arXiv:2305.00827v1 [cond-mat.str-el] 1 May 2023

分数化为量子多体疤痕的局域投影算符嵌入铺平道路

Keita Omiya[1,2,3]和 Markus Müller[2]

[1]苏黎世联邦理工学院物理系，瑞士苏黎世 *CH-8093*
[2]*Co*凝聚态理论组，*LTC*，*SCD*，保罗·谢勒研究所，瑞士维利根 *PSI CH-5232*
[3]*d*研究所，物理系，洛桑联邦理工学院（*EPFL*），瑞士洛桑 *CH-1015* *nd*

许多具有精确量子多体疤痕（能量等间距、低纠缠本征态构成的塔）的系统，其哈密顿量都可分解为一个塞曼项与若干湮灭疤痕子空间的局域项之和。我们证明，这一统一结构同样适用于一些模型，例如 Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki（AKLT）模型以及里德堡阻塞原子的 PXP 模型，而人们此前认为这些模型不符合这一特征。要将这些模型纳入局域湮灭算符框架，我们需要将其自由度分数化，并扩大相应的希尔伯特空间。将原系统嵌入更大的空间，阐明了其疤痕态的结构并简化了构造过程，也揭示了它们与晶格规范理论之间的密切类比。

I. 引言

具有大量特殊本征态（能量等间距的本征态），即所谓量子多体疤痕（QMBS）的相互作用系统引起了广泛关注，因为它们构成了一类新的遍历性破缺系统。在一般的量子多体系统中，人们认为具有相同能量密度的本征态在热力学上等价，具体而言，局域可观测量的量子力学期望值与本征态无关，并且等于微正则系综中得到的期望值。这种本征态热化 [1–4] 源于有限能量密度、高于基态的状态中，相互作用导致纠缠达到最大可能值。违反本征态热化假说（ETH）的系统相当罕见，但格外引人关注，因为与热化系统不同，它们能够存储信息，并可能保留对初始条件的记忆。这包括可积系统，其中大量守恒量会阻碍系统平衡化至标准吉布斯系综。在多体局域化（MBL）系统中 [5–7], 强无序则会导致准局域守恒量，即所谓局域运动积分（LIOMs） [8–10], , 从而阻碍平衡化。虽然在这些例子中，任意初态下的动力学都是非遍历的，但具有量子多体疤痕的系统表现出一种更微妙的遍历性破缺：这种现象仅出现在希尔伯特空间中极小的一部分区域内，这部分区域能够避开本征态热化。然而，一旦系统的初态位于特殊疤痕态构成的子空间中，就会产生精确的时间周期运动。

最初，一项针对里德堡原子链的实验提出了这种可能性 [11]。尽管该系统既不可积，也不处于多体局域化相，但在系统以某些特定密度波态初始化时，研究人员观察到了异常持久的振荡。如今，人们已普遍认为，这些振荡源于一组能量几乎等间距、纠缠程度较低的特殊态 [12, 13]。此后，对量子多体疤痕的深入研究发现了多种含有疤痕态的非可积模型，包括哈伯德模型 [14–17] 和 Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki（AKLT）模型 [18, 19], , 综述 [20] 中还讨论了更多模型。

除了在特定模型中识别出量子多体疤痕态集合之外， [18, 21–29], 人们还提出了若干方案，以生成更多具有此类性质的模型 [30–37]。现有方案大体分为两类：一类通过在哈密顿量中识别一组“湮灭”项来实现，这些项会湮灭整个疤痕子空间 [30, 33–35, 37]。另一类则基于所谓的谱生成代数（SGA） [14, 31, 38]。两种方法的目标都是将希尔伯特空间分割为动力学解耦子空间。在湮灭算符方法中，局域算符将希尔伯特空间分割为其核及其补空间。随后，可以通过在一个具有等间距谱的简单可积哈密顿量 H_{spec} 上加上一组湮灭项之和，构造出量子多体疤痕哈密顿量 H_{ann}。对于 H_{ann} 中出现的湮灭算符的公共核的补空间，其谱通常呈现混沌，因此 H 是非可积的。然而， H_{spec} 中那些位于被湮灭态子空间内的本征态仍然是 H 的本征态，并保留等间距谱。 H_{ann} 通常可以表示为若干局域项之和，其中每一项都会湮灭疤痕态子空间。我们将这类算符称为局域湮灭算符。它们构成一个代数 [39], , 而疤痕子空间可刻画为这些算符的核的交集。这种构造的一个典型例子是投影算符嵌入（或 Shiraishi-Mori 形式） [30], , 其中哈密顿量由若干项 $P_i h_i P_i$求和而成；其中 P_i是会湮灭疤痕态的局域投影算符，而h_i是任意厄米算符。需要注意，湮灭算符的局域性至关重要。事实上，如果疤痕子空间可以刻画为它们的核的交集，这就表明，该子空间或许能够表示为少量经过适当约束、键维数较低的张量网络态的叠加。

与上述构造不同，SGA 通过非局域“产生”算符 Q^+（它们通常是局域项的广延平移不变和）构造不相连的子空间。这些产生算符必须满足：将其限制在某个子空间 W 上时，它们遵循谐振子的运动方程，即 $[H, Q^+]$ W $=\omega Q^+$W。随后，对 W 中的一个参考本征态多次应用产生算符，即可得到一个能级间距为 ω 的疤痕态塔。所得态类似于含有多个寿命无限长的准粒子激发的激发态。

调和局域湮灭算符方法与谱生成代数之间的关系仍然是一项挑战。例如，已知自旋-1 链的 AKLT 模型承载精确的疤痕态 [19]，这些疤痕态可以通过谱生成代数来理解。此外，Mark 等人发现，AKLT 模型确实可以分解为一个谱生成塞曼项和一个湮灭项 [31]。然而，他们还发现，后者无法表示为局域湮灭算符之和，因此他们得出结论：AKLT 模型应被视为超出局域湮灭算符形式主义的范围，这意味着这些疤痕态可能无法用张量网络进行紧致表征。Moudgalya 和 Motrunich 最近推广了湮灭算符方法，使用了由哈密顿量中的不同局域项生成的键代数这一概念 [38, 39]。通过考察其不可约表示和代数中心（“交换子”），并运用双交换子定理，他们成功刻画了疤痕子空间，并确认在 AKLT 模型中，只有非局域算符能够充当湮灭算符 H_{ann}。非局域湮灭算符可以选为在某些平移下保持不变的局域项的广延求和。然而，由于局域项本身并不是湮灭算符，这些算符求和有时被称为“整体而言”的湮灭算符。

该模型以及其他一些模型中缺少局域湮灭算符，引发了这样一个问题：是否确实存在不同类别的量子多体疤痕。此外，湮灭算符的非局域性也是一个令人不满意的性质，因为它似乎阻碍了用张量网络态高效描述疤痕态。

上述若干问题同样出现在最初的里德堡链中。该系统由所谓的 PXP 模型描述，而要深入理解这一模型仍然面临挑战。有限尺寸对角化表明，PXP 模型具有非热瘢痕态，但这些态仅形成一个近似的塔，其能谱并非严格等间距 [12]。迄今为止，尚未发现这些态的精确形式；除少数特定态外，预计不存在能够描述它们的简单闭式表达式，这与许多具有精确疤痕态的模型形成对比。因此，PXP 模型的热力学极限尚未完全确定，尽管有力证据表明，这些疤痕态在热力学极限下确实违反本征态热化假说 [40]。

PXP 模型的疤痕态已在众多论文中得到研究，主要采用谱生成代数方法 [41, 42]。然而，在这一方法中无法获得它们的波函数，从而阻碍了对物理可观测量进行解析预测。在最近的一篇论文 [43] 中，我们填补了这一空白，表明这些疤痕态在很大程度上可以通过（广义）局域湮灭算符方法来理解。一个关键洞见是，由于其受限希尔伯特空间（相邻原子同时激发数守恒），湮灭算符在原始希尔伯特空间中并非局域的。然而，通过考虑一个扩大的希尔伯特空间并为该模型定义适当的嵌入，可以得到具有局域湮灭算符的瘢痕哈密顿量。

在本文中，我们将展示，这一结构可以推广到若干自旋模型；对于这些模型，迄今尚未发现局域投影嵌入。具体而言，我们将证明，AKLT 模型中的非局部湮灭算符确实可以分解为局部局部 项之和，前提是将模型嵌入适当扩大的希尔伯特空间中。由于将哈密顿量提升到扩大的希尔伯特空间并不存在唯一方式，因此可以利用其中剩余的自由度，使新的哈密顿量按照所需形式分解为 H_{spec} 和局域湮灭算符之和 H_{ann}。我们的方法以统一的方式解释了疤痕态在传统投影嵌入中，以及在具有“整体”湮灭算符的模型中的出现。此外，该方法还确立了其与 PXP 模型中所起机制之间的联系。我们构造疤痕态的方式，与晶格规范理论（LGTs）中出现的结构有许多相似之处。晶格规范理论具有由高斯定律定义的“物理构型空间”，该空间嵌入于包含非物理态的扩展空间中。一旦选定适当的规范，晶格规范理论的基态在扩展空间中通常呈现出非常简单的形式。这与疤痕态在适当扩大的希尔伯特空间中所呈现的更简单形式密切类似。

本文其余部分的组织如下。我们将简要回顾投影算符嵌入，将其作为局域湮灭算符方法的一个例子，并在第II节介绍我们的记号。III节中，我们通过重新审视适当修正的 PXP 哈密顿量的精确疤痕态构造来搭建后续讨论的基础，并比较扩展里德伯约束希尔伯特空间的各种方式。在第 IV节中，我们首先考察自旋-1 XY 模型，该模型包含两种不同的疤痕态塔。我们将表明，其中一类由局域湮灭算符刻画；而另一类，即“二磁振子”态塔，仅具有隐藏的局域湮灭算符，需要扩展希尔伯特空间才能获得局域湮灭算符。在第 V节中，我们将表明，AKLT 模型同样具有非常相似的结构。最后，我们在第 1/2 节讨论守恒畴壁数的模型。在第VI节中，我们将表明，将完整希尔伯特空间视为具有固定畴壁数的各个子空间的扩展，可以自然地理解各种“金字塔形”态塔，并为其与晶格规范理论中出现的拓扑简并之间提供一个有趣的类比。在第 VII节中，我们讨论晶格规范理论去禁闭相中基态的射影构造与第 IV~VI节所讨论的疤痕态对应构造之间的相似性。

II. 局域湮灭算符方法

A. 投影算符嵌入

我们首先回顾投影算符嵌入这一局域湮灭算符方法的简单示例。它将哈密顿量分为两部分 $H = H_{\text{spec}} + H_{\text{ann}}$，其中 H_{ann} 被假设为以下形式的局域湮灭算符之和

$$\begin{aligned} H_{\text{ann}} &= \sum_i \mathcal{P}_i h_i \mathcal{P}_i \\ \left[H_{\text{spec}}, \mathcal{P}_i\right] &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，P_i 是局域投影算符，h_i 是局域厄米算符，二者均由晶格点 i标记。疤痕态 $|\mathrm{S}_n\rangle$属于子空间 $\mathrm{W} = \bigcup_i \ker \mathrm{P}_i$，该子空间定义为 P_i核的交集，即 $\mathrm{P}_i\,|\mathrm{S}_n\rangle = 0$。我们注意到

非平凡交集的存在通常并不显而易见，因为投影算符通常不对易。方程（1）中的第二个条件确保 H_{spec} 保持 $\mathcal{W}$ 不变，因为$\mathcal{P}_i H_{\text{spec}} \mathcal{W} = H_{\text{spec}} \mathcal{P}_i \mathcal{W} = 0$。这意味着，$H_{\text{spec}}$ 中属于$\mathcal{W}$ 的本征态构成一组能量等间距态。

如果我们不要求哈密顿量是厄米的，就可以推广 H_{ann} 的形式。在这种情况下， H_{ann} 的最一般形式为 $H_{\text{ann}} = \sum_i h_i \mathsf{P}_i$ ，其中 h_i 是任意局域算符。我们将看到，在扩大希尔伯特空间时，这种非厄米湮灭算符往往会出现。

B. 希尔伯特空间扩展与量子多体疤痕哈密顿量的提升

在此，我们将证明，PXP 模型中的疤痕态、自旋-1 XY 模型中的双磁振子态以及 AKLT 模型中的疤痕态，都可以用类似的方式理解，即视为一种广义的局域投影算符嵌入，尽管它们原有的疤痕空间并不具备这种结构。对于给定的哈密顿量 H，我们将希尔伯特空间 H 嵌入更大的空间 H 中，即构造一个映射 P ，它将 H~投影到 H 上。在扩展空间中，我们再构造一个~提升后的哈密顿量 $\widetilde{H}$ ，使其满足

$$H\mathsf{P} = \mathsf{P}\widetilde{H}, \tag{2}$$

使其能够分解为一个谱部分与局域湮灭算符之和，

$$\begin{aligned} H\mathsf{P} &= \mathsf{P}\widetilde{H}, \\ \widetilde{H} &= \widetilde{H}_{\text{spec}} + \widetilde{H}_{\text{ann}}. \end{aligned} \tag{3}$$

~ ~提升后的哈密顿量 $\widetilde{H}$ 如今在标准局域湮灭算符范式下允许存在疤痕态 $|\mathsf{S}_n\rangle$。原始模型中相应的疤痕态最终通过~投影得到，即 $|\mathsf{S}_n\rangle = \mathsf{P}\,|\mathsf{S}_n\rangle$。

正如我们将在后续章节中展示的，重要的是~对 H 的选择并不唯一。这种冗余定义了~ ~算符的等价类 A 以及 B 扩展空间中的~ ~ ~ ~我们将它们视为等价，并记作 $A \sim B$，如果$\mathsf{P}A = \mathsf{P}B$~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~成立。显然， $A \sim B$和 $C \sim D$意味着 $A+C \sim B+D$。尽管~在扩展空间中通常存在一个“自然的”提升后的哈密顿量 H_{nat}，但它通常不具有所需的分解形式。~ ~因此，我们需要寻找一个合适的等价算符 $H \sim H_{\text{nat}}$，使其具有分解式（3）。

从另一种角度来看，可以将P 视为从扩展空间中的算符到原始空间中的算符的映射。因此，我们应当寻找此映射的一个合适原像，使其满足式（3），可形式化地写为 $\widetilde{H} \in \mathsf{P}^{-1} H$。

下面我们将展示如何显式构造P ~和 H，分别用于 PXP 模型中的疤痕态、自旋-1 XY 模型中的双磁振子疤痕态以及 AKLT 模型中的疤痕态。最重要的是，这些模型所得的湮灭算符在扩展希尔伯特空间中都是局域的。换言之，这些模型都可以被写成广义投影算符嵌入的形式，即

$$H\mathsf{P} = \mathsf{P}\left(\widetilde{H}_{\text{spec}} + \sum_i \widetilde{h}_i \widetilde{P}_i\right), \tag{4}$$

~ ~其中 h_i 是某个局域算符，而 P_i 是~扩大的希尔伯特空间中的局域投影算符。疤痕态 $|S_n\rangle$ 会被~ ~湮灭 P_i 当 $\forall i$时 H_{spec} 是一个简单的塞曼项~，它与 P_i对易，从而满足投影算符嵌入的要求（公式（1））。我们通过希尔伯特空间扩展进行的构造，为使湮灭算符实现局域化提供了一种方法，即使对于那些曾被认为其疤痕子空间只能由长程湮灭算符处理的模型也是如此。

III. PXP 模型

我们接下来 [43]回顾 PXP 模型，将其作为广义局域投影算符嵌入的一个具体示例；这种嵌入基于将里德伯受限希尔伯特空间映射到一个维数更大的空间中的映射。

PXP 模型是一种定义为如下形式的一维自旋-1/2 模型。

$$H_{\text{PXP}} = \sum_{i \in \Lambda} P_{i-1} \sigma_i^x P_{i+1}, \tag{5}$$

其中， $P := |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ 是向下自旋的投影算符，而σ^α（$\alpha = x, y, z$）是泡利矩阵。我们假设格点数 $N := |\Lambda|$ 为偶数，并满足周期性边界条件，$i + N \equiv i$。

A. 涌现的自旋-1表述

该模型与里德伯投影算符 $P_{\text{Ryd}} := \prod_{i \in \Lambda} (1 - |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|)_{i,i+1}$ 对易，该投影算符禁止相邻自旋同时激发。在满足这一约束的子空间 R 中，两个相邻自旋仅存在三种可能的构型，即（$|+\rangle \equiv |\downarrow\uparrow\rangle$、 $|-\rangle \equiv |\uparrow\downarrow\rangle$和$|0\rangle \equiv |\downarrow\downarrow\rangle$）。选择链的一种二聚化方式后，可以将这些态与赝自旋-1 的一组基底对应起来。在这一基底中， H_{PXP} 具有如下形式

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{\text{PXP}} &:= \sqrt{2} \sum_{b \in \Lambda_{\text{B}}} S_b^x + \widetilde{H}', \\ \widetilde{H}' &:= -\sum_{b \in \Lambda_{\text{B}}} |+,-\rangle \left(\langle +,0| + \langle 0,-| \right)_{b,b+1} + h.c. \\ &\equiv -\widetilde{O}' - \widetilde{O}'^{\dagger}, \\ \widetilde{O}' &:= \sum_b |+,-\rangle \left(\langle +,0| + \langle 0,-| \right)_{b,b+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中， $\Lambda_{\text{B}} = \{1, \cdots, N_b \equiv N/2\}$ 表示二聚体（或赝块自旋）晶格， S^x 为其对应的自旋-1 算符。自旋-1 空间中的里德伯投影算符可表示为$P_{\text{Ryd}} := \prod_{b \in \Lambda_{\text{B}}} (1 - |+,-\rangle\langle +,-|)_{b,b+1}$。因此，完整的自旋-1 空间充当一个扩大的希尔伯特空间，其中里德伯流形 R 是一个子流形。

通过我们的构造，上述自旋-1模型与原始PXP哈密顿量（限制在R上）满足以下关系——

关系，

$$H_{\mathrm{PXP}}\mathsf{P}_{\mathrm{Ryd}} = \mathsf{P}_{\mathrm{Ryd}}\widetilde{H}_{\mathrm{PXP}}$$
$$\mathsf{P}_{\mathrm{Ryd}} \coloneqq \left[\prod_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} \left(|{\downarrow\uparrow}\rangle\langle{+}| + |{\uparrow\downarrow}\rangle\langle{-}| + |{\downarrow\downarrow}\rangle\langle{0}|\right)_b\right] P_{\mathrm{Ryd}}, \tag{7}$$

其中$\mathsf{P}_{\mathrm{Ryd}}$是从完整自旋-1空间到R的 Gutzwiller 型投影。关于记号，$|{\downarrow\uparrow}\rangle\langle{+}|_b$ 应读作$\equiv |{\downarrow\uparrow}\rangle_{2b-1,\ 2b}\langle{+}|_b$，第一对指标$(2b-1,\ 2b)$指原始链上的格点，与二聚体指标 b相对。

我们强调，(6）中并非一个局域湮灭算符的和，甚至不是近似的和。然而，由于$\mathsf{P}_{\mathrm{Ryd}}O' = 0$，修改后的提升后哈密顿量 $H_{\mathrm{PXP}} \to H_{\mathrm{PXP}} + O'$ 仍然满足式（7）。

在这个修改后的哈密顿量中，添加到塞曼项上的部分，即 $\widetilde{H}' + \widetilde{O}' \equiv -\widetilde{O}'^{\dagger}$，结果发现它近似由局域湮灭算符组成。为了将其转化为精确陈述，可以进一步在原哈密顿量中加入以下非厄米微扰（参见 [43]）

$$\delta H_{\mathrm{NH}} \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} \left(|{+,0}\rangle + |{0,-}\rangle\right)\langle{0,0}|_{b,b+1} \tag{8}$$

它与里德伯投影算符对易。将微扰后的哈密顿量 $H+\delta H_{\mathrm{NH}}$ 提升到扩大的希尔伯特空间后，可以将其分解为塞曼项（提供等间距谱）和一系列精确的局域湮灭算符之和，

$$\widetilde{H}_{\mathrm{PXP}} + \widetilde{O}' + \delta H_{\mathrm{NH}} = \sqrt{2}\sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} S_b^x + \sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} h_b\left(1 - P_{b,b+1}^{S=2}\right). \tag{9}$$

这里，$P_{b,\ b+1}^{S=2}$ 是投影到总自旋为 2 的扇区上的二体投影算符。疤痕子空间被所有这些投影算符湮灭，它就是最大总自旋空间；这个受扰动的 PXP 模型的精确疤痕本征态可写为$|\mathsf{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle \equiv \mathsf{P}_{\text{里德伯}}\ |\widetilde{S}_n\rangle$ 其中，$|\widetilde{S}_n\rangle$ 是最大自旋扇区内总 S^x算符的一个本征态。

这种构造很有吸引力，因为它清晰地呈现了这样一种图像：PXP 模型的疤痕态源于一个进动的大自旋。不过请注意，由于采用了二聚化，提升后的哈密顿量 H_{PXP} 和母态$|S_n\rangle$ 都打破了平移对称性（平移一个自旋-1/2 格点后即不再对称）。然而，将其投影回里德伯流形后，物理疤痕态 $|\mathsf{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$ $(= \mathsf{P}_{\text{里德伯}}\,|S_n\rangle)$与二聚化的选择无关，并且具有平移不变性，正如下文将要说明的那样。

B. 平移不变表述

为了理解量子多体疤痕态的平移不变性 $|\mathcal{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$，我们现在给出一种等价的构造方式，不过该方式基于哈密顿量的平移不变提升，其形式同样为式（3）。但这种构造无法像之前那样自然地从大自旋角度进行解释。

我们考虑非厄米微扰 PXP 模型

$$H_{\mathrm{nH-PXP}} \coloneqq H_{\mathrm{PXP}} + \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda} P_{i-1}\sigma_i^+ P_{i+1}\left(P_{i-2} + P_{i+2}\right), \tag{10}$$

其中 $\sigma^+ \coloneqq |{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}|$ 是升算符，第二项表示 δH_{NH}（方程（8））对平移取平均。（由于疤痕态具有平移不变性，它们也是平移对称化哈密顿量的精确本征态）。

$H_{\mathrm{nH-PXP}}$ 也与里德伯投影算符对易，并满足与方程（6、7）相似的方程，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{nH-PXP}}P_{\mathrm{Ryd}} &= P_{\mathrm{Ryd}}\left(\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^x + H'_{\mathrm{nH}}\right), \\ H'_{\mathrm{nH}} &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\left(n_{i-1}\sigma_i^x + \sigma_i^x n_{i+1} + P_{i-1}\sigma_i^x n_{i+1} + n_{i-1}\sigma_i^x P_{i+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda} P_{i-1}\sigma_i^+ P_{i+1}\left(P_{i-2} + P_{i+2}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $n \coloneqq |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}| = 1 - P$ 是投影到上自旋的投影算符。现在我们寻找一个与 H'_{nH}等价的算符，该算符由局域湮灭算符组成。利用恒等式 $n_{i-1}\sigma_i^+ \sim_{\mathrm{Ryd}} \sigma_i^+ n_{i+1} \sim_{\mathrm{Ryd}} 0$ 和 $\sigma_i^+ P_{i+1} \sim_{\mathrm{Ryd}} P_{i-1}\sigma_i^+ \sim_{\mathrm{Ryd}} \sigma_i^+$（其中等价关系为 $A \sim_{\mathrm{Ryd}} B \Leftrightarrow P_{\mathrm{Ryd}}A = P_{\mathrm{Ryd}}B$），我们得到

$$\begin{aligned} H'_{\mathrm{nH}} &\sim_{\mathrm{Ryd}} -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\left(n_{i-1}\sigma_i^- + \sigma_i^- n_{i+1} + P_{i-1}\sigma_i^- n_{i+1} + n_{i-1}\sigma_i^- P_{i+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^+ P_{i+1}P_{i+2} + P_{i-2}P_{i-1}\sigma_i^+, \end{aligned} \tag{12}$$

经过对三格点项的重新整理后，得到等价的算符

$$\begin{aligned} H'_{\mathrm{nH}} &\sim_{\mathrm{Ryd}} \widetilde{H}'_{\mathrm{nH}} \\ \widetilde{H}'_{\mathrm{nH}} &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\left(|{\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow}\rangle\right)\langle{\uparrow\uparrow}|_{i,i+1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}|{\downarrow\downarrow\uparrow}\rangle\left(\langle{\downarrow\uparrow\uparrow}| - \frac{1}{2}\langle{\downarrow\downarrow\downarrow}|\right)_{i-1,i,i+1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}|{\uparrow\downarrow\downarrow}\rangle\left(\langle{\uparrow\uparrow\downarrow}| - \frac{1}{2}\langle{\downarrow\downarrow\downarrow}|\right)_{i-1,i,i+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

注意，三格点项的左矢部分包含因子 $\langle{\uparrow\uparrow}| - \frac{1}{2}\langle{\downarrow\downarrow}|$。为了使第一行呈现类似的形式，我们希望加上并减去一项 $\frac{1}{4}\sum_i\left(|{\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow}\rangle\right)\langle{\downarrow\downarrow}|_{i,i+1} = \frac{1}{4}\sum_i(\sigma_i^+P_{i+1} + P_{i-1}\sigma_i^+) \sim_{\mathrm{Ryd}} \sum_i \sigma_i^+/2$。向塞曼项中加入相应的中性项后，我们得到等价关系

$$\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i^x \sim_{\mathrm{Ryd}} \sum_{i\in\Lambda}\left(\sigma_i^x - \frac{1}{2}\sigma_i^+\right) + \frac{1}{4}\left(|{\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow}\rangle\right)\langle{\downarrow\downarrow}|_{i,i+1}, \tag{14}$$

将式（13、14）合并起来，最终得到

$$
\begin{aligned}
&H_{\mathrm{nH-PXP}} \sim_{\mathrm{Ryd}} H'_{\mathrm{spec}} + H'_{\mathrm{ann}} \\
&H'_{\mathrm{spec}} = \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i^x - \frac{1}{2}\sigma_i^+ \equiv \sum_{i\in\Lambda} W_i \\
&H'_{\mathrm{ann}} = -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)\left(\langle\uparrow\uparrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow|\right)_{i,i+1} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda} |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\left(\langle\downarrow\uparrow\uparrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow|\right)_{i-1,i,i+1} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda} |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow|\right)_{i-1,i,i+1}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

现在我们可以构造疤痕态了。回想一下，我们分析的是一个经过修正的 PXP 哈密顿量，其调整旨在确保其中包含疤痕态。因此，我们的任务只是通过逆向工程确定疤痕子空间。自然可以预期，疤痕子空间会被所有局域项 $\langle\uparrow\uparrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow|$ 湮灭，并且哈密顿量的剩余部分 $H'_{\mathrm{spec}} = \sum_i W_i$ 将构成谱生成部分。

为证明确实如此，我们首先对 H'_{spec} 进行对角化。单点算符 W 的本征矢为

$$
\begin{aligned}
W|\pm\rangle &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\pm\rangle \\
|\pm\rangle &:= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

注意，$|\pm\rangle$ 彼此并不正交，因为 W 不是厄米算符。我们还定义相应的对偶矢量 $\langle\pm'|$，要求 $\langle\sigma'|\tau\rangle = \delta_{\sigma,\tau}$ 且 $\sigma,\ \tau = \pm$。

现在我们声称，上文给出的提升后哈密顿量的量子多体疤痕态 $|\widetilde{\mathrm{S}}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$ 具有如下简单形式

$$
|\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}'_n}\left(\sum_{i\in\Lambda}(-1)^i |+\rangle\langle -'|_i\right)^n \bigotimes_{j\in\Lambda} |-\rangle_j , \tag{17}
$$

这可以看作是在所有格点均处于 $|-\rangle$ 态的完全位点对称参考态之上添加的 n 激发（动量为 π）。激发是指将一个局域 $|-\rangle$ 态提升至 $|+\rangle$，并以交替变化的空间振幅同时作用于所有格点。

很容易看出，这些态是 H'_{spec} 的本征态，其本征值为 $(-N/2+n)\sqrt{2}$。现在我们进一步证明，它们确实都被构成 H'_{ann} 的局域算符湮灭。证明如下。由于激发算符具有交替结构，$|\mathrm{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$ 在格点 i，$i+1$ 上可能出现的局域构型只能是 $|\phi_-\rangle := |-,\ -\rangle$，$|\phi_0\rangle := (|+,\ -\rangle - |-,\ +\rangle)/\sqrt{2}$，或 $|\phi_+\rangle := |+,\ +\rangle$。这些构型都会被 H'_{ann} 的左矢部分湮灭。事实上，后者经过设计，包含因子 $\langle\uparrow\uparrow| - 1/2\langle\downarrow\downarrow| \propto \langle +', -'| + \langle -', +'| \equiv \langle X'|$，它与 $|\phi_{+,\ 0,\ -}\rangle$ 正交，因而会湮灭 $|\widetilde{\mathrm{S}}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$。

注意，上述过程给出了在无约束空间中构造修正 PXP 哈密顿量的投影算符嵌入形式的明确方法，

$$
H_{\mathrm{nH-PXP}} P_{\mathrm{Ryd}} = P_{\mathrm{Ryd}}\left(\sum_{i\in\Lambda} W_i + \sum_{i\in\Lambda} h_i\, |X\rangle\langle X'|_{i,i+1}\right) \tag{18}
$$

其中 h_i 是某个局域算符。注意，现在疤痕态显然在单格点平移下保持不变，因为空间扩展和哈密顿量的提升保留了平移对称性。这也保证了其所有本征态及其里德堡投影同样具有平移不变性。

C. 两种表述之间的关系

我们已经证明，量子多体疤痕态 $|\mathrm{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$ 可以通过两种看似不同的构造得到：一种基于虚构的自旋-1 提升哈密顿量，另一种基于作用于自旋-1/2 无约束希尔伯特空间的（非厄米）自旋-1/2 哈密顿量。现在让我们讨论它们之间的关系。

首先注意，自旋-1 空间自然嵌入自旋-1/2 无约束空间中。接下来可以验证，忽略湮灭算符后，自旋-1 塞曼项（$\sqrt{2}\sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} S_b^x$）等价于自旋-1/2 空间中的 H'_{spec}（$= \sum_{i\in\Lambda} W_i$）。事实上，直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} S_b^x = \sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} (|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|)_{2b-1,2b} + h.c. \\
&\sim_{\mathrm{Ryd}} \sum_{i\in\Lambda} W_i - \sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)\left(\langle\uparrow\uparrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow|\right)_{2b-1,2b},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

它是 H'_{spec} 与局域湮灭算符之和。自旋-1 空间中的湮灭算符部分（$-\widetilde{O}'^{\dagger} + \delta H_{\mathrm{NH}}$）可改写为自旋-1/2 空间中的局域湮灭算符之和，

$$
\begin{aligned}
&-\widetilde{O}'^{\dagger} + \delta H_{\mathrm{NH}} \\
&= -\sum_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} (|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)\left(\langle\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow| - \frac{1}{2}\langle\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow|\right)_{2b-1;2b+2},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中，bra 部分同样包含一个局域湮灭算符因子。

自旋-1 空间中的母疤痕态 $|S_n\rangle$，即最大总自旋态，是通过仅施加一半里德堡约束，从无约束的自旋-1/2 空间中的母态 $|\mathrm{S}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle$ 得到的，以便在二聚体上实现自旋-1 自由度，

$$
|S_n\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}'_n}\prod_{b\in\Lambda_{\mathrm{B}}} (1 - |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow|)_{2b-1,2b}\ |\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{PXP}}\rangle . \tag{21}
$$

我们指出，PXP 模型的自旋-1 提升并不总是等同于自旋-1/2 提升。最重要的区别在于，自旋-1/2 提升可应用于任意二分晶格上的 PXP

模型，而自旋-1 提升则要求晶格具有二聚体覆盖。许多里德伯系统都无法满足这一条件，包括真实的 51原子链实验装置 [11]。因此，尽管自旋-1 提升给出了一个明确的构造，展示了多篇论文（例如，参考文献 [41]）中提到的“大型进动自旋进动”，但自旋-1/2 提升似乎更具基础性，能够捕捉一般 PXP 模型中疤痕态的隐藏结构。

IV. 自旋-1 XY 模型

一个在原始希尔伯特空间中具有非局域湮灭算符的疤痕态系统实例，是含有自旋 $S = 1$ 的 XY 模型。我们用 $|\pm\rangle$ 和 $|0\rangle$ 表示对角化 S^z 的 $S = 1$ 基，它们分别对应本征值 ±1 和 0。尽管该系统在任意维度的超立方晶格上都具有量子多体疤痕态 [21],，为简便起见，我们仅考虑一维情形。不过，将其推广到更高维度也很直接。其哈密顿量为

$$H_{\mathrm{XY}} = J\sum_{i\in\Lambda}\left(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y\right) + \sum_{i\in\Lambda}\left(hS_i^z + D\left(S_i^z\right)^2\right), \quad (22)$$

其中，$\Lambda \coloneqq \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ 是由格点构成的线性链，而 $S^\alpha(\alpha = x,\ y,\ z)$ 是自旋-1 算符。这里我们假设采用周期性边界条件（PBC），令 i 与 $i+N$ 等同，不过以下论证对开放边界条件（OBC）同样成立。

A. π-磁振子态

已有研究表明，[21] 可以以铁磁态为参考本征态，通过对其作用 $|\mathcal{S}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$ 次产生算符来构造疤痕态

$$|\mathcal{S}_0^{\mathrm{XY}}\rangle \coloneqq \bigotimes_{i\in\Lambda}|-\rangle_i \quad (23)$$

也就是说，作为参考本征态，并对其作用 n 次产生算符

$$Q_{\mathrm{XY}}^{+} \coloneqq \sum_{i\in\Lambda}(-1)^i\left(S_i^+\right)^2, \quad (24)$$

即，

$$|\mathcal{S}_n^{\mathrm{XY}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_n}(Q_{\mathrm{XY}}^{+})^n\,|\mathcal{S}_0^{\mathrm{XY}}\rangle\,. \quad (25)$$

人们还知道（下文将予以证明），$S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y$会湮灭所有这些态 $|\mathcal{S}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$。因此，式（25）中的第一项是局域湮灭算符之和，起到H_{ann}的作用，而单格点项（塞曼场和单离子各向异性）起到 H_{spec}的作用。这些疤痕态可由标准投影算符嵌入涵盖。

为使论文内容完整，我们在此通过构造局域投影算符嵌入，给出这一结论的一个简单证明。不过，我们注意到，这些疤痕态已经得到广泛研究，我们并不声称这一证明具有任何新颖性。

由于不难看出，式（25）中的态是式（22）中第二个纵向部分的本征态，因此只需证明各个 XY 项会在局域上湮灭这些态。

在疤痕态（25）中，两个格点的可能局域构型 $i,\ i+1$ 要么是 $|\phi_-\rangle \coloneqq |-,\ -\rangle,\ |\phi_0\rangle \coloneqq (\ |+,\ -\rangle \dashv |-,\ +\rangle)/\sqrt{2}$，要么是 $|\phi_+\rangle \coloneqq |+,\ +\rangle$。因此，我们定义双位点投影算符如下：

$$P_{i,i+1}^{\mathrm{XY}} \coloneqq (\ |\phi_-\rangle\langle\phi_-| + |\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_+\rangle\langle\phi_+|)_{i,i+1}\,. \quad (26)$$

现在很容易验证，与格点 $i,\ i+1$ 相关联的 XY 项会被 $P_{i,\ i+1}^{\mathrm{XY}}$ 湮灭，

$$\begin{aligned}&\left(S_i^x S_{i+1}^i + S_i^y S_{i+1}^y\right)P_{i,i+1}^{\mathrm{XY}}\\ &= P_{i,i+1}^{\mathrm{XY}}\left(S_i^x S_{i+1}^i + S_i^y S_{i+1}^y\right) = 0.\end{aligned} \quad (27)$$

事实上，XY 项会湮灭 $|\phi_\pm\rangle$，它们是满足 $S_{\mathrm{tot}}^z = \pm2$ 的构型。此外，将 XY 项限制在 $S_{\mathrm{tot}}^z = 0$ 扇区内，其作用为 $|0,\ 0\rangle($ $\langle+,-|+\langle-,+|)+h_{\circ}$ $c_{\circ}$，可见它会湮灭 $\phi_{0\circ}$

由上文可知，XY模型可以写成投影嵌入形式

$$H_{\mathrm{XY}} = \sum_{i\in\Lambda}\left(1 - P_{i,i+1}^{\mathrm{XY}}\right)h_i\left(1 - P_{i,i+1}^{\mathrm{XY}}\right) + H_{\mathrm{spec}}, \quad (28)$$

其中 h_i是作用于格点 i、$i+1$和H_{spec} 上的二体算符，是式（22）中的第二项。

我们可以将其视为第IIB节中所述形式的一种特殊情况，只需令P 为恒等算符（从而实现希尔伯特空间到其自身的平凡嵌入）。

B. 双磁振子态

上述XY模型还存在第二座疤痕态塔，即Schecter和Iadecola通过数值研究发现的所谓双磁振子态 [21] 。Chattopadhyay等人，[44]随后证明，只要单离子各向异性为零，它们确实是精确本征态$D = 0$。不过，它们无法用局域湮灭算符来刻画，因此是希尔伯特空间扩展形式的一个有趣例子。

相应的疤痕本征态已被明确构造出来 [44]，其形式为

$$\left|\mathcal{B}_n^{\mathrm{XY}}\right\rangle = \sum_{\{i_k\}_{k=1}^n\subset\Lambda}(-1)^{\sum_{k=1}^n i_k}\prod_{k=1}^{n}S_{i_k}^{+}S_{i_k+1}^{+}\bigotimes_{i\in\Lambda}|-\rangle_i\,, \quad (29)$$

这表明可以将其解释为铁磁参考态之上的双磁振子激发。求和遍及所有由互不相同的格点构成的有序 n 元组 i_k（这包括出现 $i_{k+1} = i_k + 1$ 的可能性）。下文将简要证明这些态是精确本征态。

我们遵循参考文献 [44] 中的步骤，证明 $|\mathcal{B}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$ 是一个本征态。为此，我们首先将每个自旋-1 分解为两个组成自旋-1/2，最后再将它们对称化。令 $\Lambda_{\mathrm{frac}} \coloneqq \{1, \cdots, 2N\}$ 为相应的自旋- $2N1/1/2$晶格。我们定义映射 F_i^{XY}: $\mathbb{C}^{2\otimes 2} \to \mathbb{C}^3$ 对格点 i的作用如下

$$\begin{aligned} F_i^{\mathrm{XY}} \coloneqq\ & |+\rangle_i \langle\uparrow\uparrow|_{2i-1,2i} + |-\rangle_i \langle\downarrow\downarrow|_{2i-1,2i} \\ & + |0\rangle_i \left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right)_{2i-1,2i}. \end{aligned} \tag{30}$$

定义一个全局映射，将原始自旋-1 空间与（分数化的）自旋-1/2 联系起来：$\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} \coloneqq \prod_{i\in\Lambda} F_i^{\mathrm{XY}}$。注意，映射 F_i^{XY} 并非保范，除非在与 $S^z = 0$ 正交的子空间中。因此，将 F_i^{XY}表示为保范映射 F_i^{VBS}与后续映射G_i 的乘积会很有用；后者在自然自旋-1基底中为对角形式，如下所示：

$$\begin{aligned} F_i^{\mathrm{XY}} &= G_i F_i^{\mathrm{VBS}}, \\ G_i &\coloneqq \left(|+\rangle\langle+| + \sqrt{2}\,|0\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle-|\right)_i, \\ F_i^{\mathrm{VBS}} &\coloneqq |+\rangle_i \langle\uparrow\uparrow|_{2i-1,2i} + |-\rangle_i \langle\downarrow\downarrow|_{2i-1,2i} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_i \left(\langle\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow|\right)_{2i-1,2i}. \end{aligned} \tag{31}$$

算符 F_i^{VBS}实现了将一个自旋-1 自然嵌入到两个分数化自旋所构成空间中的映射。我们进一步定义 $G \coloneqq \prod_{i\in\Lambda} G_i$ 和 $\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} \coloneqq \prod_{i\in\Lambda} F_i^{\mathrm{VBS}}$，使得 P_{XY} 是 G 与 $\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}$ ($\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = G\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}$)的乘积。利用映射 P_{XY}，双磁振子态的表达式可简化为

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_n^{\mathrm{XY}}\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_n} \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} |\widetilde{\mathcal{B}}_n^{\mathrm{XY}}\rangle \\ |\widetilde{\mathcal{B}}_n^{\mathrm{XY}}\rangle &\coloneqq \left(\sum_{i\in\Lambda} (-1)^i |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|_{2i,2i+1}\right)^n \bigotimes_{j\in\Lambda_{\mathrm{frac}}} |\downarrow\rangle_j . \end{aligned} \tag{32}$$

现在让我们在分数自旋-1/2空间中寻找相应的哈密顿量。由于$\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}$ 具有非平凡的核，分数自旋-1/2空间中~存在多个算符 O ~满足 $O\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}}O$。然而，对于~ O，有一种自然的选择。事实上，对于任意算符值函数 f，都有：

$$f(\{\boldsymbol{S}\}_i)\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} = \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} f(\{\boldsymbol{s}_{2i-1} + \boldsymbol{s}_{2i}\}_i), \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{S}_i$ 在左侧（LHS）是一个自旋-1 算符，而 $\boldsymbol{s}_j$ 在右侧（RHS）是自旋-1/2 算符。将哈密顿量代入式（33），并以 $f(\{\boldsymbol{S}\}_i)$ 代替，即可在分数自旋-1/2空间中定义一个自然提升后的哈密顿量。对于该扩展空间中的算符，我们再次定义一个~ ~ ~ ~等价关系 $A \sim_{\mathrm{XY}} B$，条件是满足 $\mathsf{P}_{\mathrm{XY}}A = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}}B$。

现在我们简要概述 $|\mathcal{B}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$ 是 H_{XY} 的本征态的证明，详细内容见附录 A。塞曼项自然地映射到分数化自旋-1/2 空间，

$$\left(\sum_{i\in\Lambda} S_i^z\right)\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} \left(\sum_{i\in\Lambda} \left(s_{2i-1}^z + s_{2i}^z\right)\right) \tag{34}$$

$$= \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} H_{\mathrm{spec}}, \tag{35}$$

由此可得双磁振子态的能量。事实上，我们现在将证明，XY项会在局域层面湮灭分数自旋-1/2空间中的量子多体疤痕态。由式（32）可见，量子多体疤痕态的局域构型 $|\widetilde{\mathcal{B}}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$ 位于格点$2i$ 和 $2i+1$ 上时，只可能是 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 或 $|\downarrow\downarrow\rangle$。我们定义投影到由这两个态张成的子空间上的双位点投影算符，

$$P_{2i,2i+1}^{2-\mathrm{body}} \coloneqq \left(|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\right)_{2i,2i+1}. \tag{36}$$

此外，连续四个格点 $2i \sim 2i+3$ 上唯一可能的局域构型是 $|\phi_+\rangle \coloneqq |\uparrow\uparrow\uparrow\updownarrow\rangle$, $|\phi_0\rangle \coloneqq (|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ 和 $|\phi_-\rangle \coloneqq |\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$。据此，我们定义相应的四格点投影算符，

$$P_{2i;2i+3}^{4-\mathrm{body}} \coloneqq \left(|\phi_+\rangle\langle\phi_+| + |\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_-\rangle\langle\phi_-|\right)_{2i;2i+3}. \tag{37}$$

为了提升 XY 相的推开度，令重直二聚化将位算符为 奶 manhcal{T}_2=\sum_{j}\boldsymbol{\sigma}_{j}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{j+1}. 以适当方式处理 m 更为复杂。在附录中，A 我们展示了它等价于一个表达式 on

$$\sum_{i\in\Lambda} \left(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y\right)\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} \left(\sum_{i\in\Lambda} \widetilde{h}_{i,i+1} P_{2i,2i+1}^{2-\mathrm{body}} P_{2i+2,2i+3}^{2-\mathrm{body}}\right) + \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} \left(\sum_{i\in\Lambda} \widetilde{h}'_{i,i+1} \left(1 - P_{2i,2i+1}^{2-\mathrm{body}} P_{2i+2,2i+3}^{2-\mathrm{body}}\right)\right), \tag{38}$$

最后一项湮灭疤痕态 $|\widetilde{\mathrm{B}}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$。利用二体投影算符和 P_{XY} 的性质，可以进一步~选择 $h_{i,\ i+1}$ 使其等价于以下算符，

$$\widetilde{h}_{i,i+1} \sim_{\mathrm{XY}} \left(|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|\right)_{2i;2i+3}. \tag{39}$$

该算符也会湮灭疤痕态，因为其 bra 部分与所有可能的四格点态 $|\phi_\pm\rangle$ 和 $|\phi_0\rangle$ 正交。因此，XY项会湮灭任何在局部可表示为 $|\phi_\pm\rangle$ 和 $|\phi_0\rangle$ 线性组合的态。这意味着，提升到分数自旋-1/2空间后的哈密顿量可以表示为局部投影算符嵌入形式，

$$H_{\mathrm{XY}}\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}} \left(\sum_i \widetilde{h}''_i \left(1 - P_{2i;2i+3}^{4-\mathrm{body}}\right) + H_{\mathrm{spec}}\right), \tag{40}$$

~其中 h'' 是一个四体算符，H_{spec} 是塞曼项。该过程的核心在于，提升后的哈密顿量现在由一系列局域湮灭算符组成，而疤痕空间可以表征为它们的公共核。等价地说，它是所有四体投影算符共同保持不变的空间。

V. 阿弗莱克-肯尼迪-利布-塔萨基模型

第二个重要例子是 AKLT 模型。在该模型中，提升到一个扩大的希尔伯特空间使得能够通过局域湮灭算符来刻画疤痕空间。其哈密顿量定义为

$$H_{\mathrm{AKLT}} = \sum_{i\in\Lambda}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}\right)^2\right), \tag{41}$$

其中，$\Lambda = \{1、2、\cdots、N\}$仍表示一条采用周期性边界条件（PBC）的格点链，而 $S^\alpha(\alpha = x、y、z)$ 是自旋-1 算符的分量。注意，哈密顿量可以改写为投影算符之和，即 $H_{\mathrm{AKLT}} = \sum_{i\in\Lambda} P^{S=2}_{i,\,i+1}$ 其中 $P^{S=2}_{i,\,i+1}$ 投影到总自旋的扇区 $S_{\mathrm{tot}} = 2$，该总自旋由格点 i 和 $i+1$ 处的两个自旋组成。

AKLT 模型的疤痕态 $|\mathcal{S}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle$ 通过施加产生算符得到 $Q^+_{\mathrm{AKLT}} := \sum_{i\in\Lambda}(-1)^i(S^+_i)^2$ 作用于 AKLT 基态 $|\Phi_{\mathrm{VBS}}\rangle$ [45]，

$$|\mathcal{S}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_n}\left(Q_{\mathrm{AKLT}^+}\right)^n\,|\Phi_{\mathrm{VBS}}\rangle\,. \tag{42}$$

$|\Phi_{\mathrm{VBS}}\rangle$ 是一种价键固体，即由自旋-1/2 分数化组分构成的二聚体单态乘积，

$$\begin{aligned}|\Phi_{\mathrm{VBS}}\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\bigotimes_{i\in\Lambda}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)_{2i,2i+1}\\ &\equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\bigotimes_{i\in\Lambda}|\Downarrow\rangle_{2i,2i+1} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\,|\widetilde{\Phi}_{\mathrm{VBS}}\rangle\,,\end{aligned} \tag{43}$$

这里我们将单态 $\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)/\sqrt{2}$ 记作 $|\Downarrow\rangle$。回顾一下，$\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} = \prod_{i\in\Lambda} F^{\mathrm{VBS}}_i$是式（30）中引入的映射，它对应于对标签为 $2i-1$ 和 $2i$ 的两个自旋-1/2 进行标准对称化，以投影到它们的自旋-1 子空间。

与 XY 模型中的双磁振子疤痕态非常相似，我们可以在分数自旋-1/2空间中将量子多体疤痕态表示如下，

$$|\mathcal{S}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle = \frac{1}{\widetilde{\mathcal{N}}_n}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\left(\sum_{i\in\Lambda}(-1)^i\,|\Uparrow\!\!\downarrow\Downarrow|_{2i,2i+1}\otimes|\Uparrow\!\!\downarrow\Downarrow|_{2i+2,2i+3}\right)^n|\widetilde{\Phi}_{\mathrm{VBS}}\rangle \equiv \frac{1}{\widetilde{\mathcal{N}}_n}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\,|\widetilde{\mathcal{S}}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle\,, \tag{44}$$

其中 $|\Uparrow\rangle := |\uparrow\uparrow\rangle$ 是满足 $S^z_{\mathrm{tot}} = 1$的三重态。要理解式（44）为何成立，请注意，当格点 $2i+1$ 和 $2i+2$ 上的两个分数自旋被 $(S^+_i)^2$ 中的项激发时，它们此前必定处于向下态。因此，由于Q^+中的单态结构，格点 $2i-1$ 和 $2i+3$上的相邻分数自旋必定处于（并且仍保持）向上态。这解释了式（~中出现的算符形式。式（$|\Phi_{\mathrm{VBS}}\rangle$44）。

为了提升 AKLT 哈密顿量，我们首先引入算符 $P^{(S,M)}_{i,\,j}$ 它们将格点 i 和 j 上的两个（未分数化的）自旋-1投影到总自旋为 S 和 $S^z = M$的扇区。可以得到

$$\begin{aligned}P^{(S,M)}_{i,i+1}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} &= \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}P\left[\left(\sum_{j=2i-1}^{2i+2}s_j\right)^2 = S(S+1),\ \sum_{j=2i-1}^{2i+2}s^z_j = M\right]\\ &\equiv \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\widetilde{P}^{(S,M)}_{i,i+1},\end{aligned} \tag{45}$$

其中，右侧的投影算符（记为 $\widetilde{P}^{(S,M)}_{i,\,i+1}$）将格点 $2i-1\sim 2i+3$ 上的四个自旋-1/2 投影到总自旋为 S 且 $S^z = M$ 的扇区。

借助这些算符，我们现在可以在分数自旋-1/2空间中得到一个自然的提升后的哈密顿量，$H_{\mathrm{AKLT}}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} = \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\sum_{M=-2}^{2}\widetilde{P}^{(2,M)}_{i,\,i+1} \equiv \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\,\widetilde{H}_{\mathrm{AKLT}}$，或者以另一种方式重新整理为

$$\widetilde{H}_{\mathrm{AKLT}} = \widetilde{H}_{\mathrm{spec}} + \widetilde{H}^{<}_{\mathrm{ann}} + \widetilde{H}^{>}_{\mathrm{ann}}, \tag{46}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_{\mathrm{spec}} &:= \sum_{i\in\Lambda_{\mathrm{frac}}}s^z_i\\ \widetilde{H}^{<}_{\mathrm{ann}} &:= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{M\le 0}\widetilde{P}^{(2,M)}_{i,i+1}\\ \widetilde{H}^{>}_{\mathrm{ann}} &:= \sum_{i\in\Lambda}\left(\widetilde{P}^{(2,1)}_{i,i+1} + \widetilde{P}^{(2,2)}_{i,i+1} - s^z_{2i} - s^z_{2i+1}\right),\end{aligned} \tag{47}$$

$\Lambda_{\mathrm{frac}} = \{1、\cdots、2N\}$ 为分数自旋晶格。由于~之前 H_{AKLT} 仅在算符的嵌入等价意义下确定~，（$A\sim_{\mathrm{VBS}} B$ 如果$\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}A = \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}B$）。现在我们寻找~一个等价算符 $\sim_{\mathrm{VBS}} H_{\mathrm{AKLT}}$，使其具有广义投影算符嵌入形式，见式（4）（详细推导见附录B）。

自旋-1/2 空间（中的疤痕态$|\mathcal{S}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle$）本征态，这一点很容易看出 H_{spec}。它们还会被~中的每一项局部湮灭 $H^{<}_{\mathrm{ann}}$。事实上，这些项既会湮灭基态，也会湮灭激发疤痕态中尚未在该位置受到自旋升算符作用的那些分量。另一方面，在（$|\widetilde{\mathcal{S}}^{\mathrm{AKLT}}_n\rangle$）中，作用于选定的两个相邻格点的局域激发只有在其中至少一个格点受到带有 $\Delta M = 2$的自旋升算符作用时，才可能产生总自旋 2。然而，这两个格点的基态构型至少具有 $M\ge -1$（因为其中不含 $S=2$ 分量），因此这类格点对上的局域激发必然具有 $M>0$。

~仍有待寻找一个算符 H'_{ann}，它是局域项之和。

湮灭疤痕态的项，并等价于 $H^{>}_{\mathrm{ann}}$ ~ ~($H'_{\mathrm{ann}} \sim_{\mathrm{VBS}} H^{>}_{\mathrm{ann}}$)。

为此，我们考虑疤痕态可能的局域构型。由公式(44)可知，一对分数自旋格点$(2i,2i+1)$的局域构型要么是 $|\Downarrow\rangle$，要么是 $|\Uparrow\rangle$。因此，我们定义如下二体投影算符，

$$P^{2-\mathrm{body}}_{2i,2i+1} := |\Uparrow\rangle\langle\Uparrow|_{2i,2i+1} + |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|_{2i,2i+1}\,. \tag{48}$$

还可以很容易看出，6-格点构型 $|\Downarrow,\Uparrow,\Downarrow\rangle$ 不可能出现，因为产生算符 Q^{+}_{AKLT} 总是激发一对彼此相邻的“磁振子” $|\Uparrow\rangle$。此外，在连续的六个格点 $2i-2 \sim 2i+3$ 上，只可能出现以下状态：

$$\begin{aligned} |\phi^{\vec{\sigma}}_0\rangle &:= |\sigma_1,\sigma_2,\Downarrow,\sigma_3,\sigma_4\rangle_{2i-2;2i+3} \\ |\phi_1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\Uparrow,\Uparrow,\Downarrow\rangle - |\Downarrow,\Uparrow,\Uparrow\rangle\big)_{2i-2;2i+3} \\ |\phi_2\rangle &:= |\Uparrow,\Uparrow,\Uparrow\rangle_{2i-2;2i+3}\,, \end{aligned} \tag{49}$$

其中，$\vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$（$\sigma_i = \uparrow\downarrow$）是一个四自旋构型。通过区分以下几种情形可以验证这一点：(i) 中央自旋对尚未被激发；(ii) 中央自旋对与其中一个相邻自旋对一同被激发，而另一个自旋对未被激发；或 (iii) 所有自旋对均已被激发。我们将投影到这些可能态张成空间的投影算符记为 $P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3} (= \sum_{\vec{\sigma}} |\phi^{\vec{\sigma}}_0\rangle\langle\phi^{\vec{\sigma}}_0| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|)$。

现在我们将 $H^{>}_{\mathrm{ann}}$ ~ 的作用分成两部分，分别作用于该子空间及其补空间。经过一些计算（见附录B），可以发现 $H^{>}_{\mathrm{ann}}$ ~ 等价于：

$$\widetilde{H}^{>}_{\mathrm{ann}} \sim_{\mathrm{VBS}} \sum_{i\in\Lambda} h_i + h'_i\left(1 - P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\right), \tag{50}$$

其中，h'_i 是某个算符，并且

$$\begin{aligned} h_i &:= -\frac{1}{2}|\psi\rangle\,(\langle\Downarrow,\Uparrow,\Uparrow| + \langle\Uparrow,\Uparrow,\Downarrow|)_{2i-2;2i+3} \\ |\psi\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\uparrow\downarrow,\Uparrow,\Uparrow\rangle - |\Uparrow,\Uparrow,\downarrow\uparrow\rangle)\,. \end{aligned} \tag{51}$$

式（50）中的第二项会湮灭疤痕态，因为它投影掉了所有可能出现的局域构型。第一项也有同样的作用，因为 h_i 的左矢部分与所有 $|\phi_i\rangle$ $(i = 0,1,2)$正交。因此我们可以写成

$$\widetilde{H}^{<}_{\mathrm{ann}} \sim_{\mathrm{VBS}} \sum_{i\in\Lambda} h_i + h'_i\left(1 - P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\right) \tag{52}$$

$$= \sum_{i\in\Lambda}(h_i + h'_i)\left(1 - P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\right). \tag{53}$$

综上，我们得到了提升后的哈密顿量的一种形式，它确实具有局域投影算符嵌入形式，

$$\begin{aligned} &H_{\mathrm{AKLT}}\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} \\ &= \mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\left(\widetilde{H}_{\mathrm{spec}} + \widetilde{H}^{<}_{\mathrm{ann}} + \sum_{i\in\Lambda}(h_i + h'_i)\left(1 - P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\right)\right), \end{aligned} \tag{54}$$

其中 $h_i + h'_i$ 是一个局部六体算符。

VI. 保持自旋-1/2畴壁的模型

我们已经看到，修正的 PXP 模型、自旋-1 XY 模型和 AKLT 模型都具有隐式投影嵌入的结构。也就是说，存在一个扩大的希尔伯特空间，以及一个将其与原始希尔伯特 ~ ~ ~空间连接起来的映射 P，满足关系 $H\mathsf{P} = \mathsf{P}(H_{\mathrm{spec}} + \sum_i h_i P_i)$。在扩展空间中定义的母体~疤痕态 $|\mathcal{S}_n\rangle$，是 H_{spec} 的本征态~ ~，并且被 P_i湮灭。原始空间中对应的疤痕态只需通过投影~得到，即 $\mathsf{P}|\mathcal{S}_n\rangle$。

现在我们在这一背景下回顾式（55）中的保畴壁自旋-1/2模型，该模型在文献 [22]中被定义并讨论。该模型可以直接在原始自旋-1/2希尔伯特空间中写成投影算符嵌入形式，因此实际上并不需要扩展希尔伯特空间。不过，我们可以利用该模型保持畴壁数不变这一事实。相应的子空间可以被解释为一个受限空间，从而可以再次应用上述形式化方法。这一框架揭示了该模型中各种疤痕态集合的简单结构。

一个关键观察是，下面明确给出的疤痕态塔，即“金字塔疤痕态” $|\mathcal{S}^{\mathrm{Pyr}}_{n,m}\rangle$（式（60））， 可以写成投影态 $P^{\mathrm{dw}}_n|\mathcal{S}^{\mathrm{pre}}_{n+m}\rangle$，其中 P^{dw}_n是一个将在下文定义的畴壁数投影算符。母态 $|\mathcal{S}^{\mathrm{pre}}_{n+m}\rangle$ 具有简单的结构，因此可以很容易地确定局域湮灭算符。

A. 模型与疤痕态

自旋 1/2 域壁保持模型定义如下，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{DW}} &= \sum_{i\in\Lambda}\lambda\left(\sigma^x_i - \sigma^z_{i-1}\sigma^x_i\sigma^z_{i+1}\right) + \Delta\sigma^z_i + J\sigma^z_i\sigma^z_{i+1} \\ &\equiv H_\lambda + H_{\mathrm{Zeeman}} + H_{\mathrm{Ising}}, \end{aligned} \tag{55}$$

where $\Lambda := \{1,2,\cdots,N\}$.

我们假设采用周期性边界条件，且格点数 N为偶数。按照参考文献中的惯例，我们将第一项记为 H_λ。 [31]该模型守恒畴壁的数量，即上自旋与下自旋之间界面的数量。畴壁总数由算符 $N_{\mathrm{dw}} := \sum_{i\in\Lambda}(|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|)_{i\text{计数},\ i+1}$它分别与 H_λ、 H_{Zeeman} 和 H_{Ising}对易。在周期性边界条件下，N_{dw} 始终为偶数。接下来定义投影算符 P^{dw}_n，将其投影到含有 $2n$ 个畴壁的扇区；该投影算符与 H_{DW}对易。注意，P^{dw}_n是一个全局算符，无法表示为局域算符的乘积。

我们将这些“畴壁”疤痕态记作 $|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_n\rangle$，它们由铁磁态构造而成

$$|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_0\rangle := \bigotimes_{i\in\Lambda}|\downarrow\rangle_i\,, \tag{56}$$

通过对其施加产生算符 Q^{+}_{DW}，

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{n}\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_n}(Q^{+}_{\mathrm{DW}})^{n}\,|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{0}\rangle\,,\\
Q^{+}_{\mathrm{DW}} &\coloneqq \sum_{i\in\Lambda}(-1)^{i}P_{i-1}\sigma^{+}_{i}P_{i+1}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

其中 $P_i = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_i$。注意，这些态中绝不会出现两个相邻的自旋向上，因此满足类似里德伯阻塞的约束。

现在我们来证明，将 H_{DW}写成投影算符嵌入形式后，$|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{n}\rangle$ 是其一个精确本征态。我们首先证明 H_λ 会湮灭这些疤痕态。为此，我们将H_λ 改写为

$$
\begin{aligned}
H_\lambda &= 2\lambda\sum_{i\in\Lambda}\left(P_{i-1}\sigma^{x}_{i}n_{i+1}+n_{i-1}\sigma^{x}_{i}P_{i+1}\right)\\
&= 2\lambda\sum_{i\in\Lambda}|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\left(\langle\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow|+\langle\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow|\right)_{i-1;i+2}\\
&+2\lambda\sum_{i\in\Lambda}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|+|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow|\right)_{i-1;i+2}\\
&+2\lambda\sum_{i\in\Lambda}\left(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow\uparrow|+|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow|\right)_{i-1,i,i+1},
\end{aligned}
\tag{58}
$$

其中 $n \coloneqq |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$。由于最后两项中算符的左矢部分包含两个连续的向上自旋 $\langle\uparrow\uparrow|$, ，它们会湮灭满足里德堡约束的疤痕态。三个四体项中的第一项也会湮灭这些疤痕态，因为在后者的构型中，彼此孤立的向上自旋带有交替变号的符号，这与第一项的左矢部分正交，$|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$。我们将该四格点构型上的投影算符记为 $P^{4-\mathrm{body}}_{i-1\ i+2}$；由此可知，$H_\lambda$ 会湮灭式（ $|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{n}\rangle$ ）中的疤痕态57。

疤痕态显然是 H_{spec}的本征态，它是式（55中剩余的塞曼项与伊辛相互作用之和。因此，哈密顿量可写成投影算符嵌入形式，

$$
H_{\mathrm{DW}} = H_{\mathrm{spec}} + \sum_{i\in\Lambda}\left(h_i P^{4-\mathrm{body}}_{i-1;i+2} + h'_i n_i n_{i+1}\right), \tag{59}
$$

其中h_i 和h'_i 是一些局域四体算符，它们从左侧乘以疤痕态湮灭算符 $P^{4-\mathrm{body}}_{i-1\ i+2}$；以及 $n_i n_{i+1}$。

B. 金字塔疤痕态塔

在文献 [31], 中，人们发现所谓的金字塔态构成了 H_{DW}的其他一组精确疤痕本征态。这些塔由畴壁疤痕态 $|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{n}\rangle$通过进一步作用一个非局域算符$Q^{+}_{\mathrm{Pyr}}$构造而成，

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{S}^{\mathrm{Pyr}}_{n,m}\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_{n,m}}\left(Q^{+}_{\mathrm{Pyr}}\right)^{m}|\mathcal{S}^{\mathrm{DW}}_{n}\rangle\,,\\
Q^{+}_{\mathrm{Pyr}} &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{l=1}^{N-2}\prod_{k=1}^{l}n_{i-k}\sigma^{+}_{i}P_{i+1}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

这个升算符会选出由向上自旋组成的铁磁畴，并在其右边缘再延伸一个自旋，前提是这样做不会使该畴与后续的铁磁畴合并。因此，金字塔态也可以写成如下形式

$$
|\mathcal{S}^{\mathrm{Pyr}}_{n,m}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_{n,m}}\sum_{i_1<\cdots<i_n}\sum_{\{l_k\}_{k=1}^{n}}(-1)^{\sum_k i_k}\,|\{l_k\},\{i_k\}\rangle\,, \tag{61}
$$

其中 i_k $(1 \le k \le n)$是第 k个上自旋铁磁畴最左侧的格点，l_k 是其长度。因此，态 $|\{l_k\},\{i_k\}\rangle$ 应读作

$$
|\{l_k\},\{i_k\}\rangle = |\downarrow\cdots\downarrow\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{i_1\sim i_1+l_1-1}\downarrow\cdots\downarrow\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{i_n\sim i_n+l_n-1}\downarrow\cdots\rangle\,, \tag{62}
$$

其中 $i_1 \sim i_1+l_1-1$ 表示一个长度为 l_1 的铁磁畴占据格点 $i_1 \sim i_1+l_1-1$。而 n 表示铁磁畴的数量， m 由上自旋总数减去铁磁畴数量$m = \sum_k l_k - n$确定。

在文献 [31], Mark 等人中，证明了 $|\mathcal{S}^{\mathrm{Pyr}}_{n,\ m}\rangle$ 是精确本征态，方法是直接求解定态薛定谔方程。这里我们基于投影算符嵌入给出一个更简单的证明，分为两步。首先，我们定义“前金字塔态” $|\mathcal{S}^{\mathrm{pre}}_{n}\rangle$，并证明在没有伊辛相互作用时，它们是精确本征态。第二步，我们证明将前金字塔态投影到畴壁数固定的子空间后，就能得到所需的金字塔态。即使存在伊辛相互作用，这些态仍然是精确本征态。

1. 前金字塔态

考虑“前金字塔态”

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{S}^{\mathrm{pre}}_{n}\rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}_n}U_{\mathrm{dw}}\left(\sum_{i\in\Lambda}\sigma^{+}_{i}\right)^{n}\bigotimes_{j\in\Lambda}|\downarrow\rangle_j\\
&= \frac{1}{\mathcal{N}'_n}U_{\mathrm{dw}}\left(\sum_{i\in\Lambda}\sigma^{-}_{i}\right)^{N-n}\bigotimes_{j\in\Lambda}|\uparrow\rangle_j\,,
\end{aligned}
\tag{63}
$$

其中， $U_{\mathrm{dw}} \coloneqq \exp\left[i\pi\sum_{j\in\Lambda} j\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_j\right]$是一个酉变换，它为每个铁磁畴赋予动量 π。

这些态是具有相同磁化强度的构型的叠加，因此是塞曼项的本征态。之后，我们会将它们投影到畴壁数固定的子空间中，从而使它们也成为伊辛相互作用的本征态。塞曼项和伊辛项将在最终的投影算符嵌入中构成H_{spec}。

接下来我们证明，剩余的 H_λ 可表示为一系列准局域湮灭算符之和。为此，我们将 H_λ 拆分为$H_\lambda = H^{+}_{\lambda}+H^{-}_{\lambda}$，其中 $H^{\pm}_{\lambda} = 2\lambda\sum_i$（$P_{i-1}\sigma^{\pm}_{i}n_{i+1}+n_{i-1}\sigma^{\pm}_{i}P_{i+1}$）。可以发现， $H^{\pm}_{\lambda}$可改写为

$$H_\lambda^+ = 2\lambda \sum_{i\in\Lambda}\left[\sum_{k=2}^{N-2} |\downarrow \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k\text{ sites}}\downarrow\rangle\left(\langle\downarrow\downarrow \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1\text{ sites}}\downarrow| + \langle\downarrow \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1\text{ sites}}\downarrow\downarrow|\right)_{i-1;i+k} + |\downarrow \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{N-1\text{ sites}}\rangle\left(\langle\downarrow\downarrow \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{N-2\text{ sites}}| + \langle\downarrow \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{N-2\text{ sites}}\downarrow|\right)_{i-1;i+N-2}\right]$$

$$H_\lambda^- = 2\lambda \sum_{i\in\Lambda}\left[\sum_{k=2}^{N-2} |\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k\text{ sites}}\uparrow\rangle\left(\langle\uparrow\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1\text{ sites}}\uparrow| + \langle\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{k-1\text{ sites}}\uparrow\uparrow|\right)_{i-1;i+k} + |\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{N-1\text{ sites}}\rangle\left(\langle\uparrow\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{N-2\text{ sites}}| + \langle\uparrow \underbrace{\downarrow\cdots\downarrow}_{N-1\text{ sites}}\uparrow|\right)_{i-1;i+N-2}\right]. \tag{64}$$

这些项均会湮灭前金字塔态。事实上，它们都只对两个局域构型的对称叠加产生非平凡作用：在这两个构型中，两个向下自旋夹着一个铁磁向上岛，外加一个向下自旋（反之亦然，即向上和向下互换）；而前金字塔态只包含这类局域构型的反对称叠加。

由此可知，除了伊辛相互作用之外，前金字塔态都是哈密顿量的精确本征态。暂且排除后者，我们便得到投影算符嵌入形式 $H_\lambda + H_{\text{Zeeman}} = H_{\text{spec}} + \sum_i h_i P_i$，其中 H_{spec} 是塞曼项，而 P_i 是作用于上述构型的对称叠加态上的投影算符。

请注意，这些湮灭投影算符是准局域的。虽然每个投影算符的支撑范围有限，但在所有湮灭算符中，支撑范围的直径并没有统一的上界。与自旋-1 XY模型和 AKLT 模型不同，我们尚未找到任何能将湮灭算符映射到更大空间、使其真正局域化的映射。尽管如此，我们强调，湮灭算符 H_λ 并非一个“整体式”湮灭算符，因为我们可以将其明确分解为广延数量的湮灭算符之和，其中许多是局域的，且并不覆盖系统的有限比例。相反，那些会影响广延数量格点的湮灭算符秩非常低。在刻画具有有限畴壁密度的疤痕态时，它们的作用可以忽略不计。

2. 投影到恒定畴壁数的扇区

金字塔前态是具有不同畴壁数的态的叠加。然而，哈密顿量守恒畴壁数。因此，我们可以将金字塔前态投影到具有固定数目的 $2m$ 畴壁的扇区 $P_m^{\text{dw}}|S_n^{\text{pre}}\rangle$。由于 P_m^{dw} 与 $H_\lambda + H_{\text{Zeeman}}$ 对易，投影态 $P_m^{\text{dw}}|S_n^{\text{pre}}\rangle$ 仍然是一个本征态。此外，它也是伊辛相互作用的本征态；事实上，在每个具有固定数目畴壁的扇区中，伊辛相互作用都退化为一个常数。

现在我们来证明，这些态等价于式（61）中的金字塔态。为此，我们将标记改为 $n \to (n' + m')$，$m \to n'$ 并将式（63）中这些态的投影按 n' 上畴的位置和长度展开，得到

$$P_{n'}^{\text{dw}}|S_{n'+m'}^{\text{pre}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_{n',m'}} \sum_{i_1<\cdots<i_{n'}} \sum_{\{l_k\}_{k=1}^{n'}} (-1)^{\sum_{k=1}^{n'} i_k} |\{l_k\},\{i_k\}\rangle, \tag{65}$$

这确实与公式（61）完全相同。

由此可得以下结构：由于哈密顿量守恒畴壁数，我们可以将固定畴壁数的子空间分别视为受限希尔伯特空间来考察。事实证明，每个这样的空间都包含一座疤痕态塔，可通过投影（使用相应的 $P_{n'}^{\text{dw}}$）从式（63）的母疤痕态中获得。这些母疤痕态则可通过哈密顿量的投影算符嵌入形式得到简洁刻画（不包括伊辛项；该项仅体现了与畴壁约束的线性耦合，因此在所考察的子空间中为常数）。

这里，畴壁投影算符 P_n^{dw}起到了嵌入映射F的作用，类似于上文讨论的 F_{VBS}。然而，与前面讨论的情况不同，投影算符P_n^{dw}无法表示为局域算符的乘积。这是因为畴壁数是一个涉及整个系统的全局约束。

在下一节中，我们将讨论这种非局域投影和疤痕态，与规范理论拓扑相中出现的类似结构有何相似之处。

VII. 与规范理论的相似性

正如我们在前几节所见，非平庸的量子多体疤痕态通常具有如下结构：$\mathsf{P}|S_n\rangle\tilde{}$，其中 P 将母态 $|S_n\rangle$ 投影到“物理”子空间，例如 AKLT 模型的 $S = 1$ 希尔伯特空间。$\tilde{}|S_n\rangle$ 通常具有相对简单的结构，在扩大的希尔伯特空间中纠缠较少。扩展空间中的局域自由度，例如 AKLT 中的 $S = 1/2$ 自旋，有时可以解释为分数化实体。

这种分数化在物质的拓扑相中也无处不在。因此，自然会让人想知道，我们讨论过的疤痕态与具有拓扑序的多体系统中的波函数之间是否存在关联。

在本节中，我们指出规范理论去禁闭相中的基态波函数与我们讨论过的某些疤痕态之间存在结构上的相似性。

规范理论出现在自由度之间满足局部约束的系统中，例如高斯定律。约束由投影算符$\mathsf{G}_{\text{规范}}$实施，它将态投影到满足约束或高斯定律的物理子空间 $\mathsf{V}_{\text{gauge}}$上，即$\mathsf{G}_{\text{规范}}|\psi\rangle = +|\psi\rangle$ for $\psi \in \mathsf{V}_{\text{gauge}}$。这个投影算符$\mathsf{G}_{\text{规范}}$ 可以视为类似于嵌入映射P： 后者将疤痕态从扩大的无约束希尔伯特空间中的母态映射而来。.....的基态

去禁闭相中的规范理论，其基态通常是给定拓扑扇区内所有满足约束的构型的叠加态。然而，它们往往可以表示为：将扩大的希尔伯特空间中一个低纠缠态投影得到的态，而在该空间中并未施加高斯定律。对于每个物理态，都可以利用规范自由度选择一个投影后得到该态的特定母态。选择这样的母态相当于进行规范固定。例如，可以通过修改扩大的希尔伯特空间中的哈密顿量来实现这一点，使其在物理空间上的限制保持不变，同时使所需的简单母态成为扩展空间中的基态。这与我们利用自由度选择 H，使其具有特别简单的疤痕子空间（从而得到简单的投影算符嵌入形式），非常类似。

在规范理论中，通常存在与哈密顿量对易的非局域（弦状）投影算符 P_{top}，它们定义了不同的拓扑扇区。这类用于施加约束的投影算符类似于 P_n^{dw}，后者将母疤痕态投影到固定畴壁数扇区内的疤痕态。从这一视角看，金字塔态塔的多重性类似于规范理论中的拓扑简并。

在附录C中，我们将更详细地介绍两个具体实例：伊辛规范理论（IGT）和量子二聚体模型（QDM），包括它们的基态构造，以及它们与量子多体疤痕态的隐式投影嵌入的相似性。

VIII. 结论

本文考察了局域投影算符嵌入范式的普适性。在该范式中，哈密顿量可写成 $H = H_{\text{spec}} + H_{\text{ann}}$，而 H_{ann} 是一组局域投影算符之和，它们会湮灭疤痕态。我们证明，若对这一范式稍作推广，此前被认为不适用于该范式的若干含有疤痕态的模型，实际上也可以在同一框架下得到理解。因此，我们的发现揭示了这些模型的隐含结构，并为理解量子多体疤痕态提供了统一的视角。

对于自旋-1 XY 模型和 AKLT 模型的双磁振子疤痕态，我们定义了一个扩大的希尔伯特空间，其中基本自由度（$S = 1$）被分数化，并定义了一个将其投影回原始物理希尔伯特空间的映射 P。在扩大的希尔伯特空间中定义一个合适的提升的 $\tilde{}$ 哈密顿量 $\tilde{H}$，即 $\tilde{H}\mathsf{P} = \mathsf{P}H$，它可以写成局部投影算符嵌入形式。提升的疤痕子空间是所有局域湮灭算符核的非平凡交集。同时，该子空间被发现是哈密顿量中剩余谱生成项 H_{spec} 的本征空间之并。

我们讨论了这种构造与在带约束模型中寻找疤痕态的方法之间的相似性，也讨论了晶格规范理论去禁闭相中构造波函数时呈现的特征。在那里，高斯定律发挥约束的作用，并通过一个类似于上述映射 P 的投影算符施加。去禁闭基态在施加高斯定律的物理空间中可能显得非常复杂，但在选择适当的规范后，将其提升到无约束希尔伯特空间中时，往往会呈现简单的形式，例如乘积态。疤痕态问题中的对应之处在于，我们发现，只有在扩大的无约束希尔伯特空间中，并且适当选择合适的母哈密顿量后，哈密顿量才具有简单的投影算符嵌入形式。无论是在晶格规范理论还是疤痕态模型中，投影到物理子空间都会将简单的母态转变为纠缠态；这些纠缠态是满足相应约束的构型的、更复杂的叠加。

将我们的形式体系用于研究 $\mathbb{Z}_2$ 里德堡原子阵列中被提出可能存在的自旋液体态的基态和激发（以及可能的近似疤痕态），或许会有所裨益。考虑到 PXP 模型中由初始奈尔态引发的长寿命振荡，有时会在晶格规范理论的框架内加以解释（例如，参考文献 [46]）。

鉴于我们的方法可以适当地推广到（经过修改的）PXP 模型 [43],，将其扩展到更多似乎存在（近似）疤痕态、但其起源尚不明确的模型会很有意思，例如文献 [47, 48]中介绍的那些模型。

最后，值得明确阐明我们在扩展空间上使用局域湮灭算符的方法与文献 [39]中讨论的交换子代数之间的关系。尤其值得探究的是，后者能否以及如何推广到本文讨论的希尔伯特空间嵌入。

致谢

感谢 M. Sigrist 和 K. Pakrouvski 提供的宝贵意见与讨论。本研究得到瑞士国家科学基金会第 204801021001 号项目的资助。

[1] J. M. Deutsch。封闭系统中的量子统计力学。《物理评论 *A*》，43：2046–2049，1991年2月。[2] Mark Srednicki。混沌与量子热化。《物理评论 *E*》，50：888–901，1994年8月。[3] J. M. Deutsch。本征态热化假说。《物理学进展报告》，81(8)：082001，2018年7月。[4] Marcos Rigol、Vanja Dunjko 和 Maxim Olshanii。一般孤立量子系统中的热化及其机制。《自然》，452(7189):854–858，2008年4月。[5] I. V. Gornyi、A. D. Mirlin 和 D. G. Polyakov。《无序线中的相互作用电子：安德森局域化与低-*t* 输运》。《物理评论快报》，95:206603，2005年11月。[6] D.M. Basko、I.L. Aleiner 和 B.L. Altshuler。具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属-绝缘体转变。《物理年鉴》，321(5):1126 – 1205，2006年。

[7] Dmitry A. Abanin、Ehud Altman、Immanuel Bloch 和 Maksym Serbyn。《综述：多体局域化、热化与纠缠》。《现代物理评论》，91:021001，2019年5月。[8] David A. Huse、Rahul Nandkishore 和 Vadim Oganesyan。完全多体局域化系统的现象学。《物理评论*B*》，90:174202，2014年11月。[9] V. Ros、M. Müller 和 A. Scardicchio。多体局域化相中的运动积分。《核物理*B*》，891 465，2015 420: – 。[10] John Z. Imbrie。量子自旋链的多体局域化问题。《统计物理学杂志》，163(5):998–1048，2016年6月。[11] Hannes Bernien、Sylvain Schwartz、Alexander Keesling、Harry Levine、Ahmed Omran、Hannes Pichler、Soonwon Choi、Alexander S. Zibrov、Manuel Endres、Markus Greiner、Vladan Vuletić 和 Mikhail D. Lukin。在含有 51 个原子的量子模拟器上探测多体动力学。《自然》，551(7682):579–584，2017年11月。[12] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papić。量子多体疤痕导致的弱遍历性破缺。《自然·物理》，14(7):745–749，2018年7月。[13] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papić。里德堡原子链中的量子疤痕本征态：纠缠、热化失效以及对扰动的稳定性。《物理评论*B*》，98:155134，2018年10月。[14] 杨振宁。 η 哈伯德模型中的配对与非对角长程序。《物理评论快报》，63:2144–2147，1989年11月。[15] Sanjay Moudgalya、Nicolas Regnault 和 B. Andrei Bernevig。η哈伯德模型中的配对：从谱生成代数到量子多体疤痕。《物理评论*B*》，102:085140，2020年8月。[16] Daniel K. Mark 和 Olexei I. Motrunich。 η配对态作为扩展哈伯德模型中的真实疤痕态。《物理评论*B*》，102:075132，2020年8月。[17] Masaya Nakagawa、Hosho Katsura 和 Masahito Ueda。多组分哈伯德模型的精确本征态：SU(n)磁性 η 配对、弱遍历性破缺与部分可积性，2022年。[18] Sanjay Moudgalya、Stephan Rachel、B. Andrei Bernevig 和 Nicolas Regnault。非可积模型的精确激发态。《物理评论*B*》，98:235155，2018年12月。[19] Sanjay Moudgalya、Nicolas Regnault 和 B. Andrei Bernevig。Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 模型精确激发态的纠缠：精确结果、多体疤痕及对强本征态热化假说的违反。《物理评论*B*》，98:235156，2018年12月。[20] Sanjay Moudgalya、B Andrei Bernevig 和 Nicolas Regnault。量子多体疤痕与希尔伯特空间碎裂：精确结果综述。《物理学进展报告》，85(8):086501，2022年7月。[21] Michael Schecter 和 Thomas Iadecola。自旋-1 XY磁体中的弱遍历性破缺与量子多体疤痕。《物理评论快报》，123:147201，2019年10月。[22] Thomas Iadecola 和 Michael Schecter。具有涌现动力学约束和有限纠缠复现的量子多体疤痕态。《物理评论*B*》，101:024306，2020年1月。[23] Shriya Pai 和 Michael Pretko。驱动分形子系统中的动力学疤痕态。《物理评论快报》，123:136401，2019年9月。[24] Bhaskar Mukherjee、Sourav Nandy、Arnab Sen、Diptiman Sen 和 K. Sengupta。通过弗洛凯工程实现量子多体疤痕的坍缩与复现。《物理评论*B*》，101:245107，2020年6月。[25] Thomas Iadecola 和 Sagar Vijay。通过对经典元胞自动机进行变形实现非遍历量子动力学。《物理评论*B*》，102:180302，2020年11月。[26] Asmi Haldar、Diptiman Sen、Roderich Moessner 和 Arnab Das。强驱动弗洛凯物质中的动力学冻结与疤痕点：共振与涌现守恒定律。*Phys. Rev. X*，11:021008，2021年4月。[27] Sho Sugiura、Tomotaka Kuwahara 和 Keiji Saito。周期驱动系统固有的多体疤痕态。*Phys. Rev. Research*，3:L012010，2021年2月。[28] Sanjay Moudgalya、B. Andrei Bernevig 和 Nicolas Regnault。薄环面上朗道能级中的量子多体疤痕。《物理评论*B*》，102:195150，2020年11月。[29] Debasish Banerjee 和 Arnab Sen。梯子上的阿贝尔格点规范理论中由零模产生的量子疤痕。《物理评论快报》，126:220601，2021年6月。[30] Naoto Shiraishi 和 Takashi Mori。本征态热化假说反例的系统构造。《物理评论快报》，119:030601，2017年7月。[31] Daniel K. Mark、Cheng-Ju Lin 和 Olexei I. Motrunich。Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 模型及其他模型中疤痕态精确塔的统一结构。《物理评论*B*》，101:195131，2020年5月。[32] Seulgi Ok、Kenny Choo、Christopher Mudry、Claudio Castel- novo、Claudio Chamon 和 Titus Neupert。一维、二维和三维中的拓扑多体疤痕态。*Phys. Rev. Research*，1:033144，2019年12月。[33] K. Pakrouski、P. N. Pallegar、F. K. Popov 和 I. R. Klebanov。作为希尔伯特空间群不变子空间的多体疤痕。《物理评论快报》，125:230602，2020年12月。[34] Sanjay Moudgalya、Edward O'Brien、B. Andrei Bernevig、Paul Fendley 和 Nicolas Regnault。由矩阵乘积态构造的大类量子疤痕哈密顿量。《物理评论*B*》，102:085120，2020年8月。[35] Nicholas O'Dea、Fiona Burnell、Anushya Chandran 和 Vedika Khemani。从隧道到塔：由李代数及其 q 变形李代数产生的量子疤痕。*Phys. Rev. Research*，2:043305，2020年12月。[36] Kiryl Pakrouski、Preethi N. Pallegar、Fedor K. Popov 和 Igor R. Klebanov。费米子格点模型中多体疤痕态的群论方法，2021年。[37] Jie Ren、Chenguang Liang 和 Chen Fang。准对称群与多体疤痕动力学。《物理评论快报》，126:120604，2021年3月。[38] Sanjay Moudgalya 和 Olexei I. Motrunich。希尔伯特空间碎片化与交换子代数。*Phys. Rev. X*，12:011050，2022年3月。[39] Sanjay Moudgalya 和 Olexei I. Motrunich。利用交换子代数对量子多体疤痕进行全面刻画，2022年。[40] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papić。里德堡原子链中的量子疤痕本征态：纠缠、热化的失效及对扰动的稳定性。《物理评论*B*》，98:155134，2018年10月。[41] Soonwon Choi、Christopher J. Turner、Hannes Pichler、Wen Wei Ho、Alexios A. Michailidis、Zlatko Papić、Maksym Serbyn、Mikhail D. Lukin 和 Dmitry A. Abanin。涌现SU(2)动力学与完美量子多体疤痕。《物理评论快报》，122:220603，2019年6月。[42] Thomas Iadecola、Michael Schecter 和 Shenglong Xu。由磁振子凝聚产生的量子多体疤痕。《物理评论*B*》，100:184312，2019年11月。[43] Keita Omiya 和 Markus Müller。二分里德堡阵列中的量子多体疤痕，源于隐含投影算符

嵌入。*Phys. Rev. A*，107:023318，2023年2月。[44] Sambuddha Chattopadhyay、Hannes Pichler、Mikhail D. Lukin 和 Wen Wei Ho。由虚纠缠对产生的量子多体疤痕。《物理评论*B*》，101:174308，2020年5月。[45] Sanjay Moudgalya、Stephan Rachel、B. Andrei Bernevig 和 Nicolas Regnault。非可积模型的精确激发态。《物理评论*B*》，98:235155，2018年12月。[46] Federica M. Surace、Paolo P. Mazza、Giuliano Giudici、Alessio Lerose、Andrea Gambassi 和 Marcello Dalmonte。里德堡原子量子模拟器中的晶格规范理论与弦动力学。*Phys. Rev. X*，10:021041，2020年5月。[47] Kieran Bull、Ivar Martin 和 Z. Papić。一维晶格模型中疤痕多体动力学的系统构造。《物理评论快报》，123:030601，2019年7月。[48] Ana Hudomal、Ivana Vasić、Nicolas Regnault 和 Zlatko Papić。具有关联跃迁的玻色子量子疤痕。*Communi- cations Physics*，3(1):99，2020年6月。

附录 A：双磁振子疤痕态的投影嵌入构造

在正文中，我们概述了双磁振子疤痕态$|\mathcal{B}_n^{\mathrm{XY}}\rangle$在方程（29、32）中定义的态，可以通过适当扩展的希尔伯特空间中的局域投影嵌入来理解。在本附录中，我们通过构造一个具有所需投影算符嵌入结构、并具有所述母疤痕态的母哈密顿量，详细阐述这一点。同时，这也提供了一个详细证明，表明投影后的疤痕态确实是 H_{XY}的精确本征态，前提是单离子各向异性为零，即 $D = 0$。

1. 哈密顿量的提升

与 PXP 模型和 AKLT 模型类似，由于从分数化自旋到 $S = 1$ 自旋的映射 P_{XY} 并非单射，

~对于给定的算符 O，在 $S = 1$ 空间中满足 $O\mathrm{PXY} = \mathrm{PXY}O$ 的分数化~自旋空间内，并不存在唯一的算符 O 选择。不过，这类算符有一种自然的选择~O，因为 PXY 是范数非保持算符G 与将自旋-1 自然嵌入两个分数化自旋的算符 FVBS 的乘积，后者已在公式（31）中引入。也就是说，一旦找到 $S = 1$ 空间中的算符 O'，使其满足 $OG = GO'$（这总是可能的，因为 G 是双射），就可以利用公式（33）将 O' 自然地分数化为一个双自旋算符。

作为一个简单的例子，我们来考虑如何将 S_i^z 分数化。由于 S_i^z 与 G对易，我们发现

$$S_i^z G\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} = GS_i^z\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}} = G\mathsf{F}_{\mathrm{VBS}}\left(s_{2i-1}^z + s_{2i}^z\right), \tag{A1}$$

这意味着公式（34）。

XY项$T_{i,\ i+1} \equiv S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y$ 由于嵌入映射中涉及非平凡的拉伸变换 G，因此更为复杂。通过与 G 对易，我们得到

$$\begin{aligned} T_{i,i+1}G &= GT'_{i,i+1} \\ T'_{i,i+1} &\equiv \frac{1}{2}\,|0,0\rangle\,(\,\langle +,-| + \langle -,+|)_{i,i+1} \\ &\quad + 2\,(\,|+,-\rangle + |-,+\rangle)\,\langle 0,0|_{i,i+1} \\ &\quad + |+,0\rangle\langle 0,+|_{i,i+1} + |0,+\rangle\langle +,0|_{i,i+1} \\ &\quad + |-,0\rangle\langle 0,-|_{i,i+1} + |0,-\rangle\langle -,0|_{i,i+1}\,. \end{aligned} \tag{A2}$$

剩下的任务是将算符 $T'_{i,i+1}$ 嵌入分数自旋空间中。可以发现，

$$T_{i,i+1}\mathsf{P}_{\mathrm{XY}} = \mathsf{P}_{\mathrm{XY}}\widetilde{T}_{i,i+1}, \tag{A3}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{i,i+1} \equiv{}& \frac{1}{4}\,(\,|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|)_{2i-1;2i+2} \\ &+ (\,|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow| + \langle\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow|)_{2i-1;2i+2} \\ &+ \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow|)_{2i-1;2i+1} + \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow| + \langle\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow|)_{2i-1;2i+2} \\ &+ \frac{1}{2}\,(\,|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow|)_{2i-1;2i+1} + \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle)\,(\,\langle\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow|)_{2i-1;2i+2}\,. \end{aligned} \tag{A4}$$

2. 将算符转换为湮灭算符

如正文所述，双磁振子疤痕态在二体投影算符 $P_{2i\ 2i+1}^{2-\mathrm{body}}$，的作用下保持不变。因此，只需考虑$T_{i,\ i+1}$中的相关项，这些项通过从右侧将算符与投影算符相乘得到。

$P_{2i\ 2i+1}^{2-\mathrm{body}}$,,

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{\mathrm{rel}}_{i,i+1} &\equiv \widetilde{T}_{i,i+1}P^{2-\mathrm{body}}_{2i,2i+1} \\ &= (\,|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)\,(\,\langle\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow| + \langle\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow|)_{2i-1;2i+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)\,\langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle)\,\langle\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow|_{2i-1;2i+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,(\,|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)\,\langle\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow|_{2i-1;2i+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,(\,|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle)\,\langle\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow|_{2i-1;2i+2}\,. \end{aligned} \tag{A5}$$

$\widetilde{T}^{\mathrm{rel}}_{i,i+1}$并非局域湮灭算符之和。因此，我们寻求一个等价于 $\widetilde{T}^{\mathrm{rel}}_{i,i+1}$ 且具有该性质的算符。由于 $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)_{2i-1,2i}$ 会被 P_{XY}湮灭，例如，我们可以发现，方程（A5）第二行中的项等价于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+2}\\&\sim_{\mathrm{XY}}\ |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+2}\,.\end{aligned}\tag{A6}$$

利用这些性质，可以找到一个形式如下的合适算符 $T'_{i,i+1}$ 等价于$\widetilde{T}^{\mathrm{rel}}_{i,i+1}$ （即 $\widetilde{T}'_{i,i+1}\sim_{\mathrm{XY}}\widetilde{T}^{\mathrm{rel}}_{i,i+1}$）

$$\begin{aligned}\widetilde{T}'_{i,i+1} &= \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow| + \langle\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow|\right)_{2i-1;2i+2}\\&\quad + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+2} + |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow|_{2i-1;2i+2}\\&\quad + |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow|_{2i-1;2i+2} + |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow|_{2i-1;2i+2}\\&= |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow|_{2i;2i+2} + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow|_{2i;2i+2}\\&\quad + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+1} + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow\downarrow|_{2i-1;2i+1}\,.\end{aligned}\tag{A7}$$

在最后一行，我们使用恒等分解，将 $\sim T'_{i,\,i+1}$转化为三体算符。我们还可以从右侧将$T'_{i,\,i+1}$与二体算符 $P^{2-\mathrm{body}}_{2\,i+k}{}_{,\,2(i+k)+1}$ 相乘（其中$k=-1,\,1$），这些算符与各项的支撑集重叠以提取该算符中对双磁振子疤痕态所属子空间产生非平凡作用的部分，

$$\begin{aligned}\widetilde{T}''_{i,i+1} &= \left(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow| + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow|\right)_{2i;2i+2}P^{2-\mathrm{body}}_{2i+2,2i+3}\\&\quad + \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow\downarrow|\right)_{2i-1;2i+1}P^{2-\mathrm{body}}_{2i-2,2i-1}\\&= |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|_{2i;2i+3} + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow|_{2i;2i+3}\\&\quad + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|_{2i-2;2i+1} + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow|_{2i-2;2i+1}\,.\end{aligned}\tag{A8}$$

将这些项对所有格点求和，最终得到

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda}\widetilde{T}''_{i,i+1} &= \sum_{i\in\Lambda}|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|\right)_{2i;2i+3}\\&\quad + \sum_{i\in\Lambda}|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\left(\langle\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow|\right)_{2i;2i+3},\end{aligned}\tag{A9}$$

其中每一项都会湮灭双磁振子疤痕态 $|\mathrm{B}^{\mathrm{XY}}_n\rangle$，因为$\widetilde{T}''_{i,\,i+1}P^{4-\mathrm{body}}_{2i\;;2i+3}=0$ 对任意 i 均成立。

上述变换序列明确表明，经过适当提升的 XY 项可以改写为若干局域项之和，其中每一项都会湮灭双磁振子疤痕子空间。由于双磁振子态是塞曼项的本征态，这就完成了它们是完整哈密顿量本征态的证明。

附录 B：AKLT 模型中疤痕本征态的详细证明

这里我们详细证明，AKLT 模型的扩展希尔伯特空间上的疤痕态是~适当提升后的哈密顿量的本征态。正如正文中所述，只需证明式（47）中定义的 $H^{>}_{\mathrm{ann}}$ 等价于局域湮灭算符之和即可。出现在 $\widetilde{H}_{\mathrm{AKLT}}$ 中的投影算符 $\widetilde{P}^{(2,1)}_{i\,i+1}$，和 $\widetilde{P}^{(2,2)}_{i\,i+1}$，具有以下显式形式，

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^{(2,1)}_{i,i+1} &= \frac{1}{4}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\right)\left(\langle\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow| + \langle\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow|\right)_{2i-1;2i+2}\\\widetilde{P}^{(2,2)}_{i,i+1} &= |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow|_{2i-1;2i+2}\,.\end{aligned}\tag{B1}$$

与双磁振子的情况一样，通过在右侧乘以稳定疤痕子空间的投影算符$\prod_{k=-1、\,0、\,1}P^{2-\mathrm{body}}_{2\;i-k}{}_{()、\,2(i-k)+1}P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2\;;\,2i+3}$，即可得到在疤痕态上非平凡作用的算符。这将上述算符化简为

$$\begin{aligned}T^{(2,1)}_{i,i+1} &\equiv \widetilde{P}^{(2,1)}_{i,i+1}\prod_{k=-1,0,1}P^{2-\mathrm{body}}_{2(i-k),2(i-k)+1}P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\\&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\Downarrow\Uparrow\Uparrow| - \langle\Uparrow\Uparrow\Downarrow|\right)_{2i-2;2i+3}\\T^{(2,2)}_{i,i+1} &\equiv \widetilde{P}^{(2,2)}_{i,i+1}\prod_{k=-1,0,1}P^{2-\mathrm{body}}_{2(i-k),2(i-k)+1}P^{6-\mathrm{body}}_{2i-2;2i+3}\\&= |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\Uparrow\Uparrow\Uparrow|_{2i-2;2i+3} - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\langle\Downarrow\Uparrow\Uparrow|_{2i-2;2i+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\langle\Uparrow\Uparrow\Downarrow|_{2i-2;2i+3}\,.\end{aligned}\tag{B2}$$

注意，$T_{(2,1)i,i+1}$等价于以下算符 $T'_{(2,1)i,i+1}$（即，$T_{(2,1}{}_{i+1}\sim_{\mathrm{VBS}}T'^{(2,1))i,}_{i\;\,i+1}$），

$$T'^{(2,1)}_{i,i+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\Uparrow\Uparrow\rangle + |\Uparrow\Uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\Downarrow\Uparrow\Uparrow| - \langle\Uparrow\Uparrow\Downarrow|\right)_{2i-2;2i+3}\,.\tag{B3}$$

此外，塞曼项 $s^z_{2i}+s^z_{2i+1}$ 化简为以下非平凡作用项，

$$\begin{aligned} T^{zz}_{i,i+1} &:= \left(s^z_{2i}+s^z_{2i+1}\right)\prod_{k=-1,0,1} P^{2-\text{body}}_{2(i-k),2(i-k)+1} P^{6-\text{body}}_{2i-2;2i+3} \\ &= |\Uparrow\Uparrow\Uparrow\rangle\langle\Uparrow\Uparrow\Uparrow|_{2i-2;2i+3} + |\Uparrow\Uparrow\Downarrow\rangle\langle\Uparrow\Uparrow\Downarrow|_{2i-2;2i+3} + |\Downarrow\Uparrow\Uparrow\rangle\langle\Downarrow\Uparrow\Uparrow|_{2i-2;2i+3}\,. \end{aligned} \tag{B4}$$

将这三个项按其在扩展后的哈密顿量中的形式组合起来，可得到紧凑的表达式

$$\begin{aligned} &T'^{(2,1)}_{i,i+1} + T^{(2,2)}_{i,i+1} - T^{zz}_{i,i+1} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\Uparrow\rangle - |\Uparrow\Uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\Uparrow\Uparrow\Downarrow| + \langle\Downarrow\Uparrow\Uparrow|\right)_{2i-2;2i+3}. \end{aligned} \tag{B5}$$

这些项中的每一项都会湮灭疤痕子空间。事实上，它们的 bra 部分与疤痕态中所有可能的 3-块构型（式（49））正交，这主要是因为相邻块激发对以动量 π产生。将上述算符对$\sim i$求和，可得到一个等价于 $H^{>}_{\text{ann}}$的算符。上述 $\widetilde{\ }$操作由此展示了如何将 $H^{>}_{\text{ann}}$ （在等价意义下）转化为母疤痕态的局域湮灭算符之和。

附录 C：受约束模型中的疤痕态与规范理论之间的相似性

在正文中，我们讨论了受约束模型中的疤痕态与某些晶格规范理论之间的相似性。去禁闭相中的规范理论基态通常表示为投影到由高斯定律定义的物理空间上的简单低纠缠态。这里我们展示这一点在伊辛规范理论（IGT）和量子二聚体模型（QDM）中是如何实现的，并阐明其与我们通过希尔伯特空间扩展及随后投影来构造疤痕态的方法之间的相似性。

1. 伊辛规范理论中的去禁闭相

为说明上述构建规范理论基态的方法，我们首先考虑处于去禁闭相的方格晶格上的 IGT。方格晶格包含链路 $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\text{hor}} \cup \mathrm{E}_{\text{ver}}$，其中 $\mathrm{E}_{\text{hor}}(\mathrm{E}_{\text{ver}})$ 表示水平（垂直）链路的集合。元胞 P 是由四条相连链路组成的环路。我们为方格晶格的每条链路赋予伊辛自由度 $\sigma = \uparrow, \downarrow$。链路和元胞分别表示为 i 和 $\square$。我们考虑以下哈密顿量 H_{IGT}，

$$H_{\text{IGT}} = -\Gamma \sum_{\square\in\mathcal{P}} \sigma^z_i \sigma^z_j \sigma^z_k \sigma^z_l, \tag{C1}$$

其中链路 i、j、k 以及 l 围绕元胞 $\square$（见图 1）。此外，我们对每个 G^{IGT}_v施加高斯定律

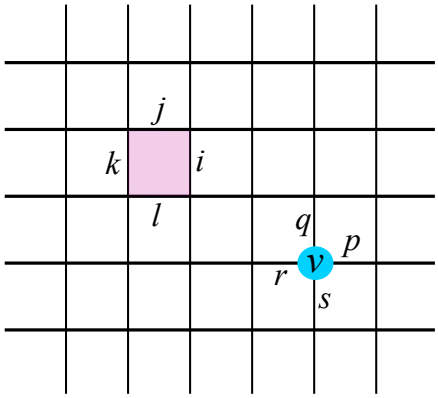

图 1. 带有元胞 $\square \in \mathrm{P}$（粉色方块）的方格晶格，该元胞由链路 i、j、k和 l 围绕；以及带有顶点 v （蓝色圆点）的方格晶格，该顶点由链路 p、q、r和 s围绕。

顶点 v，

$$G^{\text{IGT}}_v := \sigma^x_p \sigma^x_q \sigma^x_r \sigma^x_s, \tag{C2}$$

其中，链路 p、q、r和 s 从顶点 v 延伸出来（见图 1）。物理空间定义为 $\mathrm{V}^{\text{IGT}}_{\text{gauge}} := \{|\psi\rangle \,|\, G^{\text{IGT}}_v|\psi\rangle = |\psi\rangle \ \forall v\}$。我们将相应的投影算符定义为作用于 $\mathrm{V}^{\text{IGT}}_{\text{gauge}}$ 上的 $\mathrm{G}_{\text{IGTgauge}} := \prod_v (1+G^{\text{IGT}}_v)/2$。高斯定律约束 G^{IGT}_v与哈密顿量对易，因此，投影算符 $\mathrm{G}_{\text{IGTgauge}}$也与其对易。在无约束希尔伯特空间中，$H_{\text{IGT}}$ 具有许多简并基态。其中一个基态很容易构造，例如乘积态

$$|\psi^{\text{IGT}}_{\text{gs}}\rangle := \bigotimes_{i\in\mathcal{E}} |\uparrow\rangle_i\,. \tag{C3}$$

若固定轴向规范（即受条件 $\sigma^z_i = 1 \text{ for } \forall i \in \mathrm{E}_{\text{hor}}$ 约束的子空间），并且进一步在一条竖直线上施加 σ^z_j =1，则该态是唯一的基态。将其投影到物理子空间 $\mathrm{V}^{\text{IGT}}_{\text{gauge}}$ 上，即可得到规范不变基态，即 $\mathrm{G}_{\text{IGT规范}}|\psi^{\text{IGT}}_{\text{gs}}\rangle$。物理基态波函数可理解为所有可能构型的等幅叠加，其中自旋向上的部分组成闭合环路。

注意，上述 IGT基态的构造与我们讨论过的疤痕态构造非常相似。事实上，关系 $H_{\text{IGT}}\mathrm{G}_{\text{IGT规范}}|\psi^{\text{IGT}}_{\text{gs}}\rangle = \mathrm{G}_{\text{IGT规范}} H_{\text{IGT}}|\psi^{\text{IGT}}_{\text{gs}}\rangle$ 可以解释为：提升到扩展的无约束空间中的哈密顿量与原来的

物理子空间中的哈密顿量相同——这是我们针对疤痕态所考虑的一般情形的一个特例。此外，在扩展空间中找到的简单基态随后会被投影到一个更复杂的波函数上，这与较简单的疤痕态波函数在扩展空间中被投影到受约束空间中更复杂的疤痕态类似。

在亏格非平凡的曲面上，g H_{IGT} 存在 2^{2g} 个近简并基态。如果如所写下的模型那样，沿不可缩回路的弦算符严格守恒，那么可以定义与之对应的投影算符 P_{top}，将态投影到给定的拓扑扇区，而这些投影算符与哈密顿量对易。随后，对态 $\mathsf{G}_{\mathrm{IGT}}$ 规范 $|\psi_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{IGT}}\rangle$ 进一步投影到所选扇区，即可得到该扇区中的基态。事实上，很容易看出，$P_{\mathrm{top}}\mathsf{G}_{\mathrm{IGT}}$ 规范 $|\psi_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{IGT}}\rangle$ 也是一个基态。

给定的母态映射到不同拓扑扇区中的基态，这一事实与我们生成金字塔态 $|\mathrm{S}_n^{\mathrm{Pyr}},\ m\rangle$ 的方式十分相似。在那里，通过将母态投影到具有给定守恒畴壁数的各个扇区，得到了物理疤痕态。

2. 量子二聚体模型中的 Rokhsar-Kivelson 点

方格晶格上的量子二聚体模型（QDM）在所谓的 Rokhsar-Kivelson（RK）点具有自旋液体基态。按照 IGT 的惯例，我们再次为晶格的每条键赋予伊辛自由度 σ =↑, ↓，此处它表示二聚体的存在或缺失。物理空间由完整的二聚体覆盖构成，其中每个顶点属于且仅属于一个二聚体。这个硬核条件可以用高斯定律表示：

$G_v^{\mathrm{QDM}} = 1$ $\quad$ $^{\mathrm{QDM}}_{\mathrm{gauge}} := \ |\psi\rangle \,|\, G_v^{\mathrm{QDM}}\,|\psi\rangle = $ 对于 $|\psi\rangle$ $\forall v$ 每个顶点，V { }，其中

$$G_v^{\mathrm{QDM}} := n_p + n_q + n_r + n_s, \tag{C4}$$

链路 p，q，r，s 与顶点 v 相连。物理空间上的全局投影算符记为 $\mathsf{G}_{\mathrm{QDM}}$规范 $= \prod_v G_v^{\mathrm{QDM}}$。

量子二聚体模型的动力学由哈密顿量支配，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{QDM}} &= -\sum_{p\in\mathcal{P}} \left(\sigma_i^+\sigma_j^-\sigma_k^+\sigma_l^- + h.c.\right) \\ &\quad + \sum_{p\in\mathcal{P}} \left(z^2 n_i P_j n_k P_l + \frac{1}{z^2} P_i n_j P_k n_l\right) \\ &= z^{-2} \sum_{p\in\mathcal{P}} \left(z^2\,|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(z^2\,\langle\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow|\right)_{ijkl}, \end{aligned} \tag{C5}$$

其中，我们回顾一下 $P_i \equiv |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_i = 1 - n_i$。链路 i, j, k 和 l 围绕着元胞 p，而 z 是一个实参数。值得注意的是，动力学保持了二聚体约束。

在无约束空间中，哈密顿量的一个简单基态由乘积态给出

$$|\psi_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{QDM}}\rangle := \bigotimes_{i\in\mathcal{E}_{\mathrm{hor}}} (\,|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_i \bigotimes_{j\in\mathcal{E}_{\mathrm{ver}}} (z\,|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_j\,. \tag{C6}$$

事实上，式（C5）最后一行中的每个局域投影算符作用于该态后都得到零 H_{QDM}（可以验证，元胞上的乘积态包含两种相关的反铁磁构型，其权重分别为 1 和 z^2）。这个乘积态是满足规范固定约束 $\sigma_i^x = +1$ 、对所有 $i \in \mathrm{E}_{\mathrm{hor}}$均成立的子空间中的一个基态。随后，再投影到物理子空间，G量子二聚体模型规范 $|\psi_{\mathrm{gs}}^{\mathrm{QDM}}\rangle$，即可再次得到规范不变的基态。它是所有可能二聚体构型的加权叠加。在具有非平凡亏格的曲面上，基态流形同样具有拓扑简并；通过适当的投影，可以得到每个拓扑扇区中的基态。

3. 与量子多体疤痕的相似之处与区别

IGT 和量子二聚体模型的基态与我们在正文中讨论的受约束模型中的疤痕态具有相似的结构。具体而言，在适当扩大的（无约束）希尔伯特空间中，可以找到这些态的简单表达式，而物理态则通过投影到受限希尔伯特空间上得到。

在规范理论中，如果固定了适当的规范，在扩大的无约束希尔伯特空间中寻找基态就会变得相当简单。

我们可以从这个角度重新解读 AKLT 模型的疤痕态构造。我们不再考虑原始的 $S = 1$ AKLT 模型，而是考虑在扩展 $S = 1/2$ 空间中定义的自然对应哈密顿量 $\sim H_{\mathrm{AKLT}}$（式（46））。我们定义投影算符 $P_{2i-1,2i}^{S=1}$，它将格点 $2i-1$ 和 $2i$ 上的两个自旋-1/2投影到三重态子空间。该投影算符本质上等同于式（31）中定义的映射 F_i^{VBS}。~我们可以将哈密顿量 H_{AKLT} 理解为配备了针对 $\forall i$的高斯定律类比形式 $P_{2i-1,2i}^{S=1}|\psi\rangle = +|\psi\rangle$。由于 $\widetilde{H}_{\mathrm{AKLT}}$ 与 $P_{2i-1,2i}^{S=1}$对易，因此可以找到“物理”本征态，也就是完全处于自旋1子空间中的态。扩展空间中的基态可表示为单态的简单乘积态。这与 IGT 的轴向规范中的基态类似。随后，只需施加投影算符 $P_{2i-1}^{S=1}$，即可得到物理基态。

我们可以向哈密顿量中添加仅在违反高斯定律的构型上非零的项。虽然这不会改变其在物理空间中的作用，但这类规范固定项会解除无约束空间中基态的简并，从而偏好某一种“规范”。例如，对于 IGT，以下添加项会在扩展希尔伯特空间中使基态满足轴向规范

$$\begin{aligned} &H_{\mathrm{IGT}}\mathsf{G}_{\mathrm{gauge}}^{\mathrm{IGT}} = \mathsf{G}_{\mathrm{gauge}}^{\mathrm{IGT}} H_{\mathrm{IGT}} \\ &= \mathsf{G}_{\mathrm{gauge}}^{\mathrm{IGT}} \left(H_{\mathrm{IGT}} + \frac{1}{2\xi} \sum_{i\in\mathcal{E}_{\mathrm{hor}}} \left(1 - G_{v_i}^{\mathrm{IGT}}\right)\left(1 - \sigma_i^z\right)\right) \\ &\equiv \mathsf{G}_{\mathrm{gauge}}^{\mathrm{IGT}} \widetilde{H}_{\mathrm{IGT}}. \end{aligned} \tag{C7}$$

其中，ξ 是一个正常数，而 v_i 是任意一个不属于链路 $i \in \mathrm{E}_{\mathrm{hor}}$的顶点。

在 AKLT 模型中，这种规范固定过程的类似操作~对应于修改 $H_{\mathrm{ann}}^{>}$式（47），加入一些

被 $P^{S=1}_{2i-1,\ 2i}$ 湮灭的项。虽然这些项不会影响规范不变子空间，但加入它们可能会使哈密顿量呈现投影算符嵌入形式，从而使疤痕态具有简单的结构，并且易于构造。

我们还可以在量子多体疤痕的领域中找到规范理论基态拓扑简并的类似现象。拓扑扇区是动力学解耦子空间。在由与哈密顿量对易的 t'Hooft算符加以区分的情况下，可以投影到各个拓扑扇区上，但相应的投影算符是非局域的。简单的基态（在适当的固定规范下）通常是跨越所有拓扑扇区的叠加，而每个扇区内的基态则需通过进一步投影得到。这种结构在畴壁模型的疤痕态塔家族中有对应的类似物。在该模型中，第VI节讨论的畴壁数发挥了全局约束（守恒律）的作用，而后者如今则充当定义拓扑扇区的弦算符。因此，每个畴壁数都对应一个独立的态塔。然而，与不同拓扑扇区中的基态不同，这些相应的态塔在能量上并不简并。这是因为畴壁具有能量代价，会使不同畴壁扇区的疤痕谱彼此相差一个常数偏移。