arXiv:2305.00830v1 [math.LO] 1 May 2023

关于有限 Morley 秩的拟 Frobenius 对

Tuna Altınel、Luis Jaime Corredor 和 Adrien Deloro

2023年5月2日

摘要

我们阐明有限 Morley 秩的拟 Frobenius 构形。1. 我们在简化证明的同时，去掉了 Zamour 的一项识别定理中的假设。2. 我们证明，奇型的强嵌入拟 Frobenius 构形实际上是 Frobenius 构形。3. 对于二面体构形，有 dim $G = 3$dim C。这些结果依赖于一种有趣的现象：非泛型元素在取中心化子时具有闭包性。

§ 1. 引言 — § 2. 关键引理 — § 3. 证明

1 引言

对于匆忙阅读的读者，我们的结果如下。

主要结果。 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 是 $U_2^\perp$且含有对合。

- 若 C 可解，但 G 不可解，则 C 是一个 *Borel* 子群，或 $(C < G) \simeq (\mathbb{K}^\times < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}))$（定理 *A*）。
- 指数 $[N_G(C) : C]$ 为 1 或 2，*Prüfer* 2-秩为 1，且 $C = C_G^\circ(i)$对其唯一对合成立（定理 *B*）。
- 如果 $[N_G(C) : C)] = 2$，那么 维数 $G = 3$ 维数 C (定理 *C*)。

（定理A 改进了 Zamour 的工作。）我们还在引言末尾向有限群论专家提出了一个问题。现在我们来解释并讨论。

背景。本研究仅使用有限 Morley 秩群的一般理论中极少的内容：定义、关于秩（记作 dim）的基本计算、连通分支与莫雷次数 deg、下降链条件，以及对半单挠元的一些基本了解，便已足够。特别地，这里有一个大集的概念：若可定义子集 $X \subseteq G$ 满足 dim X = dim G，则称其为泛的。重要的是，连通群中的两个泛子集必定相交。 [Che 05] 包含了足够的背景知识。我们补充 Borel 子群的定义：一个可定义、连通、可解且在此意义下极大的子群。一如既往， $U_2^\perp$表示：不存在无限初等阿贝尔 2-群。因此， $U_2^\perp$ with involutions 是我们表达“奇型”的方式。回顾一下，在这种情况下，Sylow 2-子群是 2-环面的有限扩张，而后者是指 $C_{2^\infty}^d$，其中 C_{2^∞} 是通常的 Prüfer 准循环 2-群，对于整数 d，称其为 G的 Prüfer 2-秩。最后，如果一个对合 i 作用于一个可定义的连通子群 H，且满足 $C_H^\circ(i) = 1$，那么 i 反转 H，并且 H 是阿贝尔群 [BN94，例 12，第 78] 页。

拟 Frobenius 对。 拟 Frobenius 对最初由 [DW20] 引入并研究，但直到 [Zam22] 才正式得名。

定义。 一对群 $(C < G)$ 若满足以下条件，则称为 拟 Frobenius：

- C 在 G中是拟自正规化的，即 $[N_G(C)\colon C] < \infty$;
- C 与真共轭子群的交平凡（简称"C 是 TI"），即 $(\forall g \in G)(C^g = C \vee C^g \cap C = 1)$。

这扩展了经典的弗罗贝尼乌斯群 这一概念（更准确地说，可以称为弗罗贝尼乌斯对），其中 C 是 ti，且具有 $N_G(C) = C$。以下各对均为拟弗罗贝尼乌斯对：

- $(\mathbb{K}^\times < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}))$，其中 $\mathbb{K}$ 为代数闭;
- $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) < \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$，其中 $\mathbb{R}$ 为实闭域。

因此，对非 Frobenius 的拟 Frobenius 对的研究处于几何代数的核心地位，值得认真开展，至少应在模型论假设下进行。本文聚焦于有限 Morley 秩。关于 o-极小情形的完整研究计划见 [DO22]。有限群的相应定义则会将 $[N_G(C)\colon C] < \infty$ 替换为 $[N_G(C)\colon C] = 2$，我们的定理B充分证明了这样做的合理性；这一自然条件似乎并未得到应有的关注。参见引言末尾。我们回到模型论。

如果 G 和 C 都是可定义的（分别为连通的），我们就称 $(C < G)$ 是可定义的（分别为连通的）。

备注。

- 与弗罗贝尼乌斯情形 [BN94命题 1119],不同，在拟 Frobenius 情形下， C 并不存在自动可定义性。例如，令 G 为 $\mathbb{F}_p$上的无限维向量空间，将其视为纯群，并令 C 为一个超平面。则 C不可定义，但该对是拟 Frobenius 对。

- 然而，若 G 连通且 C 可定义，则 C 连通。否则，C° 和 $\breve{}\, C = C \setminus C^\circ$ 是两个 ti 子集；然而 $N_G(C^\circ) = N_G(C) = N_G(\breve{}\, C)$，因此通过简单的维数计算，$\bigcup_{g\in G}(C^\circ)^g$ 和 $\bigcup_{g\in G} \breve{}\, C^g$ 都是泛的。因此它们相交：矛盾。

研究现状。 两类拟 Frobenius 构形之间存在一道明确的分界线。若一对 $(H < G)$ 满足：H 含有对合，但对于 $g \notin N_G(H)$，$H \cap H^g$ 中绝不会有对合，则称其为 强嵌入 。

事实 1 ([DW20，命题 1])。 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟 *Frobenius* 对。假设 G 含有 $U_2^\perp$对合。那么：

- 或者 $[N_G(C)\colon C] = 2$、 C 是阿贝尔的， $N_G(C) \setminus C$ 是一个反转 C 的对合集，*Prüfer* 2-秩为 1，此外还有许多已知结果（"二面体构型"）；
- 或 $[N_G(C) : C]$ 为奇数（可能为 1），且 $(N_G(C) < G)$ 是强嵌入的。

在全文中，"二面体"和"强嵌入"始终指这一主要二分法。理想情况下，人们会希望强嵌入构形是可解的，但这似乎难以实现。不过，人们预计二面体情形应当源自代数世界。

猜想 (‘A_1 猜想’，出自 [DW20])。 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的拟弗罗贝尼乌斯对，且具有有限 *Morley* 秩。假设 G 是 $U_2^\perp$含对合的。假设该构形是二面体的。那么 $G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$。

提出这一猜想，旨在消除仍然存在的一种可能病态情形[DJ16]，即 CiBo_2，，它代表“**对**合的中心化子是一个 **Borel** 子群，且其 Weyl 群的阶为 **2**”。Zamour 提供了有利的迹象，支持 A_1 ，不过他的表述与下文截然不同。

事实 2 ([Zam22，定理 1.0。6])。 设 $(C < G)$ 是一个有限 *Morley* 秩的可定义、连通拟 *Frobenius* 对。假设 G 含有 $U_2^\perp$对合。进一步假设 C 可解，但 G 不可解。 最后，假设该构形是二面体型的。那么：

- 或者 C 是一个 *Borel* 子群；
- 或 $(C < G) \simeq (\mathbb{K}^\times < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}))$。

这一形式的事实 2 与如下系列之间的惊人相似性 [CJ04；Del07a；DJ16] 表明，有限 *Morley* 秩的拟 *Frobenius* 构形表现得如同$N_\circ^\circ$-群。Zamour 用一个局部的结构性假设取代了全局的小性假设；他以对可解拟 Frobenius 对的分类（见下文事实 5 ）取代了 DJ16命题 3] 中对幺幂性的运用。因此，临时性的基于初等若尔当分解的论证，完全取代了 Burdges 版本的 Bender 局部分析。这一点将在关键引理（§ 2）中得到展示。

充分利用这一类比，就能明确接下来要证明什么：去掉对 Weyl 群的假设，研究强嵌入构形，并在非代数情形下获得维数估计。前两项结果依赖于 § 2 的关键引理，它使本研究的各部分融为一体。

我们的第一个结果。 Zamour 对事实 2 的证明可以大大简化。此外，我们去掉了一个不必要的假设。

定理 A。 设$(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 是 $U_2^\perp$ 且含有对合。进一步假设 C 可解，但 G 不可解。则该构形是二面体的，并且：

- 要么 C 是一个 *Borel* 子群（‘CoBo_2’）；
- 或 $(C < G) \simeq (\mathbb{K}^\times < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}))$。

“CoBo”意为“补群是一个 **Co**mplement is a **Bo**rel 子群”，类比上文讨论过的经典病态现象“CiBo”。Zamour 对一种可能的归纳策略提出了主张，意在彻底消除 CoBo_2，，我们认为这颇为大胆。他建议证明 C 真包含于某个 Borel 子群中。然而，正如 [CJ04；Del07b；DJ16]，所预言的，群 C（若可解）应当在此意义下极大，也就是说，它是一个 Borel 子群。自 [CJ04] 以来，这一点便已为人所知，尽管在不同情形下是用不同方法证明的。Zamour 所提出的“较弱”假设——所有 Borel 子群都是泛的——早已知会与 $N_\circ^\circ$性相矛盾，见 [Del07b，命题 4.1。35]。简言之，如果 Zamour 所声称的策略行得通，它就会通过一个天真的论证消除 CiBo_2，而我们不相信存在这样的天真论证。（我们很乐意被证明错了，并愿以奶酪作为酬谢。）

我们的第二个结果。尽管拟 Frobenius 对主要在二面体情形下通过 A_1 猜想才具有研究意义，我们也将强嵌入构型推广到了根式情形。我们证明如下结论。

定理 B。 设$(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟 *Frobenius* 对。假设 G 是 $U_2^\perp$且含有对合。那么，指数 $[N_G(C) : C]$ 要么是1 （“强嵌入”），要么是2（“二面体”）。两种情况下，*Prüfer* 2-秩均为1，且其唯一对合满足 $C = C_G^\circ(i)$ 。

因此，若 G 是 $U_2^\perp$且含有对合，则“拟 Frobenius、强嵌入”可归结为“Frobenius”。

备注。

- 我们并未声称 Sylow 2-子群是连通的；它们可能像特征不为 2 时 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 中的情形那样。一个具有 $C \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 的高度病态 Frobenius 对（$C < G$）一直困扰着该领域的研究人员，而且至今仍未消失。
- 我们不排除存在没有对合且 $N_G(C) > C$ 的拟 Frobenius 对的可能性。（要进一步推进，或许需要用到 [BC09，定理 5]；但这仍是一个完全开放的问题。）
- [的消除DJ16]的 CiBo$_1$，即使假设 $C_G(i)$不相交，也显然是一个极具挑战性的未解决问题。在拟 Frobenius 情形下，若 C不可解，情况甚至可能更糟。

我们的第三个结果。以下内容未见于 [DW20] 和 [Zam22]。

定理 C ([Del07b, 推论 4.1。31]； [Del08, 推论 3。27])。 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的、具有有限 *Morley* 秩的拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 是$U_2^\perp$带有对合，且该构形是二面体型的。那么 维数 $G = 3$ 维数 C。

备注。

- 当然，与 A_1 这一猜想相比，这一目标并不宏大；该猜想将立即推出定理C。
- 在强嵌入情形下没有维数估计。（参见证明。）

未尽事宜。 我们列出本研究尚未解决的问题。

1. 可定义线性拟 Frobenius 对。Zamour 在他的博士学位研究中有一些未发表的材料。2. 研究不存在对合时的拟弗罗贝尼乌斯对；特别是证明 $N = C$。（这对三位作者来说似乎都不是特别感兴趣。）3. 强嵌入情形下的可解性。这很可能非常困难，因为即使增加诸如 $N_\circ^\circ$ 这样的强假设，仍然会是一个难题 [DJ16]。4. A_1 猜想。Wiscons 和 D. 正在探索。此外，定理 B 引出了有限群论中的以下问题。

问题。 关于 G 为有限且 $[N_G(H) : H] = 2$ 的拟弗罗贝尼乌斯对，能得出什么结论？这个问题既针对可解的，也针对不可解的 G；既考虑有限单群分类，也不考虑有限单群分类；既考虑特征标理论，也不考虑特征标理论。

致谢。 关键引理和定理 A 于2022年2月在一次 ECOS-Nord 访问期间证明，当时 D. 前往波哥大。我们衷心感谢 ECOS-Nord 项目以及 Laurent Dubois 奶酪店。定理 B 于2022年9月至10月在一次“ CNRS 代表团”访问期间证明，当时 D. 前往里昂拜访 A.。定理C 是在 C. 于2023年4月至5月来到里昂拜访 A. 和 D. 时补充的。D. 衷心感谢 Bruno Poizat 和 Ulla Karhumäki 的热情款待与交谈。

2 关键引理

定理 A 和 B 的证明依赖一个共同的关键引理，这个引理在 [Zam22，定理 4.5 中被遗漏了。5]。

记号。 令 $\Gamma = \bigcup_{g\in G} C^g$ 为 明亮 元素的集合， $\Delta = G \setminus \Gamma$ 为 暗元素的集合。

明亮元素是泛的，即 $\Gamma \subseteq G$ 是一个泛型包含。将此与良环面中心化子的泛性结合起来 [Che05]，，我们发现每个环面元素都是明亮的。特别地，若 G 是 $U_2^\perp$，则任意对合都属于 C的唯一一个共轭。暗元素不足以提供足够的把握；但暗的强实元可以。根据 [DW20，定理 A]，这类元素确实存在。

关键引理。 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 是 $U_2^\perp$且含有对合。设 $d \in G$ 是暗元素，且被对合 i反转。则 $A = C_G^\circ(d)$ 是暗的、阿贝尔的，并被 i反转。此外，对于 $a \in C_G^\circ(d) \setminus \{1\}$，有 $C_G^\circ(d) = C_G^\circ(a)$。

证明。 设 $d = ij$ 与另一个对合 j，并令 $A = C_G^\circ(d)$。令 C_i 为包含 i的 C 的唯一共轭子群，并类似地定义 C_j。那么 i 正规化 A，且$C_A^\circ(i) = C_G^\circ(i, j) \leq C_i \cap C_j$。若 $C_i = C_j$，则 $d = ij \in C_i$ 是明亮的，矛盾。因此 $C_i \neq C_j$ 且 $C_A^\circ(i) = 1$；所以 i 反转 A （它是阿贝尔的）。 j也是如此。

假设某个 $c \in A$ 是明亮的。经过共轭，我们不妨假设 $c \in C$；现在i 和 j 反演 c，因此它们正规化 C。令 $N = N_G$ （C）。若 $[N : C]$ 是奇数，则i、 j、$d \in C$：矛盾。因此根据事实 1，该构形是二面体的，特别地， $[N : C] = 2$。现在 i、j 中恰有一个属于 C，另一个属于 $N \setminus C$。但 C 中的对合是唯一的，因此 $d = ij$ 是一个对合，再次导致矛盾。因此 A 由暗元素构成。

最后，令 $a \in A \setminus \{1\}$。我们已经证明 a 是暗的，且被 i反演。因此上述结论适用：$C_G^\circ(a)$ 被 i反演，且 j，故被 d中心化。因此，由阿贝尔性，$C_G^\circ(a) \leq C_G^\circ(d) \leq C_G^\circ(a)$。证明完毕。 □

备注。

- 容易证明， A 是 ti 的，并且是一个极大的可定义的连通幂零群。
- 可以推导出一种朴素的若尔当分解；它隐含在定理A的识别过程中。
- 通过 性以及暗物质的非泛性， A 是不几乎在 G中自正规化的。然而，包含 A 的 Borel 子群往往不是泛的。参见引言中关于定理A 的讨论。

3 证明

所有证明均相互独立；前两个证明依赖于关键引理。

3.1 定理的证明 A

一种可能的证明是引用定理B，然后依赖两个子情形：事实 2 以及[Zam22，定理 1.0。7]这种做法刻意而繁复；此外，我们是在关键引理的推论中才发现定理B 的。

相比之下，我们的证明简化了 Zamour 的证明。它仍使用了 [Zam22],的一些材料，即以下三个事实；它们将 Nesin 的“Frobenius”对应结果推广了。

事实 *3*（诱导结构：[*Zam22*，引理 *4.2*.1],，推广了 [*BN94*，引理 *11*.10]）。设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。设 $H < G$ 可定义且连通。若 $1 < H \cap C < C$，则 $(H \cap C < H)$ 是另一个可定义、连通的拟弗罗贝尼乌斯对。若 C_1, C_2 是 G与 C的共轭，且 $H \cap C_i \neq 1$，则 C_1 与 C_2 共轭于 H。

事实 *4*（非单分裂：[Zam22，命题 4.2。3], 扩展 [BN94，引理 11。21]）。设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 C 含有一个对合，并且存在一个无限、可定义、连通、正规且避开$A \lhd G$ 的 C。那么 G 以阿贝尔核和补分裂 C。

事实 5 (可解群分析： [Zam22，引理 4.3。1], 扩展 [BN94，定理 11。32])。设$(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 是可解的。那么 $(C < G)$ 是一个 *Frobenius* 对；此外， G 分裂为$G = G' \rtimes C$ 且 C 是阿贝尔的。最后， $\bigcup_{g \in G} C^g$ 覆盖 $G \setminus G'$。

定理 A 的证明从这里开始。

记号。

- 设（$C < G$）是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。假设 G 含有 $U_2^{\perp}$对合。
- 假设 C 是可解的，但 G 不是。
- 固定一个 *Borel* 子群 $B \geq C$。
- 假设 $B > C$。这立即意味着 B 不是阿贝尔的。
- 设 i 为一个对合。按照 *Bender* 的做法，对于 $k \in i^G$，令 $T_k = \{b \in B : b^k = b^{-1}\}$。（此处 B 在记号中仍然是隐含的。）

命题 A.1 （参见 [Zam22，引理 4.6。3]）。

(*i*) $\{k \in i^G \setminus N_G(B) : \dim T_k \geq \dim B - \dim C_G(i)\}$ 在 i^G 中是泛的。

备注。

- 到目前为止，只需 $N_G^\circ(B)$ 可解。包含关系 $C < B$ 从 （ii）开始使用，而额外条件 B 是一个 Borel 子群，则从 （iii）开始使用。
- 事实上， $N_G^\circ(B)$ 的可解性可以利用 证明， $C < B$ 以及 B的可解性。此事在（iii）中完成。
- 是 $C = C_G^\circ(i)$ 为 Borel 子群的情形不会提供任何信息，因为T_k-集是有限的 [CJ04； Del08； DJ16]。

证明。

(i) 为导出与 $\deg i^G = 1$ 矛盾，假设 $i^G \cap N_G(B)$ 在 i^G 中是泛的。对于$g \in G$ 令 $X_g = i^G \cap N_G(B^g) = (i^G \cap N_G(B))^g$，这是 i^G 的一个泛子集。根据降链条件，存在 g_1, ..., g_n，使得:

$$L = \bigcap_{g \in G} N_G(B)^g = \bigcap_{r=1}^{n} N_G(B)^{g_r}.$$

现在 $Y = X_{g_1} \cap \cdots \cap X_{g_n} \subseteq L$，且 Y在 i^G中是泛的。因此 $K = L^\circ$ 是一个非平凡、可定义、连通的正规子群。由 $N_G^\circ(B)$ 的可解性， K 是可解的。如果 $K \cap C = 1$，则构形因非单性而分裂（事实 4）。由于 K和 C 可解，所以 G 也可解：矛盾。因此，根据事实 3， $K \cap C \neq 1$ 和（$K \cap C < K$）构成一个拟弗罗贝尼乌斯对。但 $K \trianglelefteq G$。根据 Frattini 论证以及诱导结构中的共轭性（事实 3），$G = K \cdot N_G(C) = K \cdot N_G^\circ(C) = K \cdot C$。由于二者均可解，所以 G也可解：矛盾。因此， $i^G \setminus N_G(B)$ 在 i^G中是泛的。其余部分就是 Bender 计算 [DJ16，命题 2]，，将 i^G 推广到 B的平移中。 □

由于 $(C < B)$ 根据事实 3是一个拟弗罗贝尼乌斯对，因此它也有自身的暗性概念。(ii) 表明，该暗性概念由 $(C < G)$的暗性概念诱导。

命题A.2。

(ii) $B' \neq 1$ 是 B中的 G-暗元素集；***(iii)*** $N_G^\circ(B') = B$; ***(iv)*** 对于 $g \notin N_G(B)$，有 $B' \cap B^g = 1$。特别地， $B \cap B^g$ 是阿贝尔的。

证明。

(ii) 回想一下 $B' \neq 1$，否则 $B \leq N_G^\circ(C) = C$。由可解分裂（事实 5），$B = B' \rtimes C$且 C是阿贝尔的。对于 C中的一个对合 i，有$C_{B'}^\circ(i) = 1$，因此 i反转 B'。故 $B' = [B, i]$是阿贝尔的。由事实 5， $B \cap \Delta \subseteq B'$。反过来，若对于 C的某个 G-共轭有 $x \in B' \cap C^g \setminus \{1\}$，则$B' \leq C_G^\circ(x) \leq C^g$。因此$(B \cap C^g < B)$是一个拟弗罗贝尼乌斯对，所以根据事实 3， $B \cap C^g$ 是 C 的一个 B-共轭。于是 $C^g \leq B$，且 C^g 是 C的一个 B-共轭。现在 $x \in B' \cap C^g$ 是一个矛盾。这证明了 $B' \subseteq \Delta$。(iii) 设 $H = N_G^\circ(B') \geq B$。由于 $C < B \leq H$，根据事实 3，$(C < H)$是一个拟弗罗贝尼乌斯对。但 $1 < B' \trianglelefteq H$，所以由非单分裂（事实 4），H 以阿贝尔核和作为补的 C 分裂。因此 H 可解（这里不需要用到(i)，但这意味着$N_G^\circ(B) \leq H$可解）。最后，利用 Borel 子群的定义， $H = B$。(iv) 记住(ii)。设 $d \in (B' \cap B^g) \setminus \{1\}$。那么 $d \in B'$ 是暗的，因此 $d \in B^g \cap \Delta = (B^g)'$。于是 B'，$(B^g)' \leq C_G^\circ(d)$，后者由关键引理可知是阿贝尔的；现在$(B^g)' \leq C_G^\circ(B')$。但由(iii)、关键引理以及$B$ 的内部结构可知， $C_G^\circ(B') \leq C_B^\circ(B') \subseteq \Delta \cap N_G^\circ(B') \subseteq \Delta \cap B = B'$，因此$(B^g)' = B'$。取连通正规化子并再次应用(iii)，得到 $B^g = B$，这是一个矛盾。因此$(B \cap B^g)' \leq B' \cap B^g = 1$，且 $B \cap B^g$ 是阿贝尔的。 □

如此轻易地获得的交集控制凸显了“准 Frobenius”假设的力量：它完全绕过了对 [DJ16] 的局部分析。

命题 A.3（参见 [Zam22，引理 4.6。5]）。

(v) 对于 k 中的泛的 i^G，集合 T_k 等于 $(B \cap B^k)^\circ$，并且是 C 的一个共轭；

(vi) 该构形是二面体的。

证明。

(v) 固定泛的 k。由 (i)，k 不正规化 B，但 $\dim T_k \geq \dim B - \dim C_G(i)$。由 (iv)，$B \cap B^k$ 是阿贝尔的。因此，T_k 是一个阿贝尔群，并且 $T_k \leq B \cap B^k$。假设 T_k 包含一个暗元素 d；则由 (ii)，$d \in B'$，且 d 是被 k反转的强实元素。根据关键引理，k 反转 $C_G^\circ(d) \geq B'$，所以 k 正规化B'。因此，根据 (iii)，$k \in N_G(N_G^\circ(B')) = N_G(B)$，这就产生了矛盾。因此，$T_k$ 只由亮元素组成。现在，如果 s、$t \in T_k$ 和 $t \in C$，则由阿贝尔性，$C^s = C$，并且根据事实 5，$s \in N_B(C) = C$。所以所有元素都属于同一个共轭类；不妨设 $T_k \leq C$。

但此时 $T_k = T_k^k \leq C^k$，因此 $C = C^k \leq B \cap B^k$。由此得出结论。令 C_k 为包含 k的 C 的共轭。若 $X = B \cap C_k \neq 1$，则 $(X < B)$ 和 $(C < B)$ 都是拟 Frobenius 对。根据诱导结构中的共轭性（事实 3），我们得到 $\dim X = \dim C$，因此 $C_k \leq B$和 $k \in C_k \leq B$，这就产生了矛盾。因此 $X = 1$ 和 $C^\circ_{B\cap B^k}(k) \leq B \cap C_k = 1$，所以 k 反转 $(B \cap B^k)^\circ$。这意味着 $(B \cap B^k)^\circ \leq T_k$。综上，

$$T_k \leq C \leq (B \cap B^k)^\circ \leq T_k,$$

如所需。

(vi) 现在 $k \in N_G(C) \setminus C$：根据事实 1，该构形是二面体的。 □

备注。

- (vi) 正是 Zamour 关于 $[N : C]$ 的假设并非必要的原因。
- 在证明 k 反转 $(B \cap B^k)^\circ$时，注意连通分支。不能声称 $C_G(k) \leq C_k$，因为在二面体情形中这是错误的。
- 可以证明 $T_k = B \cap B^k$，但这并未被使用。

命题 A.4。

(vii) $G \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$。

证明。

(vii) 我们首先注意到 $\dim B' \geq \dim C$。设 $c \in C \setminus \{1\}$ 正规化某个 $d \in B' \setminus \{1\}$。根据事实 5，d 正规化 $C_B^\circ(c) = C$，因此 $d \in C$：矛盾。因此，C在 B'上的作用是自由的，这意味着 $\dim B' \geq \dim C$。（利用 $\dim C = \dim T_k \geq \dim B'$ 和线性化方法，我们甚至可以得到等式，并将其推进到某个域 $\mathbb{K}$上的 $B \simeq \mathrm{GA}_1(\mathbb{K})$，但这并未被使用。）

感谢(v)，对泛的 $k \in i^G$ 将 C 的共轭关联为等于 T_k。值域包含于 $\{C^b : b \in B\} = \{C^b : b \in B'\}$，其维数与 B'相同。容易看出，纤维的维数恰好等于 C的维数。因此：

$$\dim G - 2\dim C = \dim i^G - \dim C \leq \dim B'.$$

接下来我们证明 $N_G(B) = B$。根据 Frattini 论证和事实 3，$N_G(B) = B \cdot (N_G(B) \cap N_G(C))$。假设存在 $x \in N_G(B) \cap N_G(C) \setminus C$。由于该

构形由 (vi) 可知是二面体，事实 1 蕴含 x 是一个反转 C 的对合。它还正规化 B'，而根据 (ii)， B' 由暗物质组成：因此 $C_{B'}(x)^\circ = 1$，且 x 反转 B'。所以 x 同时反转 C（它是 2-可除的）和 B'；因此 C 中心化 B'，这就产生了矛盾。因此 $N_G(B) = B$。

由于 $g \notin B$ 满足 $B' \cap B^g = 1$ 根据 (iv)，我们推得：

$$\dim G \geq \dim B + \dim B' \geq \dim B + \dim C = \dim B' + 2\dim C \geq \dim G.$$

这足以得到 $G = BgB' \sqcup B$ 关于 $g \notin B$的布鲁哈特分解，并恢复 (B, N)-对，如 [Zam22] 或 [DJ16中的命题 3], 所示，或有限 Morley 秩群理论中迄今已知的任意 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ 识别定理。

□

3.2 定理 B 的证明

证明改编自 [BCJ07]。它独立于 § 3.1 ，但仍使用 § 2 的关键引理。

记号。

- 设 $(C < G)$ 是一个可定义、连通的有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。设 G 是 $U_2^\perp$，且带有对合。
- 设 $N = N_G(C)$。如果 $[N : C]$ 为偶数，则根据事实 *1*，结论已经成立。因此，假设 $[N : C]$ 为奇数。根据事实 *1*，$(N < G)$ 是强嵌入的。
- 令 I 为 G 中的对合集，且 $\breve{} I = I \setminus N$。注意，由于 $[N : C]$为奇数，$\breve{} I = I \setminus C$。由强嵌入可知， I 是单个 G-共轭类，而$I \cap N = I \cap C$ 是单个 N-共轭类 *[BN94，定理 10。19]*。

命题 B.1 （一个首个泛型集）。

(i) $\breve{} I$ 在 I中是泛的；*(ii)* 乘积映射 $\mu\colon C \times \breve{} I \to G$ 具有平凡纤维；*(iii)* $C \cdot \breve{} I$ 在 G 中是泛的；*(iv)* 对任意 $i \in I \cap C$，都有 $C = C_G^\circ(i)$；*(v)* C 的非平凡强实元都是对合；*(vi)* 只需证明 $N = C$。

证明。

(i) 否则， $I \cap N$ 在 I中是泛的；由强嵌入，后者是单个 G-共轭类，因此其次数为 1。于是对于 $g \in G \setminus N$，有 $(I \cap N) \cap (I \cap N)^g \neq \emptyset$，这与 $(N < G)$ 的强嵌入矛盾。(ii) 若 $c_1k_1 = c_2k_2$ 按显然的记号满足 $(c_1, k_1) \neq (c_2, k_2)$，则 $1 \neq c_1^{-1}c_2 = k_1k_2^{\breve{}}$是 C 中的一个被 k_1反转的元素。由于 C 是 ti，故有 $k_1 \in N$，这与 $k_1 \in I$矛盾。(iii) 设 $i \in C$ 为一个对合；由于 C 是 ti，有 $C_G^\circ(i) \leq C$。映射 μ 的纤维平凡，由 (ii)，因此利用 (i)：$\dim(C \cdot \breve{} I) = \dim(C \times \breve{} I) = \dim C + \dim I \geq \dim C_G^\circ(i) + \dim G - \dim C_G^\circ(i) = \dim G$

，

证明一般性。

(iv) 在*(iii)* 的证明中，我们还得到$\dim C_G^\circ(i) \leq \dim C$中的等式，因此由后者的连通性可得$C = C_G^\circ(i)$。

(v) 设 $1 \neq k\ell \in C$ 是两个对合的乘积。那么 k 反转 $k\ell$，因此它正规化 C；由于 $[N : C]$ 是奇数，$k \in C$ 且 $\ell \in C$ 同样如此。现在根据 *(iv)* 二者在 C 中都是中心的，所以 $k\ell$ 也是一个对合。

(vi) 假设此结论成立。由强嵌入和*(iv)*，$N = C = C_G^\circ(i)$ 共轭其对合，因此 i 是 C中唯一的对合；于是 Prüfer 2-秩 G（它等于 C的秩）恰为1。（也可以依据 [BN94，引理 11。20]。）

□

因此，我们以下假设 $C < N$，并导出一个矛盾。

记号。

- 令 $\sigma \in N \setminus C$。
- 另令 $I_\sigma = (C\sigma I) \cap \breve{}I$。

命题 B.2（一个泛暗陪集）。

(vii) I_σ 在 I中是泛的；

(viii) 我们可以假设 σ 是强实且暗的；从现在起我们都作此假设；

(ix) $C_C^\circ(\sigma) = 1$；***(x)*** σ^C 在 σC 中是泛的。

证明。

(vii) 根据 *(iii)*，$C \cdot \breve{}I \subseteq C \cdot I$ 在 G中是泛的；因此，经过平移后，$\sigma CI = C\sigma I$也是如此。由连通性可知，$(C\sigma I) \cap (C\breve{}I) = CI_\sigma$ 在 G 中也是泛的。但 $I_\sigma \subseteq \breve{}I$，因此根据*(ii)*，可得：

$$\dim C + \dim I = \dim G = \dim(C \cdot I_\sigma) = \dim C + \dim I_\sigma,$$

这意味着 $\dim I_\sigma = \dim I$。

(viii) 由 *(vii)* 可知 $I_\sigma \neq \emptyset$。因此有方程 $c\sigma k = \ell$，采用显然的记号。现在 $c\sigma$ 是强实的；考虑这个元素而非我们原来的 σ，不妨设 σ 是强实的。若 σ 是明亮的，则它属于 C的一个共轭。根据 *(v)*，σ 是 N的一个对合。但是 $\sigma \in N$，所以 $\sigma \in C$：矛盾。

(ix) 根据 *(viii)* 我们可以应用关键引理：$C_G^\circ(\sigma)$ 由暗物质组成。特别地，$C_C^\circ(\sigma) = 1$。

(x) 模 C 计算可得包含关系 $\sigma^C \subseteq \sigma C$。根据 *(ix)* 有 $C_C^\circ(\sigma) = 1$，因此 $\dim(\sigma^C) = \dim C$。所以 σ^C 是 σC的泛子集。

□

记号。令 $\breve{}Z = C_G(\sigma) \setminus N$。

命题 B.3（第二个泛型集与矛盾）。

(xi) $\breve{}Z$ 在 $C_G(\sigma)$中是泛的；

(xii) $\dim(C\breve{}ZC) = 2\dim C + \dim C_G(\sigma)$；

(xiii) 每个 $k \in I_\sigma$ 都反转 σC中的唯一一个元素；

(xiv) 维数 $I \leq$ 维数 $C +$ 维数 $C_G(\sigma)$；*(xv)* $C\check{}ZC$ 在 G中是泛的；*(xvi)* 矛盾。

证明。

*(xi)*有 $\dim(C_G(\sigma) \cap N) = \dim C_N^\circ(\sigma) = \dim C_C^\circ(\sigma) = 0$根据 *(ix)*，因此 $\check{}Z$在 $C_G(\sigma)$中是泛的。

(xii) 我们将证明乘积映射 $C \times \check{}Z \times C \to G$ 具有有限纤维。考虑形如 $c_1 z c_2 = c_1' z' c_2'$ 的方程，记号显然。由于 C 是一个子群，我们可以假设 $c_1' = c_2' = 1$，因此问题归结为处理形如$c_1 z c_2 = z'$的方程。应用 σ 得到：

$$c_1^\sigma z c_2^\sigma = z'^\sigma = z' = c_1 z c_2,$$

由此 $z^{-1}[c_1, \sigma]z = [c_2^{-1}, \sigma] \in C^z \cap C$。根据定义 $z \notin N$，因此 $[c_1, \sigma] = 1$。但根据 *(ix)*，这种情况只会发生有限次。对于 c_2，同样如此。因此纤维是有限的，所需的等式由 *(xi)* 得出。

(xiii) 根据定义，每个 $k \in I_\sigma$ 都可以写成 $k = c\sigma\ell$，其中 $c \in C$ 且 $\ell \in I$。于是，k 反转 $c\sigma \in C\sigma = \sigma C$。现在，假设 σc_1、$\sigma c_2 \in \sigma C$ 是被 k 反转的两个元素。令 $d = c_1^{-1}c_2$。那么

$$d^k = (c_1^{-k}\sigma^{-k})(\sigma^k c_2^k) = (\sigma c_1)^{-k}(\sigma c_2)^k = \sigma c_1 \cdot c_2^{-1}\sigma^{-1} \in C^k \cap C^{\sigma^{-1}} = C^k \cap C.$$

$\check{}$ 由于 $k \in I_\sigma \subseteq I$ 不正规化 C，我们找到 $d = 1$，正如所需。

(xiv) 根据**(xiii)**，以下映射是良定义且可定义的：f：$I_\sigma \to \sigma C$ 将 k映射到 σC 中唯一被 k反演的元素。我们估计其纤维的维数。首先，$f(I_\sigma) \subseteq \sigma^C$。事实上，令 $\tau \in f(I_\sigma)$。那么 τ是强实的；由于它不是对合，根据**(v)**，它是暗的。现在根据**(x)**，τ^C 在 σC中是泛的，因此它与σ^C相交：而 τ 是 C-共轭于 σ的元素。

因此，若 $f(\ell) = f(k) = \tau$，则 $k\ell \in C_G(\tau)$ 且 $\ell \in kC_G(\tau)$。但 τ 和 σ 共轭，因此：

$$\dim f^{-1}(k) \leq \dim\left(kC_G(\tau)\right) = \dim C_G(\tau) = \dim C_G(\sigma).$$

最后，由 *(x)* 和*(vii)*：

$$\dim C = \dim(\sigma C) = \dim \sigma^C \geq \dim f(I_\sigma) \geq \dim I_\sigma - \dim C_G(\sigma) = \dim I - \dim C_G(\sigma).$$

*(xv)*回顾 *(iv)*可知 $C = C_G^\circ(i)$，因此 维数 $G =$维数 $I +$维数 C。利用 *(xi)*、*(xii)*和 *(xiv)*，可得：

$$\dim(C\check{Z}C) = 2\dim C + \dim C_G(\sigma) \geq \dim C + \dim I = \dim G,$$

如所需。

(xvi) 根据 **(iii)** 和 **(xv)**，集合 $C\check{}I$ 和 $C\check{}ZC$ 都是 G 中的泛集，而 G 是连通的。因此上述集合不互不相交，从而在显然的记号下得到形如 $ck = c_1 z c_2$ 的方程。再通过元素 C 进行共轭变换和左平移，我们归结为 $ck = z$，其中 $c \in C$、$k \in \check{}I$，且 $z \in \check{}Z$。因此 $c^\sigma k^\sigma = ck$，所以 $[c, \sigma] \in C$ 要么是$\check{}$平凡的，要么被 k强实逆。由于 $k \in I$ 不正规化 C，我们发现 σ 中心化 c；因此它也中心化 $k = c^{-1}z$。所以，根据 Steinberg 扭子定理、[Del09] 以及强嵌入，$\sigma \in C_G(k) = C_G^\circ(k)$。现在 σ 是明亮的，这违反了 **(viii)**。

□

3.3 定理 C 的证明

这里的论证同样独立于 § 3.1 和 § 3.2。我们重述 [Del07b，推论 4.1 的证明。31]或 [Del08，推论 3。27]。

记号。

- 设$(C < G)$ 是一个可定义的、连通的、有限 *Morley* 秩拟弗罗贝尼乌斯对。设 G 是 $U_2^\perp$，且含有对合，其构形为二面体。
- 设 I 为对合集，且是单个共轭类；*Sylow* 2-子群的结构由 *[DW20*命题 *1]*已知。

命题 C.1。

(i) 设(i, j) 是一对泛对合。则存在一个同时与二者交换的唯一对合。*(ii)* 维数 $G = 3$ 维数 C。

证明。

(i) 由 [DW20，命题 1 (ix)] 可知其存在性。我们证明唯一性。假设i, j 是相互独立的对合，且 $k \neq \ell$ 是两个同时与 i 和 j对易的对合。若 $k\ell$ 是一个对合，则 k和 ℓ对易：因此 $\{1, i, k, \ell\}$ 构成一个四元群，从而 $i = k\ell = j$ 也如此，这就导致矛盾。因此 $k\ell$ 不是对合，而$k\ell \in C_G(i)$ 蕴含 $k\ell \in C_G^\circ(i)$。同样，由于 $k\ell \in C_G^\circ(j)$，我们得到 $i = j$，再次产生矛盾。

(ii) 上述内容定义了一个映射 $f\colon \mathbb{J} \to I$，其中 $\mathbb{J} \subseteq I \times I$ 是一个泛子集。显然，由共轭性可知 f是满射。此外，若 $f(i', j') = k$，则 $i', j' \in C_G(k)$；反之，来自 $C_G(k) \backslash C_G^\circ(k)$ 的任意一对都映射到 k。因此，纤维的维数恰为 2 dim C。综上，

$$\dim I = \dim \mathbb{J} - 2 \dim C = 2 \dim I - 2 \dim C,$$

因此 dim G − dim C = dim I = 2 dim C 且 dim G = 3 dim C。 □

参考文献

[BC09] Jeffrey Burdges 和 Gregory Cherlin：《有限莫利秩群中的半单挠元》。载于：*J. Math Logic* 9.2（2009），第 183–200 页。[BCJ07] Jeffrey Burdges、Gregory Cherlin 和 Éric Jaligot：《具有强嵌入子群的有限莫利秩极小连通单群》。载于：*J. Algebra* 314.2（2007），第 581–612 页。[BN94] Alexandre Borovik 和 Ali Nesin。《有限莫利秩群》。第 26 卷。Oxford Logic Guides。纽约：The Clarendon Press — Oxford University Press，1994。xviii+409。[Che05] Gregory Cherlin：《有限莫利秩群中的良好环面》。载于：*J. GroupTheory* 8.5（2005），第 613–621 页。[CJ04] Gregory Cherlin 和 Éric Jaligot：《有限莫利秩的驯服极小单群》。载于：*J. Algebra* 276.1（2004），第 13–79 页。

[Del07a] Adrien Deloro：《奇特征代数型极小连通单群》。载于：*J. Algebra* 317.2（2007），第 877–923 页。[Del07b] Adrien Deloro：《奇特征极小连通单群》。博士学位论文。巴黎：巴黎第七大学，2007。[Del08] Adrien Deloro：《奇特征非代数型极小连通单群》。载于：*J. Algebra* 319.4（2008），第 1636–1684 页。[Del09] Adrien Deloro：《有限莫利秩群背景下的 Steinberg 扭子定理》。载于：*J. Group Theory* 12.5（2009），第 709–710 页。[DJ16] Adrien Deloro 和 Éric Jaligot：《有限莫利秩 $N_\circ^\circ$-群的对合自同构》。载于：***Pacific J. Math.*** 285.1（2016），第 111–184 页。[DO22] Adrien Deloro 和 Alf Onshuus：《 o-极小 A_1猜想》。准备中。2022。[DW20] Adrien Deloro 和 Joshua Wiscons：《具有 TI 子群的秩群中对合的几何》。载于：*Bull. Lond. Math. Soc.* 52.3（2020），第 411–428 页。[Zam22] Samuel Zamour：《有限莫利秩 Frobenius 准群》。即将发表。2022。