arXiv:2305.00828v1 [math.DG] 1 May 2023

完备伪厄米流形上的非线性次抛物方程的次梯度估计

WENJING WU

Abstract. 设（M， J， θ）是一个满足 CR 次拉普拉斯比较性质的完备伪厄米流形。本文推导了下列非线性次抛物方程的正解的局部次梯度估计：

$$u_t = \Delta_b u + au\log u + bu,$$

在 $M \times [0, +\infty)$ 上，其中 a， $b \in \mathbb{R}$。作为应用，我们推导了次椭圆方程 $\Delta_b u + au\log u = 0$ 的正解的先验估计和哈纳克不等式。

1. 引言

在 [6], L.Ma 证明了方程正解的局部梯度估计

$$\Delta u + au\log u + bu = 0, \tag{1.1}$$

对于度量固定且里奇曲率局部有界的完备非紧黎曼流形，其中 $a < 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 为常数。Yang 将 L.Ma 的结果推广，并推导出了抛物型方程正解的局部梯度估计

$$u_t = \Delta u + au\log u + bu, \tag{1.2}$$

其中 a、 $b \in \mathbb{R}$ 为常数。

定理 1.1（[7]）。设 M 是一个维数为 n 的完备非紧黎曼流形。假设 M 的里奇曲率下界为常数 $-K$，其中 $R > 0$、 $K \geq 0$，在以 $p \in M$ 为中心、半径为 $2R$ 的测地球 $B_{2R}(p)$ 内。如果 $u(x,t)$ 是方程 (1.1) 在 $M \times [0, +\infty)$ 上的正光滑解，令 $f = \log u$。则

Date：2023年5月2日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 32V05，32V20，32G07。*Key words and phrases.*次梯度估计，非线性次抛物方程，伪厄米流形。

（i）如果 $a<0$，则对任意 $\alpha>1$ 和 $0<\delta<1$，

$$|\nabla f|^2(x,t)+\alpha a f(x,t)+\alpha b-\alpha f_t(x,t)\le \frac{n\alpha^2}{2\delta t}+\frac{n\alpha^2}{2\delta}\left\{\frac{2\epsilon^2}{R^2}+\frac{\nu}{R^2}-\frac{a}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\epsilon^2}{R^2}(n-1)(1+R\sqrt{K})+\frac{K}{\alpha-1}+\frac{n\alpha^2\epsilon^2}{8(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right\},$$

在 $B_R(p)\times(0,+\infty)$ 上，其中 $\epsilon>0$ 和 $\nu>0$ 是一些常数；
（ii）如果 $a>0$，则对于任意 $\alpha>1$ 和 $0<\delta<1$，

$$|\nabla f|^2(x,t)+\alpha a f(x,t)+\alpha b-\alpha f_t(x,t)\le \frac{n\alpha^2}{2\delta t}+\frac{n\alpha^2}{2\delta}\left\{\frac{2\epsilon^2}{R^2}+\frac{\nu}{R^2}+a\right.$$
$$\left.+\frac{\epsilon^2}{R^2}(n-1)(1+R\sqrt{K})+\frac{K}{\alpha-1}+\frac{n\alpha^2\epsilon^2}{8(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right\},$$

在 $B_R(p)\times(0,+\infty)$ 上，其中 $\epsilon>0$ 和 $\nu>0$ 是一些常数。

本文考虑如下非线性次抛物方程

$$u_t=\Delta_{\mathrm{b}}u+au\log u+bu, \tag{1.3}$$

在完备伪厄米流形（M^{2n+1},J,θ）上，其中 a,b 是两个实常数。将 u 替换为 $e^{b/a}u$后，我们只需考虑如下方程的正光滑解:

$$u_t=\Delta_{\mathrm{b}}u+au\log u. \tag{1.4}$$

为了寻找一种合适的方法来处理（1.4）的局部正解，让我们回顾一下定理1.1的证明。主要有两个要点：Bochner公式和拉普拉斯比较定理。Bochner公式指出:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla\varphi|^2=|\nabla^2\varphi|^2+\langle\nabla\varphi,\nabla\Delta\varphi\rangle+\mathrm{Ric}(\nabla\varphi,\nabla\varphi)$$

对于 M 上的任意光滑函数 φ。拉普拉斯比较定理指出，若 $\mathrm{Ric}_M\ge -K$，则有 $\Delta r\le(n-1)r^{-1}+\sqrt{K}(n-1)$，此结论在分布意义下成立。利用Bochner公式对 $\log u$ 应用该公式，可推导出一个微分不等式

$$(\Delta-\partial_t)F\ge -2\langle\nabla f,\nabla F\rangle+t[2/n(-F/(\alpha t)-(1-\alpha^{-1})|\nabla f|^2)^2$$
$$+((\alpha-1)a-2K)|\nabla f|^2]-aF-\frac{F}{t},$$

其中 $f=\log u$，且 $F=t(|\nabla f|^2+\alpha a f-\alpha f_t)$。结合上述不等式，并通过使用合适的截断函数进行局部化，可得到局部梯度估计。截断函数的估计用到了拉普拉斯比较定理。

在本文中，我们需要考虑CR领域中的类似结果。首先，让我们考虑CR背景下的Bochner公式。Greenleaf [3] 证明了

即在伪Hermitian $2n+1$-流形上，Bochner公式的以下CR版本：对于 M上的光滑实值函数 φ，

$$\Delta_{\mathrm{b}}|\nabla^{\mathrm{b}}\varphi|^2 = 2|\pi_{\mathrm{b}}\nabla^2\varphi|^2 + 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}\varphi, \nabla^{\mathrm{b}}\Delta_{\mathrm{b}}\varphi\rangle + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0}\varphi, \nabla^{1,0}\varphi) + 4\langle J\nabla^{\mathrm{b}}\varphi, \nabla^{\mathrm{b}}\varphi_0\rangle.$$

注意到，CR Bochner公式的右端包含一项$\langle J\nabla^{\mathrm{b}}\varphi,\ \nabla^{\mathrm{b}}\varphi_0\rangle$，而这项在黎曼情形中没有对应项。为克服这一困难，我们考虑一个辅助函数 $F = t\,(\,|\nabla f|^2 + \alpha a f - \alpha f_t + \beta t f_0^2)$ 。

接下来，我们考虑CR背景下的次拉普拉斯比较定理。当一个伪厄米挠率为零的完备伪厄米流形满足 $\mathrm{Ric}(Z,Z) \geq -k|Z|^2$，对所有 $Z \in T_{1,\ 0}(M)$，并且 $k \geq 0$，Chang 等人 [2] 证明了 Carnot-Carath´eodory 距离函数的 CR 次拉普拉斯比较定理成立。另一方面，Dong 等人 [1] 证明了以下比较定理：

定理 1.2（[1]）。假设（M^{2n+1}, J, θ）是一个完备伪厄米流形。如果对于某些 k_1, $k_2 \geq 0$,

$$R_* \geq -k_1,\ \ and\ |A|, |divA| \leq k_2,\ \ on\ M,$$

则存在 $C_1 = C_1(n)$ 使得

$$\Delta_{\mathrm{b}} r \leq C_1\left(\frac{1}{r} + \sqrt{1 + k_1 + k_2 + k_2^2}\right),$$

在分布意义下，其中 $r(x)$ 是到 x_0 的黎曼距离。

特别地，如果 (M, J, θ) 挠率为零，并且满足 $\mathrm{Ric}(Z,Z) \geq -k|Z|^2$，对于所有 $Z \in T_{1,\ 0}(M)$ $k \geq 0$（这意味着 $R_* \geq -k$），黎曼距离函数的 CR 次拉普拉斯比较定理成立。

在 CR 几何中，Chang 等人 [2] 在满足 CR 次拉普拉斯比较性质的完备非紧致伪厄米流形上，推导了正伪调和函数的次梯度估计。在 [8], 中，He 和 Zhao 获得了以下非线性方程的正解的次梯度估计：

$$\Delta_b u + cu^{-\alpha} = 0,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha > -1$ 是两个常数。在 [9], Y. B. Han、K. G. Jiang 和 M. H. Liang 修改了 [2] 的论证，并得到了以下结果。

定理 1.3（[9]）。设（M, J, θ）是一个完备的伪 Hermitian（$2n+1$）流形。假设

$$2\,\mathrm{Ric}(Z,Z) - (n-2)\,\mathrm{Tor}(Z,Z) \geq -2k|Z|^2,$$

对所有 $Z \in T_{1,0}(M)$ 及 $k \geq 0$ 均成立。此外，假设 (M, J, θ) 满足 CR 次拉普拉斯比较性质。若 u 是方程的正解

$$\Delta_{\mathrm{b}} u + au \log u = 0$$

在 $[\Delta_{\mathrm{b}}, T]u = 0$ 上，令 $f = \log u$。于是有

$$\begin{aligned}&\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + a\frac{n + a\beta + 4 + \gamma + 2\beta k}{n + a\beta}\log u + \beta\frac{u_0^2}{u^2}\\ <&\frac{(n + a\beta + 4 + \gamma + 2\beta k)^2}{2(4 + \gamma + 2\beta k)^2}\left[2k + \frac{4}{\beta} - a\frac{4 + \gamma + 2\beta k}{n + a\beta} + \frac{C}{R}\right]\end{aligned}$$

在半径足够大的球 $B_R(x_0)$ 上，其中半径 R 仅取决于 a、β、γ、k；这里 $a \leq 0$、$\beta \geq 0$ 和 $\gamma > 0$ 是满足 $n + a\beta > 0$ 的常数。

本文中，令 $B_R(x_0)$ 表示以 $x_0 \in M$ 为中心、半径为 R 的黎曼测地球。

定理 1.4. 设 (M^{2n+1}, J, θ) 为一个完备伪厄米流形，且满足

$$(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(Z, Z) \geq -2k|Z|^2, \ \textit{for all } Z \in T_{1,0}(M), \ \textit{on } B_{2R}(x_0),$$

其中 $k \geq 0$。假设 M 满足 CR 次拉普拉斯比较性质 (2.1)。

设 $u(x,t)$ 是方程 (1.4) 在 $B_{2R}(x_0) \times [0, +\infty)$上的正光滑解，满足

$$[\Delta_{\mathrm{b}}, T]u = 0.$$

Then

(*i*) 若 $a \leq 0$，则对任意 $\alpha \geq 4/n + 1$ 和 $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \alpha a f - \alpha\frac{u_t}{u} \leq{}& \frac{n\alpha^2}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha - 1)}\right)\\ &+ \frac{n\alpha^2}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2} + \frac{\epsilon C_0}{R^2}(1 + \sqrt{\tilde{k}}R) + \frac{2\epsilon^2}{R^2}\right) + \frac{((\alpha - 1)|a| + 2k)}{\alpha - 1}\right.\\ &\left.+ \frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1 - \delta)(\alpha - 1)R^2}\right]. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

˜在 $B_R(x_0) \times (0, +\infty)$ 上，其中 $f = \log u$，且 ϵ、υ、C_0、$k > 0$ 是一些常数；(*ii*) 若 $a > 0$，则对任意 $\alpha \geq 4/n + 1$ 和 $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \alpha a f - \alpha\frac{u_t}{u} \leq{}& \frac{n\alpha^2}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha - 1)}\right)\\ &+ \frac{n\alpha^2}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2} + \frac{\epsilon C_0}{R^2}(1 + \sqrt{\tilde{k}}R) + \frac{2\epsilon^2}{R^2}\right) + a + \frac{2kn + 2a}{n(\alpha - 1)}\right.\\ &\left.+ \frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1 - \delta)(\alpha - 1)R^2}\right], \qquad (1.6)\end{aligned}$$

˜在 $B_R(x_0) \times (0, +\infty)$ 上，其中 $f = \log u$，且 ϵ、υ、C_0、$k > 0$ 是一些常数。

定理 1.4 的一个有趣推论是以下结果。

推论 1.5. 设 (M^{2n+1}, J, θ) 是一个完备伪厄米流形，且

$$(2Ric - (n-2)Tor)(Z,Z) \geq 0, \ for\ all\ Z \in T_{1,0}(M), \ on\ M.$$

假设 M 满足 CR 次拉普拉斯比较性质 (2.1)。若 $u(x)$ 是方程的一个正光滑解

$$\Delta_b u + au\log u = 0, \quad on\ M,$$

满足

$$[\Delta_b, T]u = 0.$$

那么，若 $a < 0$，则对所有 $x \in M$，有 $u(x) \geq e^{-4-n}$；若 $a > 0$，则对所有 $x \in M$，有$u(x) \leq e^{3(4+n)/2}$。

定理 1.6. 在定理 1.4的假设下，若 u 是 (1.4)的一个正解，则对任意 (x_1,t_1)，(x_2,t_2) 属于 $B_{R/2}(x_0) \times (0,\tau)$ 且 $t_2 > t_1$，并且 $\alpha \geq 4/n+1$，有

$$u(x_2,t_2) \geq u(x_1,t_1)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-\frac{\alpha(n\alpha-n+2)}{\delta(\alpha-1)}} e^{-\alpha L(x_1,x_2,t_2-t_1)} e^{S(t_2-t_1)}$$

此处 S 是由(5.2)给出的常数。此外，L 由下式给出

$$L(x_1,x_2,t_2-t_1) = \inf_{\gamma}\left[\frac{1}{4(t_2-t_1)}\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt\right],$$

其中，Γ 是所有完全位于$B_R(x_0)$内且满足 $\gamma(t_1) = x_1$ 和 $\gamma(t_2) = x_2$的长曲线 $\gamma \in C^1([t_1,t_2]; M)$的集合。

2. Preliminaries

本节中，我们将介绍伪 Hermitian 几何的一些基本概念。有关详情，请参阅[5]。

回顾一下，若实维数为 $2n+1$ 的光滑流形 M 上存在一个秩为 n 的光滑复子丛$T_{1,0}(M) \subset T^{\mathbb{C}}M$，使得

$$T_{1,0}(M) \cap T_{0,1}(M) = \{0\}$$
$$[\Gamma^\infty(T_{1,0}(M)), \Gamma^\infty(T_{1,0}(M))] \subset \Gamma^\infty(T_{1,0}(M)),$$

其中，$T_{0,1}(M) = \overline{T_{1,0}(M)}$ 是 $T_{1,0}(M)$ 的复共轭。等价地，CR 结构也可以用实子丛 $H(M) = Re\{T_{1,0}(M) \oplus T_{0,1}(M)\}$ 来描述，它属于 TM，并带有一个近复结构 J：$H(M) \to H(M)$，其定义为：对于任意 $X \in T_{1,0}(M)$，有 $J(X+\bar{X}) = i(X-\bar{X})$。由于 $H(M)$ 由近复结构 J自然定向，因此M 可定向，当且仅当存在一个处处不为零的全局 1-形式

θ 使得 $H(M) = Ker(\theta)$。这样的任一截面 θ 都称为 M上的拟厄米结构。给定拟厄米结构 θ 的 Levi形式 L_θ 定义如下：

$$L_\theta(Z,W) = -id\theta(Z,\bar{W}) \text{ for any } Z,W \in T_{1,0}(M).$$

若某个 θ 使得 L_θ 正定，则称可定向 CR 流形 (M,J,θ) 为严格拟凸的。这样的三元组 (M,J,θ) 称为伪厄米流形。

对于伪厄米流形 (M,J,θ)，存在唯一处处非零的向量场 T，称为 Reeb向量场，并满足 $\theta(T) = 1, T \lrcorner d\theta = 0$。它给出切丛 TM 的一个分解：

$$TM = \mathbb{R}T \oplus H(M),$$

由此诱导出投影 π_H：$TM \to H(M)$。定义双线性形式G_θ 如下：

$$G_\theta(X,Y) = d\theta(X,JY),$$

对任意 $X,Y \in H(M)$，均如此定义。现在，自然可以定义黎曼度量

$$g_\theta = \pi_H G_\theta + \theta \otimes \theta$$

它使 $H(M)$ 与 $\mathbb{R}T$ 正交。度量 g_θ 称为 Webster度量，为简便起见也记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。通过要求 $JT = 0$，近复结构 J 可扩展为 TM 上的一个自同态。本文中，若伪厄米流形 (M,J,θ) 关于 Webster度量 g_θ 完备，则称其为完备的。

在伪厄米流形上，存在一个典范联络 ∇，称为 Tanaka-Webster 联络，它保持水平分布、几乎复结构和 Webster度量。

我们首先在 $T_{1,\ 0}(M)$ 上定义 Ric 和 Tor：

$$\mathrm{Ric}(Z,W) = R_{\alpha\bar{\beta}} Z^\alpha W^{\bar{\beta}}$$

and

$$\mathrm{Tor}(Z,W) = i \sum_{\alpha,\beta} (A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} Z^{\bar{\alpha}} W^{\bar{\beta}} - A_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta).$$

这里，$Z = Z^\alpha T_\alpha, W = W^\beta T_\beta$表示 $T^{\mathbb{C}}M$ 的一个标架 $\{T, T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}\}$。$R^\delta_{\gamma\alpha\bar{\beta}}$ 是伪厄米曲率张量；$R_{\alpha\bar{\beta}} = R^\gamma_{\gamma\alpha\bar{\beta}}$ 是伪厄米 Ricci 曲率张量；$A_{\alpha\beta}$ 是挠率张量。设 $\{\theta, \theta^\alpha, \theta^{\bar{\alpha}}\}$ 为 $\{T, T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}\}$ 的对偶标架。那么，Levi形式可写为：

$$L_\theta = h_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}$$

对于某个由函数构成的正定厄米矩阵（$h_{\alpha\bar{\beta}}$）。实际上，我们总可以选择 T_α使得 $h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$；因此，本文中我们始终假设 $h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$。

由于 Tanaka-Webster 联络将 $T_{1,0}(M)$ 平行化，因此存在唯一确定的复1-形式 $\omega_\beta^\alpha \in \Gamma(T^{*\mathbb{C}}(M))$（在 U 上局部定义），使得

$$\nabla T_\alpha = \omega_\alpha^\beta T_\beta, \nabla T_{\bar{\alpha}} = \omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} T_{\bar{\beta}}, \nabla T = 0.$$

该 ω_α^β 满足以下方程:

$$d\theta^\beta = \theta^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta + \theta \wedge \tau^\beta,$$
$$0 = \tau_\alpha \wedge \theta^\alpha,$$
$$0 = \omega_\alpha^\beta + \omega_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}},$$

其中 $\tau_\alpha = A_{\alpha\gamma}\theta^\gamma$，且 $A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\alpha}$。Tanaka-Webster 联络的曲率用标架余标架 $\{\theta, \theta^\alpha, \theta^{\bar{\alpha}}\}$ 表示为

$$\Pi_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha.$$

Webster 指出， Π_β^α 可以写成

$$\Pi_\beta^\alpha = R_{\beta\rho\bar{\sigma}}^\alpha \theta^\rho \wedge \theta^{\bar{\sigma}} + W_{\beta\rho}^\alpha \theta^\rho \wedge \theta - W_{\beta\bar{\rho}}^\alpha \theta^{\bar{\rho}} \wedge \theta + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - i\tau_\beta \wedge \theta^\alpha.$$

我们用逗号引出指标来表示协变导数的分量；因此记作 $A_{\alpha\beta,\ \gamma}$。指标 $\{0, \alpha, \bar{\alpha}\}$ 表示对 $\{T, T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}\}$ 求导。对于标量函数的导数，我们通常省略逗号，例如 $u_\alpha = T_\alpha(u)$ $u_{\alpha\bar{\beta}} = T_\alpha(u_{\bar{\beta}}) - \omega_\alpha^\gamma(T_{\bar{\beta}})u_\gamma$，$u_{\alpha\beta\gamma} = T_\alpha(u_{\beta\gamma}) - \omega_\alpha^\lambda(T_\beta)u_{\lambda\gamma} - u_{\beta\mu}\omega_\alpha^\mu(T_\gamma)$。请注意，我们使用的记号与 [2]中的作者所用的记号略有不同。

对于实函数 u，次梯度 ∇^{b} 定义为 $\nabla^{\mathrm{b}} u \in \Gamma(H(M))$ and $\langle Z, \nabla^{\mathrm{b}} u\rangle = du(Z)$, 对所有 $Z \in \Gamma(H(M))$ 均成立。局部地， $\nabla^{\mathrm{b}} u = u_\alpha T_{\bar{\alpha}} + u_{\bar{\alpha}} T_\alpha$。我们可以利用联络定义次Hessian:

$$\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 u = u_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta + u_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \otimes \theta^{\bar{\beta}} + u_{\bar{\alpha}\beta}\theta^{\bar{\alpha}} \otimes \theta^\beta + u_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta^{\bar{\alpha}} \otimes \theta^{\bar{\beta}}.$$

特别地， $|\nabla^{\mathrm{b}} u|^2 = 2u_\alpha u_{\bar{\alpha}}$, $|\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 u|^2 = 2(u_{\alpha\beta}u_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + u_{\alpha\bar{\beta}}u_{\bar{\alpha}\beta})$。此外，我们将次拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_{\mathrm{b}} u = tr(\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 u) = \sum_\alpha (u_{\alpha\bar{\alpha}} + u_{\bar{\alpha}\alpha}).$$

为简便起见，对于任意定义在 M 上的光滑函数 φ，我们始终用 φ_0 表示 $T(\varphi)$。

接下来回顾以下交换关系。令 $\{T_A\} = \{T, T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}\}$，其中 $A \in \{0, 1, \ldots, n, \overline{1}, \ldots, \bar{n}\}$ 和 $T_0 = T$)。设 φ 为光滑函数，则有

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} &= \varphi_{\beta\alpha}, \\ \varphi_{\alpha\bar{\beta}} &= \varphi_{\bar{\beta}\alpha} - ih_{\alpha\bar{\beta}} f_0, \\ \varphi_{\alpha 0} &= \varphi_{0\alpha} + A_\alpha^{\bar{\beta}} \varphi_{\bar{\beta}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

and

$$\varphi_{\lambda\mu\alpha} = \varphi_{\mu\lambda\alpha} + i(\varphi_\mu A_{\alpha\lambda} - \varphi_\lambda A_{\alpha\mu}),$$

$$\varphi_{\lambda\bar{\mu}\alpha} = \varphi_{\bar{\mu}\lambda\alpha} - i\varphi_{0\alpha}h_{\lambda\bar{\mu}} - \varphi_\beta R_\alpha{}^\beta{}_{\lambda\bar{\mu}},$$
$$\varphi_{\bar{\lambda}\bar{\mu}\alpha} = \varphi_{\bar{\mu}\bar{\lambda}\alpha} + i\varphi_\beta(h_{\alpha\bar{\mu}}A^\beta_{\bar{\lambda}} - h_{\alpha\bar{\lambda}}A^\beta_{\bar{\mu}}),$$
$$\varphi_{\mu 0\alpha} = \varphi_{0\mu\alpha} + f_{\bar{\beta}\alpha}A^{\bar{\beta}}_\mu - \varphi_\beta W^\beta_{\alpha\mu},$$
$$\varphi_{\bar{\mu}0\alpha} = \varphi_{0\bar{\mu}\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}A^\beta_{\bar{\mu}} + \varphi_\beta W^\beta_{\alpha\bar{\mu}}.$$

定义 2.1。若存在常数 $C_0 = C_0(n) \geq 0, k \geq 0$，使得……，则称 (M, J, θ) 满足 CR 子拉普拉斯算子比较性质。

$$\Delta_{\mathrm{b}} r \leq C_0(1/r + \sqrt{\tilde{k}}),$$

在分布意义下。

3. Proof of the subparabolic Li-Yau type estimate in theorem 1.4

本节旨在证明定理 1.4中的非线性 Li-Yau 估计。由于证明过程较为复杂且需要若干中间步骤，为了清晰方便起见，我们将证明分为三个小节，首先推导并建立一些必要的工具和恒等式，最后在最后一个小节中完成证明。

3.1. CR Bochner公式及一些基本引理。

我们首先回顾 Greenleaf 给出的以下 CR 版 Bochner公式 [3]，它适用于伪 Hermitian（$2n+1$）流形。

引理 3.1. 对于定义在 M 上的光滑实值函数 φ，

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{b}}|\nabla^{\mathrm{b}}\varphi|^2 = {} & 2|\pi_{\mathrm{b}}\nabla^2\varphi|^2 + 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}\varphi, \nabla^{\mathrm{b}}\Delta_{\mathrm{b}}\varphi\rangle \\ & + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0}\varphi, \nabla^{1,0}\varphi) + 4\langle J\nabla^{\mathrm{b}}\varphi, \nabla^{\mathrm{b}}\varphi_0\rangle.\end{aligned}$$

由引理 3。1，文献 [2] 中的作者得到了以下 CR Bochner 型估计。

引理 3.2. 对于 M 上的光滑实值函数 φ 以及任意 $\nu > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{b}}|\nabla^{\mathrm{b}}\varphi|^2 \geq {} & 4\Big(\sum_{\alpha,\beta}|\varphi_{\alpha\beta}|^2 + \sum_{\alpha,\beta=1,\alpha\neq\beta}^{n}|\varphi_{\alpha\bar{\beta}}|^2\Big) + \frac{1}{n}(\Delta_{\mathrm{b}}\varphi)^2 + n\varphi_0^2 \\ & + 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}\varphi, \nabla^{\mathrm{b}}\Delta_{\mathrm{b}}\varphi\rangle + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0}\varphi, \nabla^{1,0}\varphi) \\ & - \frac{2}{\nu}|\nabla^{\mathrm{b}}\varphi|^2 - 2\nu|\nabla^{\mathrm{b}}\varphi_0|^2. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

下面的引理给出了光滑函数 φ 的 $\Delta_{\mathrm{b}}\varphi_0$ 与 $(\Delta_{\mathrm{b}}\varphi)_0$ 之间的关系。

引理 3.3 ([2])。 对于定义在 M 上的光滑实值函数 φ ，有

$$\Delta_{\mathrm{b}}\varphi_0 = (\Delta_{\mathrm{b}}\varphi)_0 + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[(\varphi_{\bar{\beta}}A_{\alpha\beta})_{\bar{\alpha}} + (\varphi_{\beta}A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})_{\alpha}]. \tag{3.2}$$

现在，我们定义

$$V(\varphi) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[(A_{\alpha\beta}\varphi_{\bar{\beta}})_{\bar{\alpha}} + (A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\varphi_{\beta})_{\alpha} + A_{\alpha\beta}\varphi_{\bar{\beta}}\varphi_{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\varphi_{\beta}\varphi_{\alpha}].$$

设 u 是定义在 $M\times[0,+\infty)$ 上的正光滑解，记

$$f = \log u.$$

容易验证， f 满足方程

$$(\Delta_{\mathrm{b}} - \partial_t)f = -af - |\nabla^{\mathrm{b}}f|^2. \tag{3.3}$$

引理 3.4。 设 u 是 (1.4) 定义在 $M\times[0,+\infty)$上且满足 $f=\log u$的正光滑解。则

$$\Delta_{\mathrm{b}}f_0 = f_{0t} - af_0 - 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}f_0, \nabla^{\mathrm{b}}f\rangle + 2V(f),$$

其中 $f_{0t} = T(f_t)$。

证明。 利用（3.2）、（3.3）以及交换关系（2.1），可得

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{b}}f_0 &= (f_t - af - |\nabla^{\mathrm{b}}f|^2)_0 + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[(\varphi_{\bar{\beta}}A_{\alpha\beta})_{\bar{\alpha}} + (\varphi_{\beta}A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})_{\alpha}]\\ &= f_{0t} - af_0 - 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}f_0, \nabla^{\mathrm{b}}f\rangle + 2V(f).\end{aligned}$$

□

引理 3.5 ([2])。 设 u 是定义在 $M\times[0,+\infty)$ 上的正光滑函数，且满足$f=\log u$。假设

$$[\Delta_{\mathrm{b}}, T]u = 0.$$

Then

$$V(f) = 0.$$

由引理 3.4 和 3.5，容易得到以下结论。

推论 3.6。 设 u 是方程 (1.4) 在 $M\times[0,+\infty)$上满足 $f=\log u$的正光滑解。假设

$$[\Delta_{\mathrm{b}}, T]u = 0.$$

那么 f 满足

$$\Delta_{\mathrm{b}}f_0 = f_{0t} - af_0 - 2\langle\nabla^{\mathrm{b}}f_0, \nabla^{\mathrm{b}}f\rangle. \tag{3.4}$$

3.2. 次抛物型不等式。本小节中，我们引入一个由解 u 构造的哈纳克量，并在算子 $\partial_t - \Delta_b$下建立一个次抛物型不等式。

引理3.7。 设 u 是方程 (1。 4) 在 $B_{2R}(x_0) \times[0,+\infty)$ 上的正光滑解，并设 $F = F(x,t)$ 定义为

$$F(x,t) = t(|\nabla^b f|^2(x,t) + \alpha a f(x,t) - \alpha f_t(x,t) + \beta t f_0^2(x,t)), \quad t \geq 0 \tag{3.5}$$

其中 $f = \log u$ 和 $\alpha > 1, \beta > 0$ 为常数。设

$$[\Delta_b, T]u = 0.$$

则 F 满足

$$\begin{aligned}\Delta_b F - F_t = &-2\langle \nabla^b f, \nabla^b F\rangle - \frac{F}{t} - aF + t\Big[2|\pi_b \nabla^2 f|^2 + 4\langle J\nabla^b f, \nabla^b f_0\rangle \\ &+ 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) + 2\beta t|\nabla^b f_0|^2 \\ &+ (\alpha-1)a|\nabla^b f|^2 - \beta t a f_0^2 - \beta f_0^2\Big],\end{aligned}$$

在 $B_{2R}(x_0) \times (0,+\infty)$ 上。

证明。参考 u的方程，直接计算可得， f 进而满足方程

$$(\Delta_b - \partial_t) f = -af - |\nabla^b f|^2. \tag{3.6}$$

此外，利用（3.5）和（3.6），容易看出 F、 $|\nabla^b f|^2$和 $\Delta_b f$之间满足以下关系:

$$\begin{aligned}\Delta_b f &= f_t - af - \left(\frac{F}{t} - \alpha a f + \alpha f_t - \beta t f_0^2\right) \\ &= -\frac{F}{t} + (\alpha - 1)af - (\alpha - 1) f_t + \beta t f_0^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

现在这些恒等式和关系均已得到，我们接下来将算子 $\partial_t - \Delta_b$ 作用于由（3.5）给出的 Harnack量 F。为此，我们首先注意到

$$\Delta_b F = t(\Delta_b |\nabla^b f|^2 + \alpha a \Delta_b f - \alpha \Delta_b f_t + 2\beta t f_0 \Delta_b(f_0) + 2\beta t |\nabla^b f_0|^2). \tag{3.8}$$

对于右侧的第一项，回顾应用于 f 的 CR Bochner公式，可得

$$\begin{aligned}\Delta_b |\nabla^b f|^2 = &\, 2|\pi_b \nabla^2 f|^2 + 2\langle \nabla^b f, \nabla^b \Delta_b f\rangle \\ &+ 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) + 4\langle J\nabla^b f, \nabla^b f_0\rangle,\end{aligned}$$

因此代回（3.8），并利用（31.3），可得

$$\begin{aligned}\Delta_b F = t\Big[&2|\pi_b \nabla^2 f|^2 + 2\langle \nabla^b f, \nabla^b \Delta_b f\rangle + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) \\ &+ 4\langle J\nabla^b f, \nabla^b f_0\rangle + \alpha a \Delta_b f - \alpha \Delta_b f_t + 2\beta t |\nabla^b f_0|^2\end{aligned}$$

$$+2\beta t f_0 f_{0t} - 2\beta t a f_0^2 - 4\beta t f_0 \langle \nabla^{\mathrm{b}} f_0, \nabla^{\mathrm{b}} f\rangle \Big]. \tag{3.9}$$

现在考虑右侧第二、第五和第六项的贡献，除去因子 t 并利用（3.6）和（（3.7））， 可将其化简并重新写为:

$$\begin{aligned}
&2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} \Delta_{\mathrm{b}} f\rangle + \alpha a \Delta_{\mathrm{b}} f - \alpha \Delta_{\mathrm{b}} f_t \\
&\qquad = 2\Big\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} \Big(-\frac{F}{t} + (\alpha-1) a f - (\alpha-1) f_t + \beta t f_0^2 \Big) \Big\rangle \\
&\qquad\quad + \alpha a \Big(-\frac{F}{t} + (\alpha-1) a f - (\alpha-1) f_t + \beta t f_0^2 \Big) \\
&\qquad\quad - \alpha f_{tt} + a\alpha f_t + 2\alpha \langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_t\rangle) \\
&\qquad = -\frac{2}{t}\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} F\rangle + 2(\alpha-1) a |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 + 2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_t\rangle \\
&\qquad\quad + 4\beta t f_0 \langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_0\rangle - \frac{\alpha a F}{t} + \alpha a^2 (\alpha-1) f \\
&\qquad\quad - (\alpha-2)\alpha a f_t + \alpha a \beta t f_0^2 - \alpha f_{tt}.
\end{aligned}$$

因此，将其代回（3.9）并重新整理等式，可得

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{b}} F = -2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} F\rangle + t\Big[& 2|\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 f|^2 + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) \\
& + 4\langle J\nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_0\rangle + 2\beta t |\nabla^{\mathrm{b}} f_0|^2 + 2(\alpha-1) a |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 + 2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_t\rangle \\
& - \frac{\alpha a F}{t} + \alpha a^2 (\alpha-1) f + 2\beta t f_0 f_{0t} + (\alpha-2)(\beta t a f_0^2 - \alpha a f_t) - \alpha f_{tt}\Big].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

结合（3.10）以及

$$\begin{aligned}
F_t &= \frac{F}{t} + t(|\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 + \alpha a f - \alpha f_t + \beta t f_0^2)_t \\
&= \frac{F}{t} + t[2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_t\rangle + \alpha a f_t - \alpha f_{tt} + \beta f_0^2 + 2\beta t f_0 f_{0t}],
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{b}} F - F_t &= -2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} F\rangle - \frac{F}{t} + t\Big[2|\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 f|^2 + 4\langle J\nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_0\rangle \\
&\qquad + 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) + 2\beta t |\nabla^{\mathrm{b}} f_0|^2 \\
&\qquad + 2(\alpha-1) a |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 - \frac{\alpha a F}{t} + \alpha a^2 (\alpha-1) f \\
&\qquad + (\alpha-2)\beta t a f_0^2 - (\alpha-1)\alpha a f_t - \beta f_0^2 \Big] \\
&= -2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} F\rangle - \frac{F}{t} + t\Big[2|\pi_{\mathrm{b}} \nabla^2 f|^2 + 4\langle J\nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} f_0\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(\nabla^{1,0} f, \nabla^{1,0} f) + 2\beta t |\nabla^{\mathrm{b}} f_0|^2 \\
&+ (\alpha - 1) a |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 - \frac{\alpha a F}{t} + (\alpha - 2)\beta t a f_0^2 \\
&+ (\alpha - 1) a \left(|\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 + \alpha a f - \alpha f_t \right) - \beta f_0^2 \Big].
\end{aligned}
$$

再次利用（3.5），并重新整理等式，即可得到所需的结论。□

引理 3.8. 设 (M^{2n+1}, J, θ) 是一个完备伪厄米流形，满足

$$
(2\,\mathrm{Ric} - (n-2)\,\mathrm{Tor})(Z, Z) \geq -2k|Z|^2, \ \textit{for all } Z \in T_{1,0}(M), \ \textit{on } B_{2R}(x_0), \tag{3.11}
$$

其中 $k \geq 0$。设 u 是方程 (1。4) 在 $B_{2R}(x_0) \times [0, +\infty)$ 上的一个正光滑解，并设 $F = F(x,t)$ 如 (3。5)中所示。假设

$$
[\Delta_{\mathrm{b}}, T] u = 0.
$$

Then

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{b}} F - F_t \geq & -2\langle \nabla^{\mathrm{b}} f, \nabla^{\mathrm{b}} F \rangle - \frac{F}{t} - aF \\
& + t \Big[\frac{1}{n} (\Delta_{\mathrm{b}} f)^2 + (n - \beta - ta\beta) f_0^2 \\
& + \left((\alpha - 1) a - 2k - \frac{2}{\beta t} \right) |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2 \Big],
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

在 $B_{2R}(x_0) \times (0, +\infty)$ 上。

证明。 回顾 (3。1)，注意 (3。11)，并取 $\nu = \beta t$，即可立即得到结论。□

3.3. 定理 1.4 中局部估计的证明。具备所有必要的要素和工具后，我们现在着手证明主要估计。证明思路是将引理 3.8 中建立的不等式与利用适当截断函数进行的局部化论证结合起来。对截断函数的估计则利用了 CR 次拉普拉斯比较性质，证明过程中将对此作详细说明。我们选取一个参考点 $x_0 \in M$，并固定 $R > 0, \tau > 0$。我们用 $r(x) = d(x, x_0)$ 表示相对于x_0的测地径向变量。为进行局部化，我们先考虑半直线 $r \geq 0$ 上的函数 $\chi = \chi(r)$（见下文引理 3.9），然后对 $x \in M$ 令

$$
\phi(x) = \chi\left(\frac{r(x)}{R} \right). \tag{3.13}
$$

（ χ （见3.13）中所用的）存在性及其性质由以下直接陈述给出。

引理 3.9. 存在一个函数 $\chi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$，满足以下性质：

$i)$ χ *is of class* $C^2[0\ +\infty)$；*ii)* $0\le\chi(r)\le$ 对于 $0\le r<\infty$，当 $\chi=1$ 对于 $r\le 1$ 且 $\chi=0$ 对于 $s\ge 2$时；*iii)* χ 是非递增的，并且对于适当的常数 ϵ、$\upsilon>0$，满足以下界

$$-\epsilon\chi^{1/2}(r)\le\chi'(r),\quad and\quad \chi''\ge-\upsilon, \tag{3.14}$$

在半直线 $[0,+\infty)$ 上。

情形 1：$a\le 0$。

由 ii) 显然可知，当 $0\le r(x)\le R$ 时，$\phi=1$；当 $r(x)\ge 2R$ 时，$\phi=0$。现在考虑空间局部化函数 ϕF，其中 F 如 (3.5) 所示。记 (z,s) 为该函数 $^-$ 在紧集 $B_{2R}(x_0)\times[0,\tau]$ 上取得最大值的点。根据 Calabi 的标准论证 [4]，我们可以假设 z 不在 x_0 的割迹上，因此 ϕ 在 z 处光滑，从而可以应用最大值原理。此外，我们可以假设 $[\phi F](z,s)>0$，否则根据 $F\le 0$，所需估计显然成立。因此可推出 $s>0$，并且 $z\in B_{2R}(x_0)$，所以在最大值点 (z,s) 处有以下关系

$$\nabla^{\mathrm{b}}(\phi F)=0,\Delta_{\mathrm{b}}(\phi F)\le 0,F_t\ge 0. \tag{3.15}$$

从基本恒等式 $\Delta_{\mathrm{b}}(\phi F)=\phi\Delta_{\mathrm{b}}F+2\langle\nabla^{\mathrm{b}}\phi,\ \nabla^{\mathrm{b}}F\rangle+F\Delta_{\mathrm{b}}\phi$并注意到最大值点（3. 15）处的关系式（$z$，$s$），我们可以写成

$$\begin{aligned}0\ge\Delta_{\mathrm{b}}(\phi F)&=\phi\Delta_{\mathrm{b}}F+2\phi^{-1}\langle\nabla^{\mathrm{b}}\phi,\nabla^{\mathrm{b}}(\phi F)\rangle-2(|\nabla^{\mathrm{b}}\phi|^2/\phi)F+F\Delta_{\mathrm{b}}\phi\\&\ge\phi\Delta_{\mathrm{b}}F-2(|\nabla^{\mathrm{b}}\phi|^2/\phi)F+F\Delta_{\mathrm{b}}\phi.\end{aligned} \tag{3.16}$$

现在由（3. 13）可推得 $\nabla^{\mathrm{b}}\phi=(\chi'/R)\nabla^{\mathrm{b}}r$，$\Delta_{\mathrm{b}}\phi=\chi''|\nabla^{\mathrm{b}}r|^2/R^2+\chi'\Delta_{\mathrm{b}}r/R$ 因此

$$|\nabla^{\mathrm{b}}\phi|^2/\phi\le\frac{\epsilon^2}{R^2},\ \ \Delta_{\mathrm{b}}\phi\ge-\frac{\upsilon}{R^2}-\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R), \tag{3.17}$$

其中我们使用了（3.14）和 CR 次拉普拉斯比较性质（2.1）。因此回到（3.16），调用（3.12）并注意到（3.15）、（3.17），我们在最大值点（z，s）处得到不等式

$$\begin{aligned}0&\ge\phi\Delta_{\mathrm{b}}F-2(|\nabla^{\mathrm{b}}\phi|^2/\phi)F+F\Delta_{\mathrm{b}}\phi\\&\ge-\left(\frac{\upsilon}{R^2}+\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R)\right)F-2\frac{\epsilon^2}{R^2}F\\&\quad+\phi\Big\{-2\langle\nabla^{\mathrm{b}}f,\nabla^{\mathrm{b}}F\rangle-\frac{F}{s}-aF\\&\qquad+s\Big[\frac{1}{n}(\Delta_{\mathrm{b}}f)^2+(n-\beta-sa\beta)f_0^2\end{aligned}$$

$$+\left((\alpha-1)a-2k-\frac{2}{\beta s}\right)|\nabla^{\mathrm{b}}f|^2\Big]\Big\}. \tag{3.18}$$

现在利用（3.15）和（3.17）对最后一个不等式第二行中的第一项进行估计，得到:

$$2\phi\langle\nabla^{\mathrm{b}}f,\nabla^{\mathrm{b}}F\rangle=-2\langle\nabla^{\mathrm{b}}f,\nabla^{\mathrm{b}}\phi\rangle F\le 2|\nabla^{\mathrm{b}}\phi||\nabla^{\mathrm{b}}f|F\le\frac{2\epsilon}{R}\phi^{1/2}|\nabla^{\mathrm{b}}f|F.$$

为简化起见，设

$$B=\frac{\upsilon}{R^2}+\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R)+2\frac{\epsilon^2}{R^2},\ \text{and}\ \mu=|\nabla^{\mathrm{b}}f|^2(z,s)/F(z,s)\ge 0.$$

因此，将上式代入式（3.18）并整理各项，得到

$$\begin{aligned}&BF+\frac{2\epsilon F^{3/2}}{R}\phi^{1/2}\mu^{1/2}+\phi F/s+a\phi F\\&\ge s\phi\left[\frac{1}{n}(\Delta_{\mathrm{b}}f)^2+(n-\beta-sa\beta)f_0^2+\left((\alpha-1)a-2k-\frac{2}{\beta s}\right)F\mu\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

在（z,s）处。根据 F,μ的定义以及方程（3.6），在（z,s）处有

$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathrm{b}}f)^2&=(f_t-af-|\nabla^{\mathrm{b}}f|^2)\\&=\left(\frac{F}{\alpha s}+(1-\alpha^{-1})|\nabla^{\mathrm{b}}f|^2-\alpha^{-1}\beta s f_0^2\right)^2\\&\ge\frac{F^2(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{\alpha^2s^2}-2\frac{[1+(\alpha-1)\mu s]F\beta f_0^2}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

将式（3.19）两边乘以 $s\phi$，并利用式（3.20）以及$0\le\phi\le 1$ 和 $a\le 0$这一事实，可得在（z,s）处，

$$\begin{aligned}&s\phi BF+2\frac{\epsilon F^{3/2}}{R}\mu^{1/2}s\phi^{3/2}+F\phi\\&\ge s^2\phi^2\left[\frac{1}{n}(\Delta_{\mathrm{b}}f)^2+(n-\beta)f_0^2-\left((\alpha-1)|a|+2k+\frac{2}{\beta s}\right)F\mu\right]\\&\ge\frac{\phi^2F^2}{n}\frac{(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{\alpha^2}-2\frac{s^2\phi^2}{n}\beta f_0^2F\frac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}\\&\quad+s^2\phi^2\left[(n-\beta)f_0^2-\left((\alpha-1)|a|+2k+\frac{2}{\beta s}\right)F\mu\right]\\&=\frac{\phi^2F^2(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{n\alpha^2}-s^2\phi^2\left((\alpha-1)|a|+2k+\frac{2}{\beta s}\right)F\mu\\&\quad+\left[(n-\beta)-2\frac{\beta F}{n}\frac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}\right]f_0^2s^2\phi^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

现在，令

$$\beta=\frac{n}{1+\dfrac{2F(z,s)}{n}\dfrac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}}\ \text{and}\ \lambda=\phi(z)F(z,s).$$

于是，在 (z,s) 处有

$$\begin{aligned} sB\lambda+2\frac{\epsilon\lambda^{3/2}}{R}\mu^{1/2}s+\lambda &\geq \frac{\lambda^2(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{n\alpha^2}-s^2\phi^2((\alpha-1)|a|+2k)F\mu \\ &\quad -\frac{2s\lambda\mu}{n}-\frac{4s\lambda^2\mu}{n^2}\frac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2} \\ &\geq \frac{\lambda^2(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]}{n\alpha^2} \\ &\quad -s^2\lambda\mu((\alpha-1)|a|+2k)-\frac{2s\lambda\mu}{n}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

为简便起见，设

$$A=(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n].$$

根据假设（$\alpha-1$）$n\geq 4$，我们有 $A\geq 1$。对于任意固定的 $0<\delta<1$，在（z， s）处

$$2\frac{\epsilon\lambda^{3/2}}{R}\mu^{1/2}s\leq(1-\delta)\frac{\lambda^2}{n\alpha^2}A+\frac{\lambda\epsilon^2s^2\mu\alpha^2n}{(1-\delta)AR^2}. \tag{3.23}$$

利用（3.22）和（3.23），我们有

$$\frac{\delta\lambda}{n\alpha^2}\leq\frac{s^2\mu((\alpha-1)|a|+2k)+sB+1}{A}+\frac{2s\mu}{nA}+\frac{\epsilon^2s^2\mu\alpha^2n}{(1-\delta)A^2R^2}. \tag{3.24}$$

现在，我们着手对上一个不等式右端的完整表达式进行估计。为此，先处理第一项，

$$\begin{aligned} \frac{s^2\mu((\alpha-1)|a|+2k)+sB+1}{(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]} &\leq sB+\frac{s^2\mu((\alpha-1)|a|+2k)+1}{1+(\alpha-1)\mu s} \\ &\leq sB+1+\frac{s((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

同理，对于后续各项，我们有

$$\frac{2s\mu}{n(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]}\leq\frac{2}{n(\alpha-1)}, \tag{3.26}$$

and

$$\frac{\epsilon^2s^2\mu\alpha^2n}{(1-\delta)(1+(\alpha-1)\mu s)^2[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]^2R^2}\leq\frac{\epsilon^2s\alpha^2n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}. \tag{3.27}$$

现在参照（3.24），利用（3.25）-（3.27）中得到的界，我们得到

$$\lambda\leq\frac{n\alpha^2}{\delta}\left[sB+1+\frac{s((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1}+\frac{2}{n(\alpha-1)}+\frac{\epsilon^2s\alpha^2n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right].$$

回想 λ 和 B 的定义，我们有

$$\sup_{B_R(x_0)}|\nabla^{\mathrm{b}}f|^2(x,\tau)+\alpha af(x,\tau)-\alpha f_t(x,\tau)\leq\frac{n\alpha^2}{\delta\tau}\left(1+\frac{2}{n(\alpha-1)}\right)$$

$$+\frac{n\alpha^2}{\delta}\left[\left(\frac{v}{R^2}+\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R)+\frac{2\epsilon^2}{R^2}\right)+\frac{((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1}\right.$$
$$\left.+\frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right],$$

我们完成了定理 1.4 中（i）的证明。

情形 2： $a>0$。

我们采用与上文相同的记号。我们还假设 ϕF 在 $(z,s)\in B_{2R}(x_0)\times[0,\tau]$ 处取得正的最大值。通过类似的方法推导 (3.21)，可在点 (z,s) 处得到以下估计：

$$\begin{aligned}&s\phi BF+2\frac{\epsilon F^{3/2}}{R}\mu^{1/2}s\phi^{3/2}+F\phi+asF\phi\\&\geq\frac{\phi^2F^2(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{n\alpha^2}-s^2\phi^2\left(2k+\frac{2}{\beta s}\right)F\mu\\&\quad+\left[(n-\beta-sa\beta)-2\frac{\beta F}{n}\frac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}\right]f_0^2s^2\phi^2.\end{aligned}$$

现在，令

$$\beta=\frac{n}{1+sa+\dfrac{2F(z,s)}{n}\dfrac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}}\ \text{and}\ \lambda=\phi(z)F(z,s).$$

注意， $a>0$。于是我们在 (z,s) 处有

$$\begin{aligned}sB\lambda+2\frac{\epsilon\lambda^{3/2}}{R}\mu^{1/2}s+\lambda+as\lambda&\geq\frac{\lambda^2(1+(\alpha-1)\mu s)^2}{n\alpha^2}-2s^2k\lambda\mu\\&\quad-\frac{2s\lambda\mu(1+sa)}{n}-\frac{4s\lambda^2\mu}{n^2}\frac{1+(\alpha-1)\mu s}{\alpha^2}\\&=\frac{\lambda^2(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]}{n\alpha^2}\\&\quad-2s^2k\lambda\mu-\frac{2s\lambda\mu(1+sa)}{n}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

由 (3.23)，不等式 (3.28) 可化为

$$\frac{\delta\lambda}{n\alpha^2}\leq\frac{2s^2k\mu+1+as+sB}{A}+\frac{2s\mu(1+sa)}{nA}+\frac{\epsilon^2s^2\mu\alpha^2n}{(1-\delta)A^2R^2}.\tag{3.29}$$

类似地，现在我们来估计最后一个不等式右端的完整表达式：

$$\begin{aligned}\frac{s^2\mu((\alpha-1)|a|+2k)+1}{(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]}&\leq\frac{s^2\mu((\alpha-1)|a|+2k)+1}{1+(\alpha-1)\mu s}\\&\leq1+\frac{s((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1},\end{aligned}\tag{3.30}$$

$$\frac{2s\mu}{n(1+(\alpha-1)\mu s)[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]} \leq \frac{2}{n(\alpha-1)}, \tag{3.31}$$

and

$$\frac{\epsilon^2 s^2\mu\alpha^2 n}{(1-\delta)(1+(\alpha-1)\mu s)^2[(1+(\alpha-1)\mu s)-4s\mu/n]^2R^2} \leq \frac{\epsilon^2 s\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}. \tag{3.32}$$

现在参照（3.24），利用（3.31）-（3.32）中得到的界，我们得到

$$\lambda \leq \frac{n\alpha^2}{\delta}\left[sB+1+\frac{s((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1}+\frac{2}{n(\alpha-1)}+\frac{\epsilon^2 s\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right].$$

回顾 λ 和 B 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{B_R(x_0)} |\nabla^{\mathrm{b}} f|^2(x,\tau)+\alpha a f(x,\tau)-\alpha f_t(x,\tau) \leq{}& \frac{n\alpha^2}{\delta\tau}\left(1+\frac{2}{n(\alpha-1)}\right)\\ &+\frac{n\alpha^2}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2}+\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R)+\frac{2\epsilon^2}{R^2}\right)+\frac{((\alpha-1)|a|+2k)}{\alpha-1}\right.\\ &\left.+\frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right].\end{aligned}$$

我们完成定理 ii 中 (1.4) 的证明。

4. Proof of corollary 1.5

假设 $u(x)$ 是该方程的正光滑解

$$\Delta_{\mathrm{b}} u + au\log u = 0, \quad \text{on } M,$$

满足条件的

$$[\Delta_{\mathrm{b}}, T]u = 0.$$

情形 1。 $a<0$。

由于 $k=0$ 且 u（x）与 t无关，根据定理1.4中的（i），在 B_R（x_0）上有:

$$|\nabla^{\mathrm{b}} f|^2+\alpha a f \leq \frac{n\alpha^2}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2}+\frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R)+\frac{2\epsilon^2}{R^2}\right)+|a|+\frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right], \tag{4.1}$$

其中 $\alpha \geq 4/n+1$ 和 $0<\delta<1$ 是两个实常数，而 $\epsilon>0$ 和$\upsilon>0$ 是一些固定常数。令 $R\to+\infty$，由（4.1）可得:

$$\alpha a \log u(x) \leq -\frac{an\alpha^2}{\delta}. \tag{4.2}$$

由于 $a<0$，取 $\alpha=4/n+1$ 和 $\delta\to 1$，由（4.2）可得:

$$u(x) \geq e^{-4-n} \text{ for all } x\in M.$$

情形 2. $a>0$。

采用推导（4.2) 的相同方法，根据定理 ii 的结论1.4,

$$\alpha a \log u(x) \leq \frac{n\alpha^2}{\delta}\left(a + \frac{2a}{n(\alpha-1)}\right). \tag{4.3}$$

由于 $a > 0$，取 $\alpha = 4/n + 1$ 和 $\delta \to 1$，我们有 (4.3),

$$u(x) \leq e^{3(4+n)/2} \text{ for all } x \in M.$$

5. Proof of the parabolic Harnack inequality in Theorem 1.6

借助定理中建立的估计1.4 ，我们现在可以证明定理1.6中所需的次抛物型哈纳克不等式。为此，只需沿着 $B_{R/2}(x_0) \subset M \times (0, +\infty)$ 中适当的时空曲线对前一个估计进行积分。我们先将不等式 (1.5) 和 (1.6) 改写如下。

$$\begin{aligned}\frac{|\nabla^{\mathrm{b}} u|^2}{\alpha u^2} + a\log u - \frac{u_t}{u} \leq{}& \frac{n\alpha}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha-1)}\right) \\ &+ \frac{n\alpha}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2} + \frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R) + \frac{2\epsilon^2}{R^2}\right) + |a| + \frac{(2a^+ + 2nk)}{n(\alpha-1)}\right. \\ &\left. + \frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right].\end{aligned} \tag{5.1}$$

˜令 $S = S(n, \alpha, \delta, \upsilon, R, \epsilon, C_0, k, k, a)$ 定义为

$$\begin{aligned}S = -{}& \frac{n\alpha}{\delta}\left[\left(\frac{\upsilon}{R^2} + \frac{\epsilon C_0}{R^2}(1+\sqrt{\tilde{k}}R) + \frac{2\epsilon^2}{R^2}\right) + |a| + \frac{(2a^+ + 2nk)}{n(\alpha-1)}\right. \\ &\left. + \frac{\epsilon^2\alpha^2 n}{2(1-\delta)(\alpha-1)R^2}\right] + aq_1,\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $q_1 =$ 上确界$_{B_R(x_0)\times[0,\tau]}$ 对数 u。 由 (5.1) 可得

$$u_t/u \geq \frac{|\nabla^{\mathrm{b}} u|^2}{\alpha u^2} - \frac{n\alpha}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha-1)}\right) + S.$$

设 $\gamma:\ [t_1, t_2] \to M$ 是一条从 x_1 到 x_2的长曲线。回顾一下，γ 若 $\dot{\gamma}(t) \in H(M)_{\gamma(t)}$ 对每个 t都成立，则称其为长曲线。根据 W.L. Chow 的定理, [11], 中的任意两点 M 都可以由一条长曲线连接。利用上述结果可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log u(\gamma(t), t) &= \left\langle \frac{\nabla^{\mathrm{b}} u}{u}, \dot{\gamma}(t)\right\rangle + \frac{u_t}{u} \\ &\geq \left\langle \frac{\nabla^{\mathrm{b}} u}{u}, \dot{\gamma}(t)\right\rangle + \frac{|\nabla^{\mathrm{b}} u|^2}{\alpha u^2} - \frac{n\alpha}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha-1)}\right) + S \\ &= \alpha^{-1}\left|\frac{\nabla^{\mathrm{b}} u}{u} + \alpha\frac{\dot{\gamma}(t)}{2}\right|^2 - \alpha\frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{4} - \frac{n\alpha}{\delta t}\left(1 + \frac{2}{n(\alpha-1)}\right) + S\end{aligned}$$

$$\geq -\alpha\frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{4} - \frac{n\alpha}{\delta t}\left(1+\frac{2}{n(\alpha-1)}\right) + S.$$

因此，对上述不等式进行积分可得

$$\begin{aligned}\log\frac{u(x_2,t_2)}{u(x_1,t_1)} &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\log u(\gamma(t),t)dt\\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} -\alpha\frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{4} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{n\alpha}{\delta t}\left(1+\frac{2}{n(\alpha-1)}\right)dt + S(t_2-t_1)\\ &= -\frac{n\alpha}{\delta}\left(1+\frac{2}{n(\alpha-1)}\right)\log(t_2/t_1) - \frac{\alpha}{4}\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\gamma}(t)|^2dt + S(t_2-t_1).\end{aligned}$$

因此，两边取指数后可得

$$\frac{u(x_2,t_2)}{u(x_1,t_1)} \geq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-\frac{\alpha(n\alpha-n+2)}{\delta(\alpha-1)}}\exp\left[-\frac{\alpha}{4}\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\gamma}(t)|^2dt\right]\exp[S(t_2-t_1)],$$

或者，重新排列各项并对积分进行缩放后：

$$u(x_2,t_2) \geq u(x_1,t_1)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-\frac{\alpha(n\alpha-n+2)}{\delta(\alpha-1)}} e^{-\alpha L(x_1,x_2,t_2-t_1)}e^{S(t_2-t_1)}$$

其中

$$L(x_1,x_2,t_2-t_1) = \inf_{\gamma}\left[\frac{1}{4(t_2-t_1)}\int_0^1|\dot{\gamma}(t)|^2dt\right].$$

References

1. Chong, T., Dong, Y.X., Ren, Y.B., Zhang, W.：从完备非紧伪 Hermitian 流形到正则球的伪调和映射。J. Geom. Anal. (2019). 2. Chang, S.-C., Kuo, T.-J., Lin, C., Tie, J.-Z.：完备非紧 Sasakian 流形上的 CR 次拉普拉斯比较与刘维尔型定理。J. Geom. Anal. 29, 1676-1705 (2019) 3. Greenleaf, A.：伪 Hermitian 流形上次拉普拉斯算子的第一特征值。Commun. Part. Differ. Equ. 10(3), 191-217 (1985) 4. Calabi, E.：E. Hopf 最大值原理的推广及其在黎曼几何中的应用，Duke Math. J., 25, 45-56 (1958) 5. Dragomir, S., Tomassini, G.：CR 流形上的微分几何与分析。Progress in Mathematics, 第246卷。Birkh¨auser Boston, Inc. (2006) 6. L. Ma：非紧黎曼流形上简单椭圆方程的梯度估计，J. Funct. Anal., 241 (2006), 374-382. 7. Y.Y.Yang：黎曼流形上非线性抛物方程的梯度估计，Proc. Amer. Math. Soc. 136(2008),4095-4102. 8. He, Guoqing; Zhao, Peibiao：完备伪 Hermitian 流形上方程 $\Delta_b u + cu^{-\alpha} = 0$ 的次梯度估计。J. Geom. Anal. 32 (2022), 第4期, 论文编号 132, 27 页。 9. Han, Yingbo; Jiang, Kaige;Liang, Mingheng：完备伪 Hermitian 流形上非线性次椭圆方程的次梯度估计。Bull. Korean Math. Soc. 55 (2018), 第1期, 175-186. 10. S. C. Chang, H. L. Chiu and C. T. Wu：闭 CR 三维流形上 Yamabe 流的李－丘－汉密尔顿不等式。美国数学会会刊 362 (2009): 1681-1698.

11. W. L. Chow: ¨关于一阶线性偏微分方程组，Math. Ann. 117 (1939年), 98-105.

School of Mathematical Sciences University of Science and Technology , , , of China Hefei 230026 P.R. China
Email address: anprin@mail.ustc.edu.cn