级联失效：动力学 ，稳定性与控 制

Stefanny Ramirez、Maaike Odijk，Jan C. Willems系统与控制中心，格罗宁根工程与技术研究所，理学与工程学院，格罗宁根大学，Nijenborgh 4，9747 AG 格罗宁根，荷兰 s.g.ramirez.juarez@rug.nl

Dario Bauso
Jan C. Willems系统与控制中心，格罗宁根工程与技术研究所，理学与工程学院，格罗宁根大学，Nijenborgh 4，9747 AG 格罗宁根，荷兰；工程系，巴勒莫大学，科学大道，90128 巴勒莫，意大利 d.bauso@rug.nl

arXiv:2305.00838v2 [math.OC] 5 Jul 2023

摘要

我们建立了一个金融网络级联失效的动态模型，其中交叉持股被视为反馈，外部资产投资被视为输入，失效惩罚被视为静态非线性。我们给出了使系统成为正系统的较弱和较强充分条件，并研究了平衡点和稳定性。稳定性意味着不存在级联，且市场价值收敛到常数值。我们提出了一种用于控制设计的构造性方法，以反馈-前馈控制输入的形式获得稳定市场投资。

关键词 级联失效 · 金融网络 · 正系统 · 稳定性分析 · 系统性风险

1 引言。

金融网络中的级联失效是指一个节点受到轻微冲击后，该冲击在整个网络中传播的现象。节点代表组织，边代表相互依存的交叉持股。冲击即金融失效，每当某个组织的市场价值低于阈值时便会发生。组织的市场价值取决于其外部资产投资以及对其他组织的持股。

1.1 主要贡献。

我们重点介绍以下主要贡献。首先，我们将 [10] 和 [11] 中的模型扩展到动态设定，使市场价值根据当前投资和当前交叉持股随时间变化。该模型具有反馈结构（交叉持股）、外部输入（资产投资）和静态非线性（不连续失效惩罚）。

其次，我们在正系统的背景下进行了详细分析。具体而言，我们给出了系统成为正系统的充分条件，并从级联故障网络韧性的角度作出物理解释。在这些条件下，系统存在稳态解（平衡点）。

第三，我们运用李雅普诺夫稳定性理论，分析此类平衡点渐近稳定的条件。稳定性意味着不会发生级联，且市场价值会收敛到一个常数。此外，我们

放宽上述充分条件，并证明在对网络连通度要求较宽松的条件下，平衡点仍可能存在。

第四，我们将稳定性分析扩展到大型网络的情形，并从网络的中心性和度连通性角度重新解读此前的稳定性结果。

第五，我们提供了一种用于控制设计的构造性方法，以反馈-前馈控制输入的形式获得稳定市场投资。前馈控制可阻止失效传播，而反馈控制则使市场价值动态保持稳定并收敛至稳态值。

1.2 相关文献。

我们基于 [11], 中的模型，并按照与 [4] 中相同的思路将其扩展到动态设定。与 [11] 中模型类似的模型可以在先前的文献中找到，例如参见 [10]。在 [10] 中，作者根据机构之间的债务和支付来定义股权价值；当某个失效的机构减少对其债权人的支付时，失效级联便会传播，从而可能导致至少一名债权人失效。另一方面，在 [11] 中，股权价值根据组织以及外部股东持有的股份来定义，而失效的传播会受到失效成本的显著影响。

动态阈值模型是级联失效文献中的经典模型，更多详情请参阅开创性研究 [1], [14], [16], [18], [24], [21] 和 [29]。 [5] 和 [7]提出了用于研究和缓解金融网络中系统性风险的动态模型。动态设定使我们能够运用系统与控制领域的工具，考察具有多个平衡点的系统的稳定性。具体而言，我们的模型采用四元数变换矩阵，因此可将其视为正系统 [13], ，并分析系统在受到使其偏离平衡点的扰动时所经历的暂态。此外，得益于这一动态框架，我们设计了反馈—前馈控制，以确定能够稳定系统并阻止失效级联的市场投资。

关于级联失效的文献浩如烟海，并沿多个方向不断发展，其中一些方向超出了本文的研究范围。例如， [9] 主要关注交易不确定性和市场摩擦。 [17]研究了互联经济网络（亦称网络之网络）对失效的脆弱性。 [2]研究了传染性连接及其对随机网络韧性的长期影响。 [27] 和 [19]提出了级联失效的随机模型，用于确定金融网络中首次失效发生的时刻。本文的基本视角沿袭了在市场设计背景下将“经济学家视为工程师”的理念 [25] 和 [26]。

以往将级联失效类比为流行病模型的尝试，在理解成对交互时似乎未能给出令人满意的答案，而这正是 [28] 的主要研究重点。 [23] 分析了使用传染模型理解金融网络和生物网络动力学的做法。在 [3] 中，作者将流行病模型框架应用于金融网络中的违约传播。从这个意义上说，邻居相关性可能会对防止传染呈指数级增长产生影响 [22]。本文关注的是强社会联系和弱社会联系所表现出的不同特征。具体而言，强连接是限制传染的一个主要因素，因为强连接中的邻居关系通常具有传递性（朋友的朋友通常也是朋友），这与 [16] 中的定义一致。另一个限制传染的因素，是原本相距较远的节点之间存在随机连接。例如，当传染需要同时接触多个激活源时，就会出现这种情况 [6]。在采用阈值模型的网络中，影响力最大化也是一项颇具挑战的任务。其目标是找出能够产生最大聚合影响力的最小节点集合 [8], [15]。从博弈论视角看，传染可类比为协调博弈 [12]。失效级联遵循网络节点间成对交互中的传染规则，因此，某些网络属性（如连通度或中心性）尤为重要。连通度使失效得以传播，但研究证明，高连通度反而会限制扩散，因为高阶节点非常稳定 [20]。

1.3 手稿的组织结构。

本文的组织结构如下。第2节中，我们建立模型。第3节中，我们将模型置于正系统理论的框架内，并进行平衡点分析，包括稳定性分析。第5节中，我们进行数值仿真。最后，第6节给出结论。

2 模型。

该金融网络包含一组公司 $N = \{1, \ldots, n\}$ 和一组基础资产 $M = \{1, \ldots, m\}$。资产 $h \in M$ 以市场价格 $p_h \in \mathbb{R}$ 为特征。公司 $i \in N$ 以股权价值 $V_i \in \mathbb{R}$ 和市场价值 $v_i \in \mathbb{R}$ 为特征。对于每一对 $i, j \in N, i \neq j$，公司 i 持有公司 j 的股份比例 $c_{ij} \in [0, 1]$。任何公司都不持有自身的股份，即 $c_{ii} = 0 \, \forall i \in N$。公司 i 未被其他公司持有的股份比例为 $\hat{c}_{ii} := 1 - \sum_{j \in N, i \neq j} c_{ji}, \hat{c}_{ii} > 0$。同样，对于每个 $i \in N$ 和 $h \in M$，公司 i 持有资产 h 的股份比例 D_{ih}。为引入简洁的符号表示，令 $V = [V_i]_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ 和 $v = [v_i]_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ 分别表示股权价值和市场价值向量。此外，令 $C := [c_{il}]_{i,l \in N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示交叉持股矩阵，$D := [D_{ih}]_{i \in N, h \in M}$ 表示基础资产持股矩阵，$p = [p_h]_{h \in M}$ 表示基础资产的市场价格向量。另令 $\hat{C} := diag(\hat{c}_{ii}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示对角矩阵，其中包含所有公司未被其他公司持有的股份比例。当公司 i 的市场价值 v_i 低于给定阈值 $\underline{v}_i$ 时，该公司便会“失效”，并产生固定的非负失效成本 $\beta_i \in \mathbb{R}_+$。股权价值由公司基础资产的价值、其持有的其他公司的股份价值以及失效成本决定，具体遵循以下离散时间动态模型：

$$\begin{cases} V(t+1) = CV(t) + Dp - \phi(v), \\ v(t) = \hat{C}V(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\phi(v) = [\beta_i I_{v_i < \underline{v}_i}(v_i)]_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ 且 $I_{v_i < \underline{v}_i}(v_i) = 1$ 当 $v_i < \underline{v}_i$ 且 $I_{v_i < \underline{v}_i}(v_i) = 0$ 否则。

为研究 正系统背景下式 (1) 的性质，我们用新的变量将其改写为

$$x_i(t) = v_i(t) - \underline{v}_i, \quad \text{for all } i \in N. \tag{2}$$

若公司 i 满足 $x_i(t) < 0$，则该公司失效；若满足 $x_i(t) \geq 0$，则不会失效。因此，包含当前状态 $x(t) = [x_i(t)]_{i \in N}$ 的正交象限也决定了在时间 t 哪些公司已经失效。当一个正交象限保持不变，即状态轨迹不会在不同正交象限之间转换时，$x_i(t)$ 的符号不会随时间改变，也就不会发生级联失效。

术语 $\phi(v)$ 可以建模为一个开关输入。我们考虑偏置 $U_i^{(offset)} = \frac{\beta}{2}$，并引入函数

$$U_i(x) := \begin{cases} \frac{\beta}{2}, & \text{if } \ x_i < 0, \\ -\frac{\beta}{2}, & \text{if } \ x_i \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

给定以下向量 $U(x) := [U_i(x)]_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ 和 $U^{(offset)} := [U_i^{(offset)}]_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$。我们可以将 $\phi(v)$ 重写如下：

$$\phi(v) = U(x) + U^{(offset)} = U(x) + \mathbf{1}\frac{\beta}{2}. \tag{4}$$

如式（4）所示，项 $\phi(v)$ 表示惩罚项的偏置，可解释为静态非线性。由式（1）、（2）和（4），记 $\underline{v} := [\underline{v}_i]_{i \in N}$ 后，动力学（1）可改写为关于误差 $x(t)$ 的动力学：

$$\begin{aligned} x(t+1) &= v(t+1) - \underline{v} = \hat{C}V(t+1) - \underline{v} = \hat{C}\Big[CV(t) + Dp - \phi(v)\Big] - \underline{v} \\ &= \hat{C}C\hat{C}^{-1}x(t) + (\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(Dp - U(x(t)) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}). \end{aligned} \tag{5}$$

在最后一个等式中，我们使用了这一事实，即

$$V(t) = \hat{C}^{-1}v(t) = \hat{C}^{-1}(x(t) + \underline{v}).$$

让我们使用索引 $r = 1$、.....、$\hat{r}$，按照一个特定但随机的顺序枚举 2^n 个正交象限，其中 $\hat{r} := 2^n$。我们用 $\mathcal{O}^{(r)}$ 表示第 r 个正交象限。对于每个正交象限 $\mathcal{O}^{(r)}$ $r = 1$、.....、$\hat{r}$，考虑以下四元数矩阵 $J^{(r)} = [j_{il}^{(r)}]_{i, \ l \in N}$ 其中 $j_{il}^{(r)} := 0$，对于所有 i、$l \in N$、$i \neq l$，以及任意的 $x \in \mathcal{O}^{(r)}$。

$$j_{ii}^{(r)} := \begin{cases} -1, & \text{if } x_i < 0, \\ 1, & \text{if } x_i \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

该变换可以将任意正交象限转换为正正交象限。换言之，对于第 r 个正交象限中的任意初始状态 $x(0)$ $\mathcal{O}^{(r)}$，我们都能得到正正交象限中的一个对应初始状态，表示为

$$X(0) = J^{(r)}x(0) \in \mathbb{R}_+^n. \tag{7}$$

变换矩阵可按如下方式定义任意一般正交象限 $\mathcal{O}^{(r)} := \{x \in \mathbb{R}^n | \, J^{(r)}x \geq 0\}$ 对所有$r = 1$，...，$\hat{}r$。利用四元数矩阵 $J^{(r)}$，动力学 (5) 可用新变量 $X(t)$ 表示为：

$$X(t+1) = J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)}X(t) + J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}\Big(Dp - U(J^{(r)}X(t)) - \mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big]. \tag{8}$$

引入新矩阵后

$$A^{(r)} := [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} := J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & j_{nn}\frac{1}{\hat{c}_{nn}}c_{1n}j_{11}\hat{c}_{11} \\ j_{11}\frac{1}{\hat{c}_{11}}c_{21}j_{22}\hat{c}_{22} & \cdots & j_{nn}\frac{1}{\hat{c}_{nn}}c_{2n}j_{22}\hat{c}_{22} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{11}\frac{1}{\hat{c}_{11}}c_{n1}j_{nn}\hat{c}_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

和向量

$$b^{(r)}(X) := J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}\Big(Dp - U(J^{(r)}X) - \mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big] \tag{10}$$

该模型可以紧凑地写成：

$$X(t+1) = A^{(r)}X(t) + b^{(r)}(X(t)). \tag{11}$$

等价地，我们可以将上述内容写成输入输出形式

$$\begin{cases} X(t+1) = A^{(r)}X(t) + b^{(r)}(X(t)), \\ v(t) = J^{(r)}X(t) + \underline{v}. \end{cases} \tag{12}$$

图1以反馈形式的框图表示了式（12）。

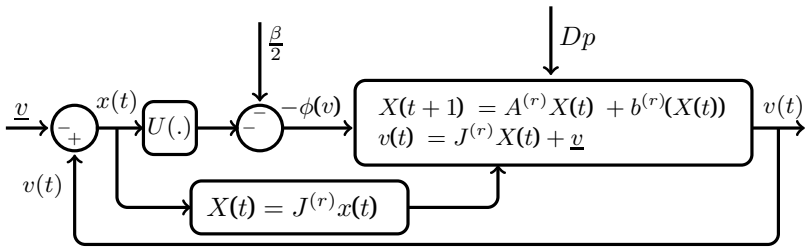


图1：式（12）的反馈形式框图表示。

3 分析。

我们回顾一下，如果方阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的所有元素 $a_{ij} \geq 0$ 对任意 i、$j = 1$、$\ldots n$都成立，则称其为非负矩阵。对于非负矩阵 A 和向量 v，我们分别记作 $A \geq 0$和 $v \geq 0$。如果不等式严格成立，即 $a_{ij} > 0$，则称该矩阵为正矩阵。对于正矩阵 A 和向量 v，我们分别记作 $A > 0$ 和 $v > 0$。

当且仅当 $A \geq 0$ 和 $b \geq 0$时， $x(k+1) = Ax(k) + b$ 型仿射系统是正系统。对于正系统，若 $x(0) \geq 0$，则对所有 $k = 1$，2，.....，均有 $x(k) \geq 0$。此外，若 A 收敛，则 $\lim_{k\to\infty} x(k) = (I - A)^{-1}b \geq 0$。我们回顾一下，若所有特征值都位于单位圆盘内，即 $|\lambda| < 1$，则 A 收敛，其中 $\lambda \in spec(A)$，而 $spec(A)$表示 A 的谱（所有特征值的集合）。

考虑一般正交象限 $\mathcal{O}^{(r)}$，并令 $\mathcal{P}^{(r)} := \{i \in N\colon\ j_{ii} = 1\}$ 以及 $\mathcal{N}^{(r)} := \{i \in N\colon\ j_{ii} = -1\}$。显然有 $N = \mathcal{P}^{(r)} \cup \mathcal{N}^{(r)}$，且 $\mathcal{P}^{(r)}, \mathcal{N}^{(r)}$ 是 N 的一个划分。定义 $b_+^{(r)}(X) := [b_i^{(r)}(X)]_{i\in\mathcal{P}^{(r)}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{P}^{(r)}|}$。换言之，$b_+^{(r)}(X)$ 是从 $b^{(r)}(X)$ 中仅提取分量 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$ 所得到的向量。

第一个结果是关于式 (10) 中定义的向量函数 $b^{(r)}(X) \in \mathbb{R}^n$ 的符号。

引理1 设给定 $x \in \mathcal{O}^{(r)}$，并考虑 $X = J^{(r)}x$。如果对于所有 $i = 1$，....., n，都有 $b^{(r)}(X) \geq 0$，则：

$$(Dp)_i \leq \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i + \beta \qquad if\ i \in \mathcal{N}^{(r)}, \tag{13}$$

$$(Dp)_i \geq \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i \qquad if\ i \in \mathcal{P}^{(r)}. \tag{14}$$

Pro在 1 中，先考虑第 i 个分量，我们有 $b_i^{(r)}(X) \geq 0$ 当且仅当

$$\begin{aligned} b_i^{(r)}(X) &= \Big(J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}\Big(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big]\Big)_i \\ &= j_{ii}^{(r)}\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}\Big(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \geq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

证明的第一部分，令 $j_{ii}^{(r)}=-1$。由 $j_{ii}^{(r)}=-1$ 可知，不等式 (15) 成立，当且仅当

$$\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}\Big(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \leq 0.$$

由于 $\hat{C}$ 为正对角矩阵，左侧向量左乘 $\hat{C}^{-1}$ 后，其各元素的符号保持不变。因此，上述不等式成立，当且仅当

$$\begin{aligned} &\Big(\hat{C}^{-1}(\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}^{-1}\hat{C}(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\tfrac{\beta}{2})\Big)_i \\ &=\Big((C\hat{C}^{-1}-\hat{C}^{-1})\underline{v}+Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)_i \leq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

由此可得

$$(Dp)_i \leq \Big(-(C\hat{C}^{-1}-\hat{C}^{-1})\underline{v}+U(J^{(r)}X)+\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)_i. \tag{17}$$

由 $j_{ii}^{(r)}=-1$ 可得 $\Big(U(J^{(r)}X)+\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)_i=\beta$，且 (13) 得证。

对于第二个不等式 (14)，令 $j_{ii}^{(r)}=1$。那么，不等式 (15) 成立，当且仅当

$$\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}\Big(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \geq 0.$$

当且仅当上述不等式成立时

$$\begin{aligned} &\Big(\hat{C}^{-1}(\hat{C}C\hat{C}^{-1}-I)\underline{v}+\hat{C}^{-1}\hat{C}\Big(Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \\ &=\Big((C\hat{C}^{-1}-\hat{C}^{-1})\underline{v}+Dp-U(J^{(r)}X)-\mathbf{1}\frac{\beta}{2}\Big)_i \geq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

作为 $j_{ii}^{(r)}=1$，那么我们有 $U(J^{(r)}X)+\mathbf{1}\frac{\beta}{2}=0$，对于上述内容，我们得到

$$(Dp)_i \geq \Big(-(C\hat{C}^{-1}-\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i, \tag{19}$$

并且（14）得到了证明。□

下一个结果针对并非所有公司都相互依赖的情况。就相互依赖图而言，这意味着该图不是完全连通的。

为准备下一个结果，令 $\hat{A}^{(r)}:=[A_{i\bullet}^{(r)}]_{i\in\mathcal{P}^{(r)}}$。此外，令 $\hat{A}_+^{(r)}:=[a_{ij}^{(r)}]_{i,j\in\mathcal{P}^{(r)}}$ 和 $\hat{A}_-^{(r)}:=[a_{ij}^{(r)}]_{i\in\mathcal{P}^{(r)},\,j\in\mathcal{N}^{(r)}}$。换言之，我们可以划分 $\hat{A}^{(r)}=[\hat{A}_+^{(r)}|\hat{A}_-^{(r)}]$。另外，令 $X_+(t):=[X_i(t)]_{i\in\mathcal{P}^{(r)}}$和$X_-(t):=[X_i(t)]_{i\in\mathcal{N}^{(r)}}$。显然，我们可以划分 $X(t):=[X_+(t)^T|X_-(t)^T]^T$。

引理 2 矩阵 $A^{(r)}$ 是一个正矩阵，即

$$c_{il}=0, \textit{for all } i,l\in N\textit{: } j_{ii}^{(r)}\neq j_{ll}^{(r)}\ . \tag{20}$$

此外，子矩阵 $\hat{A}^{(r)}:=[A_{i\bullet}^{(r)}]_{i\in\mathcal{P}^{(r)}}$ 是一个正矩阵，如果

$$c_{il}=0, \textit{for all } i,l\in N\textit{: } i\in\mathcal{P}^{(r)},\, l\in\mathcal{N}^{(r)}. \tag{21}$$

证明 2 矩阵 $A^{(r)}$ 的元素定义为 $a_{il}^{(r)}=j_{ii}^{(r)}\hat{c}_{ii}c_{il}\frac{1}{\hat{c}_{ll}}j_{ll}^{(r)}\quad\forall i\neq l$。如果对于每个 $j_{ii}^{(r)},j_{ll}^{(r)}\in\{-1,1\}$，其中 $j_{ii}^{(r)}\neq j_{ll}^{(r)}$ 交叉持股矩阵的元素为 $c_{il}=0$，则 $a_{il}^{(r)}=j_{ii}^{(r)}\hat{c}_{ii}c_{il}\frac{1}{\hat{c}_{ll}}j_{ll}^{(r)}=-1\times\hat{c}_{ii}\times 0\times 1\frac{}{\hat{c}_{ll}}\times 1=0\geq 0$。总之，只要对于每个 $j_{ii}^{(r)},j_{ll}^{(r)}\in\{-1,1\}$，其中 $j_{ii}^{(r)}\neq j_{ll}^{(r)}$，矩阵 $A^{(r)}$ 就是正矩阵。为证明 (21)，我们只需对通用行 i（其中 $j_{ii}=1$）应用相同的推理。□

对于任意给定的正交象限 $\mathcal{O}^{(r)}$，定义子空间 $\mathcal{S}^{(r)} := \{\xi \in \mathbb{R}^n | \, \xi_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{P}^{(r)}\}$。简单来说，子空间$\mathcal{S}^{(r)}$ 是这样一个点的集合：其中，向量 $\mathcal{O}^{(r)}$ 的所有正分量都保持为正（但负分量可以变为正）。换句话说，对于给定的 $\mathcal{O}^{(r)}$, $\mathcal{S}^{(r)} = \cup_{k,\ \mathcal{P}^{(k)} \supset \mathcal{P}^{(r)}} \mathcal{O}^{(k)}$。

我们已准备好建立使 $\mathcal{S}^{(r)}$ 正向不变的条件。

定理 1 设动力学 (11) 已给定，其中 $X(0) \in \mathbb{R}^n_+$ 且 $x = J^{(r)}X(0)$ 属于 $\mathcal{O}^{(r)}$。若 (13)-(14) 和 (20) 成立，则有

$$X(0) \geq 0 \Longrightarrow X(t) \geq 0, \quad \textit{for all } t = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

类似地，若 (14) 和 (21) 成立，则对于所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$，有

$$X_i(0) \geq 0 \Longrightarrow X_i(t) \geq 0, \quad \textit{for all } t = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

证明 3 根据引理 1 和 2，若 (13)-(14) 和 (20) 成立，则有 $A^{(r)} \geq 0$ and $b^{(r)} \geq 0$。这意味着 (11) 是一个正仿射系统，进而意味着，如果系统在正正交象限内初始化，其轨迹将始终位于正正交象限内。

对于证明的第二部分，我们可以写成

$$X_+(t+1) = A^{(r)}_+ X_+(t) + A^{(r)}_- X_-(t) + b^{(r)}_+(X(t)).$$

由 (21) 可知，$A^{(r)}_-$ 是一个零矩阵，因此上述内容等价于

$$X_+(t+1) = A^{(r)}_+ X_+(t) + b^{(r)}_+(X(t)) \geq 0.$$

由 (14) 可知，$b^{(r)}_+(X(t)) \geq 0$。此外，$A^{(r)}_+$ 也成立，因此我们得到 (23)。

证明至此完成。□

条件 (22) 意味着失效不会传播，而且一开始就失败的公司不会重返市场。条件 (23) 意味着失效不会传播，但一开始就失败的公司可以重返市场。在这两种情况下，$\mathcal{S}^{(r)}$ 都是正向不变的。

在以下结果中，我们建立稳定性的条件，并在正正交象限中得到唯一的平衡点。

定理 2 考虑动力学 (11)，并假设 (13)-(14) 和 (20) 成立。此外，令

$$0 \leq \sum_{l=1, l \neq i}^{n} \hat{c}_{ii} c_{il} \frac{1}{\hat{c}_{ll}} < 1. \tag{24}$$

然后，$X(t)$ 收敛到以下唯一的平衡点：

$$X^* = (I - J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)})^{-1} \cdot \Big[J^{(r)}\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(Dp - U(J^{(r)}X^*) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2})\Big)\Big]. \tag{25}$$

证明 4 首先请注意，由于根据定理 1，(13)-(14) 和 (20) 成立，因此系统 (11) 是正的。这意味着状态轨迹永远不会离开正正交象限，也就是说条件 (22) 成立。在每个单独的正交象限内，动力学 (12) 是线性的，因此存在唯一的平衡点。为求得该平衡点，请注意，由 (8) 可知。

$$X(t+1) = J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)}X(t) + J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(Dp - U(J^{(r)}X(t)) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2})\Big]. \tag{26}$$

在均衡状态下，必须满足：

$$X(t+1) = X(t) = X^*. \tag{27}$$

现在将（27）代入（26），得到

$$X^* = J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)}X^* + J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(Dp - U(J^{(r)}X^*) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2})\Big]. \tag{28}$$

将所有涉及 X^* 的线性项移至等式左侧，得到

$$(I - J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)})X^* = J^{(r)}\Big[(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}\Big(Dp - U(J^{(r)}X^*) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}\Big)\Big]. \tag{29}$$

将两边左乘 $(I - J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)})^{-1}$，即可得到 25 中的平衡点。

现在只需证明该平衡点是渐近稳定的，即满足 $\lim_{t\to\infty} X(t) = X^* \geq 0$。为此，只需证明矩阵 $A^{(r)} := J^{(r)}\hat{C}C\hat{C}^{-1}J^{(r)}$ 收敛；我们知道，当所有特征值都位于单位圆盘内时，这一条件成立，即 $|\lambda| < 1$，其中 $\lambda \in spec(A)$。

上述条件成立的充分条件是：

$$0 \leq \min_i \sum_{l=1,l\neq i}^{n} |a_{il}^{(r)}| \leq \max_i \sum_{l=1,l\neq i}^{n} |a_{il}^{(r)}| \leq 1. \tag{30}$$

由此可得：

$$0 \leq \sum_{l=1,l\neq i}^{n} |a_{il}^{(r)}| < 1. \tag{31}$$

现在我们知道 $|a_{ij}^{(r)}| = |j_{ii}^{(r)}\hat{c}_{ii}c_{il}\frac{1}{\hat{c}_{ll}}j_{ll}^{(r)}| = |\hat{c}_{ii}c_{il}\frac{1}{\hat{c}_{ll}}| \quad \forall i \neq l$。条件（31）因此等价于条件（24），证明完毕。□

为理解条件（24），假设公司 i 拥有公司 j 的 90% 股份，且不持有其他公司的股份。再假设公司 j 反过来也不投资其他公司，那么 $C_{ii} = 0.1$ 和 $\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{ij}}{C_{jj}} = 0.9$。于是 $C_{ii}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{ij}}{C_{jj}}\Big) = 0.09 < 1$。从这个例子可以看出，当一家公司持有另一家公司的大量股份，而后者又很少投资其他公司时，前一家公司在网络中代表一个稳定节点。

条件 (21) 表明，$A_{-}^{(r)}$ 是一个零矩阵。我们可以放宽这一条件，假设 $A_{-}^{(r)}$ 非零。在 $X_{-}(t)$ 有界的情况下，我们仍然可以证明正不变性。

考虑超矩形 $H := \{X_{-} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}^{(r)}|} \,|\, X_l \leq \bar{X}_l, \forall l \in \mathcal{N}^{(r)}\} \subset \mathbb{R}^{|\mathcal{N}^{(r)}|}$，其中 $\bar{X}_l$ 为给定的上界。假设对于所有 $t \geq 0$，$X_{-}(t) \in H$。另记 $X_{-} := [X_l]_{l\in\mathcal{N}^{(r)}}$。

定理 3 考虑动力学 (11)，并假设对于所有 $t \geq 0$，$X_{-}(t) \in H$。如果

$$(Dp)_i \geq \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i - \Big(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\Big)_i \; \forall i \in \mathcal{P}^{(r)} \tag{32}$$

那么，对于所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$而言，

$$X_i(0) \geq 0 \Longrightarrow X_i(t) \geq 0, \quad \textit{for all } t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

证明 5 让我们考虑动力学

$$X_{+}(t+1) = A_{+}^{(r)}X_{+}(t) + A_{-}^{(r)}X_{-}(t) + b_{+}^{(r)}(X(t)). \tag{34}$$

我们知道 $A_{+}^{(r)} \geq 0$。

现在我们的目标是证明

$$A_{-}^{(r)}X_{-}(t) + b_{+}^{(r)}(X(t)) \geq 0.$$

为此，我们回顾一下，对所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$，

$$b_i^{(r)}(X) \geq -\Big(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\Big)_i$$

当且仅当.....时成立

$$\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}\Big(Dp - U(J^{(r)}X) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \geq -\Big(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\Big)_i. \tag{35}$$

上述不等式成立，当且仅当

$$\begin{aligned}&\Big(\hat{C}^{-1}(\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}^{-1}\hat{C}\Big(Dp - U(J^{(r)}X) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}\Big)\Big)_i \\ &= \Big((C\hat{C}^{-1} - \hat{C}^{-1})\underline{v} + Dp - U(J^{(r)}X) - \mathbf{1}\tfrac{\beta}{2}\Big)_i \geq -\hat{C}_{ii}^{-1}\Big(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\Big)_i.\end{aligned} \tag{36}$$

现在，对于所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$，我们有 $U(J^{(r)}X) + \mathbf{1}\frac{\beta}{2} = 0$，因此对于上述内容可得

$$(Dp)_i \geq \Big(-(C\hat{C}^{-1} - \hat{C}^{-1})\underline{v} \Big)_i - \hat{C}_{ii}^{-1} \Big(A_-^{(r)} \bar{X}_- \Big)_i, \tag{37}$$

这与（32）相对应。

为完成证明，只需注意到条件（32）还意味着

$$b_+^{(r)}(X(t)) \geq -A_-^{(r)} \bar{X}_-. \tag{38}$$

由（38）我们还可得到

$$A_-^{(r)} X_-(t) + b_+^{(r)}(X(t)) \geq 0,$$

因此，动力学（34）满足正不变性条件

$$X_+(0) \geq 0 \Longrightarrow X_+(t) \geq 0, \quad \textit{for all } t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{39}$$

上述条件与（33）一致。至此，证明完成。 □

3.1 大规模网络。

定理 3 在大规模网络的情形下有一个很好的对应结果。为简化起见，假设股份具有齐次性，即对于给定的 $0 < \alpha < 1$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{with prob. } \tilde{\Theta}_i \in [0,1] \\ 0 & \text{with prob. } 1 - \tilde{\Theta}_i \end{cases}, \quad \forall i \in \mathcal{P}^{(r)},\, j \in \mathcal{N}^{(r)}.$$

于是我们有

$$A_-^{(r)} := [a_{ij}^{(r)} \in \{0, \alpha\}]_{i \in \mathcal{P}^{(r)},\, j \in \mathcal{N}^{(r)}} \in \{0, \alpha\}^{|\mathcal{P}^{(r)}| \times |\mathcal{N}^{(r)}|}.$$

˜注意， $\Theta_i n$ 是网络的平均连通度（度）。

此外，假设对于所有的 $j \in \mathcal{N}^{(r)}$ $\bar{X}_j = \bar{\xi}$。于是我们可以得到故障公司所能拥有的、在公司 i 仍然安全的情况下的最大连接数（交叉持股数），该值为

$$\hat{k}_i = \Big\lfloor \frac{b_i^{(r)}(X)}{\alpha \bar{\xi}} \Big\rfloor.$$

值得指出的是，上述条件是通过考虑最坏情况分析得到的，因为它源自（32）：替换 $\Big(A_-^{(r)} \bar{X}_- \Big)_i = \tilde{n}\alpha\bar{\xi}$ 后，检查使（32）成立的最大 $\tilde{n}$。

每家公司连接到失效节点的概率 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$ 为

$$\Theta = \frac{|\mathcal{N}^{(r)}|}{|\mathcal{P}^{(r)}| + |\mathcal{N}^{(r)}|} = \frac{|\mathcal{N}^{(r)}|}{n}.$$

设 Δ_i 为公司 i的度，其定义如下:

$$\Delta_i = \tilde{\Theta}_i n.$$

换句话说，当 n 较大时，创建连接的概率等于连接数除以公司数，即 $\tilde{\Theta}_i = \frac{\Delta_i}{n}$。设 $\binom{n}{k} = {}_k \quad {}^{n!}\ !(n-k)!$ 。那么我们有

$$\Pr\left\{ \Big(A_-^{(r)} \bar{X}_- \Big)_i \leq \hat{k}_i \alpha \bar{\xi} \right\} = \sum_{j=0}^{\hat{k}_i} \binom{\Delta_i}{j} \Theta_i^j (1 - \Theta_i)^{\Delta_i - j}.$$

上述结果源于这样一个事实：连接到失效公司的 j 条连接数服从二项分布

$$\Pr\left\{ \Big(A_-^{(r)} \bar{X}_- \Big)_i = j\alpha \bar{\xi} \right\} = \binom{\Delta_i}{j} \Theta^j (1 - \Theta)^{\Delta_i - j}.$$

ˆ 然后，通过计算失效公司连接数的累积分布函数，即可得出连接失效公司的数量至多为 k 的概率。

定义函数

$$\hat{F}_n(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{k}_i < \tilde{\Theta}_i \tau\}}, \quad \forall \tau = 0, \ldots, n \tag{40}$$

ˆ ˜其中， $\mathbf{1}_{\{\hat{k}_i < \tilde{\Theta}_i \tau\}}$是事件 $k_i < \Theta_i \tau$的指示函数，即

$$\mathbf{1}_{\{\hat{k}_i < \tilde{\Theta}_i \tau\}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \hat{k}_i < \tilde{\Theta}_i \tau, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{41}$$

˜对于规模为 τ 的失效公司群体， $\Theta_i \tau$ 表示单个公司 i 与预期失效邻近公司之间的连接数量。然后， $F_n(\tau)$ 表示安全阈值为 k 的公司数量，该阈值˜小于与失效公司之间的预期连接数量 $\Theta_i \tau$。我们可以按如下方式估计失效公司数量的上界：

$$\widehat{|\mathcal{N}^{(r)}|} := \max_{\tau=0,\ldots,n} \{\hat{F}_n(\tau) \geq \tau\}. \tag{42}$$

显然， $\widehat{|\mathcal{N}^{(r)}|}$ 会随着平均连通度 $\tilde{\Theta} n$的增加而增大。

4 控制设计。

在本节中，我们基于关于系统 (11) 为正且稳定的条件的先前结果，设计一种外部输入以确保满足这些条件。外部输入可以视为离散时间控制信号，也可以解释为对外部资产的投资策略。具体而言，我们设计一种可行的外部资产投资，以确保系统为正且稳定，也就是说，级联失效得以避免。

4.1 反馈-前馈结构。

我们回顾一下，控制的物理含义是对外部资产 Dp 进行投资。正确的外部资产投资可确保未发生违约的公司的市场价值保持在阈值市场价值之上。我们将控制 Dp 划分为两部分：

i) 恒定的前馈部分 $u^{(1)}$，以确保输入向量 $b^{(r)}$ 非负；ii) 动态反馈部分 $u^{(2)}$，以确保状态空间矩阵 $A^{(r)}$ 为正，并满足稳定性的充分条件 $0 \leq \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(r)} < 1$。

于是，我们有

$$Dp = u^{(1)} + u^{(2)}, \tag{43}$$

$$\text{Where:} \quad u^{(1)} = \underline{u}^{(r)}, \tag{44}$$

$$u^{(2)} = K^{(r)} X(t). \tag{45}$$

需要指出的是，以外部资产投资的形式设计控制信号，是在每个时间段 t 执行的。由式 (11)，将外部投资项 Dp 替换为式 (43)-(45) 中的反馈-前馈输入，可得以下闭环动力系统：

$$\begin{cases} X(t+1) = (A^{(r)} + J^{(r)} \hat{C} K^{(r)}) X(t) + J^{(r)}((\hat{C} C \hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(\underline{u}^{(r)} - U(J^{(r)} X) - \mathbf{1}\frac{\beta}{2}), \\ v(t) = J^{(r)} X(t) + \underline{v}. \end{cases} \tag{46}$$

令 $K^{(r)} := J^{(r)} \tilde{K}^{(r)}$，那么反馈矩阵为 $J^{(r)}$ ˆ $C J^{(r)} \tilde{K}^{(r)} = J^{(r)}$ ˆ $C K^{(r)}$，闭环矩阵 $\tilde{A}^{(r)}$ 为 :

$$\tilde{A}^{(r)} := [\tilde{a}_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} = (A^{(r)} + \hat{C} \tilde{K}^{(r)}) = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} \tilde{k}_{11} & \ldots & a_{1n} + \hat{c}_{11} \tilde{k}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \hat{c}_{nn} \tilde{k}_{n1} & \ldots & \hat{c}_{nn} \tilde{k}_{nn} \end{bmatrix}. \tag{47}$$

我们还引入向量

$$\tilde{b}^{(r)} := J^{(r)}\Big((\hat{C}C\hat{C}^{-1} - I)\underline{v} + \hat{C}(\underline{u}^{(r)} - U(J^{(r)}X) - \mathbf{1}\frac{\beta}{2})\Big). \tag{48}$$

注意，式（48）中的 $\tilde{b}^{(r)}$ 与式（10）中的 $b^{(r)}$ 不同，因为外部资产的投资项 Dp 现在被尚未设计的控制输入$\underline{u}^{(r)}$所取代。系统（46）可以改写为如下紧凑形式:

$$\begin{cases} X(t+1) = \tilde{A}^{(r)}X(t) + \tilde{b}^{(r)}, \\ v(t) = J^{(r)}X(t) + \underline{v}. \end{cases} \tag{49}$$

在下文中，系统 (49) 被称为闭环动力系统，所有结果都将与其相关。为直观展示闭环动力系统的动力学，模型的框图如第 2 节所示。

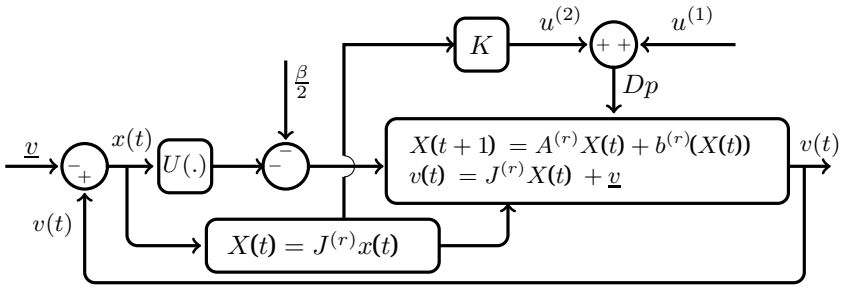


图 2：对资产投资的反馈-前馈控制。

4.2 确保 $\tilde{b}^{(r)}$ 为非负数。

在本节中，设计常值前馈控制 $u^{(1)} = \underline{u}^{(r)}$，以确保 $\tilde{b}^{(r)}$ 非负。

定理 4 考虑系统 (49)，并设计 马会

$$\underline{u}^{(r)} = (\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v} + U(J^{(r)}X) + \mathbf{1}\frac{\beta}{2} + J^{(r)}\xi, \quad \xi > 0, \tag{50}$$

则向量 $\tilde{b}^{(r)}$ 为非负向量。

证明 6 由引理1可知，为使 $\tilde{b}^{(r)}$ 非负，以下约束应成立:

$$\underline{u}_i^{(r)} \le \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i + \beta \qquad \textit{if } i \in \mathcal{N}^{(r)}, \tag{51}$$

$$\underline{u}_i^{(r)} \ge \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i \qquad \textit{if } i \in \mathcal{P}^{(r)}. \tag{52}$$

将 (50) 代入 (51)，可得对所有 $i \in \mathcal{N}^{(r)}$:

$$\Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i + \beta + j_{ii}^{(r)}\xi_i \le \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i + \beta,$$

该条件在 $j_{ii}^{(r)}\xi_i < 0$ 时成立。

类似地，将 (50) 代入 (52)，可得对所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$:

$$\Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i + j_{ii}^{(r)}\xi_i \ge \Big((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\Big)_i,$$

这一条件在 $j_{ii}^{(r)}\xi_i > 0$时成立。 □

上述设计的控制 $u^{(1)}$ 代入系统（49）后，得到以下动力学。 :

$$\begin{cases} X(t+1) = (A^{(r)} + J^{(r)}\hat{C}K^{(r)})X(t) + J^{(r)}\hat{C}J^{(r)}\xi, \\ v(t) = J^{(r)}X(t) + \underline{v}, \end{cases} \tag{53}$$

其中 $\tilde{b}^{(r)} = \hat{C}J^{(r)}x^{(r)} \geq 0$。

定理 5 考虑系统 (49)，并假设对所有 $t \geq 0$， $X_{-}(t) \in H$。我们来设计 $\forall i \in \mathcal{P}^{(r)}$

$$\underline{u}_i^{(r)} = \left((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\right)_i - \hat{C}_{ii}^{-1}\left(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\right)_i + \xi_i, \quad \xi_i > 0, \tag{54}$$

那么对所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$

$$X_i(0) \geq 0 \Longrightarrow X_i(t) \geq 0, \quad \textit{for all } t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55}$$

证明 7 根据定理 3， $\forall i \in \mathcal{P}^{(r)}$ 我们有， $\tilde{b}_i^{(r)}$ 非负当且仅当:

$$\underline{u}_i^{(r)} \geq \left((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\right)_i - \hat{C}_{ii}^{-1}\left(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\right)_i. \tag{56}$$

将 (54) 代入 (56)，我们得到对所有 $i \in \mathcal{P}^{(r)}$:

$$\left((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\right)_i - \hat{C}_{ii}^{-1}\left(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\right)_i + \xi_i \geq \left((\hat{C}^{-1} - C\hat{C}^{-1})\underline{v}\right)_i - \hat{C}_{ii}^{-1}\left(A_{-}^{(r)}\bar{X}_{-}\right)_i, \tag{57}$$

该条件满足，因为 $\xi_i > 0$。 □

4.3 确保 $\tilde{A}^{(r)}$ 为正且稳定。

本节设计动态反馈控制 $u^{(2)}$，以确保 $\tilde{A}^{(r)}$ 为正，并保证定理 2 中的稳定性充分条件成立。如前所述，我们假设 $K^{(r)} := J^{(r)}\tilde{K}^{(r)}$。矩阵$\tilde{K}^{(r)}$ 在下文中称为控制输入矩阵。为确定控制输入矩阵的各个元素，我们构建了以下线性规划。

引入以下新记号

$$\tilde{k} := vec(\tilde{K}) = [\tilde{K}_{\bullet 1}^T \ldots \tilde{K}_{\bullet n}^T]^T, \quad \delta := \left[\frac{a_{\bullet 1}}{\hat{c}_{11}}^T \ldots \frac{a_{\bullet n}}{\hat{c}_{nn}}^T\right]^T.$$

~ ~ ~注意， k 是 K 的向量化结果，即将矩阵 K 的各列依次堆叠而成。此外，令 e_i 为 n维空间中的第 i个标准基向量，即 $e_i := [0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0]^T$，并记

$$\mathbf{e}_i := e_i \otimes \mathbf{1}_n = [\mathbf{0}^T \ldots \mathbf{0}^T\, \mathbf{1}_n^T\, \mathbf{0}^T \ldots \mathbf{0}^T]^T.$$

此外，对于 $\epsilon > 0$，我们记

$$\gamma_i := \frac{1}{\hat{c}_{ii}}(1 - \sum_{l=1}^{n} a_{il}) - \epsilon, \quad \mu_i := \frac{1}{\hat{c}_{ii}}\sum_{l=1}^{n} a_{il}.$$

该线性规划表示为

$$\begin{aligned} \text{(LP1)} \quad \min \quad & -\mathbf{1}_{n^2}^T\tilde{k} && && (58)\\ \text{s.t.} \quad & -\tilde{k} \leq \delta && && (59)\\ & \mathbf{e}_i^T\tilde{k} \leq \gamma_i && \forall i = 1, \ldots, n && (60)\\ & -\mathbf{e}_i^T\tilde{k} \leq \mu_i && \forall i = 1, \ldots, n && (61)\\ & \tilde{k}_{il} = 0 && \forall i = l. && (62) \end{aligned}$$

定理 6 考虑系统 (49)，并令 $\tilde{K}^{(r)}$ 按照 (58)-(62) 进行设计，则矩阵 $\tilde{A}^{(r)}$ 为正，且满足 (24) 中关于稳定性的充分条件。

证明 8 对于第一部分，我们希望证明矩阵 $\tilde{A}^{(r)}$ 是一个正矩阵，即 $\tilde{A}^{(r)} > 0$。如果所有元素均为非负数，即 $\tilde{a}_{il} \geq 0 \quad \forall i,l = 1,...,n$，则结论成立。由 (47) 可知，通用的非对角元素为$\tilde{a}_{il} = a_{il} + \hat{c}_{ii}k_{il}$。约束 (59) 随即意味着

$$\tilde{a}_{il} = a_{il} + \hat{c}_{ii}\tilde{k}_{il} \geq 0.$$

上述内容可改写为

$$\tilde{k}_{il} \leq \frac{a_{il}}{\hat{c}_{ii}} \quad \forall i,l = 1,\ldots,n.$$

这是式 (59) 的分量形式。

对于第二部分，我们旨在证明 $\tilde{A}^{(r)}$ 的所有特征值都位于单位圆盘内。众所周知，如果矩阵 $\tilde{A}^{(r)}$ 的所有对角元素均为零，且不等式 $0 \leq \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{il} < 1 \quad \forall i = 1,\ ...,\ n$ 成立，那么该矩阵的所有特征值都位于单位圆盘内。约束 (62) 确保所有对角元素均为零，即 $\tilde{a}_{il} = 0 \quad \forall i = l$。此外，约束 (60) 和 (61) 确保矩阵 $\tilde{A}^{(r)}$ 的每一行的行和小于 1 且不小于 0。这些约束通过设定 $\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{il} < 1$ 和 $\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{il} \geq 0$ 得到。根据式 (47)，后者可等价地改写为：

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} + \sum_{l=1}^{n} \hat{c}_{ii}\tilde{k}_{il} < 1, \quad \sum_{l=1}^{n} a_{il} + \sum_{l=1}^{n} \hat{c}_{ii}\tilde{k}_{il} \geq 0. \tag{63}$$

˜通过将 k_{il} 移至等式左侧，我们可以重新整理式（63）。由此得到以下两组不等式：

$$\sum_{l=1}^{n} \tilde{k}_{il} < \frac{1 - \sum_{l=1}^{n} a_{il}}{\hat{c}_{ii}}, \quad \sum_{l=1}^{n} \tilde{k}_{il} \geq \frac{-\sum_{l=1}^{n} a_{il}}{\hat{c}_{ii}}, \tag{64}$$

这分别对应于 (60) 和 (61)。证明至此结束。 □

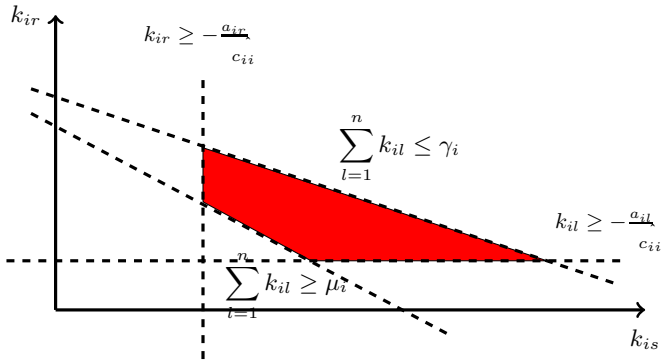


图 3：线性规划 (59)–(62) 的图形解释。

图 3 展示了投影到平面 $k_{is} - k_{ir}$ 上的线性约束 (59)-(62) 的图形化解释。可行解集合以红色表示。约束 (59) 对应于水平线和垂直虚线，分别对应不等式$k_{is} \geq -\frac{a_{is}}{\hat{c}_{ii}}$和 $k_{ir} \geq -\frac{a_{ir}}{\hat{c}_{ii}}$。其经济解释如下：水平虚线和垂直虚线确定了来自外部投资的最低现金流入，以弥补因公司 s 和 r 破产而导致的市场价值 i 下降。约束 (60) 由一条对角线表示，该对角线对应于超平面$\sum k_{il} = \gamma_i$，并确定了可行半空间 $\sum k_{il} \leq \gamma_i$（即对角线下方的点）。类似地，约束 (61) 由另一条对角线表示，该对角线对应于超平面 $\sum k_{il} = \mu_i$，并确定了可行半空间$\sum k_{il} \geq \mu_i$（即对角线上方的点）。

4.4 寻找投资选择 D。

一旦完成控制的常数前馈部分和动态反馈部分的设计，我们就需要通过适当设计矩阵 D，将这种控制转化为投资选择。这可以通过求解以下线性规划来实现，该线性规划具有典型网络流问题的结构。

我们来定义新的记法。

$$
\begin{aligned}
&d := vec(D) = [D_{\bullet 1}^T \dots D_{\bullet m}^T]^T, \\
&\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} := e_i \otimes \mathbf{1}_m = [\mathbf{0}^T \dots \mathbf{0}^T \mathbf{1}_m^T \mathbf{0}^T \dots \mathbf{0}^T]^T, \\
&\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i} := \mathbf{1}_m \otimes e_i = [e_i^T \dots e_i^T]^T, \\
&\theta_\mathbf{i} := [p_1 e_i^T \dots p_m e_i^T]^T.
\end{aligned}
$$

线性规划如下

$$
\begin{aligned}
\text{(LP2)} \quad \min \quad & -\mathbf{1}_{nm}^T d && && (65)\\
\text{s.t.} \quad & \theta_\mathbf{i}{}^T d = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} && \forall i = 1, \dots, n && (66)\\
& \tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{i}^T d \le 1 && \forall i = 1, \dots, n && (67)\\
& -d \le 0 && && (68)\\
& \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{l}^T d \le 1 && \forall l = 1, \dots, m && (69)
\end{aligned}
$$

线性等式约束 (66) 接收 $u^{(1)}$和 $u^{(2)}$作为输入，并返回各项 d_{il}、 i、 $l = 1$、.....、 n。此外，只有当 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 的各项均为非负数时，(66) 才成立。然而， $u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 可能存在负值。为解决这一问题，下面讨论各类负值情况:

i) 如果公司 i 已经故障，那么其未来对外部资产的投资便不再重要。因此，对于故障公司 i，应始终将各项 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 设为零。ii) 如果公司 i 尚未故障，但其各项 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 为负数，也应将该项设为零，因为该公司无需进一步投资即可存续。

因此，所有 n 负值 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)} < 0$ 都应在运行上述线性规划之前设为零。

考虑设计的控制 Dp，其中 D 表示投资选择。线性规划 (65)-(69) 可求出所有公司的投资选择。原因如下: 约束 (66) 确保公司 i 对外部资产的投资选择能够产生所需的市场价值，从而得以存续；非倒闭公司的外部资产所需投资由 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 定义。约束 (67) 确保公司投资不超过 100%，以免支出超过可承受的范围。约束 (68) 确保投资仅为正值，因为外部资产投资不可能为负。约束 (69) 确保公司投资某种外部资产的金额不会超过该资产的剩余量。因此，公司必须策略性地决定投资哪种资产。

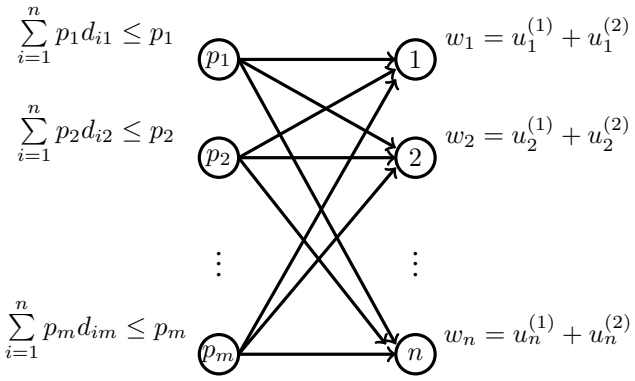


图4：线性规划 (65)–(69) 的网络流问题表示。

图4给出了线性规划 (65)-(69) 的网络流问题表示。网络拓扑为二分图，左侧节点表示资产，右侧节点表示公司。我们观察到，对每项资产 $l = 1, \dots, m$，均存在类型为 $\sum p_l d_{il} \le p_l$ 的容量约束。此类约束等价于 (69)。同样，对每家公司 $i = 1, \dots, n$，均存在类型为 $\sum_{l=1}^{m} p_l d_{il} = w_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}$ 的需求约束。此类约束即为 (66)。

5 数值分析。

我们对由一百家公司组成的集合进行模拟。所有参数均列于表 1 中。具体而言，我们将初始状态设定在 1 到 $X(0)^+ := \max_{i=1,\dots,n} X_i(0) = 5000$ 之间。我们将阈值 $\underline{v} = 100$ 设为 $X(0)^+$ 的 2%。我们将产生的失效成本设为 $\beta = X(0)^+ := 5000$。资产价值设定在 1 到约为 $X(0)^+$ 的 0.1 倍之间。每家公司均投资于不同的外部资产（即矩阵 $D = \mathbb{I}_{(100\times 100)}$），资产价值以 6 为步长递增。这样，我们得到第一组（十七家）不满足条件 (14) 的公司，以及第二组（八十三家）满足该条件的公司。所有模拟均使用 MATLAB，在配备 Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU P8400 处理器（主频 2.27 GHz）和 3GB 内存的计算机上进行。模拟时域包含 $T = 300$ 次迭代。

参数	值
公司数量	$n = 100$
初始状态	$X(0) = [1 \quad 5000]^{50}$
市场价值阈值	$\underline{v} = 100$
已产生的失效成本	$\beta = 5000$
资产价值	$p = [1 \quad 7 \quad 13 \quad \dots \quad 595]'$
资产投资	$D = \mathbb{I}_{(100\times 100)}$

表 1：参数值

我们按如下方式构建交叉持股矩阵：$C_{ij} = \frac{1}{10n}$，概率为 20%；否则为零。换言之，每家公司持有其他十家公司中两家各 0.001% 的股份。注意，这是一个平均度为 20 的随机网络的邻接矩阵。换言之，所有公司的度都近似为 20。对于每家公司，我们根据动力学 (11) 模拟样本误差。仿真算法的伪代码见表 2。

输入：表 1 中的参数集
输出：误差的时间演化 $X(t)$
1：初始化。生成随机矩阵 C，
初始值 $X(0)$，资产价值 p
2：对于时间 $t = 1, \dots, T$ **do**
3：　按照 (54) 计算稳定化控制 $u^{(1)}$
4：　求解线性规划 (58)-(62)，计算控制 $u^{(2)}$
5：　根据动力学 (11) 计算误差；
6：循环结束
7：在左侧显示违反（14）的节点簇
以及右侧的所有其他节点
8：失效公司标红色，其他公司标蓝色
9：停止

表 2：仿真算法

仿真的输出如图 5–7 所示。具体而言，图 5 展示了误差 $X(t)$ 随时间演化的放慢时间图（步长$dt = 0.1$），其中 $t = 1, \dots, T$。在最初几个时间点，有 17 家公司失效，之后又有 4 家公司失效。因此，在时间范围结束时（稳态），我们总共观察到 21 家失效公司。图 6 中，违反条件 (14) 的公司（节点）聚集在左侧，其余节点则位于右侧。节点大小随对外部资产的投资额增大而增大（较大的节点对外部资产投资更多）。仿真在所有公司最初均健康（没有失效）的正交象限中初始化，见时间 $t = 0$ （左上）的图。然而，由于一部分公司不满足条件 (14)（向量 $b^{(r)}(X)$ 不为正），因此 (22) 也不成立，误差 $X(t)$ 的轨迹会离开该正交象限。一些公司开始失效，失效很快便在整个网络中传播，见时间 $t = 30$ （右上）和 $t = 60$ （左下）的图。所有不满足 (14) 的公司都会失效，但最终也有满足 (14) 的公司失效。这是因为条件 (21) 不成立，即右侧簇中仍有健康公司与左侧簇中的失效公司相连。换言之，在时间 $t = 60$，对于所有 i，$l \in N$，$i \in \mathcal{P}^{(r)}$，$l \in \mathcal{N}^{(r)}$，$c_{il} = 0$ 并不成立。因此 (23) 也不成立

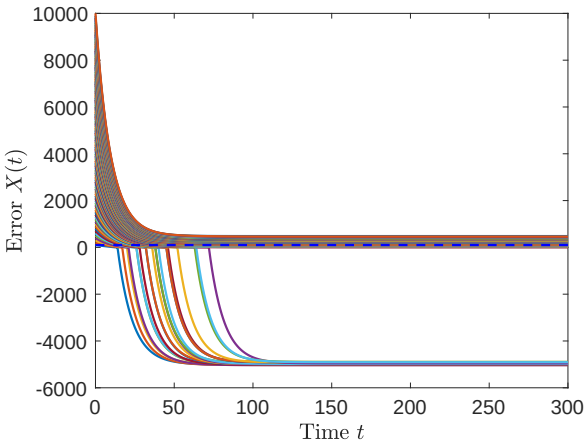


图5：由（11）得到的误差演化时间图 $X(t)$。阈值用虚线表示。

最终还有 3 家健康公司也失效了。可以将 $\mathcal{P}^{(r)}$ 在时间 $t = 60$ 视为右侧的簇，而该簇中有 3 家公司最终失效，这意味着 (23) 不成立。换言之，时间 $t = 60$ 的集合$\mathcal{S}^{(r)}$ 并非正向不变。注意，最终有 20% 的公司失效，这与每家公司平均有 20 个邻居、其中$_{1\,5}$ 的邻居平均处于失效状态这一事实一致，也就是说，每家公司平均有 4 家失效邻居公司。查看 k 的取值可以发现，前 20 ^ ^ 家公司具有 $k \leq 4$。图 7 绘出了函数 $F_n(\tau)$，如 (40) 所示（粗线）。估计 (42) 是与平分线（细线）的交点，其值略低于总数的 20%。

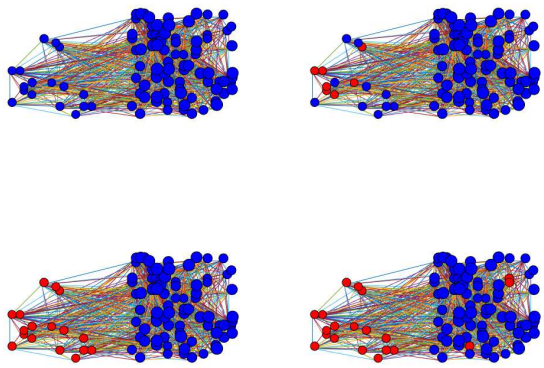


图 6：平均连通度为 $\langle\kappa\rangle = 20$ 的随机网络中的级联失效：在 $t = 0$、30、60、T 时失效的公司以红色标示。

我们用稠密图重复了实验，结果如图 8–10 所示。这里我们将交叉持股概率从 20% 提高到 80%。这意味着我们有一个平均度为 80 的随机网络。每家公司持有其他公司约 80% 的交叉持股股份。具体来说，图 8 展示了误差 $X(t)$ 在 $t = 1, \ldots, T$ 时的演化时间图，其中时间步长 $dt = 0.1$ 较小。最终，在分析期限结束时（稳态），有 48 家公司倒闭。这约占公司总数的 50%，与以下事实相符：每家公司平均有 80 家邻居公司，其中$_{1\,2}$ 的邻居公司平均已倒闭，也就是说，每家公司平均有 40 家倒闭的邻居公司。如果我们查看 k 的值，就会发现前 50 家公司已经

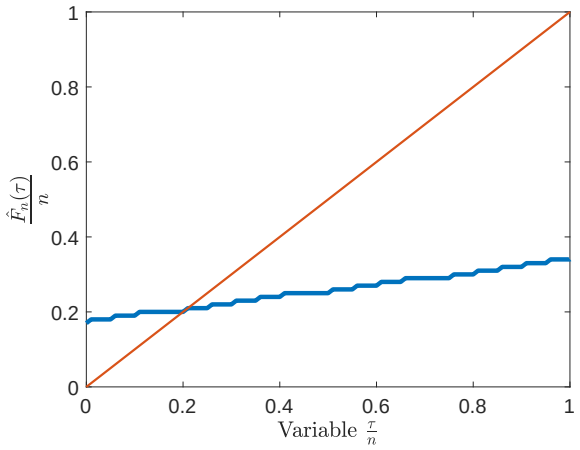


图 7：如式（40）所示的函数 $\hat{F}_n(\tau)$（粗线）。估计值（42）是与平分线（细线）的交点。

$\hat{k} \leq 40$。图 10 中，我们绘制了函数 $F_n(\tau)$，与式 (40) 中相同（粗线）。估计 (42) 是与平分线的交点（细线），约占总数的 50%。

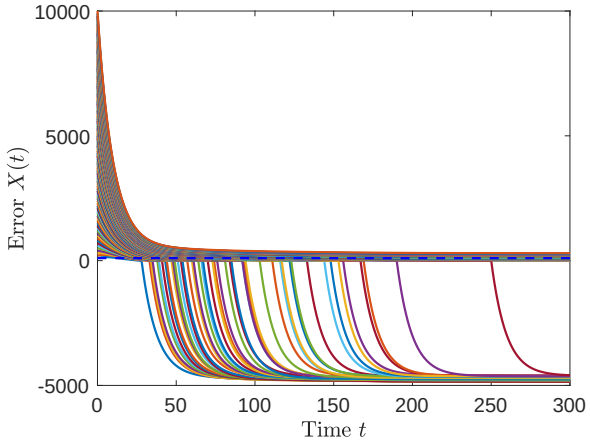


图 8：根据式（11）得到的误差 $X(t)$ 演化的时间图。

我们第三次重复了该实验，此时采用稀疏图，结果显示在图 11–13 中。这里，交叉持股概率遵循幂律 $P(\kappa) \sim \kappa^{-\rho}$，其中 $P(\kappa)$ 表示网络中具有 κ 出度连接到其他节点且 $\rho = 2.1$ 的节点所占的比例。该分布生成了一个无标度网络，其中连通性较差的节点非常多，而枢纽节点非常少。平均连通度为 $\langle\kappa\rangle = 20$。这一次，集合 $\mathcal{S}^{(r)}$ 在时间 $t = 60$ 时是正向不变的（右侧簇中没有健康公司失效）。特别地，图 11 展示了 $t = 1, \ldots, T$ 的误差 $X(t)$ 演化的减速时间图（步长 $dt = 0.1$）。最终，在时间范围结束时（稳态）有 17 家公司失效。注意，最终约有 20% 的公司失效，这与以下事实一致：每家公司平均有 20 个邻居，其中 $_{1\,5}$ 的邻居平均处于失效状态，即每家公司平均有 4 个失效的邻居公司。在图 13 中，我们绘制了如式（40）所示的函数 $F_n(\tau)$（粗线）。估计值（42）是交点

$^{\mathrm{p}}$带有平分线（细线）的点，其长度略低于总长度的 20%。

在第四组模拟中，我们再次考虑一个平均度为 $\langle\kappa\rangle = 80$的随机网络。图14展示了误差的时间图（左图）。失效在整个网络中传播。图14（右图）显示了如式（54）所示的稳定化控制 $u^{(1)}$ 的效果。控制在时间 $t = 60$ 开始生效，从而防止失效进一步级联。右侧纵轴显示 $u^{(1)}$的大小，可以将其视为来自外部资产的现金流。

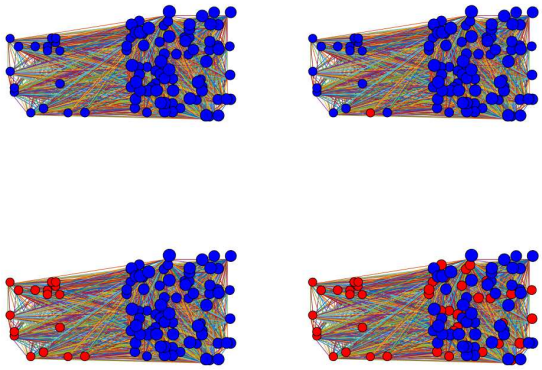


图9：平均连通度为 $\langle\kappa\rangle = 80$ 的随机网络发生级联失效：$t = 0$、30、60、T 时的失效公司以红色标示。

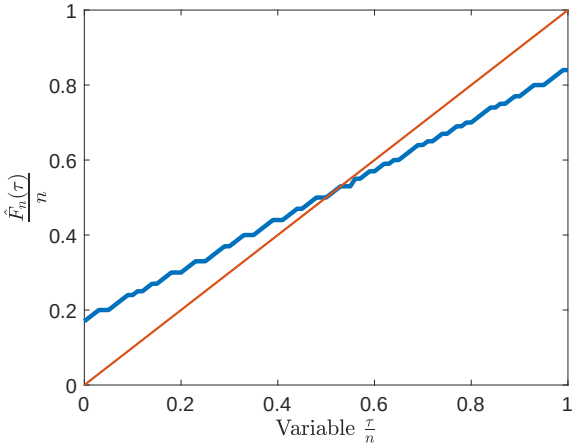


图10：函数 $\hat{F}_n(\tau)$ 如式（40）所示（粗线）。估计（42）为其与平分线（细线）的交点。

在第五组仿真中，我们再次考虑一个平均度为 $\langle\kappa\rangle \approx 20$ 的随机网络。图15显示了误差的时间图（左）。动力学非常缓慢，且接近不稳定性；事实上，我们得到的特征值的绝对值非常接近 1。图15（右）展示了稳定化控制 $u^{(2)}$ 的效果，其中 $\hat{K}^{(r)}$ 根据线性规划 (58)-(62) 进行设计。

6 结论。

对于金融网络，我们建立了一个级联失效的动态模型。理论分析加深了我们对防止级联发生并使市场价值稳定在某些平衡点附近的条件的理解。这些条件涉及交叉持股矩阵的结构以及外部资产的规模。我们在具有不同连通度的大型网络上展示了结果。最后，我们还提出了一种控制设计方法，以优化市场投资；这些投资现在被视为反馈-前馈控制输入。

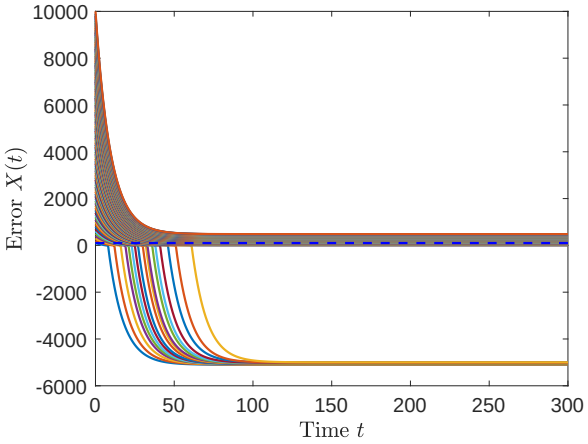


图11：由（11）得到的误差 $X(t)$演化时间图。

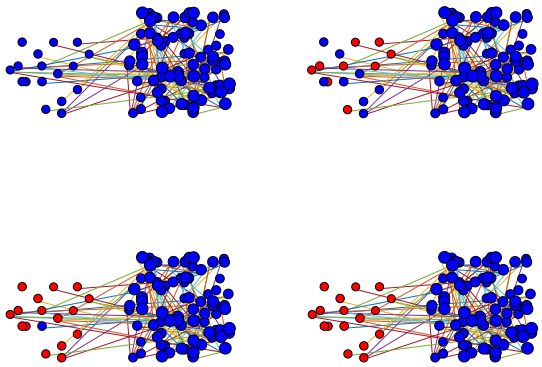


图12：平均连通度为 $\langle\kappa\rangle = 2$的无标度网络中的级联失效：$t = 0$、30、60、 T时刻的失效公司以红色标出。

致谢。

我们感谢 Rakesh Vohra 教授（宾夕法尼亚大学）进行了有益的讨论。我们特别感谢他提供的见解，帮助我们改进对本研究动机与创新性的阐述；感谢他就澄清模型假设和条件提出的意见；也感谢他对控制设计的评论。

参考文献

[1] Adam、E. M. 和 Dahleh、M. A. 和 Ozdaglar、A.（2012）。有限网络上的阈值模型行为。IEEE第51届决策与控制年会论文集（决策与控制会议），2672–2677。[2] Amini、H. 和 Cont、R. 和 Minca、A.（2016）。金融网络对传染的韧性。《数学金融》，26(2)：329–365。[3] Barja、A. 和 Martínez、A. 和 Arenas、A. 和 Fleurquin、P. 和 Nin、J. 和 Ramasco、J. 和 Tomás E.（2019）。评估相互关联的行业金融网络中的违约传播风险。《EPJ数据科学》，8–32。[4] Calafiore、G. C. 和 Fracastoro、G. 和 Proskurnikov、A. V.（2022）。动态金融网络的控制。《IEEE控制系统快报》，3206–3211。

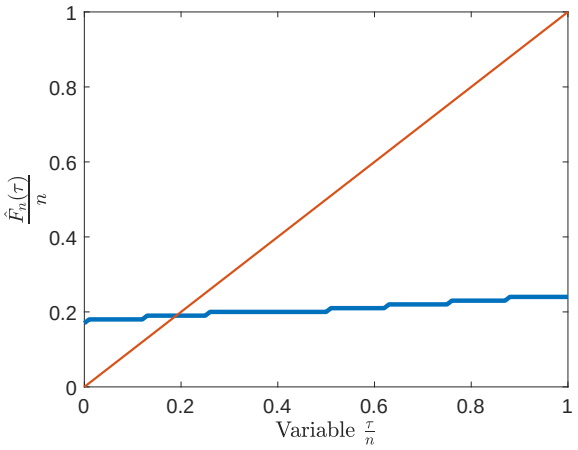


图13：函数 $\hat{F}_n(\tau)$ 如（40）所示（粗线）。估计（42）是与平分线（细线）的交点。

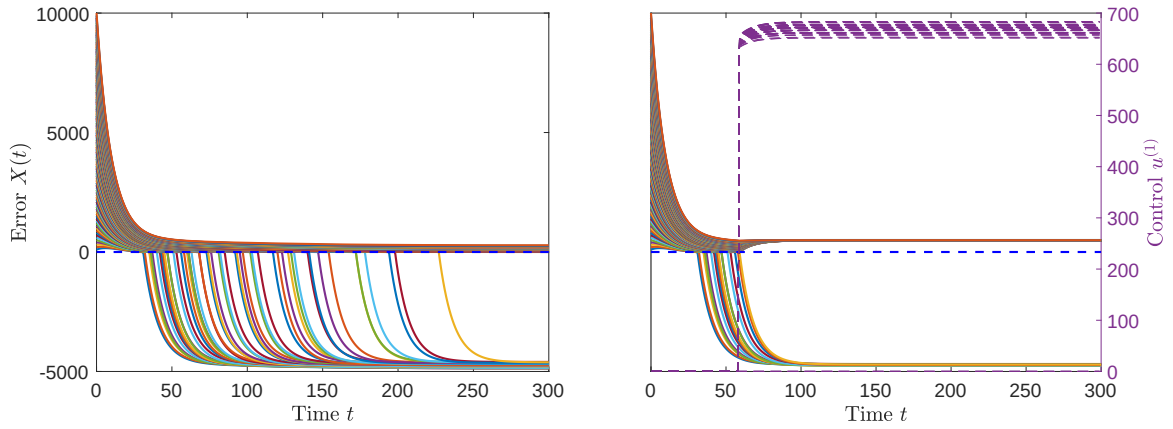


图14：左：失效传播至整个网络。右：稳定化控制 $u^{(1)}$（54）在时间$t = 60$激活。

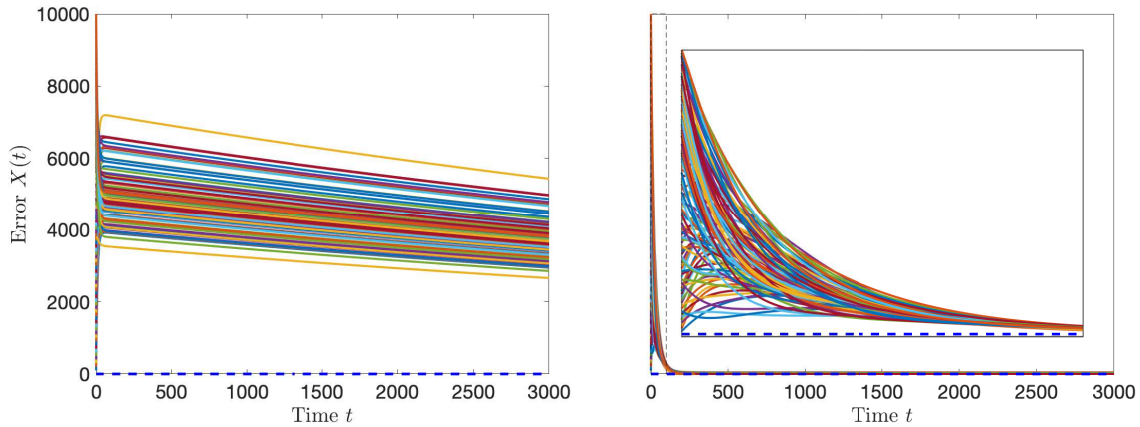
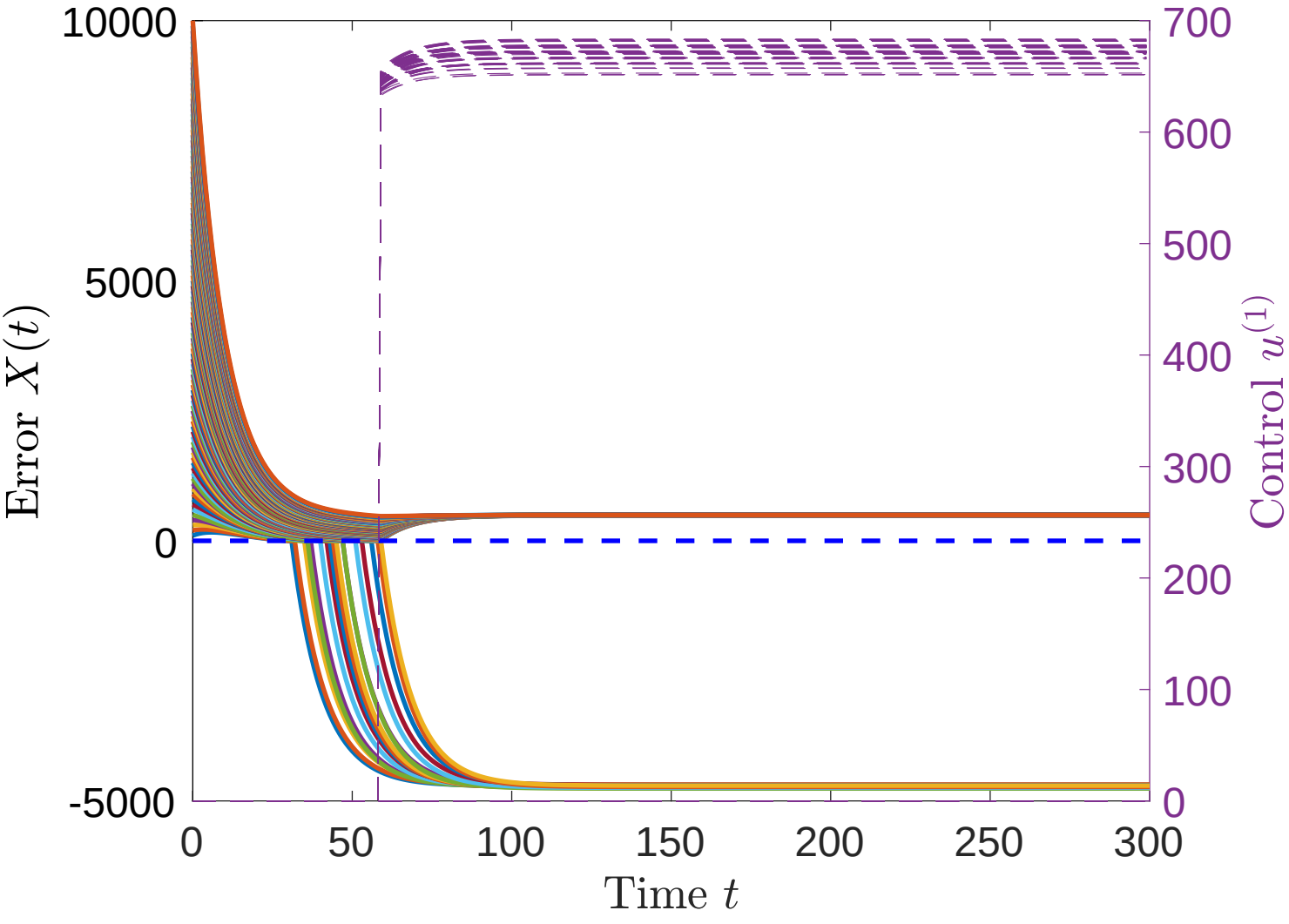


图15：左：动力学非常缓慢，且接近不稳定性。右：稳定化控制 $u^{(2)}$ 的作用，其中 $\hat{K}^{(r)}$ 来自（59）—（62）。

[5] Capponi, A. 和 Chen, P. C. (2015). 金融网络中的系统性风险缓解。《经济动力学与控制杂志》，58:3206–3211。[6] Centola, D.、Eguíluz, V. M. 和 Macy, M. W. (2007). 复杂传播的级联动力学。Phisica, A(374):449–456。[7] Chen, H.、Wang, T. 和 Yao, D. (2021). 金融网络与系统性风险——一个动态模型。《生产与运营管理》，30(8):2441–2466。[8] Chen, W.、Yuan, Y. 和 Zhang, L. (2010). 线性阈值模型下社交网络中的可扩展影响力最大化。第10届IEEE国际数据挖掘会议（ICDM）论文集，88–97。[9] Douglas, M. G. 和 Shachar, K. (2007). 金融网络。《美国经济评论》，97(2):99–103。[10] Eisenberg, L. 和 Noe, T. H. (2001) 金融系统中的系统性风险。《管理科学》，47(2):236–249。[11] Elliott, M.、Golub, B. 和 Jackson, M. O. (2014) 金融网络与传染。《美国经济评论》，104(10):3115–53。[12] Ellison, G. (1993) 学习、局部互动与协调。《计量经济学》，61(5):1047–1071。[13] Farina, L. 和 Rinaldi, S. (2000) 正线性系统：理论与应用，第50卷（John Wiley & Sons）。[14] Glasserman, P. 和 Young, H. P. (2016) 金融网络中的传染。《经济文献杂志》54(3):779–831。[15] Goyal, A.、Lu, W. 和 Lakshmanan, L. V. S. (2011) Simpath：线性阈值模型下影响力最大化的高效算法。第11届IEEE国际数据挖掘会议（ICDM）论文集，211–220。[16] Granovetter, M. (1978) 集体行为的阈值模型。《美国社会学杂志》1420–1443。[17] Havlin, S. 和 Kenett, D. Y. (2015) 相互依存经济网络中的级联失效。《社会建模与仿真国际会议暨2014年经济物理学研讨会》论文集，87–97（Springer, Cham）。[18] Jackson, M. O. (2008) 社会与经济网络。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州。[19] Lee, H. (2020) 关于一种新的级联失效随机模型。《应用概率杂志》57(4):1150–1161。[20] Lelarge, M. (2012) 随机网络中的扩散与级联行为。《博弈与经济行为》75(2):752–775。[21] Massai, L.、Como, G. 和 Fagnani, F. (2021) 饱和网络中的均衡与系统性风险。《运筹学数学》在线发表，网址：https://doi.org/10.1287/moor.2021.1188。[22] Morris, S. (2000) 传染。《经济研究评论》67(1):57–78。[23] Peckham, R. (2013) 传染经济学：金融危机与大流行病。《经济与社会》42(2):226–248。[24] Rossi, W. S.、Como, G. 和 Fagnani, F. (2017) 大规模网络中的级联阈值模型。《IEEE网络科学与工程汇刊》6(2):158–172。[25] Roth, A. (2002) 《作为工程师的经济学家：博弈论、实验与计算作为设计经济学的工具》。《计量经济学》70(4):1341–1378。[26]Smith, N. (2020) 经济学家开始像工程师一样思考。实验与计算作为设计经济学的工具。
h
t
t
p
s://
w
w
w.
bloomberg.com/opinion/articles/2020-10-12/economists-are-starting-to-think-like-engineers?sref=R8NfLgwS。[27] Swift, A. W. (2008) 级联失效的随机模型，实验与计算作为设计经济学的工具。《应用概率杂志》45:907–921。[28] Vega-Redondo, F. (2007) 《复杂社会网络》，第4章。（《计量经济学会专著》，剑桥大学出版社）。[29] Victor, A.、Santosh, V. 和 Rakesh, V. (2021) 多元化金融网络中的传染与均衡。PIER工作论文21(29)。[30] Victor, A.、Santosh, V. 和 Rakesh, V. (1998) 个体策略与社会结构：制度演化理论，第3章。（普林斯顿大学出版社）。


10000
5000
0
-5000
0
50
100
150
200
250
300
Time t
Error $X(t)$
700
600
500
400
300
200
100
0
Control $u^{(1)}$