为 $(0, b_1)$、$(a_1, 0)$ 和 (a_2, b_2)，其中 a_1、$a_2 \in S_1$ 以及 b_1、$b_2 \in S_2$ 均非零。要使这些点共线，需要满足 $a_1(b_1 - b_2) = a_2 b_1$；而对于 a_i、b_j 的任意取值，该等式成立的概率均为 0。现在我们可以陈述下一个结果，该结果涉及特殊情形下的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$，其中 Γ 是一个一般位置网格。

定理 1.2。设 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个一般位置网格，满足 $|S_1| = n$, $|S_2| = m$ 和 $0 \in S_1 \cap S_2$。那么

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq k(n-1) + \frac{k}{n+m-2}(m-1)^2.$$

此外，若 Γ 是任意一个 $n \times m$ 网格，且 k 能被 $n+m-2$ 最大公约数$(n-1, m-1)$整除，那么我们有 ve

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma) \leq k(n-1) + \frac{k}{n+m-2}(m-1)^2. \tag{3}$$

特别地，若 Γ 处于一般位置，则上式取等号。

注意，$\frac{k}{n+m-2}(m-1)^2$ 严格大于 $m-1$ 当且仅当 $n \leq (k-1)(m-1)$，因此这些定理表明，对于一般位置网格，Ball–Serra 界是紧的，当且仅当$n \geq (k-1)(m-1) + 1$。

定理 1.2 表明，随着网格的维度越来越接近，Ball–Serra 界会变得更差。因此，在论文的大部分内容中，我们关注方形网格 Γ，其中 $n = m$。在这种情况下，Ball–Serra 界给出 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq (k+1)(n-1)$。我们的下一个定理将对一般的方形网格给出显著改进。

定理 1.3. 设 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2) \subset \mathbb{R}^2$ 是一个网格，满足 $|S_1| = |S_2| = n$ 和 $0 \in S_1 \cap S_2$。那么，对于任意整数 $k \geq 2$，有：

(a) 覆盖 $_k(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{3}{2}k \right\rceil (n-1)$。

(b) $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq (10 - 4\sqrt{5} + o(1))k(n-1)$，其中渐近行为针对 $n \to \infty$。

(c) if Γ *is* Δ*-generic for some* $\Delta \geq 0$*, then* $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq \left[2 - \frac{n-1}{2(n-1)-\Delta}\right]k(n-1)$.

请注意，(a) 部分改进了 (1) 中的平凡上界；而由于 $10 - 4\sqrt{5} \approx 1.0557$，(b) 部分将 (2) 中的 Ball–Serra 界常数因子改进，说明对于大型正方形网格，该界从不紧。此外，如前所述，几乎所有网格都是一般位置的；将 $\Delta = 0$ 代入 (c) 部分，可得一个下界，它在 k 为偶数时与 (a) 部分的上界完全一致，并在 k 为奇数且足够大时渐近一致。事实上，对于所有 $o(n)$-一般位置网格，(c) 部分都给出了渐近紧界。

然而，最自然的网格是标准的 $n \times n$ 网格，由 $S_1 = S_2 = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 给出，我们将其记为 $\Gamma_n = \Gamma(S_1, S_2)$。通过考虑对角线 $x + y = n - 1$，我们看到 Γ_n 对任何 $\Delta < n - 2$ 都不是 Δ- 一般位置，因此当 $n > k$ 时，定理 1.3(c) 比 Ball–Serra 界更差。通过针对这一特定网格调整我们的方法，我们得到了对一般界的以下改进。

定理 1.4。设 n、$k \geq 2$ 为整数，设 $S = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，并设 $\Gamma_n = \Gamma(S, S)$ 为标准 $n \times n$ 网格。那么，当 n、$k \to \infty$ 时，我们有

$$(2 - e^{-1/2} + o(1))k(n-1) \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma_n) \leq (\sqrt{2} + o(1))k(n-1). \tag{4}$$

注意，$2 - e^{-1/2} \approx 1.3935$，而 $\sqrt{2} \approx 1.4142$，因此我们为标准网格得到的最佳下界和上界之间仍有差距。若要得到更精确的界，可以考虑限制所研究的 k-覆盖的类别。正如我们将在定理 1.4 上界的证明中看到的，我们的构造只使用三类直线：水平直线、竖直直线和斜率为 -1 的直线。随后进行的计算机搜索验证，对于较小的 n 和 k，总能找到只使用这三类直线的最优 k-覆盖。在最后的结果中，我们为这些受限的 k-覆盖给出了相匹配的下界，这表明即使在不受限制的情况下，式 (4) 的上界也可能是正确的。

定理 1.5. 当 $n \to \infty$ 时，标准网格 Γ_n 的最小 k-覆盖若只包含斜率为 0、∞ 或 -1 的直线，其大小至少为 $\big(\sqrt{2} + o(1)\big)k(n-1)$。

证明这些结果时，我们将通过给出 k-覆盖的显式构造来证明上界。另一方面，下界将通过对该问题的线性规划松弛应用对偶性得到；我们将在第 2 节中建立这一框架。介绍完我们的方法后，我们将在第 3 节证明定理 1.1 和定理 1.2。随后，我们将把重点转向方形网格，并在第 4 节证明定理 1.3、1.4 和 1.5。最后，我们将在第 5 节给出一些总结性评论和未解决的问题。

2 线性规划框架

本节将介绍用于证明下界的线性规划方法。线性规划在极值组合学中的应用已十分成熟，并带来了许多结果（例如，参见 [15]），其中包括 Clifton–Huang 关于 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的 [13] 下界，该结果适用于 $\Gamma = \{0, 1\}^d$ 固定而 k 趋于无穷的情形。标准模板如下：不失一般性，假设我们处理的是一个最小化问题；首先，将极值问题解释为一个整数规划问题的实例。然后，由于整数规划难以求解，我们考虑线性规划松弛，即允许分数解。由于整数解本身也是分数解，线性规划的值便给出了原极值问题的下界。关键是，我们接下来可以应用对偶性，而寻找下界的任务也就转化为寻找对偶线性规划的可行解。有关线性规划的更多背景知识，请参见 [20] 。

首先，为了启动这一行动计划，我们需要将覆盖问题重新表述为一个整数线性规划。给定网格 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2)$，其中某些包含 0 的有限集为 $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$，我们希望确定 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$，即 Γ 的 k-覆盖中直线的最小数量。我们假设 $|S_1|, |S_2| \geq 2$，否则这个问题就是平凡的。

对于每一条可能的不经过原点的直线 ℓ，我们引入变量 $z(\ell)$，表示它在 k-重覆盖中的重数。因此，我们希望最小化 $\sum_\ell z(\ell)$，即覆盖的大小。为了确保整数规划返回的解是一个 k-重覆盖，我们需要要求 Γ 中的每个非零点至少被覆盖 k 次，同时完全不覆盖原点。

很容易看出，后一项约束能够得到满足。因此，对于每个 $(x,y) \in \Gamma \setminus \{(0,0)\}$，我们要求所有经过 (x,y) 的避开原点的直线 ℓ 上的 $z(\ell)$ 之和至少为 k。

唯一的问题在于， $\mathbb{R}^2$ 中有无穷多条直线。为了得到一个有限的规划，我们注意到可以将关注范围限制在至少包含 Γ 中两个非零点的直线上。事实上，在任何最小的 k- Γ 覆盖中，每条直线都必须包含至少一个非零点；如果一条直线只包含一个点（x， y），那么我们可以用另一条经过（x， y）且至少经过 Γ 中另一个点的避开原点的直线来替换它。因此，我们只需考虑集合 $\mathcal{L} = \mathcal{L}$（$\Gamma$）中至少包含 Γ 两个点的避开原点的直线。由于 Γ 中的非零点对少于 $|\Gamma|^2$ 对，且每一对都唯一确定一条直线，因此 $\mathcal{L}$ 是有限的。

In s总之，cov_k（Γ）是以下整数线性规划 $\mathcal{I} = \mathcal{I}$（$\Gamma$， k）的解 .

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \sum_{\ell \in \mathcal{L}} z(\ell) \\
&\text{subject to} \\
&\qquad \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{L}: \\ (x,y) \in \ell}} z(\ell) \geq k \quad \text{for all } (x,y) \in \Gamma \setminus \{(0,0)\} \\
&\qquad z(\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{for all } \ell \in \mathcal{L}
\end{aligned}$$

最后一个约束要求变量 z（ℓ）取整数值，这使得该规划在计算上不可行。为了得到一个多项式时间可解问题，我们可以放宽变量的取值范围，使其可以取实数。既然不再受整数约束，我们还可以将两边除以 k，消除该规划对这个参数的依赖。因此，我们得到线性规划 $\mathcal{P} = \mathcal{P}$（$\Gamma$），其中归一化变量为 u（ℓ），适用于 $\ell \in \mathcal{L}$。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u(\ell) \qquad (5) \\
&\text{满足} \\
&\qquad \sum_{\substack{\ell \in \mathcal{L}: \\ (x,y) \in \ell}} u(\ell) \geq 1 \quad \text{for all } (x,y) \in \Gamma \setminus \{(0,0)\} \\
&\qquad u(\ell) \geq 0 \quad \text{for all } \ell \in \mathcal{L}
\end{aligned}$$

我们用 $\Phi(\Gamma)$表示 $\mathcal{P}(\Gamma)$的解。下面的结果表明，当 k 相对于网格的维度足够大时， $\Phi(\Gamma)$描述了 $\mathsf{cov}_k(\Gamma)$ 的渐近行为。

命题 1. 对于任意网格 Γ 和整数 $k \geq 1$ ，有

$$k\Phi(\Gamma) \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma) \leq k\Phi(\Gamma) + |\mathcal{L}|.$$

证明。根据前文，$\mathsf{cov}_k(\Gamma)$ 是整数线性规划 $\mathcal{I}(\Gamma,k)$的取值。若令$(z(\ell) : \ell \in \mathcal{L})$为该规划的一个解，则设定 $u(\ell) = \frac{1}{k} z(\ell)$可得到线性松弛 $\mathcal{P}(\Gamma)$的一个可行解，其取值为 $\sum_\ell u(\ell) = \frac{1}{k} \sum_\ell z(\ell) = \frac{1}{k}$ $\mathsf{cov}_k(\Gamma)$。由于 $\Phi(\Gamma)$是 $\mathcal{P}(\Gamma)$的可行解所能达到的最小取值，第一个不等式即得证。

对于上界，令$(u^*(\ell) : \ell \in \mathcal{L})$为线性规划 $\mathcal{P}(\Gamma)$的一个最优解，其取值为 $\Phi(\Gamma)$。接着，若对所有 $\ell \in \mathcal{L}$设定 $z(\ell) = \lceil k u^*(\ell) \rceil$ ，则可得到$\mathcal{I}(\Gamma,k)$的一个可行解。因此，

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma) \leq \sum_\ell z(\ell) = \sum_\ell \lceil k u^*(\ell) \rceil \leq \sum_\ell (k u^*(\ell) + 1) = k\Phi(\Gamma) + |\mathcal{L}|. \qquad \square$$

我们指出，在实践中通常可以得到更好的误差界；例如， $|\mathcal{L}|$ 项可以用最优解 u^* 的支撑集大小来替代。此外，对于一个无限

重数序列 k，我们可以完全去掉误差项。事实上，由于 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的所有系数都是整数，因此存在一个有理最优解 u^*（例如单纯形算法返回的解）。如果 k 能被分数 $u^*(\ell)$ 的公分母整除，那么无需进行任何舍入，我们就可以令 $z(\ell) = ku^*(\ell)$，从而得到一个值恰为 $k\Phi(\Gamma)$ 的 $\mathcal{I}(\Gamma, k)$ 解。

因此，当 k 趋于无穷大时，问题归结为确定 $\Phi(\Gamma)$。我们可以通过寻找 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的可行解，或者更好地构造k-覆盖来获得上界。为了获得下界，我们借助对偶性理论。 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的对偶问题（记作 $\mathcal{D}(\Gamma)$）是以下线性规划：对于每个点 $(x, y) \in \Gamma \setminus \{(0, 0)\}$，我们都有一个变量 $w(x, y)$，称为该点的权重。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{(x,y)\in\Gamma\setminus\{(0,0)\}} w(x,y) && (6)\\ &\text{满足以下条件:} \\ &&& \sum_{\substack{(x,y)\in\Gamma\setminus\{(0,0)\}:\\ (x,y)\in\ell}} w(x,y) \le 1 \quad \text{for all } \ell \in \mathcal{L} \\ &&& w(x,y) \ge 0 \quad \text{for all } (x,y) \in \Gamma\setminus\{(0,0)\} \end{aligned}$$

为方便起见，给定一个集合 $S \subseteq \Gamma \setminus \{(0, 0)\}$，我们将 $w(S) = \sum_{(x,y)\in S} w(x, y)$ 记作 S 的权重。因此，对偶规划要求在 $\mathcal{L}$ 中每条直线的权重均不超过 1 的条件下，使网格的权重最大化。根据线性规划对偶定理（参见 [20, 第 6.1] 节），规划 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 和 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 具有相同的最优目标值 $\Phi(\Gamma)$。因此，我们将通过在网格 Γ 上找到足够大的可行权重，来证明关于 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的下界。

3 宽矩形网格

本节将证明定理 1.1 和定理 1.2，从而精确确定对于给定维度的所有网格，Ball–Serra 界何时取等。我们的第一个结果确定了当 $n \ge (k-1)(m-1) + 1$ 时，所有 $n \times m$ 网格 Γ 的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的值。

定理 1.1 的证明。Ball–Serra 界 (2) 给出了所需的下界，因为代入 $|S_1| = n$ 和 $|S_2| = m$ 可得 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \ge k(n-1) + m - 1$。为证明匹配的上界，我们给出一个包含这么多条直线的 k-覆盖的显式构造。

设 $S_2 = \{0, t_1, \ldots, t_{m-1}\}$，并令 $P_1 \cup \cdots \cup P_{m-1}$ 为 $S_1 \setminus \{0\}$的任意划分，使得对所有 $i \in [m-1]$都有 $|P_i| \ge k-1$；由于 $n - 1 \ge (k-1)(m-1)$，这样的划分存在。

现在，考虑以下直线集合：

(i) 对所有 $i \in [m-1]$，直线 $y = t_i$；

(ii) 对所有 $s \in S_1 \setminus \{0\}$，直线 $x = s$ 的 $k-1$ 条重合副本；

(iii) 对每个 $i \in [m-1]$ 和 $s \in P_i$，连接 $(0, t_i)$ 与 $(s, 0)$ 的直线。

总计，该集合包含 $m - 1 + (k-1)(n-1) + n - 1 = k(n-1) + m - 1$ 条直线。接下来只需验证这些直线构成了 Γ 的一个有效 k-覆盖。首先注意，该集合中的直线都不经过原点 $(0, 0)$。

Γ 中的任意内部点都被 (i) 和 (ii) 中的直线覆盖 k 次，因此只需检查边界点。对于形如 $(s, 0)$ 的点，其中 $s \in S_1 \setminus \{0\}$，它被 (ii) 中的直线覆盖 $k-1$ 次，并被 (iii) 中的直线覆盖一次。最后，对于满足 $s \in S_2 \setminus \{0\}$ 的点 $(0, s)$，它被 (i) 中的直线覆盖一次，并被 (iii) 中的直线覆盖至少 $k-1$ 次，因为每个 P_i 的大小至少为 $k-1$。因此， Γ 中的每个非零点都至少被覆盖 k 次，符合要求。□

我们指出，上述构造可以推广到高维，从而证明：对于任意包含原点的 $n_1 \times \cdots \times n_d$ 网格 $\Gamma(S_1, \ldots, S_d)$，如果 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_d$ 和 $n_1 \geq \mathrm{cov}_{k-1}(\Gamma(S_2, \ldots, S_d)) + 1$，那么 Ball–Serra 界对于 $\mathrm{cov}_k(\Gamma(S_1, \ldots, S_d))$ 是紧的。事实上，设 $S_1 = \{0, s_1, \ldots, s_{n_1-1}\}$，并令 $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_{n_1-1}\}$ 为 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中任意一组 $n_1 - 1$ 个超平面，它们包含 $\Gamma(S_2, \ldots, S_d)$ 的一个 $(k-1)$-覆盖。接着，我们构造 $\Gamma(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ 的一个 k-覆盖，由 $\mathbb{R}^d$ 中以下超平面组成：

(i) 对所有 $i \in \{2, \ldots, d\}$ 和 $t \in S_i \setminus \{0\}$，取超平面 $x_i = t$ 的一个副本；

(ii) 对所有 $s \in S_1 \setminus \{0\}$，取超平面 $x_1 = s$ 的 $k-1$ 个副本；

(iii) 对所有 $i \in [n_1 - 1]$，取由 $\{0\} \times H_i$ 和 $(s_i, 0, \ldots, 0)$ 张成的超平面。

不难验证，这确实是 $\Gamma(S_1, \ldots, S_d)$ 的一个 k-覆盖，并且它由 $\sum_{i=1}^{d} n_i + (k-1)n_1$ 个超平面组成，这与 Ball–Serra 下界 (2) 相符。不过，关于 n_1 的下界有多大还不清楚；也就是说，为了保证 Ball–Serra 界是紧的，n_1 相对于其他维度 n_i 需要多大。

在下一个结果中，我们证明，定理 1.1 中关于 n_1 的界是最佳可能的，因为对于稍窄的一般位置网格，Ball–Serra 界不再是紧的。事实上，当 Γ 是一般位置 $n \times m$ 网格时，我们给出了 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的一个一般下界，并证明对于无穷多个 k 的取值，此下界是紧的。虽然本文不再进一步探讨高维中的这一问题，但我们指出，已有结果 [14] 表明，对于满足 $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ 的网格 $\{0, \ldots, n_1 - 1\} \times \{0, \ldots, n_2 - 1\} \times \{0, \ldots, n_3 - 1\}$，当 $n_1 \geq (k-1)(n_2 - 1) + 1$ 时，Ball–Serra 界已经是紧的，这改进了上述构造给出的界。

定理 1.2 的证明。我们要证明，若 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2)$ 是一般位置网格，且 $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $0 \in S_1 \cap S_2$ 和 $|S_1| = n \geq m = |S_2|$，那么有 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq k(n-1) + \frac{k}{n+m-2}(m-1)^2$。根据第 2 节建立的线性规划框架，只需证明 $\Phi(\Gamma) \geq (n-1) + \frac{(m-1)^2}{n+m-2}$；为此，可以对 Γ 的非零点赋权，使总权重为该值，且 $\mathcal{L}$ 中的每条直线的权重至多为 1。

为此，定义赋权 $w\colon \Gamma \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$，如下所示：

$$w((x,y)) = \begin{cases} \frac{n-1}{n+m-2} & \text{if } y = 0; \\ \frac{m-1}{n+m-2} & \text{if } x = 0; \\ \frac{1}{n+m-2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们先计算网格的总权重：

$$\begin{aligned} w(\Gamma \setminus \{(0,0)\}) &= (n-1)\frac{n-1}{n+m-2} + (m-1)\frac{m-1}{n+m-2} + (n-1)(m-1)\frac{1}{n+m-2} \\ &= (n-1)\frac{n-1+m-1}{n+m-2} + \frac{(m-1)^2}{n+m-2} \\ &= n - 1 + \frac{(m-1)^2}{n+m-2}, \end{aligned}$$

因此，只要这个赋权可行，它就给出了所需的下界。

为证明其可行性，考虑直线 $\ell \in \mathcal{L}(\Gamma)$。首先，假设 ℓ 包含两个边界点，即 $(x, 0)$ 和 $(0, y)$。由于 Γ 处于一般位置，ℓ 不可能包含其他点，因此 $w(\ell) = w((x,0)) + w((0,y)) = \frac{n-1}{n+m-2} + \frac{m-1}{n+m-2} = 1$。接下来，假设 ℓ 是形如 $y = s$ 的水平直线，其中某个 $s \in S_2 \setminus \{0\}$。于是，直线 ℓ 包含一个位于 y 轴上的点以及 $n-1$ 个内部点，因此 $w(\ell) = \frac{m-1}{n+m-1} + (n-1)\frac{1}{n+m-2} = 1$。最后，任何其他直线 ℓ 至多包含一个边界点，以及至多 $m-1$ 个内部点（x, y），每个 $y \in S_2 \setminus \{0\}$ 的取值对应一个。对于这类直线，因此有 $w(\ell) \leq \frac{n-1}{n+m-2} + (m-1)\frac{1}{n+m-2} = 1$。

因此，赋权 w 确实是对偶线性规划 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 的可行解，其总权重为 $n-1+\frac{(m-1)^2}{n+m-2}$，这证明了 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq k(n-1) + \frac{k}{n+m-2}(m-1)^2$。

现在，给定任意 $n \times m$ 网格 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2)$，我们给出一个 k-覆盖 Γ 的构造。对于一个无限的重数序列 k，该构造达到上述已证明的界，从而确定一般位置网格 Γ 在这些重数 k下的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$。

定义 $a = \frac{n-1}{\text{最大公约数}(n-1,m-1)}$ 和 $b = \frac{m-1}{\text{最大公约数}(n-1,m-1)}$，已知 k 可被 $a+b$整除。我们进一步定义 $d_1 = \frac{bk}{a+b}$ 和 $d_2 = \frac{ak}{a+b}$，注意到整除假设保证它们都是整数，且 $d_1 + d_2 = k$。设 B 是一个任意的双正则二部多重图，其两部分为 $S_1 \setminus \{0\}$ 和 $S_2 \setminus \{0\}$，第一部分的度为 d_1，第二部分的度为 d_2。注意，这样的多重图确实存在，因为 $d_1(n-1) = d_2(m-1)$；我们可以为每个$s_1 \in S_1 \setminus \{0\}$ 分配 d_1 条半边，并为每个 $s_2 \in S_2 \setminus \{0\}$分配 d_2 条半边，然后在这两组半边之间任取一个匹配。

接下来，考虑以下直线集合：

(i) 对每个 $s_1 \in S_1 \setminus \{0\}$，取 $x = s_1$ 这条直线的 d_2 个副本；

(ii) 对每个 $s_2 \in S_2 \setminus \{0\}$，取 $y = s_2$ 这条直线的 d_1 个副本；

(iii) 对每个 $\{s_1, s_2\} \in E(B)$，取一条连接 $(s_1, 0)$ 与 $(0, s_2)$ 的直线副本。

要看出这些直线构成了 Γ 的一个 k-覆盖，只需注意到每个内部点都被 (i) 中的 d_2 条垂直直线和 (ii) 中的 d_1 条水平直线覆盖，因此总共被覆盖 $d_1 + d_2 = k$ 次。对于边界点，形如 $(s_1, 0)$ 且满足 $s_1 \in S_1 \setminus \{0\}$ 的点被 (i) 中的直线覆盖 d_2 次，而多重图 B 的双正则性确保它被 (iii) 中的直线覆盖 d_1 次。类似地，每个形如 $(0, s_2)$ 且满足 $s_2 \in S_2 \setminus \{0\}$ 的点被 (ii) 中的直线覆盖 d_1 次，被 (iii) 中的直线覆盖 d_2 次。因此，每个边界点也都被覆盖 k 次。最后，我们集合中的直线都不经过原点。

因此，我们通过计算该覆盖的大小，得出上界：

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}_k(\Gamma) &\leq d_2(n-1) + d_1(m-1) + d_1(n-1) \\
&= (d_1 + d_2)(n-1) + d_1(m-1) \\
&= k(n-1) + \frac{bk}{a+b}(m-1) \\
&= k(n-1) + \frac{k}{n+m-2}(m-1)^2,
\end{aligned}$$

证毕。 □

4 方形网格

在上一节中，我们看到，当网格的宽度远大于高度时，Ball–Serra 界是紧的；并证明了一般位置网格的一个下界，随着其维度的大小越来越接近，该下界会远大于 Ball–Serra 界。因此，在本文余下部分，我们将聚焦于 $n \times n$ 网格。在第4.1节中，我们证明定理 1.3，该定理针对任意 $n \times n$ 网格 Γ，给出了 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的一般下界和上界。在第 4.2 节中，我们聚焦于标准网格 $\Gamma_n = \Gamma(\{0, 1, \ldots, n-1\}, \{0, 1, \ldots, n-1\})$，并证明定理 1.4 和定理 1.5。

4.1 一般结果

我们先重述方形网格的一般界。

定理 1.3. 设 $\Gamma = \Gamma(S_1, S_2) \subset \mathbb{R}^2$ 是一个网格，具有 $|S_1| = |S_2| = n$ 和 $0 \in S_1 \cap S_2$。那么，对于任意整数 $k \geq 2$，我们有：

(a) $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \le \lceil \frac{3}{2}k \rceil (n-1)$.

(b) $\ge (10-4\sqrt{5}+o(1))k(n-1)$ 的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$，其中渐近行为针对 $n \to \infty$。
(c) 如果 Γ 是某个 $\Delta \ge 0$ 的 Δ-一般位置，则 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \ge \left[2 - \frac{n-1}{2\,n-1\,()-\Delta}\right]k(n-1)$。

我们将通过对 k-覆盖的显式构造证明 (a) 的上界，并利用第 2 节的线性规划框架建立 (b) 和 (c) 的下界。

证明。(a) 注意，当 k 为偶数时，$m=n$ 时由定理 1.2 中的上界可得 $_k(\Gamma) \le \frac{3}{2}k(n-1)$ 的上界。我们将通过适当的舍入得到奇数 k 的上界，并在下文给出统一的构造。

设 $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ 为 S_1 中的非零元素，并设 $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$ 为 S_2 中的非零元素。我们构造一个由以下直线组成的 Γ 的 k-覆盖：
(i) 对于每个 $i \in [n-1]$，取 $x = x_i$ 和 $y = y_i$ 这两条直线的 $\lceil \frac{1}{2}k \rceil$ 个副本；

(ii) 对于每个 $i \in [n-1]$，取连接 $(x_i, 0)$ 与 $(0, y_i)$ 的直线的 $\lfloor \frac{1}{2}k \rfloor$ 个副本。

(i) 中有 $2\lceil \frac{1}{2}k \rceil (n-1)$ 条直线，(ii) 中有 $\lfloor \frac{1}{2}k \rfloor$ 条直线，因此总共有 $\lceil \frac{3}{2}k \rceil (n-1)$ 条直线。显然，这些直线都不经过原点。要证明它们构成一个 k-覆盖，首先注意到每个内部点都被 $\lceil \frac{1}{2}k \rceil$ 条水平直线和 $\lceil \frac{1}{2}k \rceil$ 条垂直直线覆盖，因此总共至少被覆盖 k 次。另一方面，每个边界点被 (i) 中的直线覆盖 $\lceil \frac{1}{2}k \rceil$ 次，被 (ii) 中的直线覆盖 $\lfloor \frac{1}{2}k \rfloor$ 次，因此恰好位于 k 条直线上。因此，这些直线确实构成一个 k-覆盖，说明 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \le \lceil \frac{3}{2}k \rceil (n-1)$。

(b) 为了证明下界，我们借助对偶线性规划 $\mathcal{D}(\Gamma)$。我们的目标是为 Γ 的非零点定义一种赋权 w，使其总权重很大，同时任何避开原点的直线的权重都不超过 1。关键观察是，这些直线至多包含两个边界点，因此我们可以尝试为边界点赋予较大的权重。

我们首先尝试一种简单的赋权 w'：所有边界点的权重均为 α，所有内部点的权重均为 β，其中 α 和 β 稍后确定。然而，遗憾的是，这一初步尝试并不可行。事实上，我们有 $w'(\Gamma) = 2(n-1)\alpha + (n-1)^2\beta = (2\alpha + (n-1)\beta)(n-1)$。由于可能存在包含两个边界点和 $n-2$ 个内部点的直线，我们必须有 $2\alpha + (n-2)\beta \le 1$。因此，$w'(\Gamma) \le (1+\beta)(n-1)$。由于平行于坐标轴的直线包含一个边界点和 $n-1$ 个内部点，我们还必须有 $\alpha + (n-1)\beta \le 1$，这尤其意味着 $\beta \le \frac{1}{n-1}$。于是，$w'(\Gamma) \le n$，因此我们从这种赋权中所能期待的最佳下界是 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \ge kn$，这对于 $n \ge k+2$ 而言比 Ball–Serra 界 (2) 还差。

为了挽救这一思路，我们改为只给部分边界点赋予权重，目的是确保任何一条避开原点且经过两个正权重边界点的直线，都不会包含太多内部点。为此，我们使用下面的断言，来界定某些直线上所含点的数量。

断言 1. 假设我们将 S_1 中的元素依次记为 $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$，将 S_2 中的元素依次记为 $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$，并假设 $i_0 \in [n]$ 满足 $x_{i_0} = 0$。设 $j \in [n]$ 和 ℓ 为一条经过 $(0, y_j)$ 的直线。如果 ℓ 的斜率为正，则 ℓ 至多包含 $n - |j - i_0|$ 个 Γ 中的点。如果 ℓ 的斜率为负，则 ℓ 至多包含 $n - |($ $n-j)$ 个 Γ 中的点。

断言 1 的证明。首先假设 ℓ 是一条斜率为正且经过 $(0, y_j)$ 的直线。定义 $S_1^- = \{x \in S_1 : x \le 0\}$ 和 $S_2^- = \{y \in S_2 : y \le y_j\}$，注意到 $|S_1^-| = i_0$ 且 $|S_2^-| = j$。由于 ℓ 的斜率为正，因此，如果对于某个 $x \in S_1^-$，$(x, y) \in \ell$，那么必有 $y \in S_2^-$。

如果 $j \ge i_0$，那么，由于 S_1^- 中的每个值至多对应 S_2^- 中的一个值，因此 S_2^- 中至少有 $j - i_0$ 个坐标不会被 ℓ 映射到，S_2 中也同样如此，所以 ℓ 最多包含 Γ 上的 $n - (j - i_0)$ 个点。类似地，如果 $j < i_0$，由于每个值

在 S_2^- 中至多对应 S_1^- 中的一个值，因此 S_1 中至少有 $i_0 - j$ 个值未被 ℓ 覆盖，所以 ℓ 最多包含来自 Γ 的 $n - (i_0 - j)$ 个点。这表明，经过 $(0, y_j)$ 的正斜率直线最多包含 Γ 上的 $n - |j - i_0|$ 个点。

对于负斜率的直线，我们可以关于 x 轴反射网格，考虑 $S_2' = \{-y : y \in S_2\}$。这会反转各元素的顺序，因此 $y_i' = -y_{n-i}$。直线 ℓ 随即对应于一条经过 $(0, y'_{n-j})$、斜率为正的直线 ℓ'，因此这条直线至多包含网格的 $n - |(n - j) - i_0|$ 个点。

□

有了这一结论，我们现在为 Γ 中的点定义一种改进的赋权方式。与该结论中一样，将 S_1 的元素依次记为 $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$，将 S_2 的元素依次记为 $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$，并令 $i_0, j_0 \in [n]$ 满足 $x_{i_0} = 0$ 和 $y_{j_0} = 0$。给定稍后确定的参数 α, β 和 t，我们按如下方式定义 $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ 上的权重：

$$w((x_i, y_j)) = \begin{cases} \alpha & \text{if } i \neq i_0 \text{ and } j \neq j_0; \\ \beta & \text{if } j = j_0, \text{ or if } i = i_0 \text{ and } \min\{|j - i_0|, |n - j - i_0|\} \geq t; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

也就是说，我们给所有内部点赋予权重 α，给所有边界点赋予权重 β，但不包括 y 轴上 y_{i_0} 和 y_{n-i_0} 附近区间内的边界点。

为了使赋权有效，我们要求每条避开原点的直线的权重至多为 1。若直线 ℓ 包含两个权重为正的边界点，则令其经过 y 轴上的 $(0, y_j)$。根据 w 的定义，我们必须有 $|j - i_0|, |(n - j) - i_0| \geq t$，因此由断言 1，$\ell$ 至多包含 Γ 中的 $n - t$ 个点，从而至多包含 $n - t - 2$ 个内部点。因此，任何此类直线的权重至多为 $2\beta + (n - t - 2)\alpha$。

否则，直线 ℓ 至多包含一个带权重的边界点和 $n - 1$ 个内部点，因此总权重不超过 $\beta + (n-1)\alpha$。因此，我们的参数必须满足 $2\beta + (n - t - 2)\alpha \leq 1$, $\beta + (n-1)\alpha \leq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ 和 $t \in \mathbb{N}$。

关于目标函数，我们注意到权重为零的边界点至多有 $2(2t - 1)$ 个，因此 $w(\Gamma) \geq 2(n - 2t)\beta + (n-1)^2\alpha$；我们希望在满足上述约束条件的前提下最大化这一数量。经过一些常规计算可得，应设 $t = \left\lceil \frac{1}{2}\sqrt{(5n+1)(n-1)} - n \right\rceil$，$\alpha = \frac{1}{n+t}$和 $\beta = \frac{t+1}{n+t}$，此时有 $w(\Gamma) = \big(10 - 4\sqrt{5} + o(1)\big)(n-1)$。命题 1 给出了所需的下界：

$$\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq k\Phi(\Gamma) \geq kw(\Gamma) = \left(10 - 4\sqrt{5} + o(1)\right) k(n-1).$$

(c) 对于定理的最后一部分，我们假设网格 Γ是 Δ-一般位置的，这意味着任意一条经过两个边界点的直线至多包含 Δ 个内部点。在 (b) 部分的框架下，我们给所有内部点赋予权重 α，给所有边界点赋予权重 β，由此得到来自至多经过一个边界点的直线的约束条件 $\beta + (n-1)\alpha \leq 1$，以及来自经过两个边界点的直线的约束条件 $2\beta + \Delta\alpha \leq 1$。我们希望最大化的总权重为 $2(n-1)\beta + (n-1)^2\alpha$。

该优化问题的解为 $\beta = 1 - \frac{n-1}{2}\Delta$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}\Delta$。容易验证，此时两个约束条件均取等号，且网格的总权重为 $\left\lceil 2 - \frac{n-1}{2}\Delta \right\rceil (n-1)$，因此再次应用命题 1 即可得出结果。

□

此处有几点值得说明。首先，我们注意到，如果掌握原点在网格中的位置这一额外信息，(b) 部分的下界可以进一步改进。例如，假设原点位于左下角；也就是说，$\min S_1 = \min S_2 = 0$。那么，任何经过两个边界点的直线都必定具有负斜率，因此应用断言 1 时，我们会发现，只需让 y 轴上最大的那些值不带权重即可。当有人

求解相应的优化问题时，我们发现，对于这样的网格 Γ，$\mathrm{cov}_k(\Gamma) \geq \left(4-2\sqrt{2}+o(1)\right)k(n-1)$，常数因子有了显著改进，如 $4-2\sqrt{2}\approx 1.1716$ 所示。

其次，正如引言中所解释的，几乎所有网格 Γ 都处于一般位置，而定理 1.3 的 (a) 和 (c) 部分在 k 为偶数时精确地确定 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$，并在 k 为较大的奇数时渐近地确定它。然而，即使网格 Γ 并非处于一般位置，而仅处于 Δ-一般位置，只要满足 $\Delta = o(n)$，(c) 部分仍足够稳健，能够渐近地解决该问题。下面我们给出一些自然的例子。

推论 2. 给定 $n \in \mathbb{N}$，令 $\Gamma_{\exp,n} = \Gamma(E,E)$，其中 $E = \{0,1,2,4,\ldots,2^{n-2}\}$，并令 $\Gamma_{\mathrm{quad},n} = \Gamma(S,S)$，其中 $S = \{0,1,4,\ldots,(n-1)^2\}$。那么，若 $\Gamma \in \{\Gamma_{\exp,n}, \Gamma_{\mathrm{quad},n}\}$，则 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) = \left(\frac{3}{2}+o(1)\right)k(n-1)$，当 $k,n\to\infty$ 时。

证明。由定理 1.3(a)，我们知道 $\mathrm{cov}_k(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{3}{2}k \right\rceil (n-1)$，这就是 $\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)k(n-1)$，因为 $k\to\infty$，所以我们只需证明下界。由定理 1.3(c)，只需证明对于某个 $\Delta = o(n)$，Γ 是 Δ-一般位置。

我们从 $\Gamma = \Gamma_{\exp,\ n}$ 开始，并证明它是 1-一般位置。事实上，假设 ℓ 是经过 Γ的两个边界点的直线，设这两个点为 $(0,2^i)$ 和 $(2^j,0)$。通过简单计算可知，对于任意 r，直线 ℓ 经过 $(2^r,\ 2^i-2^{i-j+r})$。要使该点成为网格$\Gamma_{\exp,\ n}$的内部点，我们要求 2^i-2^{i-j+r} 是严格小于2^i的 2 的正整数次幂，而这只在 $r=j-1$时成立。因此，直线 ℓ 恰好包含一个内部点，所以$\Gamma_{\exp,\ n}$ 是 1-一般位置。

二次网格$\Gamma_{\mathrm{quad},\ n}$需要稍微更细致地处理。同样，假设$\ell$是一条直线，包含边界点（0，$a^2$）和（$b^2$，0），且（$r^2$，$s^2$）是位于 ℓ上的一个内部点。于是有 $s^2 = a^2\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)$，或（$ab$）^{2} = （$ar$）^{2} + （$bs$）^{2}。因此，$\ell$ 上的内部点数量至多等于将（ab）^{2} 表示为平方和的方式数。根据 Beiler [6], , 若 Q 是 ab 中模 4 同余于 1 的素因子集合，且 β_q 是（ab）^{2}, 的素因数分解中 $q\in Q$ 的重数，那么将（ab）^{2} 表示为平方和的方式数为 $\prod_{q\in Q}$（β_q+1）。

为简化下面计算中的记号，我们假设 $q=5$、13 和 17 都包含在 Q 中；如果它们不能整除 ab，则令 $\beta_q = 0$。现在注意到

$$\begin{aligned}\sum_{q\in Q}(\beta_q+1) &= 3+\beta_5+\beta_{13}+\beta_{17}+\sum_{q\in Q,q\geq 29}(\beta_q+1)\\ &\leq 3+\beta_5+\beta_{13}+\beta_{17}+\sum_{q\in Q,q\geq 29}2\beta_q\\ &\leq 3+\sum_{q\in Q}\beta_q\log_5 q = 3+\log_5\left(\prod_{q\in Q}q^{\beta_q}\right)\leq 3+\log_5\left((ab)^2\right),\end{aligned}$$

因此 $\sum_{q\in Q}(\beta_q+1) \leq 3+4\log_5 n$。

现在，给定一些自然数 m_i，容易证明 $\prod_i m_i \leq 3^{\frac{1}{3}\sum_i m_i}$，因此将 $(ab)^2$ 表示为平方和的方式数至多为 $3^{\frac{1}{3}\sum_{q\in Q}(\beta_q+1)} \leq 3\cdot 3^{\frac{4}{3}\log_5 n} = 3n^{\frac{4}{3}\log_5 3}$。由此可知，$\Gamma_{\mathrm{quad},\ n}$ 对 $\Delta = 3n^{\frac{4}{3}\log_5 3} = o(n)$ 是 Δ-一般位置的。 □

4.2 标准网格

虽然第4.1节的结果渐近地解决了网格数量非常多时的问题，但毫无疑问，最自然的情形是考虑标准网格$\Gamma(S,S)$，其中 $S=\{0,1,\ldots,n-1\}$。为方便起见，我们将此网格记为 Γ_n。考虑直线 $x+y=n-1$，可知 Γ_n 对于任意 $\Delta < n-2$都不是 Δ-一般位置，这意味着 the

定理 1.3(c) 的下界比 $n > k$ 的 Ball–Serra 界更差。不过，通过针对这一特定网格调整我们的方法，我们将得到好得多的界。我们首先证明，标准网格的严格 k-覆盖所需的直线远少于定理 1.3 给出的上界；如上一小节所示，对于大多数网格而言，该上界在渐近意义下是紧的。

定理 1.4 的证明（上界）。我们构造一个 k-覆盖，覆盖 Γ_n，其大小为 $(\sqrt{2}+o(1))k(n-1)$。设 $t \in [n-1]$ 为一个参数，稍后确定，并考虑以下直线集合：

(i) 对每个 $i \in [n-1]$，取直线 $x = i$ 和 $y = i$ 的 $\left\lceil \frac{i}{n+t-1}k \right\rceil$ 个副本；

(ii) 对每个 $1 \le i < n+t-1$，取直线 $x+y = i$ 的 $k - \left\lceil \frac{i}{n+t-1}k \right\rceil$ 个副本。

我们先证明上述直线集合构成 Γ_n的一个 k-覆盖。首先，显然没有直线经过原点。现在考虑点 $(s_1, s_2) \in \Gamma_n \setminus \{(0,0)\}$。若$s_1 + s_2 < n+t-1$，则直线 (i) 覆盖 (s_1, s_2) $\left\lceil \frac{s_1}{n+t-1}k \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2}{n+t-1}k \right\rceil$次，直线 (ii) 另外覆盖 $k - \left\lceil \frac{s_1+s_2}{n+t-1}k \right\rceil$ 次，因此总共至少覆盖 k 次。另一方面，若 $s_1 + s_2 \ge n+t-1$，则仅直线 (i) 就覆盖该点 $\left\lceil \frac{s_1}{n+t-1}k \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2}{n+t-1}k \right\rceil \ge k$次，符合要求。计算这个 k-覆盖的大小，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}_k(\Gamma_n) &\le 2\sum_{i=1}^{n-1}\left\lceil \frac{i}{n+t-1}k \right\rceil + \sum_{i=1}^{n+t-2}\left(k - \left\lceil \frac{i}{n+t-1}k \right\rceil\right) \\
&\le k\left[2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n+t-1} + \sum_{j=1}^{n+t-2}\frac{j}{n+t-1}\right] + 2n \\
&\le k\left[\frac{2}{n+t-1}\binom{n}{2} + \frac{1}{n+t-1}\binom{n+t-1}{2}\right] + 2n \\
&= k\left[\frac{n(n-1)}{n+t-1} + \frac{n+t-2}{2}\right] + 2n. \qquad (7)
\end{aligned}$$

由 (7) 给出的上界对任意 $t \in [n-1]$ 都成立；现在我们要选取一个 t 的取值，使右侧尽可能小。函数 $g(t) = \frac{n(n-1)}{n+t-1} + \frac{n+t-2}{2}$ 在 $t_0 = \sqrt{2}(n-1)n - (n-1)$ 处取得最小值。由于我们的参数必须是整数，因此我们选取 $t = \left\lceil \sqrt{2}(n-1)n - (n-1) \right\rceil = (\sqrt{2}-1+o(1))(n-1)$；将这个 t 的取值代入 (7)，便得到所声称的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n)$ 上界 $(\sqrt{2}+o(1))k(n-1)$。

□

现在我们来讨论下界。

定理 1.4 的证明（下界）。根据命题 1，只需为对偶线性规划 $\mathcal{D}(\Gamma_n)$ 找到一个可行解，也就是说，对 Γ_n 中的非零点进行赋权，使每条避开原点的直线的权重至多为 1，且总权重至少为 $(2-e^{-1/2}+o(1))(n-1)$。

令 t 为满足 $\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{n-i} \le \frac{1}{2}$ 的最大整数，并考虑定义在 $\Gamma_n \setminus \{(0,0)\}$ 的点上的以下赋权：

$$w((x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } xy = 0; \\ \frac{1}{n-i} & \text{if } x+y = n-1+i \text{ for some } i \in [t]; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

首先证明 $(w((x,y)) : (x,y) \in \Gamma_n)$ 给出了对偶线性规划$\mathcal{D}(\Gamma_n)$ 的一个可行解。显然，对于所有 $(x,y) \in \Gamma_n \setminus \{(0,0)\}$，$w((x,y)) \ge 0$。现在，设 $\ell \in \mathcal{L}$ 是任意一条直线。如果 ℓ

包含两个边界点，那么在 ℓ 上的任意内部点 (x,y) 都满足 $x+y \le n-1$，因此其权重为零。由此可得 $w(\ell) = 1$。否则，如果 $(x,y) \mapsto x+y$ 在 ℓ 上为常数，那么对于某个 $i \in [n-1]$，有 $\ell = \{(x,y) : x+y = n-1+i\}$。那么 ℓ 上的所有点权重都为零，除非 $1 \le i \le t$，此时 ℓ 包含 $n-i$ 个点，每个点的权重为 $\frac{1}{n-i}$。因此在这种情况下，$w(\ell) \le 1$。最后，如果 $(x,y) \mapsto x+y$ 在 ℓ 上不是常数，那么它必定是单射。于是，ℓ 至多包含一个边界点，其权重为 1 2，其余点的权重总和至多为 $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n-i}$；根据 t 的选取，这至多为 1 2。因此，总体上我们再次有 $w(\ell) \le 1$。

要计算网格的总权重，注意到形如 $x+y=i$ 的每条对角线在 $1 \le i \le n-1+t$ 时权重为一，否则为零。因此，网格的总权重为$n-1+t$。

剩下的任务是估计 t。注意到 $t \le \frac{n}{2}$，因为 $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n-i} \ge \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n} = \frac{t}{n}$，因此 $n-1$ 和 $n-1-t$ 都随 n 线性趋于无穷大。众所周知，当 $m \to \infty$ 时，调和级数的部分和H_m 满足 $H_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} = \log m + \gamma + o(1)$，其中 γ 是一个常数。因此，

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n-i} = H_{n-1} - H_{n-1-t} = \log\left(\frac{n-1}{n-1-t}\right) + o(1).$$

因此，必有 $\log\left(\frac{n-1}{n-1-t}\right) = \frac{1}{2} + o(1)$，或 $\log\left(1 - \frac{t}{n-1}\right) = -\frac{1}{2} + o(1)$。由此得到 $1 - \frac{t}{n-1} = e^{-1/2} + o(1)$，或 $t = \left(1 - e^{-1/2} + o(1)\right)(n-1)$，从而得出所述界。 □

我们为上界构造的覆盖只使用斜率为 0、∞ 和 -1 的直线。这看起来可能相当受限，因此自然会想知道，是否可以利用其他直线做得更好。然而，通过计算机搜索，我们验证了：对于较小的 n 和 k，总能构造出仅由这三类直线组成的最优 k-覆盖。这促使我们进一步研究这一受限的 k-覆盖类，并在最终结果中证明，这种形式的最小 k-覆盖的大小为 $\left(\sqrt{2} + o(1)\right)k(n-1)$。

定理 1.5 的证明。为方便起见，以下将斜率为 -1 的直线称为对角线。由于定理 1.4 中为上界构造的覆盖只使用水平、垂直和对角线，因此在这一受限情形下，它也给出了相同的上界 $\left(\sqrt{2} + o(1)\right)k(n-1)$。

为了获得匹配的下界，我们将再次采用线性规划方法。回顾一下，我们之前通过为各点赋予权重来得到下界，要求权重之和尽可能大，同时每条避开原点的直线上的总权重至多为 1。在这个受限情形下，由于我们只能使用水平、垂直和对角线，因此对偶线性规划仅对这些直线上的权重设有约束。这使我们在选择权重时拥有更大的自由度，因此我们有望找到总和更大的可行权重。

请注意，在寻找最优赋权时，我们有 n^2-1 个自由度（各个非零点的权重），但只有 $4(n-1)$ 个约束（水平、垂直和对角线）。为了缩小搜索空间并简化任务，我们将对赋权 w 施加以下附加条件。

- 赋权关于主对角线对称；也就是说，对于所有满足 $(x,y) \in \Gamma_n \setminus \{(0,0)\}$ 的 (x,y)，$w(x,y) = w(y,x)$。
- 在每条对角线上，每个内部点的权重都相同。
- 每条不经过原点的垂直线的权重都是 1（因此每条水平直线的权重也都是 1）。

• 存在某个 $t \in [n-1]$，使得对角线 $x+y=i$ 的权重在 $1 \le i \le n+t-1$ 时为 1，在 $i=n+t$ 时至多为 1，在 $i \ge n+t+1$ 时为 0。

现在需要说明几点。首先请注意，对称性的要求不失一般性，因为如果 w 是任意一个可行赋权，那么由 $w'(x,y) = \frac{1}{2}(w(x,y) + w(y,x))$ 定义的 w' 是一个总权重相同的对称可行赋权。

关于总权重，通过沿对角线求和，我们可以看到 $w(\Gamma_n \setminus \{(0,0)\})$ 至少为 $n+t-1$，至多为 $n+t$。因此，我们的目标是最大化 t 的值，使得能够找到这样的可行赋权。

现在，对于某个固定的 t，注意到约一半点的权重已经由这些条件确定。由于对角线 $x+y=i$ 在 $i \ge n+t+1$ 时的权重为 0，因此当 $x+y > n+t$ 时必有 $w(x,y) = 0$。另一方面，如果 $n \le i \le n+t-1$，那么我们知道该对角线的权重为 1。由于这条对角线完全由 $2n-1-i$ 内部点组成，而所有这些点必须具有相同的权重，因此当 $n \le x+y \le n+t-1$ 时有 $w(x,y) = \frac{1}{2n-1-(x+y)}$。最后，当 $x+y = n+t$ 时，为确保该对角线的权重至多为 1，我们必须令 $w(x,y) = z$，其中 $0 \le z \le \frac{1}{n-t-1}$。

现在我们将注意力转向网格中的下三角区域内的点；也就是说，满足 $1 \le x+y \le n-1$ 的 (x,y)。在之前的赋权中，我们为边界点赋予权重 $\frac{1}{2}$，而内部点不赋权。现在我们有了更多自由度，便可以将权重分散到整个网格中。考虑到这一点，我们引入参数 α_i, $1 \le i \le n-1$，使得 $w(i,0) = w(0,i) = \frac{1}{2} - \alpha_i$。由于对角线 $x+y=i$ 的总权重为 1，因此对于满足 $x+y=i$, $x,y \ne 0$ 的内部点 (x,y)，有 $w(x,y) = \frac{2\alpha_{x+y}}{x+y-1}$。

因此，利用对称性以及对角线上的条件，我们证明了赋权形式如下

$$w((x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \alpha_{x+y} & \text{if } x=0 \text{ or } y=0; \\ \frac{2\alpha_{x+y}}{x+y-1} & \text{if } x,y \ne 0 \text{ and } 1 \le x+y \le n-1; \\ \frac{1}{2n-1-i} & \text{if } x+y=i \text{ for some } n \le i \le n+t-1; \\ z & \text{if } x+y = n+t; \\ 0 & \text{if } x+y \ge n+t+1. \end{cases}$$

对于某些参数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, z \in \mathbb{R}_{\ge 0}$。最后，我们将利用垂直直线的总权重为 1 这一条件来求解 α_i。

事实上，考虑直线 $x = n-1$，可得 $\frac{1}{2} - \alpha_{n-1} + \sum_{i=n}^{n+t-1} \frac{1}{2n-1-i} + z = 1$，从而得到

$$\alpha_{n-1} = \sum_{i=n}^{n+t-1} \frac{1}{2n-1-i} + z - \frac{1}{2}. \tag{8}$$

现在比较直线 $x = n-2$ 和 $x = n-1$ 上各点的权重。由于对角线在其内部点处为常数，对于所有 $2 \le y \le n-1$，我们有 $w(n-2,y) = w(n-1,y-1)$。因此，区别在于 $w(n-2,0)$ 和 $w(n-2,1)$ 取代了 $w(n-1,0)$ 和 $w(n-1,n-1)$。于是，

$$\begin{aligned} w(\{x=n-2\}) - w(\{x=n-1\}) &= w(n-2,0) + w(n-2,1) - w(n-1,0) - w(n-1,n-1) \\ &= \tfrac{1}{2} - \alpha_{n-2} + \frac{2\alpha_{n-1}}{n-2} - \left(\tfrac{1}{2} - \alpha_{n-1}\right) - 0, \end{aligned}$$

由于两条垂直直线的权重均为 1，因此得到 $\alpha_{n-2} = \left(1 + \frac{2}{n-2}\right)\alpha_{n-1}$。对每个 $2 \le i \le n-1$，对直线 $x = i-1$ 和 $x = i$ 重复这一论证，便得到以下递推关系：

$$\alpha_{i-1} = \left(1 + \frac{2}{i-1}\right)\alpha_i - z\mathbf{1}_{i=t+1} - \frac{1}{n-i}\mathbf{1}_{i \le t}, \tag{9}$$

其中 $\mathbf{1}_A$ 是事件 A 的指示函数，其定义为

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ is true;} \\ 0 & \text{if } A \text{ is false.} \end{cases}$$

对于初始条件，注意到直线 $x+y=1$ 没有内部点，因此要使其权重为 $\mathbf{1}$，必须有 $\alpha_1 = 0$。将其与 (9) 结合，我们得到：

$$\alpha_i = \frac{1}{i(i+1)} \sum_{j=1}^{\min\{t,i\}} \frac{j(j-1)}{n-j} + \mathbf{1}_{i \geq t+1} \frac{t(t+1)}{i(i+1)} z \quad \text{for all } 2 \leq i \leq n-1. \tag{10}$$

将（10）中的 α_{n-1} 代入（8），即可解出 z：

$$z = \left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{n-j} \left(1 - \frac{j(j-1)}{(n-1)n} \right) \right) \frac{n(n-1)}{n(n-1) - t(t+1)} \tag{11}$$

$$= \frac{(n-1)n\left(\frac{1}{2} - \frac{t(2n+t-1)}{2(n-1)n}\right)}{(n-1)n - t(t+1)}, \tag{12}$$

其中第二个等号是因为、】【

$$\sum_{j=1}^{t} \frac{1}{n-j} \left(1 - \frac{j(j-1)}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{t} (n+j-1) = \frac{t(2n+t-1)}{2n(n-1)}.$$

回顾一下，可行性决定了 $0 \leq z \leq \frac{1}{n-t-1}$。如果 $n > 1$，则当 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{8n^2-8n+1} - 2n + 1\right)$ 时，对于 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{8n^2-8n+1} - 2n - 1\right) \leq t < n-1$，我们有 $z \geq 0$ $z \leq \frac{1}{n-t-1}$。取t为满足 $\frac{1}{2}\left(\sqrt{8n^2-8n+1} - 2n - 1\right) \leq t \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{8n^2-8n+1} - 2n + 1\right)$ 的整数，我们有 $t = (\sqrt{2} - 1 + o(1))(n-1)$。因此，网格的总权重为 $\left(\sqrt{2} + o(1)\right)(\{\mathsf{v15}).$。

我们还没有完全完成，因为还有最后一个条件需要验证——为了确保所有权重都是非负的，我们必须满足 $0 \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2}$ 对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 都成立。由 (9) 式可得：

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i+1}\left(\alpha_{i-1} + \frac{1}{n-i}\right) \qquad \text{if } 2 \leq i \leq t.$$

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i+1}(\alpha_{i-1} + z) \leq \frac{i-1}{i+1}\left(\alpha_{i-1} + \frac{1}{n-i}\right) \qquad \text{if } i = t+1$$

$$\alpha_i = \frac{i-1}{i+1}\alpha_{i-1} < \alpha_{i-1} \qquad \text{if } t+2 \leq i \leq n-1$$

因此，只需证明对所有 $2 \leq i \leq t+1$， $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$。我们将通过对 i 使用归纳法来证明：对于 $1 \leq i \leq t+1$，有 $\alpha_i \leq {}_2{}^{i-1}{}_{(n-i-1)}$。我们知道 $\alpha_1 = 0$，所以基础情形显然成立。令 $i > 1$，并假设归纳假设成立；那么

$$\alpha_i \leq \frac{i-1}{i+1}\left(\alpha_{i-1} + \frac{1}{n-i}\right) \leq \frac{i-1}{i+1}\left(\frac{i-2}{2(n-i)} + \frac{1}{n-i}\right) \leq \frac{i-1}{2(n-i-1)}.$$

我们有 $\frac{}{2}{}^{i-1}{}_{(n-i-1)} \leq \frac{1}{2}$只要 $i \leq n-i$，这成立是因为 $i \leq t+1 = (\sqrt{2}-1+o(1))(n-1$).

因此，我们的赋权确实是可行的，并且 $w(\Gamma_n \setminus \{(0,0)\}) = \left(\sqrt{2} + o(1)\right)(n-1)$。由此可知，仅使用水平、垂直和对角线的任何 k-覆盖，其 Γ_n 大小至少为 $\left(\sqrt{2} + o(1)\right)k(n-1)$。

□

5 结论

在这篇论文中，我们研究了二维实网格的带重数直线覆盖。我们确定了若干情形下覆盖的最小规模，但一些自然且有趣的问题仍未解决，下面将重点介绍这些问题。

在第 3 节中，我们研究了哪些网格上的 Ball–Serra 界是紧的。我们证明，当 n 相对于 m 和 k 足够大时，任意 $n \times m$ 网格上的 Ball–Serra 界都是紧的。此外，我们表明，定理 1.1 给出的 n 阈值对大多数网格都是紧的。然而，可以证明，对于所有网格而言，这个关于 n 的界并非最佳。例如，对于网格 $\Gamma(S_1, S_2)$，其中 $S_1 = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 和 $S_2 = \{-1, 0, 1\}$，以及任意 $k \geq 3$，我们可以证明，Ball–Serra 界在 $n = 2(k-1)$ 时就已经是紧的，而不是定理 1.1 给出的下界 $n \geq 2k-1$。不过，在这个网格中，被省略的点 (0, 0) 不是角点；而与正方形网格的情形一样，考虑 (0, 0) 为角点的网格更为自然。对于这类网格，可以研究 Ball–Serra 界何时成立。

问题 1. 设 Γ 为网格 $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$，且 $k \geq 2$ 为一个整数。相对于 m 和 k，n 必须多大，才能使 $cov(\Gamma) = k(n-1) + (m-1)$?

我们关于标准网格的主要结果，为 $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n)$ 建立了相当好的渐近上下界。若能缩小剩余差距，将会很有意义。

问题 2. $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n)$ 的真实渐近值是多少?

我们倾向于认为 $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n) = (\sqrt{2} + o(1))k(n-1)$。在定理 1.5 中，我们证明了只使用斜率为 0、∞ 和 -1 的直线时，结论成立。然而，对于我们用来证明下界的赋权，可以证明，当 n 较大时，原点附近斜率为 1 的直线（例如 $y = x + 1$）的权重大于 1。我们认为这些是唯一有问题的直线，因此，一个中间步骤可以是验证：若只禁止斜率为 1 的直线，我们的赋权仍然可行。这将意味着，任何规模小于 $\big(\sqrt{2} + o(1)\big)k(n-1)$ 的 k-覆盖 Γ_n 都必须包含许多斜率为 1 的直线。若要证明这种构造不太可能存在，考察仅限于斜率为 0、∞、-1 和 1 的直线时会发生什么，或许会有所帮助。

在迄今为止的工作中，我们观察到，标准网格 Γ_n 所需的覆盖直线数远少于我们考察过的任何其他 $n \times n$ 网格。定理 1.3(b) 给出的下界（以及在证明之后讨论的、针对 (0, 0) 为一个角点的网格所作的改进）不足以确立这一事实，因此我们提出以下问题。

问题 3. 对于任意 $n \times n$ 网格 Γ，若 (0, 0) 是一个角点，是否都有 $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n) \leq \mathrm{cov}_k(\Gamma)$?

更广泛地说，改进定理 1.3(b) 给出的下界将会很有意义，因为我们认为该下界并非最佳可能结果。

另一个可能带来有趣发现的方向，是考察平移后的标准网格，其中被省略的点不在左下角。此时，原点的位置如何影响 $\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的值？例如，$\mathrm{cov}_k(\Gamma)$ 的渐近行为是什么，其中 $\Gamma = \Gamma(\{-\lfloor n/2 \rfloor, \ldots, \lceil n/2 \rceil\}, \{-\lfloor n/2 \rfloor, \ldots, \lceil n/2 \rceil\})$?

虽然我们主要研究了二维实网格，但同样研究高维中的这一问题也是很自然的。例如，在第 3 节中，我们指出，只要其中一条边比其他边长得多，Ball–Serra 界在高维网格中同样可以达到。要使该界得以达到，这条边究竟需要长出多少？第四位作者的学士学位论文中给出了一些这方面的初步结果 [14]。同样，研究标准 d 维网格 $\Gamma_n^{(d)} = \{0, \ldots, n-1\}^d$ 上的 $\mathrm{cov}_k(\Gamma_n^{(d)})$ 将尤其有趣。

最后，虽然我们的所有结果都是针对 $\mathbb{R}$ 上的网格陈述的，但我们所考虑的问题以及总体框架都可以推广到任意域上的网格。我们的一些结果（例如定理 1.1）可以推广到任意域。证明其他域上的类似结果将会很有趣，尤其是证明正特征域上的类似结果。

参考文献

[1] G. N. Alfarano、M. Borello 和 A. Ravagnani，《极小码的三个组合学视角》，*SIAM J. on Discrete Math.* **36 1** 2022 461 489 ( ),

( )，–。[2] N. Alon，《组合零点定理》，*Combin. Probab. Comput.* **8** (1999)，7–29。[3] N. Alon 和 Z. F¨uredi，《用仿射超平面覆盖立方体》，*European J. Combin.* **14**(2)（1993），79–83。[4] S. Ball，《Desargues 仿射空间中的交集》，*European J. Combin.* **21**(3)（2000），441–446。[5] S. Ball 和 O. Serra，《带空点的组合零点定理》，*Combinatorica* **29** (2009)，511–522。[6] A. H. Beiler，《数论中的娱乐：数学女王的娱乐》，纽约：Dover，1996。[7] A. Bishnoi、P. L. Clark、A. Potukuchi 和 J. R. Schmitt，《有限网格中的多项式零点》，*Comb. Prob. Comput.* **27 3** 2018 310 333 ( )

（），–。[8] A. Bishnoi、S. Boyadzhiyska、S. Das 和 T. M´esz´aros，《带重数的子空间覆盖》，arXiv 预印本 arXiv:2101.11947（2021）。[9] A. Blokhuis、A. E. Brouwer 和 T. Sz˝onyi，《覆盖除一点外的所有点》，*J. Algebraic Comb.* **32**（2010），59-66。[10] B. Bosek、J. Grytczuk、G. Gutowski、O. Serra 和 M. Zajac，《图多项式与图的群着色》，*European J. Combin.*，102，（2022），103505。[11] A. E. Brouwer 和 A. Schrijver，《仿射空间的阻塞数》，*J. Combin. Theory Ser. A* **24**(2)（1978），251–253。[12] A. A. Bruen，《有限域上的多项式重数与交集》，*J. Combin. Theory Ser. A* **60 1** 1992 19 33 ( )

（），-。[13] A. Clifton 和 H. Huang，《关于超立方体的几乎 k-覆盖》，*Combinatorica* **40**（2020），511–526。[14] Y. M. den Bakker，《超平面覆盖问题》，学士学位论文，代尔夫特理工大学，（2021）。[15] S. Glock、D. Munh´ n *Research in the* a *Mathematical Sciences* **9 3** 2022 1 20
Correia 和 B. Sudakov，《-皇后完成问题》，，（）（）。–。[16] L. Guth，《组合学中的多项式方法》，第64卷，美国数学学会，（2016）。[17] R. E. Jamison，《用子空间陪集覆盖有限域》，*J. Combin. Theory Ser. A* **22**(3)（1977），253–266。[18] P. Komj´ath，《向量空间的划分》，*Period. Math. Hungar.* **28**（1994），187–193。[19] I. Landjev 和 A. Rousseva，《关于 Desargues 仿射空间中交集的 Bruen 界的尖锐性》，*Designs, codes and cryptography* **72**(3)（2014），551–558。[20] J. Matouˇsek 和 B. G¨artner，《理解和使用线性规划》，Springer 柏林、海德堡（2007）[21] L. Sauermann 和 Y. Wigderson，《在超立方体的大部分点上高阶消失的多项式》，*J. London Math. Soc.* **106 3** 2022 2379 2402 ，t

（）（），-。[22] C. Zanella，《AG(n q 3 q *Discrete*，)中 *Math.* **255** 2002 381 386
的交集以及 PG(，)中双曲二次曲面的刻画》，（），–。