arXiv:2305.00836v1 [math.NT] 1 May 2023

带额外扭曲的齐格尔模形式

DEBARGHA BANERJEE 和 RONIT DEBNATH

摘要。本文研究带额外扭曲的西格尔模形式。我们给出了西格尔模形式存在额外扭曲所必需的层与亏格条件。我们还给出了带有额外扭曲的西格尔模形式的具体例子，这些额外扭曲不同于复共轭。

1. 引言

设 $f = \sum a_n q^n \in S_k^1(N, \epsilon)$ 是一个经典的椭圆归一化尖点$_{n=1}$新形式，其权为 $k \geq 2$、亏格为 1，Nebentypus特征为 ϵ，且 K =Q(a_n) 是由 f 的傅里叶系数生成的数域，其中 $[K : \mathbb{Q}] = d$。对于所有满足 $\lambda \mid l$ 的素数 l，根据 Shimura 、 Deligne 的经典结果，我们可以将一个相容系统的 λ -进伽罗瓦表示与这个椭圆模形式 f 联系起来，

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}(V_\lambda)$$

满足 trace($\rho_{f,\lambda}$(Frob$_p$)) $= a_p$ 且 det($\rho_{f,\lambda}$) $= \epsilon(p)p^{k-1}$，对所有素数 $p \nmid lN$ 均成立。记 $\rho_{f,l} := \prod_{\lambda|l} \rho_{f,\lambda}$ 和 $V_l := \prod_{\lambda|l} V_\lambda$。

过去五十年来，人们一直对研究这些伽罗瓦表示的像颇感兴趣，即 $\rho_{f,l}$ ($G_{\mathbf{Q}}$)，其中 $G_{\mathbf{Q}}$ 赋予 Krull拓扑，而 GL(V_λ) 赋予通常的 l-进拓扑。反过来，这也带来了若干重要的算术应用，包括费马大定理的证明。在这项研究中，称为内扭曲或额外扭曲 的模形式的某些对称性是重要的组成部分。Ken Ribet 开创了对具有额外扭曲的模形式的研究，首先从同一个 [1, p 的存在性入手。

2000 数学主题分类。 主要分类：11F46，次要分类：11F80，11F30。关键词和短语。Siegel 模形式、吉田提升。第一作者的部分研究经费由 SERB 项目 MTR/2017/000357 和 CRG/2020/000223 资助。我们感谢 Abhishek Saha 教授在项目初期通过电子邮件给予的宝贵交流。

48]。在这种情况下，Doi-Yamauchi、Birch 和 Koike 的工作保证了其存在。

对于 $k = 2$，Ribet 和 Momose [13] 研究了代数 Lie($\rho_{f,\ \iota}(G_{\mathbf{Q}})$)，并证明它是一个显式的中心单代数。Eknath Ghate 及其合作者（参见 [6], [9], [5]）研究了更高权 $k \geq 2$下的这个代数，并给出了用模形式斜率表示局部代数的公式（详情参见 [5] ）。近来，Scholze 发现完美空间后，人们在研究与更一般的自守形式相关联的伽罗瓦表示方面取得了进展 [18]。

本文旨在将结果推广到亏格为 $g \geq 2$ 的辛群 $\mathrm{Gsp}_{2g}/\mathbf{Q}$ 上的自守形式。我们将 Ribet [1, pg. 49 Theorem5.7] 的一个结果推广到群 $\mathrm{Gsp}_{2g}/\mathbf{Q}$ 上具有 $g \geq 2$ 的自守形式，并给出带额外扭曲的西格尔模形式的具体示例。

利用完美空间，并以 Harris- Taylor-Thorne- Clozel-Shin 等众多学者的工作为基础，我们为任意亏格 g 的每个 Siegel 模形式 F，关联上 Peter Scholze 的 λ-进伽罗瓦表示相容系统（ [18, p. 1034, Theorem 5.1）。4]

$$\rho_{F,\lambda} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GSp}_{2g}(K_\lambda)$$

其中，$K = \mathbf{Q}(t_p)$ 是通过添加 F 对所有 $p \in \mathbb{N}$ 的黑克特征值 t_p 而得到的数域。这些伽罗瓦表示是连续的、半单的，并且编码了与 F 相关联的自守表示的萨塔克参数。

在第一个主要定理中，我们概括了西格尔模形式 F 的亏格 g、权 k 和层 N 所需满足的一个条件；该条件足以保证这个西格尔模形式具有额外扭曲，但并非必要条件。层条件要求具有较高的素数幂整除性。即便对于 $g = 1$，这也不太令人意外：在素数幂较高时，具有额外扭曲的模形式反倒是常态而非例外。

记 $\rho_l := \prod_{\lambda|l} \rho_{F,\lambda}$, $\mathfrak{g}_l = \mathrm{Lie}(\rho_{F,l}(G_{\mathbf{Q}}))$, $\mathfrak{gsp}_{2g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Gsp}_{2g})$ 为

$$\mathfrak{a}_l = \{u \in \mathfrak{gsp}_{2g}(K \otimes \mathbf{Q}_l) | \mathrm{Tr}(u) \in \mathbf{Q}_l\};$$

其中 Tr(u) 表示矩阵 u 的迹。注意，迹足以确定表示是否同构 [20, p。 11]。现在我们陈述第一个定理：

定理 1. 设 F 是非复乘（参见定义 15）的亏格 $g \geq 2$、权 k、层 N 西格尔模形式，且 $|g-k|$ 为奇数。设 N 选取为使$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{\times}$ 含有一个阶为 $2g$ 的元素。当且仅当此时有严格包含关系 $\mathfrak{g}_l \subsetneq \mathfrak{a}_l$ 时，西格尔模形式 F 才具有额外扭曲。

上述定理中条件的充分性源于命题 16。根据彼得森内积，(c, ϵ^{-1}) 总是西格尔模形式的一种额外扭曲。自然会问，是否存在不同于复共轭的西格尔模形式额外扭曲。

在第二个定理中，我们明确构造出并非来自复共轭的带额外扭曲的西格尔模形式。先取两个经典椭圆模形式 (f, g)，满足 $f \in S^1_{k_1}(N, \epsilon)$、 $g \in S^1_{k_2}(N, \epsilon)$。利用一个适当的嵌入 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \hookrightarrow \mathrm{GSp}_{4'}$，可以构造出一个西格尔模形式 $Y(f \otimes g)$，它是 (f, g) 的吉田提升。

对于两个经过精心挑选的经典模形式 f 和 g，其吉田提升记作 $Y(f \otimes g)$，是一个带有额外扭曲的西格尔模形式。

定理 2. 设 f 和 g 是两个经典的非复乘椭圆模形式，它们具有与同一个不同于复共轭的狄利克雷特征 χ相关联的额外扭曲。假设 $Y(f \otimes g)$ 的吉田提升 (f, g) 存在，那么 $Y(f \otimes g)$是一个含有不同于复共轭的额外扭曲的西格尔模形式。

上述定理表明，额外扭曲群可以非常大。该定理的方法也为系统地构造大量带有额外扭曲的西格尔模形式提供了一种途径。事实上，我们给出了一些具有额外扭曲的西格尔模形式的具体例子。我们通过对两个层相同且中心内伯努斯特征相同的经典模形式取吉田提升来构造这些例子。Conti 在一篇近期论文中研究了模形式族的额外扭曲群 [7] 。

Kumar 等人利用额外扭曲研究具有算术应用的西格尔模形式，背景是朗-特罗特猜想 [12]。值得一提的是，目前即使对于 $g = 2$，计算同余子群的西格尔模形式的傅里叶系数及黑克特征值也非常困难。利用对称立方、Saito-Kurakawa 提升或吉田提升等各种提升，可以通过多种方式构造西格尔模形式。

如果能发现并非来自复共轭的非提升西格尔模形式的额外扭曲，将会非常引人入胜。

2. 西格尔模形式

2.1. 动机。 考虑经典椭圆模形式的情形。这些是由 $SL_2(Z)$ 作用于上半平面 $\mathbb{H}$ 所得到的空间上的微分形式。回想一下，上半平面可以用群 $SL_2(R)/SO(2)$ 来表示，其中 $SO(2) = U(1)$ 是点 $i = \sqrt{-1}$ 的稳定子群。这是一个极大紧子群。群 $SL_2(Z)$ 是格 Z^2 的自同构群，其标准交错内积 $<,>$ 定义如下：

$$< (a,b),(c,d) >= ad - bc.$$

我们希望通过取 $g = 2$ 来推广（同样的推广也适用于任意 g）。秩为 2×2 的格 $(Z^2)^2$，以 e_1, e_2, f_1, f_2 为基，并赋予由 $<,>$ 定义的辛形式：

$$< e_i, e_j >= 0, < f_i, f_j >= 0, < e_i, f_j >= \delta_{ij}$$

其中，δ_{ij} 为克罗内克δ。辛群 $Sp_4(Z)$ 根据定义是辛格的自同构群。

辛群$_4(Z) := Aut(Z^4, <,>)$。利用 $e's$ 和 $f's$ 的基，我们可以将这些元素写成矩阵群的形式：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A、B、C 和 D 是满足以下条件的整 2×2 矩阵。

2.2. Siegel 模形式群。 设 R 为含幺交换环，并固定一个整数 $g \geq 2$。用 I_g 和 0_g 分别表示环 $M_g(R)$ 中的单位矩阵和零矩阵，现考虑矩阵 $J_g = \begin{bmatrix} 0_g & I_g \\ -I_g & 0_g \end{bmatrix}$。用 $GSp_{2g}(R)$ 表示关于 J_g 的辛相似变换代数群。因此，

$$\mathrm{GSp}_{2g}(R) = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(R) | M^t J M = \mu(M) J\}.$$

映射 $M \to \mu(M)$ 定义了特征 $\mu : GSp_{2g}(R) \to R^\times$。我们将 μ称为相似因子。该群

$$\mathrm{Sp}_{2g}(R) = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(R) | M^t J M = J\}$$

称为在 R 上具有 $2g$ 阶的辛群。由于上述集合是交错反对称

形式的自同构群，其中该形式由 J_g 定义，因此 $\mathrm{Sp}_{2g}(R)$ 是 $\mathrm{GL}_{2g}(R)$ 的子群。对于本文，我们主要关注 $R = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$。

定义 3。 [11, 第 2] 页对于开集 $D \subset \mathbb{C}^g$，函数 $F: D \to \mathbb{C}$ 若连续，且对于每个固定的 $(z_1^0, ..., z_g^0) \in D$ 以及每个 $j = 1, ..., g$，由赋值 $z_j \to F(z_1^0, ..., z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, ..., z_g)$ 确定的单变量函数都是全纯的，则称其为全纯函数。

任意亏格 $g \geq 1$ 的上半平面是集合 $\mathbb{H}_g = \{X + iY | X, Y \in M_g(\mathbb{C})$ $X = X^t, Y = Y^t, Y > 0\}$。条件 $Y > 0$ 表示它作为矩阵是正定的。现在我们在此定义任意亏格 $g > 1$ 的向量值 Siegel 模形式，随后给出亏格 $g = 2$ 下更明确的定义。

设 $\rho: \mathrm{GL}_g \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维复表示。那么，亏格为 g 的向量值 Siegel 模形式是指满足以下条件的全纯函数 $F: \mathbb{H}_g \to \mathbb{C}$: $F((A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}) = \rho(C\tau + D)F(\tau)$，对所有 $\gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ 以及 $\tau \in \mathbb{H}_g$ 均成立。

亏格为 2 的向量值西格尔模形式可以更明确地描述为 [3]。标量值 Siegel 模形式只是它的一个特例。对于非负整数 k 和 j，令 $\rho_{k,j}: \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{j+1}(\mathbb{C})$ 为符号为 $(j + k, k)$ 的不可约表示；

$$\rho_{k,j} = det^k \otimes Sym^j.$$

现在我们定义函数 F 上的斜线算子: $\mathbb{H}_g \to \mathbb{C}$。对于矩阵 $\gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in$ 辛群$_{2g}(\mathbb{Z})$ 以及 $\tau \in \mathbb{H}_g$，其作用为

$$(F|_{k,j}(\gamma))(\tau) = (\rho_{k,j}(C\tau + D))^{-1} F((A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}).$$

定义 4. 全纯函数 $F: \mathbb{H}_2 \to \mathbb{C}$ 称为关于全群辛群 $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$、权$\rho_{k,\ j}$ 的向量值西格尔模形式$F|_{k,\ j}[\gamma] = F$ 对所有 $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ 均成立。

对于 $j = 0$ 的情形，本文主要关注这一情形，这类西格尔模形式称为标量值形式。因此，以下凡提到西格尔模形式，均指标量值形式。回顾关于子群 [2]的西格尔模形式（分别为尖点形式）的如下定义。

定义5. 设 K 是全模群辛群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ 的一个子群。若 F 满足以下条件，则称其为子群 K 上的权 k、特征为 χ 的西格尔模形式：

(1) F 是定义在 $\mathbb{H}_g$ 上的全纯函数。(2) 对每个矩阵 $M \in K$，函数 F 满足 $F|_k(M) = \chi(M)F$。

集合 $M_g^k(K,\chi)$ 表示亏格为 g、权为 k、特征为 χ、子群为 K 的西格尔模形式。

定义6。 我们将算子 Φ 定义在 $F \in M_g^k(K,\chi)$ 上，其定义为 $(\Phi F)(Z') = \lim_{t\to\infty} F\left(\begin{bmatrix} Z' & 0 \\ 0 & it \end{bmatrix}\right)$，其中 $Z' \in \mathbb{H}_{g-1}$ 且 $t \in \mathbb{R}$。

定义7。 若西格尔模形式 $F \in M_g^k(K,\chi)$ 满足 F 属于 Φ 算子的核，则称其为尖点形式。

对于完整模群，层为 N 的主合同子群记作 $\Gamma^{(g)}(N)$，定义为

$$\Gamma^{(g)}(N) = \{M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid M \equiv I_{2g}\ (mod N)\}.$$

辛群 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ 的合同子群 K 是 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ 的任意子群，满足 $K \supset \Gamma^{(g)}(N)$，其中某个 N。我们关注以下两类合同子群：

$$\Gamma_0^{(g)}(N) = \{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid C \equiv 0\ (mod\ N)\}$$

and

$$\Gamma_1^{(g)}(N) = \{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid C \equiv 0\ (mod\ N), A, D \equiv I_g\ (mod\ N)\}.$$

由定义显然可知，存在严格包含关系 $\Gamma^{(g)}(N) \subsetneq {\Gamma_1}^g(N) \subsetneq \Gamma_0^{(g)}(N)$。（）

3. Siegel模形式的额外扭曲

本节中，我们定义 Siegel 模形式的额外扭曲，并陈述其若干性质。

命题8. [14] 一个西格尔模形式 F 的展开式为

(1) $$F(Z) = \sum_{A \in E^{2g}, A \geq 0} t(A) e^{\pi i t r(AZ)}$$

其中， $t(A)$ 表示展开式的系数， E^{2g} 表示 $2g \times 2g$半整数矩阵的集合，而tr表示迹。

正如引言中所回顾的，我们为每个亏格任意的西格尔模形式 F $g \geq 1$，关联相容系统 λ 的进Galois表示 [18, 第 1034 页，定理 5.1。4]

$$\rho_{F,\lambda} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GSp}_{2g}(K_\lambda)$$

其中 $K = \mathbb{Q}(t_p)$ 是通过添加 F 对所有 $p \in \mathbb{N}$ 的黑克特征值 t_p 而得到的数域。这些伽罗瓦表示是连续的、半单的，并且编码了与 F 相关联的自守表示的萨塔克参数。

令 $\Gamma = Aut(K)$，并考虑集合 $D := \{\varepsilon : G_{\mathbf{Q}} \to K^\times\}$ 是从 $G_{\mathbf{Q}}$ 到 $K^\times$ 的特征集合。令 V 为相应的模，其定义在 $K \otimes \mathbb{Q}_l$ 上，且满足 $Aut(V) = \mathrm{GSp}_{2g}(K \otimes \mathbb{Q}_l)$。

遵循 [4], ，我们使用伽罗瓦表示来定义带有额外扭曲的西格尔模形式。下面的引理证明，与一个西格尔模形式相关联的伽罗瓦表示的像是非阿贝尔的。

引理 9。 像 $\rho_{F,\ \lambda}(G_{\mathbf{Q}})$ 是非阿贝尔的。

证明。 令 c 为 $G_{\mathbf{Q}}$中的复共轭。由于 $c^2 = I$ 且 $\det \rho_\lambda(c) = -1$， $\rho_\lambda(c)$ 的特征值为 $+1$、-1。因此，矩阵 $\rho_\lambda(c)$ 与其若尔当标准形相似，对角线上为 $+1$ 和 -1。所以，$\mathrm{GSp}_{2g}(K_\lambda)$ 中与其交换的元素构成一个分块对角子群 $\mathbf{T}$。由于表示 ρ_λ 不可约，像不可能是 T 的子集。因此，像中存在不与 $\rho_\lambda(c)$ 交换的元素，故像是非阿贝尔的。 □

定义 10。 若存在一个元组 (γ, χ_γ)，满足 $\gamma \in \Gamma, \chi_\gamma \in D$，且使得 $\rho_F \cong \gamma(\rho_F) \otimes \chi_\gamma$，则称西格尔模形式 F 具有额外扭曲 。

现在我们陈述关于额外扭曲的一些性质。

引理 11. ρ_F 在$\mathbf{Q}$ 上的额外扭曲构成一个群。

证明。 设 γ_1、$\gamma_2 \in \Gamma$ 是 Siegel 模形式的两个额外扭曲。这意味着 $\rho_F = \gamma_1(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_1}$且 $\rho_F = \gamma_2(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_2}$。 因此， $\rho_F = \gamma_1\gamma_2(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_1}\chi_{\gamma_2} = \gamma_1\gamma_2(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_1.\gamma_2}$，其中特征 $\chi_{\gamma_1.\gamma_2}$ 表示特征 χ_{γ_1} 与 χ_{γ_2} 的乘积。此外，单位元和逆元

都是平凡的，并且我们已经检查过封闭性。因此，ρ_F 在 Q 上的自扭集合构成一个群。□

我们证明两个类似于 [5]的引理。

引理 12. 对于每个额外扭曲 γ，满足该等价关系的特征 χ_γ 是唯一确定的。

证明。 设 χ_{γ_1} 和 χ_{γ_2} 为与自同构 γ 相关联的两个特征。因此， $\rho_F = \gamma(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_1} = \gamma(\rho_F) \otimes \chi_{\gamma_2}$。这意味着 $\gamma(\rho_F) \otimes (\chi_{\gamma_1} - \chi_{\gamma_2}) = 0$。若 c 表示复共轭，则 $\rho_F(c) \neq 0$，从而得到 $\chi_{\gamma_1} = \chi_{\gamma_2}$。□

引理 13。对应关系 $\delta \to \chi^\delta$ 在自扭曲群上定义了一个取值于 $K^\times$ 的余循环。

证明。 对于 γ、$\delta \in \Gamma$，恒等式 $\chi_{\gamma\delta} \to \chi_\gamma \chi_\delta^\gamma$ 表明 $\gamma \to \chi_\gamma$ 是一个 $1-$ 余循环。将其特化为 $g \in G_{\mathbf{Q}}$，我们看到 $\gamma \to \chi_\gamma(g)$ 是一个 $1-$ 余循环。根据希尔伯特第90定理， $H^1(\Gamma, E^\times)$ 是平凡的，并且存在一个元素 $\alpha(g) \in E^\times$，使得

$$\frac{\gamma(\alpha(g))}{\alpha(g)} = \chi_\gamma(g) \tag{2}$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。显然， $\alpha(g)$（至多相差一个乘法因子）完全由 $F^\times$ 中的元素确定。改变 $g \in G_{\mathbf{Q}}$，我们得到定义良好的映射

$$\overline{\alpha} : G_{\mathbf{Q}} \to E^\times / F^\times.$$

由于每个 χ_γ 都是一个特征，$\overline{\alpha}$ 是一个同态。 □

下述命题可由 [4, 命题 (2.15)] 直接推出。

命题 14. 令 $\mathbf{Q}[Tr(Ad(\rho))]$ 表示由集合$Tr(Ad(\rho)(g))$ 在 $\mathbf{Q}$ 上生成的环，其中 $g \in G_{\mathbf{Q}}$。那么，$\mathbf{Q}[\mathrm{Tr}(Ad(\rho))]$ 中的每个元素都在 ρ 上方、定义于 $\mathbf{Q}$ 的所有自扭作用下保持不变。

证明。 由 [4, 命题 (2.14)] 可知，存在一个与 ρ 等价的表示，我们将其记为 ρ'，且满足：

(1) $\rho'(g) \in \mathrm{GSp}_4(K_\rho)$，其中域为 $K_\rho = \mathrm{Q}(tr(Ad(\rho)))$。
(2) $\gamma(\rho') = \rho' \otimes \epsilon$。

对于 $g \in G_{\mathbf{Q}}$，我们考虑由 $c_g(\gamma) = s^{-1}((\rho')^\gamma \rho'(g)^{-1})$ 定义的 1-余循环 c_g；$\Gamma_{[g]} \to L^\times$，其中 $s : L^\times \to \mathrm{GSp}_4(L)$ 表示标量态射。

根据希尔伯特第90定理， $H^1(\Gamma_{[\rho']}, L^\times)$ 是平凡模。因此 $c_g(\gamma) = \frac{a_g}{\gamma\, a_g()}$其中存在某个 $a_g \in L^\times$。于是对于任意 $g \in G$ 和 $\gamma \in \gamma_{[\rho']}$，我们得到

$$\rho'(g)^\gamma \otimes \frac{\gamma(a_g)}{a_g} = \rho'(g).$$

恒等式 $\gamma(\rho'(g)^{a_g}) = \rho'(g)^{a_g}$ 表明 $\rho(g)a_g \in \mathrm{GSp}_4(K_\rho)$。因此，域 $\mathbb{Q}(Tr(Ad(\rho(g))))$ 在 $\mathbb{Q}$ 上对 ρ 的所有自扭均保持不变。□

我们先定义下文中的无复乘西格尔模形式；这一定义对于主要定理十分重要，因为这些定理确实适用于无复乘形式。该定义引自 [4, 定义 2.3]。

定义 15. 若存在非平凡的 ϵ 使得 $\rho_F \cong \rho_F \otimes \epsilon^{-1}$，则称西格尔模形式 F 具有复乘（或称为 cm）。

记矩阵为 $dU_g = \begin{pmatrix} d^{-1}I_g & 0 \\ 0 & dI_g \end{pmatrix}$。对于同余子群 K 和特征 $\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$，我们有空间$S_k(K, \chi, \psi) = \{u \in S_k(K, \chi) \mid F < d >= \psi(d)F\}$，其中 $< d >= dU_g$。对于下一个命题，我们假设 $g = 2$。

值得一提的是，据我们所知， [2, 引理 4.14] 适用于标量值 Siegel 模形式，因此我们在此并未将这一结果推广到向量值西格尔模形式。在下一个命题中，我们将看到，如何通过设置连接层与亏格的类似条件，将同一结果推广到更高亏格的 Siegel 模形式。

命题 16. 设 $F \in S_k^g(K, \chi, \psi)$ 是一个层为 N、权为k的西格尔尖点形式。选取层 N，使得 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 有一个 $2g$ 阶元素。假设 $|g - k|$ 为奇数。存在 $\sigma \in H = \ker(\psi)$，使得 σ 的特征多项式具有互异根。

证明. 我们假设 $g \geq 2$，因为我们已经知道 $g = 1$ 的结果。回顾一下，我们从一个 N 出发，其中 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ 有一个 $2g$ 阶元素，我们称之为 a。因此 $a^g = -1$。将 [2, 引理 4.14],中的方程改写，得到 $\chi(aU_g)^g a^{gk-g(g+1)} F = \psi(a)F$。

因此，我们推得 $\chi(-I)(-1)^{k-g+1}F = \psi(a)F$。对于 $gk \in 2\mathbb{Z}$（当 $F \neq 0$ 时可确保这一点），这进一步给出 $(-1)^{gk+k-g+1} = (-1)^{k-g+1} = \psi(a)$。鉴于 g 和 k 的奇偶性不同，我们能够找到一个 $\sigma \in H$

具有 $2g$ 个互异根，使得 $\rho_\psi(\sigma) = 1$，其中 ρ_ψ 如 [8, Pg 385] 所示。由此我们得出结论，σ 是满足方程$X^{2g} - 1 = 0$的元素。这个方程有 $2g$ 个互异根。□

推论 17。如果 $g = 2$，我们选择 N，使得 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ 含有一个 *4* 阶元素。假设权为奇数。存在 $\sigma \in H = \ker(\psi)$，使得 σ 的特征多项式具有互异根。

此外，我们得出结论：$\pi_N(conj) = -1 = \sigma^2$。由 [21, 引理 1.1], ，我们再次推得以下推论。

推论 18. 我们有一个包含 $\rho_l(H) \subset GSp_{2g}(L \otimes Q_l)$，其中 $L = K^{<\sigma>}$且 $L \subset \mathbb{R}$。

由 [21, 引理 1.1], 我们推得，$\rho_l(H) \subset GSp_4(L \otimes Q_l)$，其中 $L = K^{<\sigma>}$。现在，由于$(conj) \in \pi_N^{-1}(<\sigma>)$，$L \subset \mathbb{R}$。

对于嵌入 $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{Q}_l$，令 ρ_σ为映射

$$\rho_\sigma : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GSp}_{2g}(K \otimes \overline{\mathbf{Q}_l}) \to \mathrm{GSp}_{2g}(\overline{\mathbf{Q}_l});$$

其中第一个映射由 ρ_l 给出，后一个映射则由 σ 逐项通过 $\sigma(k,t) := \sigma(k)t$诱导。令$\mathfrak{gsp}_{2g}(\mathbb{Q}_l, \sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$ 表示 $\rho_\sigma(G_{\mathbf{Q}})$像的李代数，对于 τ也类似，因此有 $\mathfrak{gsp}_4(\mathbb{Q}_l, \tau) = \mathfrak{g}_\tau$。另外，令 $\mathfrak{g}_l' := \{(u, u') \in \mathfrak{g}_\sigma \times \mathfrak{g}_\tau\}$。我们证明 $\mathfrak{g}_l'$满射到它的每个分量。

我们陈述以下命题，该命题用于主定理的证明。此证明的思路基本上源自 [15, 步骤1，第 790]页。

命题 19。给定上述 $\mathfrak{g}_l'$，射影映射 $p_\sigma : \mathfrak{g}_l' \to \mathfrak{g}_\sigma$ 和 $p_\tau : \mathfrak{g}_l' \to \mathfrak{g}_\tau$ 均为满射。

证明。由于与西格尔模形式相关联的 λ进Galois表示是不可约的，我们有 $End_{\mathfrak{g}_\sigma}(V_\sigma) = \mathbb{Q}_l$。此外，$\mathfrak{g}_\sigma$ 是约化的，其中心可对角化，因为 $G_{\mathbf{Q}}$ 在 V上作用为半单。由此可得$\mathfrak{g}_\sigma \subset \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma)$。现在，$\mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma) = \mathfrak{sp}_{2g}(V_\sigma) \oplus \mathbb{Q}_l^\times$。又由于$\mathfrak{sp}_{2g}(V_\sigma)$是单的，且 $\mathfrak{g}_\sigma$ 是半单的，因此$\mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{sp}_{2g}(V_\sigma)$或$\mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma)$。前者不可能，因为 $\chi(Frob_l) \neq 1$，故$\mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma)$。□

Goursat 引理指出，若 G_1 和 G_2 是群，且 H 是 $G_1 \times G_2$的子群，并且两个投影 $p_1 : H \to G_1$ 和

$p_2 : H \to G_2$ 均为满射。若 N_1 是 p_2 的核，且 N_2是 p_1的核，则 H 是从 $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$出发的一个同构的图像。

现在我们证明一个关于我们这一情形下 Goursat 引理之核的引理。对于每个嵌入 $\sigma : E \to \mathbb{Q}_l$，定义 $G_\sigma = \mathrm{GSp}_{2g}(V_\sigma)$ 和$G_l := \prod_{\sigma:E\to\mathbb{Q}_l} \mathrm{GSp}_{2g}(V_\tau)$。令 $J = \{(u,u') \in \mathrm{GSp}_{2g}(V_\sigma) \times \mathrm{GSp}_{2g}(V_\tau)\}$，其中 $u = \rho_\sigma(g)$ 且 $u' = \rho_\tau(g)$，对某个 $g \in G_{\mathbb{Q}}$ 成立。因此 $J \subset G \times G'$，我们可以对其应用 Goursat 引理，因为根据命题19，同一条件均已满足。

引理20。对于上述的 G_σ，G_τ 和 J，若 $G_l \subsetneq A_l$，则 J 是某种选择 σ 和 τ下的一个同构 $G_\sigma \to G_\tau$ 的图像。

证明。 我们知道，

$$\mathrm{GSp}_{2g}(V_\sigma) = \mathrm{Sp}_{2g}(V_\sigma) \bigoplus \overline{\mathbb{Q}_l}^\times, \mathrm{GSp}_{2g}(V_\tau) = \mathrm{Sp}_{2g}(V_\tau) \bigoplus \overline{\mathbb{Q}_l}^\times.$$

我们证明该同态的核是平凡的。核是 \(\mathrm{Sp}_{2g}(V_\sigma) \bigoplus \mathbb{Q}_l^\times\) 的一个正规子群。回想一下，Sp 是一个单群。 按照 [13, p. 106]，，回想一下，如果将表示限制到某个开子群上，伽罗瓦表示仍然不可约。因此， G_σ 包含 \(\mathrm{Sp}_{2g}(V_\sigma)\)。然而，行列式是一个开映射。因此，核的第二个分量只有两种可能：平凡子群或整个 \(\mathbb{Q}_l^\times\)。由于我们假设 $G_l \subsetneq A_l$，至少存在一个嵌入 σ，使得 $G_\sigma \neq A_\sigma$。因此，对该 σ，正规子群 $\overline{N_\sigma} = \{\pm I\} \times 1$。所以，该图来自 $G_\sigma/N_\sigma \to G_\tau/N_\tau$；为了同构， N_σ 和 N_τ都必须是平凡的，因为对于任何其他的N_τ，同构都不会存在。□

4. 主定理

本节中，我们证明适用于一般 $g \geq 1$ 的主定理 1。通过扩张标量，我们将 ρ_l 视为 $K \otimes \mathbb{Q}_l$ 表示，

$$\rho_l : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GSp}_{2g}(K \otimes \mathbb{Q}_l) \to \mathrm{GSp}_{2g}(K \otimes \overline{\mathbb{Q}_l})$$

如有必要，通过换基，我们在推论 18 中证明了存在 H使得 $\rho_l(H) \subset \mathrm{GSp}_{2g}(L \otimes \mathbb{Q}_l)$。这里我们假设 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ 含有一个 4 阶元素。我们的目标是计算$\rho_l(G_{\mathbb{Q}})$ 的李代数，我们将其记为 $\mathfrak{g}_l$。关于 H，$\rho_\sigma = \rho_\tau \iff \sigma|_L = \tau|_L$。我们列出 l-进Galois表示的以下性质：

(1) ρ_l 是半单的。

(2) $det(\rho_l) = \chi(l)^{2k-3}$(3) 没有表示 ρ_λ 使得 $\lambda|l$ 在 $G_{\mathbf{Q}}$的某个开子群上变为阿贝尔。

由于前述条件， ρ_l 满足[15, 定理 4.410]的条件。

现在我们证明主定理 1。主定理指出，如果满足某些条件，那么西格尔模形式含有额外扭曲，当且仅当 $\mathfrak{g}_l \subsetneq \mathfrak{a}_l$。换句话说，证明主定理等价于证明以下陈述彼此等价，这与椭圆模形式的经典情形相同:

(1) $\mathfrak{g}_l \subsetneq \mathfrak{a}_l$(2) $\exists\, \sigma$， τ使得 $\sigma|_K \neq \tau|_K$，但存在 $\exists$一个开子集 H_0，属于 $G_{\mathbf{Q}}$，使得ρ_σ： $H_0 \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathrm{Q}_l)$ 与 ρ_τ： $H_0 \to \mathrm{GSp}_{2g}(\mathrm{Q}_l)$ 同构。(3) 存在一个有限阶特征 ϕ： $G_{\mathbf{Q}} \to {\mathrm{Q}_l}^{\times}$，使得 $\overline{\rho_\tau} \cong \rho_\sigma \otimes \phi$。

证明。 我们证明 (1) $\implies$ (2)。我们采用 [19,引理 7] 中的相同论证，并针对本情形加以修改。回顾一下， $\mathfrak{g}_l' = \{(u, u') \in \mathfrak{g}_\sigma \times \mathfrak{g}_\tau\}$。在李代数层面， $\mathfrak{g}_l' \subset \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma) \times \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\tau)$。设 $\mathfrak{g}_l \subsetneq \mathfrak{a}_{l,}$，由于根据命题 19，投影都是满射。应用 Goursat 引理 3，可得 $\mathfrak{g}_l'$ 是同构 20 $\alpha : \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma) \to \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\tau)$ 的图，且该同构将 1 映到 1。注意，由于投影都是满射，图总是存在的。然而，只有当包含为真包含时，核才是平凡的。

回顾一下， $\mathfrak{gsp}_{2g}(V) = \mathfrak{sp}_{2g}(V) \oplus \overline{\mathrm{Q}_l}^{\times} I_n$。因此， $\mathfrak{gsp}_{2g}(V)$ 的任意自同构都由其对 $\mathfrak{sp}_{2g}(V)$ 的作用决定。由此，我们的自同构由其在 $\mathfrak{sp}_{2g}(V)$ 上的限制决定。因此，根据 [10]， $\alpha(u) = f \circ u \circ f^{-1}$，其中 $u \in \mathfrak{gsp}_{2g}(V_\sigma)$ 且 $f \in V_\sigma \to V_\tau$。这里， f是 $\mathfrak{g}_l'$模的一个同构。

转到李群层面，我们推得 $\overline{f}$ 是 U模的一个同构。因此，如果 $H_0 = \rho_l^{-1}(U)$，其中 $\overline{f}$是 U 模的一个同构，那么它满足 (2) 的必要条件。

现在我们证明 (3) $\implies$ (1)。我们首先假设存在一个有限阶特征 ϕ，使得 $\rho_\sigma \cong \rho_\tau \otimes \phi$。因此 $det(\rho_\sigma) = det(\rho_\tau \otimes \phi)$。由于 ϕ 只是一个有限阶特征， $det(\rho_\sigma \rho_\tau^{-1}) = \phi^{2g} \subsetneq {\mathrm{Q}_l}^{\times}$。因此$\mathfrak{g}_\sigma \mathfrak{g}_\tau^{-1} \subsetneq \mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{a}_{\tau,}$，这就得到了 $\overline{\mathfrak{g}_l} \subsetneq \mathfrak{a}_l$。

证明 (3) $\implies$ (2) 很容易。我们首先假设存在一个有限阶特征，使得 $\rho_\tau \cong \rho_\sigma \otimes \phi$。因此，$\phi$ 的核将是 $G_{\mathbf{Q}}$ 的一个有限指数子群，这将成为我们的 H_0。因此，由于 $\phi \equiv 1$ 在 H_0 上，$\rho_\tau|_{H_0} \cong \rho_\sigma|_{H_0}$ 和 (2) 成立。

现在我们证明 (2) $\implies$ (3)。对于 $G_{\mathbf{Q}}$ 的任意有限指数子群 H_0，根据舒尔引理，像 $\rho_\sigma(H_0)$ 在 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_l)$ 中的交换子由数量矩阵构成。对于表示 ρ_τ，同样的结论也成立。因此，存在一个有限阶的 $\phi : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbb{Q}_l^{\times}$，因为 H_0 是 $G_{\mathbf{Q}}$ 的开有限指数子群，所以 $\rho_\sigma \cong \rho_\tau \otimes \phi$。

□

5. 带有额外扭曲的 Siegel 模形式示例

5.1. 带特征的经典模形式的吉田提升。我们简要回顾吉田提升 [17] 的理论。这基本上来自嵌入 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \hookrightarrow \mathrm{GSp}_4$。给定两个层分别为 N_1、N_2，权重 2 的经典椭圆模形式 f 和 g（与同一个本原特征 χ 相关联的两个 GL_2 自守表示），吉田提升 F 是 GSp_4 的自守表示。回忆一下，对于对 (f, g)，若自守表示 $F := Y(f \otimes g)$ 满足以下条件，则它是吉田提升：

(1) F 的阿代化生成了 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ 的一个不可约尖点自守表示 π_F。(2) 对于 $\pi_{F,v}$，在每个赋值 v 处的局部 $L-$ 参数，都是 $\pi_{f,v}$ 和 $\pi_{g,v}$ 的 L-参数的直和。

吉田提升是朗兰兹函子性的一种特殊情形，源自对偶群的嵌入

$$\{(g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) | \det(g_1) = \det(g_2))\} \to \mathrm{GSp}_4(\mathbf{C})$$

给出为

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c' & 0 & d' \end{bmatrix}.$$

注意，由于椭圆模形式都与同一个特征相关联，两种情况下行列式都等于 $\chi(p)p^{k-1}$，因此嵌入的行列式条件得到满足。

现在，我们定义与同一个特征相关联的两个给定经典模形式的吉田提升。

按照 Roberts [16], ，我们列出 Yoshida 提升存在所需的条件如下。给定两个经典新形式 f 和 g，如果一对形式满足 Yoshida 提升的条件，则称其为

(1) 模形式 f 不是 g的数量倍数；(2) f 和 g 的特征来自同一个本原狄利克雷特征；(3) 其中一个权为 2，另一个权必须是大于 2 的偶数。(4) 存在一个有限素数 p，使得 $\pi_{f,\ p}$ 和 $\pi_{g,\ p}$ 都是离散级数。

定义 21。 假设这些条件得到满足，并且 $f, g \in S_2^1(N, \chi)$，则存在唯一的 $\mathrm{Gsp}_4(\mathbb{Q}_p)$ 表示$\Pi_{F,\ p}$ 满足

$$L(\Pi_{F,p}) = L(\pi_{f,p}) \oplus L(\pi_{g,p}).$$

在此情况下，称 F 是 f 和 g的 Yoshida 提升。

如果 f、g 是系数域分别为 K_1、K_2 的两个经典模形式，并且Γ_1 和 Γ_2 分别是它们的额外扭曲群，那么我们将它们的 Yoshida 提升记为 $Y(f \otimes g)$。我们还将 Yoshida 提升的额外扭曲群记为 Γ_Y

引理 22. 如果两个经典模形式 f 和 g 满足5.1中列出的条件，那么 $\Gamma_Y \supset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。

证明。 假设 $\gamma \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。根据定义，这意味着 K_1 和 K_2必须相等，非零的 γ 才能存在于交集中。因此，它们的合成域为 $K = K_1 = K_2$。这意味着 $\gamma(\rho_f) = \rho_f \otimes \chi_\gamma$ 和$\gamma(\rho_g) = \rho_g \otimes \chi_\gamma$。此外，根据方程 21，我们还可以直接得到，对于吉田提升 $F = Y(f \otimes g)$，有 $\gamma(\rho_F) = \rho_F \otimes \chi_\gamma$。 □

在接下来的具有额外扭曲的西格尔模形式示例中，我们证明未必有 $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。事实上，我们所有的示例都有 $\Gamma_Y \supsetneq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。

本节中，我们给出带有额外扭曲的西格尔模形式的具体示例。我们找到了带额外扭曲的齐格尔模形式的示例。

通过取两个具有适当的权和特征、且自身具有额外扭曲的经典模形式的吉田提升来构造。

5.2. **定理 2 的证明**。在本小节中，我们证明西格尔模形式的额外扭曲群可以非常大。

证明。设 $f, g \in S_k(N, \chi)$ 是两个具有非复共轭额外扭曲的椭圆模形式。设 $K = K_f \cdot K_g$ 是 f 和 g 的海克场 K_f, K_g 的合成域。至少存在一个 $\gamma \in Aut(K)$，使得

$$\gamma(\rho_f) = \rho_f \otimes \chi_\gamma, \gamma(\rho_g) = \rho_g \otimes \chi_\gamma. \tag{3}$$

回顾一下，我们假设 (f, g) 存在吉田提升所需的条件成立，并令 $F = Y(f \otimes g)$ 为 § 5.1 中定义的对应于这一对 (f, g) 的吉田提升。我们声称，F 是一个具有相同 γ 额外扭曲的西格尔模形式。换言之，我们需要证明存在一个特征 χ_γ，使得

$$\gamma(\rho_F) = \rho_F \otimes \chi_\gamma. \tag{4}$$

这是两个四维伽罗瓦表示的相等。根据 Brauer-Nesbitt 定理，只有所有特征多项式的系数都相等时，这个等式才成立。方程 4 左边的特征多项式为 $(x^2 - \gamma(a_p)x + p^{k-1})(x^2 - \gamma(a'_p) + p^{k-1})$，右边的特征多项式为 $(x^2 - a_p\chi_\gamma(p)x + p^{k-1})(x^2 - a'_p\chi_\gamma(p)x + p^{k-1})$。上述等式由方程 3 得出。□

我们预期，与 $Y(f \otimes g)$ 相关联的猜想的动机的自同态代数，是 f和 g 的自同态代数的直和。

5.3. **上述现象的示例**。本节中，我们给出一些具有不同复共轭的带有额外扭曲的西格尔模形式的具体示例。所有这些示例都表明，Yoshidalift 的海克场比各个椭圆模形式的合成域更小。

(1) 设 f、$g \in S_2^{\frac{1}{2}}(30, \chi)$ 是两个新形式，其中 χ 是定义在 $\chi : (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ 上的狄利克雷特征，使得 χ 在其生成元上的取值由 $\chi(7) = -\zeta_8^2$ 和 $\chi(11) = -1$ 确定。注意，我们可以这样做，因为这是一个四维空间。由于导子

该特征的导子为 15，因此满足吉田提升的条件 (2)，我们可以考虑吉田提升 $Y(f \otimes g)$，这是一个具有额外扭曲的显式西格尔模形式示例。在此例中，经典模形式可以选为展开式 $f = q + \zeta_8 q^2 + (\zeta_8^3 - \zeta_8^2 - 1)q^3 + \zeta_8^2 q^4 + \ldots$ 和 $g = q + \zeta_8^3 q^2 + (\zeta_8^9 - \zeta_8^6 - 1)q^3 + \zeta_8^6 q^4 + \ldots$。若要详细研究这个空间，令 $K_{f,\ g}$ 为 f 和 g 的系数域的合成域。必须指出，无论我们选择什么 f 和 g，在任何情况下$K_{Y(f\otimes g)} \subsetneq K_{f,g}$。

设 Γ_F 是 F 的额外扭曲群。于是显然可得 $\Gamma_F \supseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。对于我们选取的 f 和 g，有 $\Gamma_1 = \Gamma_2$。还要注意，$K_{f,\ g} = \mathbb{Q}(\zeta_8)$。我们看到，在这个展开式中，$f+g$之和里 q^2 的系数为 $\zeta_8+\zeta_8^3$。我们断言，和式 $f + g$ 的所有系数都属于域 $\mathbb{Q}(\zeta_8 + \zeta_8^3)$。

很容易通过手工验证，对于任意的幂 $1 \leq i \leq 8$, $\zeta_8^i + \zeta_8^{3i}$ 都可以表示为 $\zeta_8+\zeta_8^3$ 的形式。因此，f 和 g 的所有海克特征值之和都属于 $\mathbb{Q}(\zeta_8 + \zeta_8^3)$。根据吉田提升 21 的定义，我们得到 $Y(f \otimes g)$ 的黑克特征值 $\in \mathbb{Q}(\zeta_8 + \zeta_8^3)$。因此，这是一个明确的例子，说明吉田提升的黑克特征值域是相关经典模形式的黑克特征值域的合成域的真子集。

(2) 考虑复向量空间 $S_2^1(100, \chi)$，其维数为 8，其中特征 χ 由 $\chi(51) = -1$ 和 $\chi(77) = \frac{\mu^6 - 3\mu^2}{4}$ 定义；这里μ 是多项式 $p(x)$: $= x^8 - 7x^4 + 16 = 0$的根。此特征的导子为 20，内扭群的阶为 8。

令 $\mu_1 := \frac{7+\sqrt{15}i}{2}, \mu_2 := -(\frac{7+\sqrt{15}i}{2})$ 为 $p(x)$ 的根。对于 $i = 1, 2$，我们有傅里叶展开

$$f_i = q + \mu_i q^2 + \frac{3\mu_i^7 - 13\mu_i^3}{8} q^3 + \ldots.$$

海克特征值环 $K_{f_1 f_2}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的维数为 8。海克特征值环由 1、q 和其自身 q^2 的系数决定。因此，根据定义 21，系数环 $K_{Y(f_1 \otimes f_2)}$ 由 q 和 q^2 在两个根下的黑克特征值之和决定。经过简单计算，我们发现这个域恰好

是 $\mathrm{Q}(\sqrt{15}i)$，其在 Q 上的扩张次数为 2。因此， $K_{f_1 f_2}$ 在 $K_{Y(f_1 \otimes f_2)}$ 上的扩张次数为 4。在这些情形下，$K_{Y(f_1 \otimes f_2)} \subsetneq K_{f_1, f_2}$。

我们仅给出两个例子，但从 LFMFDB 可以明显看出，吉田提升的额外扭曲群可能非常大，不过（如预期）可以根据各个经典椭圆模形式加以控制。

参考文献

[1]《单变量模函数》V，数学讲义第 601 卷，施普林格出版社，柏林—纽约（1977）。J.-P. Serre 和 D. B. Zagier 编。[2] A. Andrianov，《西格尔模形式与狄利克雷级数导论》，Universitext，施普林格，纽约（2009），ISBN 978-0-387-78752-7。[3] T. Arakawa，《二次向量值 Siegel 模形式及其相关的 Andrianov$L$-函数》，Manuscripta Math. 44（1983），第 1–3 期，155–185。[4] S. Arias-de Reyna、L. Dieulefait 和 G. Wiese，《辛伽罗瓦表示的相容系统与逆伽罗瓦问题 I：射影表示的像》，Trans. Amer. Math. Soc. 369（2017），第 2 期，887–908。[5] D. Banerjee 和 E. Ghate，《伴随提升与模形式自同态代数》，Israel J. Math. 195（2013），第 2 期，507–543。[6] A. F. Brown 和 E. P. Ghate，《椭圆模形式相关动机的自同态代数》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53（2003），第 6 期，1615–1676。[7] A. Conti，《有限斜率 Siegel 模形式的 p-进族的伽罗瓦层与同余理想》，《数学汇刊》155（2019），第 4 期，776–831。[8] F. Diamond 和 J. Shurman，《模形式入门》，《数学研究生教材》第 228 卷，施普林格出版社，纽约（2005），ISBN 0-387-23229-X。[9] E. Ghate、E. Gonz´alez-Jim´enez 和 J. Quer，《模形式自同态代数的 Brauer 类》，Int. Math. Res. Not.（2005），第 12 期，701–723。[10] L.-K. Hua，《任意域上辛群的自同构》，《数学年刊》（第 2 辑）49（1948），739–759。[11] L. Kaup 和 B. Kaup，《多复变全纯函数》，德古意特出版社，柏林、纽约（1983），ISBN 9783110838350。[12] A. Kumar、M. Kumari 和 A. Weiss，《关于 Siegel 模形式的朗–特罗特猜想》，arXiv 预印本 arXiv:2201.09278（2022）。[13] F. Momose，《关于模形式相关的 l-进表示》，J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28（1981），第 1 期，89–109。[14]A. Pitale，《Siegel 模形式》，数学讲义第 2240 卷，施普林格，查姆（2019），ISBN 978-3-030-15674-9；978-3-030-15675-6。经典的表示论方法。[15] K. A. Ribet，《具有实乘法的阿贝尔簇除点上的伽罗瓦作用》，Amer. J. Math. 98（1976），第 3 期，751–804。

[16] B. Roberts，全局 L-簇 GSp(2)与 θ 提升，《数学文献》**6**（2001）247–314。[17] A. Saha，关于吉田提升的彼得松范数之比，《数学论坛》**27**（2015），第 4 期，2361–2412。[18] P. Scholze，关于局部对称簇上同调中的挠元，《数学年刊》（第 2 辑）**182**（2015），第 3 期，945–1066。[19] J.-P. Serre，《椭圆曲线有限阶点的伽罗瓦´性质´》，《数学发明》**15**（1972），第 4 期，259–331。[20] ———，《阿贝尔簇的 l-进表示与椭圆曲线》，《数学研究札记》第 7 卷，A K Peters, Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州（1998），ISBN 1-56881-077-6。与 Willem Kuyk 和 John Labute 合作；1968 年原版的修订重印本。[21] J.-L. Waldspurger，《*GL(2)* 上某些自守形式的若干算术´性质´´》，《数学汇刊》**54**（1985），第 2 期，121–171。

浦那印度科学教育与研究所，印度