arXiv:2305.00842v2 [physics.plasm-ph] 7 Aug 2023

根据可测参数估算单个正向空气流注的性质

Dennis Bouwman[1],**Hani Francisco**[1], **Ute Ebert**[1,2]

[1] 荷兰数学与计算机科学研究中心（CWI），阿姆斯特丹，荷兰[2] 应用物理系，埃因霍温理工大学，邮政信箱513号，邮编5600 MB，埃因霍温，荷兰

电子邮箱：Dennis.Bouwman@cwi.nl

摘要。 我们建立了一个用于描述空气中单个稳态传播正流注的轴向模型。该模型利用可观测参数来估算难以测量的物理量。更具体地说，在给定速度、半径、长度和所施加背景电场的情况下，我们的模型可以近似得到电离密度、最大电场、通道电场以及电荷层宽度。这些参数决定了分子的初级激发和内部电流。我们的方法是：首先，对均匀平移的流注头部不同区域中的电子动力学和电场进行解析近似；然后，在不同区域的边界处匹配各解，从而对整个流注进行建模；最后，利用守恒定律确定未知量。对于一系列流注长度和背景电场，即使流注并非以稳态方式传播，我们的结果仍与数值模拟表现出良好的一致性。因此，可以根据更容易测量的量和我们的近似方法，估算那些实验上难以直接获取的物理量。这些理论近似也为构建高效的轴向多流注模型奠定了基础。

关键词：正流注放电、轴向流注模型、模型降阶。提交至等离子体源科学与技术，截至2023年8月8日

1. 引言

1.1. 模型降阶的挑战

流注放电广泛存在于自然界和技术领域 [1]。最常见且研究最多的流注出现在空气中，其头部带正电荷。本研究探讨的正是这类流注。

流注的内部结构由一个薄而移动的弯曲空间电荷层构成，该电荷层围绕着一个弱电离通道，并且在尖端处具有很强的电场增强效应和陡峭的电子密度梯度。即使对于长间隙和较低背景电场条件下的单个轴对称流注，其数值模拟也颇具挑战性 [2]。另一方面，许多放电现象都由大量相互作用的流注构成 [1, 3–6]。这促使研究人员在不放弃物理基础以及近年来所取得的模型验证成果的前提下，大力推动模型简化[2, 7–9]。

流注放电由一些清晰可辨的区域组成，各区域中起主导作用的物理机制各不相同：(i) 未电离的外部区域，需要在其中求解静电泊松方程；(ii) 雪崩区，光电离在此产生大量不断发展的电子雪崩；(iii) 移动的流注头部，其活跃的空间电荷层中电离迅速增强，且电场最强；(iv) 电离通道，其中存在电荷和电流，电导率也在动态变化。由于各区域受不同机制支配，我们将分别对其进行分析。随后，我们将在各区域的边界处进行匹配。

对于通道区域， [10, 11], 已建立轴向近似，但流注头部的问题仍未解决。本文将重点研究流注头部。为便于比较数值模拟——流体模型与解析近似，我们将分析限定于均匀电场中的单个流注，并主要关注稳态传播。

1.2. 将稳态流注作为测试案例

在足够低的电场中，流注可以以恒定速度传播而不改变形状 [12–15]。这类流注不会留下电荷，其通道电场会衰减并恢复至外加背景电场。从现在起，我们将其称为稳态流注，因为在共动坐标系中，这类匀速平移的流注处于稳态。正稳态流注的特性可谓极端：其速度低至 $3 \cdot 10^4$ 米/秒，电场增强至最高 222 千伏/厘米，具有陡峭的梯度和强烈弯曲的薄电荷层 [14]。

本文的分析重点研究稳态流注，因为从数学上看，考虑稳态解较为方便；在共动参考系中，稳态解没有显式的时间依赖性。此外，我们通过将近似结果与稳态流注的模拟结果进行比较，验证这些近似。值得注意的是，这种稳态方法也可用于研究加速流注，因为相对于其他相关时间尺度而言，其特性通常变化缓慢 [16]。为此，我们还将近似结果与三个加速流注的模拟结果进行比较。

1.3. 早期研究

一个经典的挑战是建立运动方程，使头部能够用少数几个数值来表征，例如半径 R 和速度 v。最早提出的解析关系之一

介于 R 和 v 的研究可追溯至 1965 [17], 并在 1988 年[18, 19]提出了一个用于描述流注参数的“数量级”模型。之后的一项实验研究提出了一种数据拟合关系，其中速度取决于半径的平方，即 $v \sim R^2$ [20]; 而在 [21] 中，有人提出了一种基于 [17]的近似关系，其中速度也是尖端最大电场 $E_{\max}$的函数，即 $v = v(R, E_{\max})$。其他重要的理论成果包括：电离密度的近似关系 [19, 22, 23], ; 自由基生成能量效率的估算 [24],; 雪崩区动力学的解析研究 [25], 1; 需要预先指定半径的 5D 模型 [16, 26] ; 以及基于有效电离长度概念对电荷层宽度的估算 [27]。流注理论的一种应用，是根据可测参数推断难以测量的性质，例如 $E_{\max}$。例如，在 [28] 中，作者根据观测到的半径和速度估算了 $E_{\max}$ 的参数范围。另一个例子是 [25], ，其中对雪崩区的分析给出了 R、 $E_{\max}$ 与头部电势之间的近似关系。

这些理论结果增进了我们对流注动力学的理解，并揭示了不同参数之间复杂的关系。然而，早期研究中提出的一些观点与数值模拟结果不符。在本文的多个部分，我们将深入评估早期研究，并提出改进方案。

1.4. 论文内容

在本研究中，我们针对单个正流注的流体模型，开发了半解析近似方法可根据可观测参数估算难以测量的量。具体而言，我们将展示速度v、曲率半径 R、长度 L 和背景电场 E_{bg} 如何分别确定电离密度 $n_{i,\ \mathrm{ch}}$、电荷层宽度 ℓ 以及最大电场和通道电场 $E_{\max}$ 和 E_{ch}:

$$(v,\, R,\, L,\, E_{\mathrm{bg}}) \to (n_{i,\mathrm{ch}},\, \ell,\, E_{\max},\, E_{\mathrm{ch}}) \quad (1)$$

我们的模型推导首先从定义不同区域入手，在这些区域中，特定的物理机制占主导地位。随后，我们分别为各个区域给出解析近似。最后，我们在不同区域的边界处将其匹配起来，并采用自洽求解方法。由此得到的轴向模型是一个自包含模型，与数值模拟结果吻合良好。这意味着，当难以精确测量重要的流注特征（即方程（1）右侧的参数）时，我们的框架可以补充实验测量。

第 2 节概述经典流体流注模型以及用于轴对称模拟的数值实现。此外，我们将详细讨论数值模拟结果，并介绍重要的定义和约定。第 3 节中，我们对电荷层进行积分，得到电离密度的解析公式。第 4 节分析流注前方区域的电子雪崩动力学。第 5 节探讨流注头部电势的概念。第 6 节介绍我们的求解方法，并用流体模型的数值结果验证近似。

2. 模型描述、定义与约定

本节将介绍标准温度和压力下空气中正流注的经典流体模型。我们将讨论数值实现，该实现用于获得低于击穿值的均匀背景电场中的参考解。同一数值实现曾用于 [12, 13] 研究稳态流注。此外，我们还将给出宏观参数的定义，并阐明其他约定和术语。

2.1. 模型描述

2.1.1. 基本方程。我们采用经典的流体流注模型，并使用局部场近似，不考虑离子迁移率。我们只考虑两种带电粒子种类：电子密度 n_e 和净离子密度$n_i = n_+ - n_-$，其中 $n_\pm$ 表示所有正离子或负离子的数密度。在可以忽略离子漂移、电子脱附和电子-离子复合的区域（例如流注头部），可以只使用一种离子密度 n_i ，而不必区分多种离子。电子密度遵循漂移-扩散-反应方程演化，而离子则视为静止

$$\partial_t n_e = \nabla \cdot (\mu n_e \mathbf{E} + D\nabla n_e) + S_i + S_{ph}, \quad (2)$$

$$\partial_t n_i = S_i + S_{ph}, \quad (3)$$

其中，$\mathbf{E}$ 表示电场，$\mu(E)$表示电子迁移率，$D(E)$表示电子扩散系数。S_i 和S_{ph} 分别是有效碰撞电离和光电离的源项。我们忽略电子扩散；除了转速较低、且电荷层中梯度较陡的情况外，这通常是一个很好的近似。

有效碰撞电离表示为

$$S_i = |\mathbf{j}_e| \alpha_{\text{eff}}, \quad (4)$$

其中$\mathbf{j}_e = -\mu n_e \mathbf{E}$ 是电子的漂移电流密度，$\mathbf{j} = -e\mathbf{j}_e$ 是电流密度，e 是元电荷，而 $\alpha_{\text{eff}}(E)$ 是有效电离系数。输运系数和反应系数的数据将在下一节讨论。体积 V 中的光电离源项为

$$S_{ph}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{I(\mathbf{r}')f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} d^3r', \quad (5)$$

其中，$I(\mathbf{r}')$为电离光子的源，$f(r)$为吸收函数，$4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$为几何因子。根据Zheleznyak模型 [29, 30]，$I(\mathbf{r})$可表示为

$$I(\mathbf{r}) = \frac{p_q}{p+p_q} \xi S_i(\mathbf{r}), \quad (6)$$

其中，p 为实际压力，$p_q = 40$ mbar 为气体混合物的猝熄压力，$\xi = 0.075$ 为将碰撞激发与碰撞电离联系起来的比例因子 S_i。吸收函数 $f(r)$定义为

$$f(r) = \frac{\exp(-\chi_{\min} p_{O_2} r) - \exp(-\chi_{\max} p_{O_2} r)}{r \ln(\chi_{\max}/\chi_{\min})}, \quad (7)$$

其中，$\chi_{\max} = 150/$（mm bar）、$\chi_{\min} = 2.6/$（mm bar），而 p_{O_2} 为氧气分压。对于温度为 300 K、压力为 1 bar 的空气，相应的吸收长度为 33 μ m 和 1.9 mm。

电场由电势 ϕ 的泊松方程给出

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = -e n_q, \quad (8)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (9)$$

其中，ϵ_0 为介电常数，e 为元电荷，$n_q = n_i - n_e$ 为电荷数密度。

2.1.2. 轴对称模拟的实现。在本研究中，我们将轴向解析近似与通过数值模拟得到的方程 (3)–(9) 的轴对称解进行比较。数值模型使用 afivo-streamer代码 [31,32]。计算设置与早期研究 [12, 13] 相同，详细讨论请参阅该研究。

传输系数和反应系数由 Bolsig+ [33]（2019年12月版本）利用 Phelps数据库 [34] 中的碰撞截面计算得出，其假设是电子密度的演化遵循指数形式的时间增长或衰减规律 [35]。我们对解析模型和数值模型采用相同的数据。此外，用于轴对称模拟的数值模型采用连续性方程来描述多种物种，例如 O_2^+、O_2^-、N_2^+、N_4^+，等等。具体如 [13]所列。这种更为完善的等离子体化学模型有助于在最低背景电场下稳定稳态流注，并且与上述流注头部中 n_e 和n_i 的双物种模型一致。

方程 (5) 中的光电离积分采用一组亥姆霍兹微分方程和 Bourdon三项近似 [36] 进行近似。该近似会使光子吸收长度发生微小变化。然而， [35, 37] 中的研究表明，这对空气中的流注放电传播基本没有可测量的影响。

计算域。 计算域由一个长度为 40 mm、半径为 20 mm 的圆柱体以及上、下方的平面电极组成。我们对计算域和流注采用圆柱对称性；并将纵向坐标记为ζ，径向坐标记为 r。施加电场沿 ζ方向，通过固定电极间的电势差实现。沿r方向对电势施加齐次诺伊曼边界条件，这意味着电场平行于侧边界。电子密度在所有边界上也采用齐次诺伊曼边界条件。

初始条件。 为引发流注放电，我们在计算域的上边界放置了两个由电子和正离子组成的中性种子。最上方的种子会形成一个电场增强区域，而其下方的种子则在光电离开始之前，为正在形成的流注前方提供初始电子。有关这些种子的更多详情——包括其密度、坐标和尺寸——请参见 [12, 13]。

在较低电场下，需要一个初始瞬态电场来确保流注放电的起始。本研究将考察从 4.5 千伏/厘米到 24 千伏/厘米的均匀背景电场，这些电场均低于 28 千伏/厘米的击穿值。在 4.5 千伏/厘米下，使用速度控制法 [14] 得到了以恒定速度传播且形状保持不变的流注。在 10 千伏/厘米下，我们采用与 [13] 中所述相同的初始瞬态电场。

为适应稳态流注相对较小的尺寸，我们使用了最小单元宽度为 0.6 μm 的网格。对于加速流注，网格细化程序与 [13] 中的完全相同。

2.2. 轴对称模拟结果描述

2.2.1. 稳态流注详述。本节将详细讨论其中一种

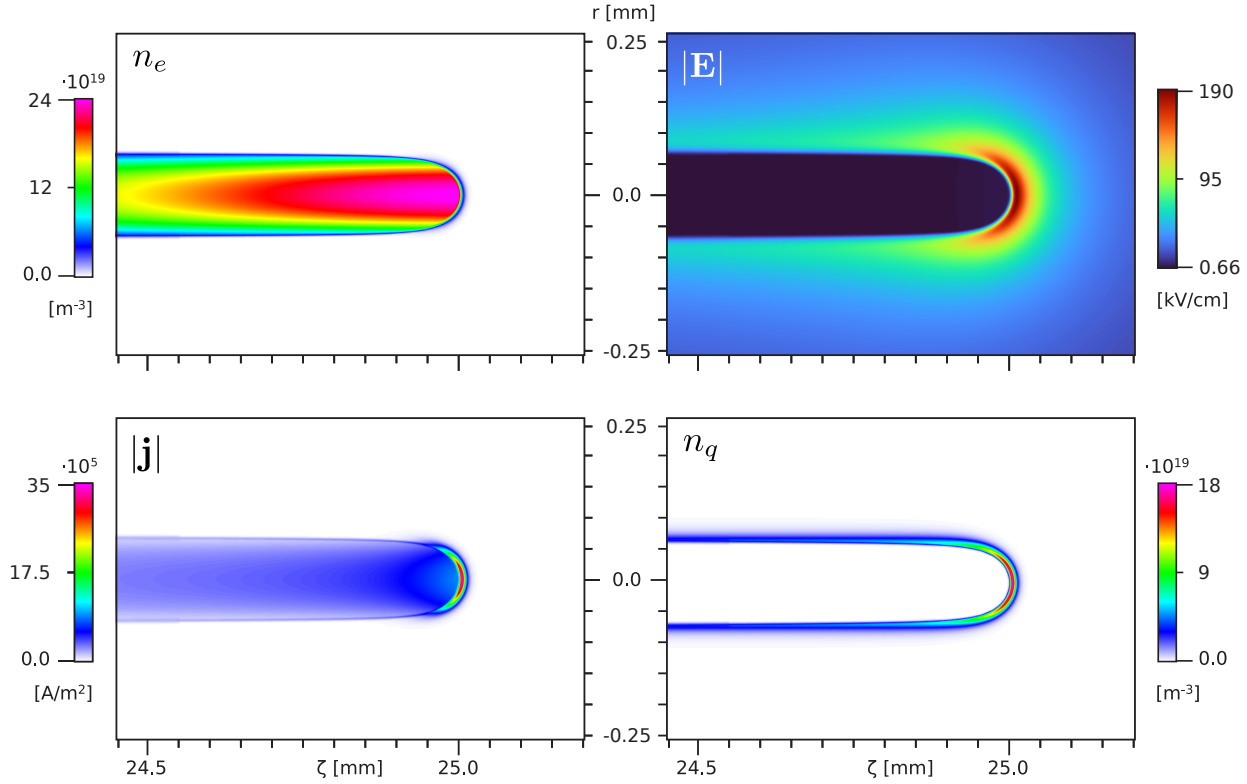


图1：稳态传播流注的电子密度 n_e、电场强度 |**弹性模量**|、电流密度强度|**j**| 和电荷数密度 n_q；其背景电场 E_{bg}为 4.5 千伏/厘米。该图放大展示了流注头部周围区域。

模拟，即背景电场为 4.5 千伏/厘米时的稳态流注。我们回顾一下，稳态流注 [12–15] 会因电子附着和电子-离子复合而在其尾端失去电导率；它不会留下电荷，但会携带固定量的电荷，并以恒定速度和形状传播。图1放大了该流注的前部，并展示了四个重要量：电子密度 n_e、电场幅值 |**弹性模量**| 、电流密度幅值 |**j**| 以及电荷数密度 n_q。根据这些量，我们可以区分出三个动力学特征不同的区域：

(i) 通道是流注的导电内部。这里的电子密度很高，等离子体处于准中性状态，$n_q \approx 0$。低轴向电场下的电子密度会产生沿通道流动的电流。

(ii) 电荷层 是包围通道并对其进行部分屏蔽的（正）电荷层。在流注头部，电荷层的曲率会导致前方出现很高的电场增强。实际上，我们发现最大电场 E_{max} 位于此处，其位置记为 ζ_{tip}。由于电子密度也很高，这里具有很高的碰撞电离率和很大的电流，从而导致流注头部的运动。流注头部中的电荷层也被称为

电离前沿。电荷层的宽度 ℓ 远小于其曲率半径 R；这是电荷层前方产生强电场增强的必要条件。

(iii) 正流注的雪崩区是电荷层前方的区域，因此该区域内的电荷对电场分布的影响可以忽略。若没有光电离或某种背景电子密度，这一区域可以忽略；但对于空气中的正流注，光电离会产生许多不断发展的电子雪崩，并使其向电荷层移动。靠近电荷层处的电场很强，因此会产生显著的电子电流，以维持活性电离前沿。具体而言，在没有背景电离的空气中，电子密度会按照由光子吸收决定的渐近衰减规律趋于零 [38]

$$n_e(\zeta) \propto \zeta^{-1} e^{-k\zeta} \text{ with } k = \chi_{\min} p_{O_2}, \quad \text{for } \zeta \gg \zeta_{\text{tip}}. \tag{10}$$

2.2.2. 电流与电场方向。
在图 2 中，我们进一步放大电离前沿，并突出显示重要的几何特征。我们再次用颜色表示电荷数密度n_q 和电流密度的大小 |j| ，此外，还在图的下半部分用归一化箭头显示电流密度的方向，并在上半部分显示等势线。请注意，在雪崩区，电子电流$\mathbf{j}_e$ 的方向沿径向向内，几何形状近似球形；而在通道中，电子漂移均匀地沿传播轴平行向后。此外，等势线非常.....

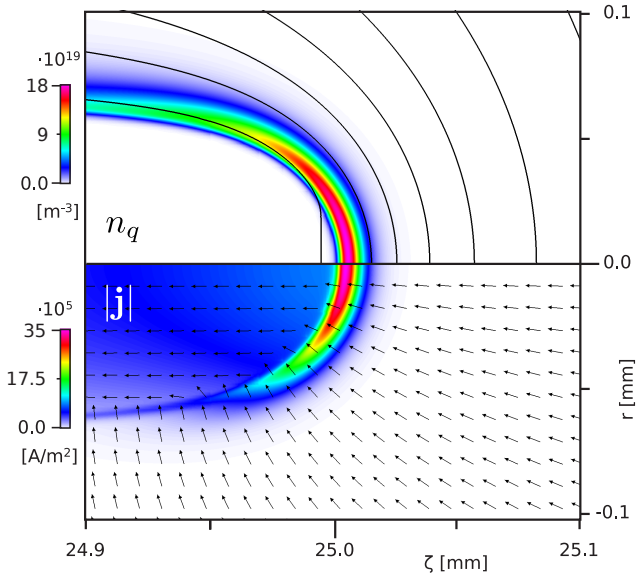
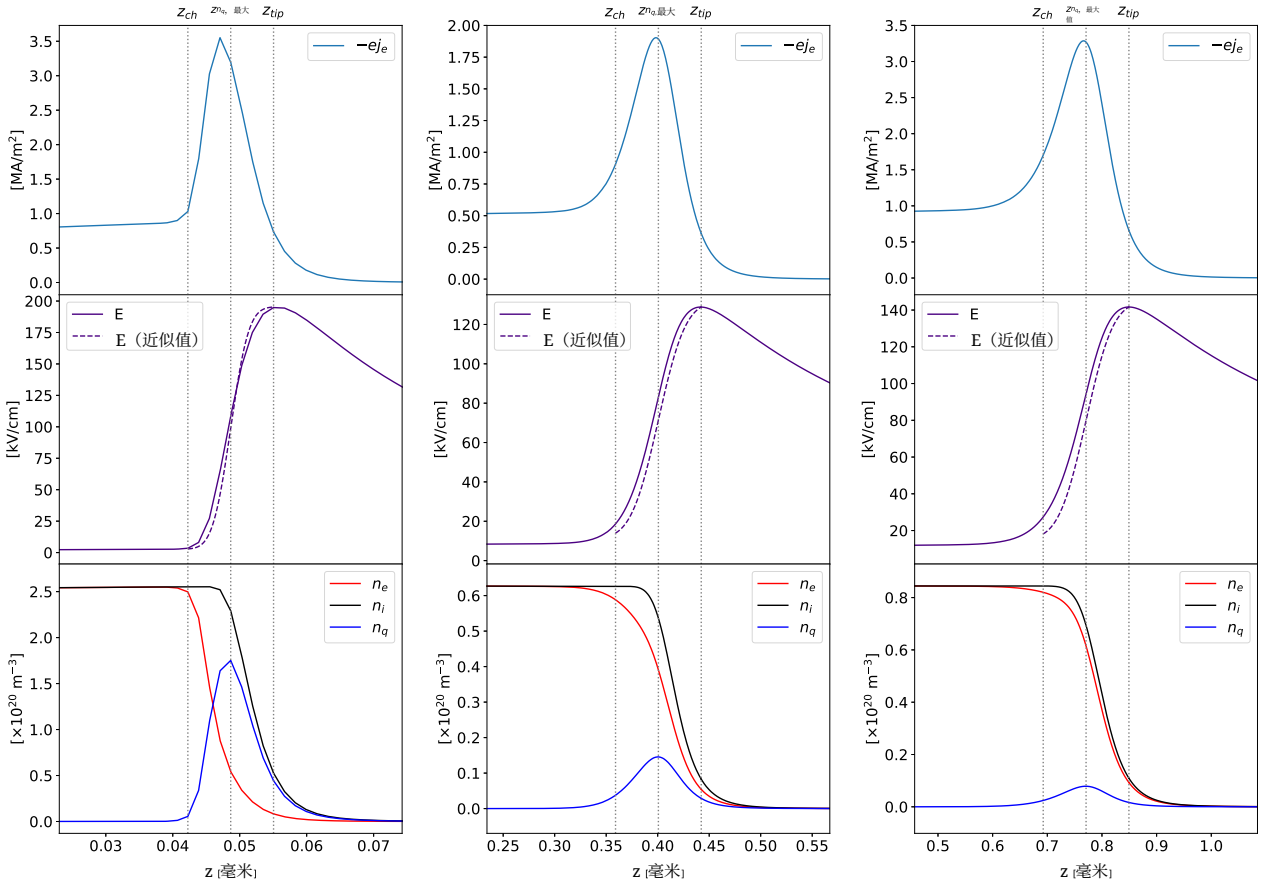


图 2：在 4.5 千伏/厘米电场中的稳态流注，其电荷数密度 n_q 和电流密度大小 |j| 以颜色编码表示。图的上半部分在电荷数密度图上叠加了等势线。下半部分的箭头表示电子漂移的归一化方向$\mathbf{j}_e = -\mathbf{j}/e$。

与电荷层对齐。这意味着在此区域，电流基本上垂直于该层。

2.2.3. 不同电场中的流注。图 3 展示了流注轴上的电流密度、电场以及电子密度和电荷密度；此处不仅包括处于 4.5 千伏/厘米电场中的稳态流注，也包括背景电场分别为 14 和 24 千伏 / 厘米、且流注头部达到 $\zeta = 15$ mm 时的加速流注。具体而言，上方的图显示电流密度；中间的图显示电场（实线）以及第 3.2 节中的近似（虚线）；下方的图显示 n_e、 n_i 和n_q。



（a）4.5 千伏/厘米　（b）14 千伏/厘米　(c) 24 千伏/厘米

图3：三种背景电场下流注轴线上的电流密度、电场和粒子密度。所有流注均显示在头部到达 $\zeta_{\mathrm{tip}} = 15$ mm 时的状态。坐标系原点 $z = 0$ 位于穿过电荷数密度最大值所拟合半球的中心。相应的 v 和 R 见图5。

2.3. 定义与约定

本文基于解析近似，建立了用于描述电荷层和雪崩区动力学的轴向模型。本文在此介绍相关定义和约定。图 4 给出了示意图。

2.3.1. 速度与共动坐标系的定义。我们将流注速度 v 定义为流注尖端处最大电场位置的速度

流注尖端

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\zeta_{\mathrm{tip}}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

从模拟中提取的速度如图5a所示。我们引入一个坐标系 (r, z)，它以速度 v沿 ζ 方向移动。 z 坐标可写为

$$z = \zeta - vt. \tag{12}$$

时间导数变换到新坐标系后为

$$\partial_t\big|_\zeta = \partial_t\big|_z - v\partial_z, \tag{13}$$

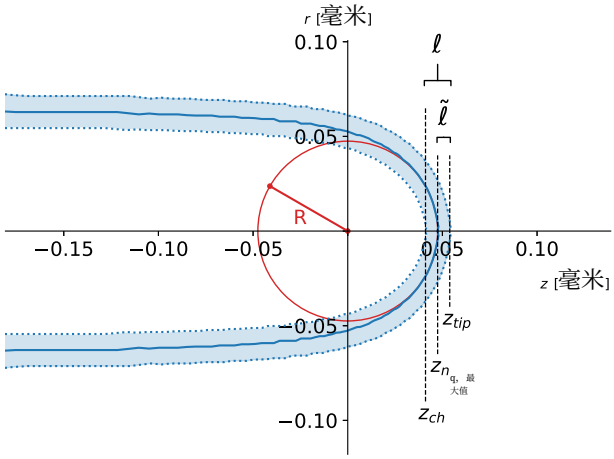


图 4：$E_{\mathrm{bg}} = 4.5$ 千伏/厘米下共动坐标系 $(r,\ z)$ 中的电荷层。蓝色实线表示数值模拟中 n_q 的最大值（针对每个 z），阴影区域则是使用 ℓ 参数化的对应电荷层。图中还显示了：半径为 R 的切圆 $\tilde{}$、ℓ，以及位置 z_{ch}、z_{tip} 和 $z_{n_{q,\ \mathrm{max}}}$。

其中，$\partial_t\big|_z$ 表示 ∂_t 在共动参考系 $(r,\ z)$ 中的偏导数。因此，对于稳态运动，我们可以将其替换为

$$\partial_t\big|_\zeta = -v\partial_z. \tag{14}$$

在共动参考系 $(r,\ z)$ 中。

2.3.2. 电荷层的参数化。
我们将通过两个最大值来表征电荷层，即电场最大值和电荷数密度最大值。在流注轴上，我们将它们分别记为 z_{tip} 和 $z_{n_{q,\ \mathrm{max}}}$，并将它们之间的距离记为

$$\tilde{\ell} = z_{\mathrm{tip}} - z_{n_{q,\mathrm{max}}} \tag{15}$$

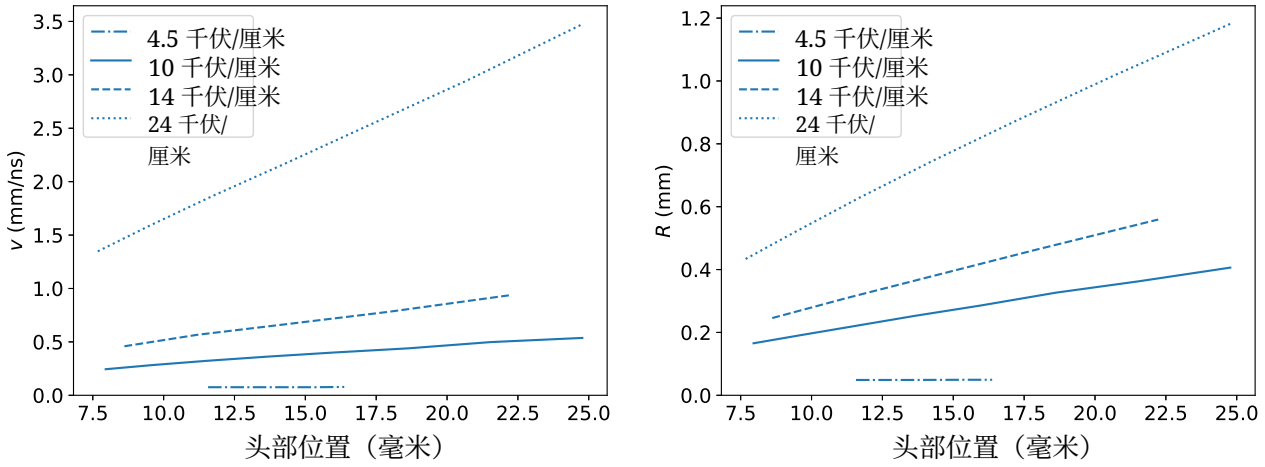
在下文定义的共动坐标系 $(r,\ z)$ 中。图 3 也展示了这两个极大值。图中还显示，$z_{n_{q,\ \mathrm{max}}}$ 大致位于电荷层的中部，并且 j 在该极大值附近近似对称。因此，我们将电荷层的内边界 z_{ch}定义为

$$z_{\mathrm{ch}} = z_{\mathrm{tip}} - \ell \text{ with } \ell = 2\tilde{\ell}. \tag{16}$$

2.3.3. 半径和坐标系原点的定义。 我们用曲率半径 R来表征流注头部，其定义为最能拟合流注尖端处弯曲电荷层的圆的半径。通过在电荷层的每个 z的最大值处拟合一个半圆，从模拟数据中提取该参数，参见图4。只要所选区域足够小，提取出的 R 对拟合参数不敏感。因此，我们将该区域取为 $[z_{n_{q,\mathrm{max}}} - 4\ell, z_{n_{q,\mathrm{max}}}]$。从模拟中提取的曲率半径如图5b所示。

R 是一个重要的量，因为它决定了电荷层附近雪崩区内电场和电流的空间衰减，这一点可从图 2 中看出。在图中，等势线在足够接近传播轴处描绘出电荷层的形状。如图 4 所示，我们将球心选为共动坐标系的原点 $(r,\ z)$ =(0，0)。

2.3.4. 稳态流注的流注长度定义 [12–14] 中报道的稳态正流注都与其起始点“脱离”。这是指，由于附着和复合过程，通道失去电导率，以至于不能再认为流注与电极或初始电离种子相连。对于这些脱离的流注，使用一个典型的



（a）速度 (b) 曲率半径

图5：根据不同背景电场下的模拟结果，头部位置与速度和半径的关系。

电导率损失长度尺度来表征流注长度更为合适 L_{loss}

$$L_{\text{loss}} = v\tau, \tag{17}$$

其中， τ 电子损失时间代表所有电导率损失过程的集体时间尺度。研究 [13, 14] 探讨了 L_{loss} 和 τ。具体而言，分析了这些量如何取决于气体组分和电场。

3. 电荷层 $(z_{\text{ch}} \leq z < z_{\text{tip}})$

本节针对空间电荷层中的总电流密度以及电子和离子密度建立轴向近似，也就是针对通道前端z_{ch} 与电场最大值 z_{tip} 之间的区域（参见图4）。该区域的宽度 ℓ 远小于曲率半径 R，因此可将此电荷层近似视为平面。

我们可以忽略电荷层中的光电离 S_{ph}，因为它远小于 S_i。光电离仅因其非局域性而在雪崩区中起作用。我们还忽略扩散电流，并假设其主要由对流主导。

3.1. 电荷层中的电流密度

由于电荷守恒和静电学中的泊松方程，总电流密度 $\mathbf{j}_{\text{tot}}$ 是守恒量

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{tot}} = 0, \text{ where } \mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}. \tag{18}$$

对于共动参考系 z中的稳态运动，总电流为 $\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} - v\epsilon_0 \partial_z \mathbf{E}$。请注意，电流密度取自静止参考系，即$\mathbf{j} = -e\mu n_e \mathbf{E}$ 表示为 z 的函数。

为求解$\mathbf{j}_{\text{tot}}$，我们将尖端处的电荷层近似为平面表面。这一近似的有效性由无量纲参数 ℓ/R决定。具体而言，我们要求 $\ell/R \ll 1$; 如图6所示，这通常适用于流注。在这种情况下，只有散度算子的 z 导数不为零。于是，方程（18）规定$\mathbf{j}_{\text{tot}}$ 为常数。

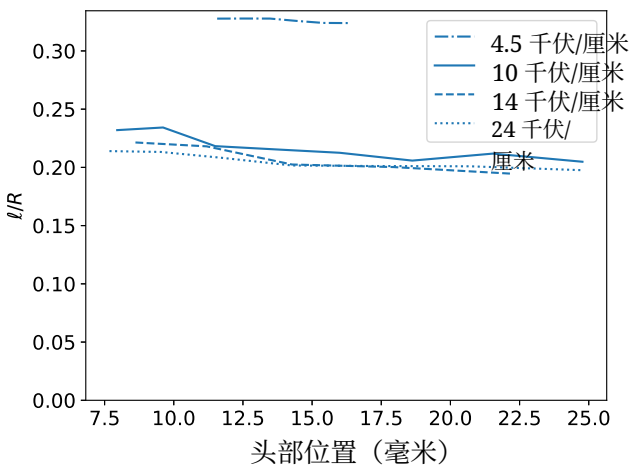


图6：从不同背景电场下的模拟中提取的无量纲参数 ℓ/R 随头部位置的变化。该参数用于表征平面前沿近似的有效性。观察到的波动是由于˜尺寸较小所致； ℓ 仅为最小网格尺寸的几倍。

结合 z_{tip} 处的边界条件，可得轴向近似

$$j_{\mathrm{tot}}(z) = j_{\mathrm{tot}}(z_{\mathrm{tip}}). \tag{19}$$

此外，电场在z_{tip}处达到最大值，因此 $\partial_z \mathbf{E}|_{z_{\mathrm{tip}}} = 0$ ，且该处的位移电流为零

$$j_{\mathrm{tot}}(z_{\mathrm{tip}}) = -e j_{e,\mathrm{tip}}, \tag{20}$$

其中，$j_{e,\ \mathrm{tip}}$ 是 z_{tip}处轴线上的电子电流密度。同样，在通道中位移电流也近似为零，因为轴线上的电场和电子密度几乎保持恒定。由此可得

$$j_{e,\mathrm{ch}} = j_{e,\mathrm{tip}}, \tag{21}$$

其中，$j_{e,\mathrm{ch}}$ 的定义方式类似于$j_{e,\mathrm{tip}}$。最后，将这一结果与方程（19）结合，可确定 $-j_{\mathrm{tot}}/e = j_{e,\mathrm{tip}} = j_{e,\mathrm{ch}}$。

文献 [39]还提出了对z_{ch} 和 z_{tip} 处总电流密度的分析。他们认为$j_{e,\mathrm{tip}}$ 为零，这意味着 $j_{\mathrm{tot}}(z_{\mathrm{tip}})$完全由位移电流 $-v\epsilon_0\,\partial_z$**弹性模量**$|_{z_{\mathrm{tip}}}$ 决定。然而，图3中的数值模拟与此相矛盾。事实上，我们观察到，在 z_{tip} 处，由于电场达到最大值，位移电流为零；反之，$j_{e,\mathrm{tip}}$ 并不为零，这与我们的推理一致。

3.2. 电荷层中的电离与电场

由于离子在传播中的流注头部基本上无法移动，因此通过电荷层后方的离子密度$n_{i,\ \mathrm{ch}}$ 来确定电离度最为合适。一个可追溯至 [19, 22] 的旧近似为

$$n_{i,\mathrm{ch}}^{\text{old approx}} \approx \frac{\epsilon_0}{e}\int_0^{E_{\max}} \alpha_{\mathrm{eff}}(E)\,dE, \tag{22}$$

其中我们使用 $E = |\mathbf{E}|$。在 [23] 的附录中，针对不存在电子扩散或光电离的平面负流注电离前沿，推导了该方程。根据以下两个方程，可以很容易地推导出这一近似：方程(3)和(4)联立可得

$$\partial_t n_i = |\mathbf{j}_e|\alpha_{\mathrm{eff}}(E), \tag{23}$$

若电荷层前方的总电流为零，则方程（18）为 $\epsilon_0\partial_t E = -e j_e$。当平面前沿前方的电子密度为零，且前沿前方的电场不随时间变化时，情况便是如此。

根据 [23]，公式（22）可以很好地近似时不变电场中无光电离的平面负电离前沿的数值解；误差仅为 5% 到 10%。然而，在

表1：不同背景电场下流注的电离密度 $n_{i,\ \mathrm{ch}}$($\times 10^{19}\mathrm{m}^{-3}$)。所有流注均取在$\zeta_{\mathrm{tip}} = 15$ mm处。我们将旧的近似（公式（22））和我们的近似（公式（26））与模拟结果进行比较。

	经典 公式 (22)	new 式（26）	模拟
4.5 千伏/厘米	11.9	21.9	25.6
10 千伏/厘米	3.3	5.4	6.3
14 千伏/厘米	3.4	5.6	6.3
24 千伏/厘米	4.5	7.6	8.4

如 [14, 40],所示，考虑光电离的正流注曲面前沿模拟中，电离密度约为经典近似（22）所给数值的两倍（尤其参见 [14]的表B1）。表1中我们进行了类似比较，并确认公式（22）作为正流注电离密度近似时存在偏差。

最初的一个假设是，近似（22）仅涵盖前沿的一部分：在该部分中，电场从最大值 $E_{\max}$ 衰减到通道内部的较低值；而它遗漏了电荷层前方的雪崩区，在该区域中，电场逐渐增强至最大值 [40]。没有背景电离和光电离时，雪崩区基本不存在；但在空气中，该区域十分明显。然而，雪崩区产生的电离对总电离的贡献相对较小。我们将在第6.2节和图8中进一步讨论这一点。

现在我们将说明，对于空气中的正流注，来自雪崩区、流入弯曲电荷层的总电流密度 $\mathbf{j}_{\mathrm{tot}}$ 对前沿后方的电离有显著贡献。新近似的推导与 [23] 中较早的推导类似。我们从式 (23) 出发，并用 j_{tot} 表示 j_e

$$\partial_t n_i = \frac{1}{e}\left|\mathbf{j}_{\mathrm{tot}} - \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}\right| \alpha_{\mathrm{eff}}. \tag{24}$$

由于处于稳态运动，且矢量$\mathbf{j}_{\mathrm{tot}}$ 与$\mathbf{E}$ 在轴线上平行，因此可以进一步简化

$$\partial_z n_i = \left(\frac{\epsilon_0}{e}\partial_z E + \frac{j_{\mathrm{tot}}}{ev}\right)\alpha_{\mathrm{eff}}. \tag{25}$$

对电离前沿进行积分可得

$$\begin{aligned} n_i(z) = n_{i,\mathrm{tip}} &+ \frac{\epsilon_0}{e}\int_{E(z)}^{E_{\max}} \alpha_{\mathrm{eff}}(E)\,dE \\ &+ \frac{1}{ev}\int_{z}^{z_{\mathrm{tip}}} \alpha_{\mathrm{eff}}(E(z)) j_{\mathrm{tot}}\,dz. \end{aligned} \tag{26}$$

第一项通过代入（$\partial_z E\,dz = dE$）后积分得到。当在 $z = z_{\mathrm{ch}}$ 处取值，并将 $E(z_{\mathrm{ch}})$近似为零时，它还原为旧近似（22）。第二项则需要进一步分析。根据方程（19），我们将 j_{tot} 近似为常数$-ej_{e,\ \mathrm{tip}}$ 。此外，为了计算积分中的 $\alpha_{\mathrm{eff}}(E(z))$，我们需要$E(z)$的空间分布。这里，我们对$E$ 采用启发式参数化，进一步分析留待未来工作。在图3中可以看到，在该层内，电荷数密度 n_q 近似呈高斯分布，可参数化为

$$n_q(z) = \frac{N_q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-R}{\sigma}\right)^2\right), \tag{27}$$

with

$$N_q = \int_{z_{\mathrm{ch}}}^{z_{\mathrm{tip}}} n_q\,dz = \frac{\epsilon_0}{e}\,(E_{\max} - E_{\mathrm{ch}}), \tag{28}$$

一个近似的归一化常数，前提是 $\sigma \ll \ell$。

接下来，我们利用该层在其较小宽度范围内仅呈弱弯曲这一点，并采用平面近似 $\partial_z E = e n_q/\epsilon_0$，通过对 n_q 积分，将电场计算为 $E(z)$

$$E(z) = E_{\max} - \frac{e}{\epsilon_0}\int_z^{z_{\rm tip}} n_q(z)dz. \qquad (29)$$

这种电场启发式参数化与轴对称模拟的结果一同显示在图3的中间各幅图中。当我们为稳态流注选择 $\sigma = \ell/3$，为加速流注选择 $\sigma = \ell/2$ 时，E 的参数化结果与模拟结果一致。此外，我们明确指出，方程（27）仅用于说明并评估方程（29）中 E 的参数化。

使用公式（29）作为电荷层内电场的近似，我们可以通过在 $z_{\rm ch}$处计算公式（26）来求得电离密度。在表1中，我们比较了这种近似，此时所有宏观参数均从模拟中提取。我们观察到二者吻合良好，相对误差在10-15%之间。

3.3. 电荷层中的电子密度

我们对电荷层内电子密度的推导始于电荷守恒的基本方程。

$$e\partial_t n_q = -\nabla\cdot\mathbf{j}. \qquad (30)$$

由于我们考虑的是均匀平移和平面前沿，因此可以写成

$$v n_q = j_{e,\rm ch} - j_e, \qquad (31)$$

其中$j_{e,\ \rm ch}$ 被引入为一个积分常数。顺带一提，[22, 28], 中也提出了类似的关系，但其中明确忽略了积分常数。然而，从图 3 中可以看到，$j_{e,\ \rm ch}$ 和 $j_{e,\ \rm tip}$ 都不可忽略。继续推导，我们使用 $n_q = n_i - n_e$ 并重新整理该方程中的各项，从而得到电荷层中电子密度分布的表达式

$$n_e(z) = \frac{v n_i(z) - j_{e,\rm ch}}{v + v_{\rm dr}}, \qquad (32)$$

其中电荷漂移速度为 $v_{\rm dr} = \mu E$。（注意，电子以 $-v_{\rm dr}$ 漂移。）由此可确定 $n_e(z)$，因为 $n_i(z)$ 由公式（ 26 ）给出。将此表达式代入 $z_{\rm ch}$ 或$z_{\rm tip}$ ，并使用公式（21），可得准中性：$n_{e,\ \rm ch} = n_{i,\ \rm ch}$ 和 $n_{e,\ \rm tip} \approx n_{i,\ \rm tip}$。注意，$z_{\rm tip}$ 处隐含的准中性仅在近似意义上成立，见图 3。

此外，对公式在电荷层内积分并使用(31)（28），可得

$$\int_{z_{\rm ch}}^{z_{\rm tip}} e(j_{e,\rm tip} - j_e)\,dz = v\epsilon_0(E_{\max} - E_{\rm ch}). \qquad (33)$$

这可以解释为正电荷层的运动（由电场的不连续性表示）与电荷分离之间的物理联系。后者可以直接用穿过电荷层的电流积分表示。

4. 雪崩区（$z \geq z_{\rm tip}$）

雪崩区定义为位于空间电荷层前方的区域，在该区域内可以忽略空间电荷，且电场高于击穿值。这意味着该层附近的电场主要由层中的电荷决定，而雪崩区中的电荷

在这一外部确定的电场中移动，但不对其产生贡献。

在雪崩区，必须采用与电荷层中不同的近似：

(i) 如上所述，局部电荷对电场的影响可以忽略不计，$\nabla\cdot$**弹性模量** $=0$，因此雪崩是在外部确定的电场中发展的。

(ii) 由于 $\ell \ll R$，我们使用平面前沿近似描述了电荷层内部的动力学，但平面前沿近似不适用于雪崩区。因此，我们在雪崩区考虑电荷层的曲率。具体而言，我们将流注尖端处的电荷层近似为半径为R的半球，见图4和图7。

(iii) 仍然忽略电子扩散，但现在需要考虑光电离。尽管碰撞电离比光电离强得多，但光电离的非局域性对于在雪崩区产生种子电子至关重要。

4.1. 雪崩区电子密度方程

雪崩区轴线上的电子动力学漂移-扩散-反应方程（2）可简化如下。首先需要指出，结合上述近似并使用链式法则，我们可以在轴线上写出

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mu n_e\mathbf{E}) &= \mathbf{E}\cdot\nabla(\mu n_e)+\mu n_e\nabla\cdot\mathbf{E},\\ &= E\partial_z(\mu n_e),\\ &= v_{\rm dr}\partial_z n_e+\frac{\partial_z\mu}{\mu}v_{\rm dr}n_e,\end{aligned}\tag{34}$$

于是，在轴线的共动参考系中，方程（2）的电子动力学可表示为：

$$(v+v_{\rm dr})\partial_z n_e+\frac{\partial_z\mu}{\mu}v_{\rm dr}n_e+S_i+S_{ph}=0.\tag{35}$$

在下一节中，我们推导出S_{ph}的表达式。

4.2. 雪崩区与电荷层之间的耦合

雪崩区中的动力学与其他放电区域相耦合。更准确地说，电荷层与通道共同产生雪崩区中的增强电场；此外，电荷层还发射了绝大多数光子，这些光子引发光电离，并启动雪崩区中的电离雪崩。

电荷层附近以及流注轴附近的电场近似为均匀带电球体的电场

$$E(z)=\frac{z_{\rm tip}^2(E_{\rm max}-E_{\rm bg})}{z^2}+E_{\rm bg},\tag{36}$$

如上文所述。

对于空气中的光电离，光子主要产生于电荷层，因为大多数高能碰撞都发生在这里，如图8所示。因此，忽略源自雪崩区的光子。此外，由于典型的吸收长度（1 bar、300 K下干燥空气中的吸收长度为$33-1900\ \mu$m）相较于 ℓ较大（参见图 9），我们基本上可以将电荷层视为一个表面。因此，我们将方程（5）近似为一个曲面积分

$$S_{ph}(z)=\iint_S\frac{I(\mathbf{r}')f(|z\mathbf{e}_z-\mathbf{r}'|)}{4\pi|z\mathbf{e}_z-\mathbf{r}'|^2}d^2r',\tag{37}$$

其中 $\mathbf{e}_z$ 为 z方向上的单位向量，坐标 $\mathbf{r}'$ 现在位于表面 S上。为简单起见，我们取 S 为

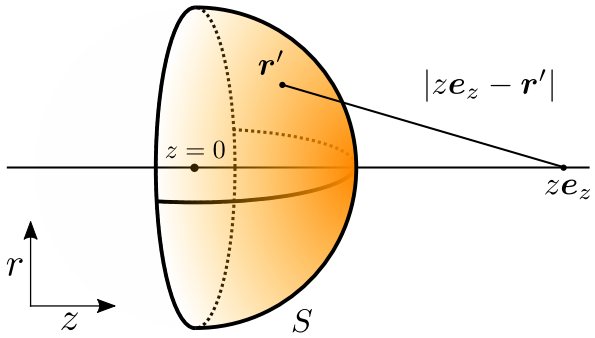


图7：用于计算光电离源项的配置。电荷层近似为一个半径为 R 、以 $z = 0$ 为中心的半球S 。颜色表示实际的前沿并非以均匀强度辐射，而是在边缘处逐渐减弱（尽管我们在此未考虑这一点）。图中还显示了一个光子的路径：它在$\mathbf{r}'$ 处产生，在 $z\mathbf{e}_z$处被吸收。随后，光电离产生电子雪崩，进而形成局部电场。近似计算时，我们采用 z 轴上的雪崩。

以 $z = 0$为中心、半径为 R 的半球表面。这如图7所示。

现在将方程（6）中的一般光子源项近似为

$$I(\mathbf{r}') = \mathcal{A}(\mathbf{r}')I^*, \tag{38}$$

其中 I^* 为光子产生的表面密度

$$I^* = \frac{p_q}{p + p_q}\xi v n_{i,\mathrm{ch}} \tag{39}$$

沿流注轴。此处， $p_q/(p + p_q)$为光子发射态的猝灭因子。光子发射态的激发近似为碰撞电离 S_i 乘以比例因子 ξ。请注意，碰撞电离必须在电荷层的宽度$\int S_i\, dz = v(n_{i,\ \mathrm{ch}} - n_{i,\ \mathrm{tip}})$范围内积分；该宽度是在对 $-v\partial_z n_i = S_i$（根据方程（3））沿电荷层积分后得到的。最后，由于$n_{i,\ \mathrm{tip}} \ll n_{i,\ \mathrm{ch}}$ ，我们省略了对$n_{i,\ \mathrm{tip}}$的依赖。

$\mathcal{A}(\mathbf{r}')$ 是一个函数，可考虑碰撞电离以及电荷层中的光子辐射沿离轴方向减弱这一事实。不过，为简单起见，我们取 $\mathcal{A}(\mathbf{r}') = 1$。这自然会略微高估光子辐射。

4.3. 求解雪崩区中的电子密度

现在我们来求解方程 (35)。为此，我们先引入以下简写符号

$$\partial_z n_e + \lambda(z) n_e = -K(z), \tag{40}$$

其中 $\lambda(z)$ 表示电子雪崩增长函数

$$\lambda(z) = \frac{v_{\mathrm{dr}}(E(z))}{v + v_{\mathrm{dr}}(E(z))}\left(\alpha_{\mathrm{eff}}(E(z)) + \frac{\partial_z \mu}{\mu}\right), \tag{41}$$

而 $K(z)$ 表示光电子源项

$$K(z) = \frac{S_{ph}(z)}{v + v_{\mathrm{dr}}(E(z))}, \tag{42}$$

外部电场 $E(z)$ 见方程 (36)。 $S_{ph}(z)$ 根据方程 (37)–(39) 确定，是对应于参数化电荷层的表面积分。对于给定的 I^*，方程 (40) 是关于 n_e 的常微分方程，其解为

$$n_e(z) = \int_z^\infty K(y)\, e^{\int_z^y \lambda(x)\, dx}\, dy. \tag{43}$$

该解可以解释为电子雪崩的叠加。光电子密度 K 持续产生电子雪崩。雪崩在电场中增长，其过程由 λ 描述，其中包含碰撞电离 α_{eff} 和电子迁移率 μ 的影响（E）。

为了进一步分析，有必要讨论该解的结构，以及其对电荷层前端和后端电子和离子密度 $z_{\rm tip}$ 和 $z_{\rm ch}$ 的影响。我们发现，方程（43）可以改写为

$$\frac{n_{e,\rm tip}}{n_{i,\rm ch}} = F(v, R, E_{\max}, E_{\rm bg}), \qquad (44)$$

并给出了函数 F的显式方程，该方程不依赖任何电子或离子密度。这里， R、 $E_{\max}$ 和 $E_{\rm bg}$ 根据式 (36) 确定雪崩区中的电场 $E(z)$。F 不依赖粒子密度，这是因为雪崩区具有线性特性，不存在局部空间电荷效应：电荷层发射的光子数量增加一倍，就会产生两倍的雪崩，并使到达 $z_{\rm tip}$ 的电子数量增加一倍；这些电子又会使电荷层发射的光子数量增加一倍。

函数 F的显式方程为

$$F = \frac{p_q}{p+p_q}\,\xi \int_{z_{\rm tip}}^{\infty} dy\, \frac{v}{v+v_{\rm dr}(y)}\, e^{\int_{z_{\rm tip}}^{y}\lambda(x)\,dx} \cdot \iint_S d^2r'\, \mathcal{A}(\mathbf{r}')\, \frac{f(|y\mathbf{e}_z-\mathbf{r}'|)}{4\pi|y\mathbf{e}_z-\mathbf{r}'|^2}, \qquad (45)$$

第一行包含流注轴上与电场相关的电子动力学，第二行则包含电荷层与流注轴之间与电场无关的光子动力学。

有人曾在 [25], 中以类似思路分析雪崩区，但他们只考虑雪崩区产生的光子，而忽略了电荷层的贡献。然而，图 3 表明，电荷层中的电离及其相关的光子产生重要得多。在我们的方法中，确实将电荷层视为主要的光子源。来源。[16, 26]中也给出了相同的推理。此外，我们基于电荷层和雪崩区中一致的电动力学，推导出了一个改进的光电离平衡，即公式（44）。该公式取代了 [25]中提出的光电离平衡。最后，我们指出，光子动力学与电子雪崩动力学之间的平衡类似于自持直流放电，不同之处在于，阳极被一个形状自洽的传播流注头部所取代。

5. 静电场与头部电势

5.1. 流注头部电势

如 [1], 所回顾的那样，对于流注物理，电场 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 采用静电近似已足够。因此，任意两点之间的线积分与两点间所取的路径无关

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}\cdot dl = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}'), \qquad (46)$$

其中 $\mathcal{C}$ 任意一条以$\mathbf{r}$为起点、以$\mathbf{r}'$为终点的连续曲线均可。我们将应用这一概念，推导通道与头部的静电特性之间的关系。

我们将使用方程（46）求解两个路径积分：第一个仅对应背景电场，第二个对应存在流注时的电场。在这两种情况下， $\mathcal{C}$ 等于传播轴，即 ζ轴，这使得$\mathbf{r} = 0$ 和$\mathbf{r}'$ 位于对置电极上。对于本研究中的流注， $\zeta_{\rm tip}$ 远离对置电极，这意味着边界效应可以忽略，因此我们可以取$\mathbf{r}'$ 为无穷远。当我们将这两个

积分相减时，得到

$$\int_0^{\infty} \left(E(\zeta) - E_{\mathrm{bg}}\right) d\zeta = 0, \tag{47}$$

因为**r** 和**r**′ 处的电势相同，因此右端项为零。先前的作者已考虑过这一基本性质 [14, 15, 25, 41, 42]。方程（47）将分为两个动力学特性不同的区间，即：流注通道$[0, \zeta_{\mathrm{tip}}]$和雪崩区 $[\zeta_{\mathrm{tip}}, \infty)$。我们将分别处理这两个区间。

5.1.1. 通道电势。稳态流注和加速流注的通道电势需要采用不同的处理方法。

对于稳态流注，通道电场会衰减并恢复至背景电场。一般而言，通道电场的分布由流注通道中的电流决定 [10, 11]。目前，我们不考虑对通道内电荷分布进行建模。相反，我们为稳态流注提出一种合理的通道电场分布。在第 2.3 节中，我们讨论了通道内的动力学与电子损失时间尺度 τ 的关系，而该时间尺度又决定了电子损失长度 L_{loss}。我们利用这些概念来设定

$$E(\zeta) = E_{\mathrm{bg}} + (E_{\mathrm{ch}} - E_{\mathrm{bg}}) \exp\left(\frac{\zeta - \zeta_{\mathrm{ch}}}{L_{\mathrm{loss}}}\right), \quad \text{for } \zeta < \zeta_{\mathrm{ch}}. \tag{48}$$

将其代入方程（47），得到

$$\int_0^{\zeta_{\mathrm{ch}}} \left(E(\zeta) - E_{\mathrm{bg}}\right) d\zeta = L_{\mathrm{loss}} \left(E_{\mathrm{bg}} - E_{\mathrm{ch}}\right). \tag{49}$$

对于本文所研究的加速流注，我们有 $L \ll L_{\mathrm{loss}}$，这意味着采用平均的通道电场 E_{ch} 更为合理。通过沿通道长度保持该 $E_{\mathrm{ch}} = E_{\mathrm{ch}}$，我们可以得到类似的结果

$$\int_0^{\zeta_{\mathrm{ch}}} \left(E(\zeta) - E_{\mathrm{bg}}\right) d\zeta = L \left(E_{\mathrm{bg}} - \bar{E}_{\mathrm{ch}}\right). \tag{50}$$

5.1.2. 雪崩区上的电势。

在雪崩区，电场近似为均匀带电球体产生的电场，见方程（36）。据此，雪崩区上的电势可近似简化为

$$\int_{\zeta_{\mathrm{tip}}}^{\infty} \left(E(\zeta) - E_{\mathrm{bg}}\right) d\zeta = R(E_{\max} - E_{\mathrm{bg}}). \tag{51}$$

由此得到最终结果

$$R(E_{\max} - E_{\mathrm{bg}}) = L \left(E_{\mathrm{bg}} - E_{\mathrm{ch}}\right). \tag{52}$$

为使符号简洁，我们不再区分 L_{loss} 稳态流注和加速流注这两种情况中的 E_{ch}。

6. 求解近似

6.1. 求解方法

现在假设速度 v、曲率半径 R、长度 L 和背景电场 E_{bg} 已知，例如可通过实验测量获得，并估算四个更难测量的未知量：电离密度$n_{i,\ \mathrm{ch}}$、最大电场 $E_{\max}$、通道电场 E_{ch}以及电荷层宽度 ℓ。为此，我们将建立一个由四个关系式组成的方程组，并据此确定这些未知量。

在前几节中，我们通过分析电荷层 $z_{\mathrm{ch}} \le z < z_{\mathrm{tip}}$ 的动力学推导出了方程（21）和（33），其中 $z_{\mathrm{tip},\ \mathrm{ch}} = R \pm \ell/2$。这些是第一和

第二个关系式。基于静电学，我们在方程（52）中将头部电势与流注长度联系起来，这就是第三个关系式。最后，我们要求电荷层和雪崩区的电子动力学保持一致（参见第 4.3 节）。这引出了最后一个关系式，即方程（44）。为方便起见，我们在此重复列出这些关系式

$$j_{e,\mathrm{ch}} = j_{e,\mathrm{tip}}, \tag{53}$$

$$v\epsilon_0(E_{\max} - E_{\mathrm{ch}}) = \int_{z_{\mathrm{ch}}}^{z_{\mathrm{tip}}} e(j_{e,\mathrm{tip}} - j_e)\, dz, \tag{54}$$

$$R(E_{\max} - E_{\mathrm{bg}}) = L\left(E_{\mathrm{bg}} - E_{\mathrm{ch}}\right), \tag{55}$$

$$\frac{n_{e,\mathrm{tip}}}{n_{i,\mathrm{ch}}} = F(v, R, E_{\max}, E_{\mathrm{bg}}). \tag{56}$$

函数 F 在方程中定义，电子电流密度定义为$j_e = -\mu n_e E$。上述方程组有 8 个独立参数:

$$v,\ R,\ L,\ E_{\mathrm{bg}},\ n_{i,ch},\ E_{\max},\ E_{\mathrm{ch}} \text{ and } \ell. \tag{57}$$

其他所有量都由这 8 个参数确定。为说明这一点，我们总结了两个区域中的近似:

- 在雪崩区（$z \geq z_{\text{尖端}}$）中，电场和电子密度近似为（方程(36)和(43)）

$$E(z) = \frac{z_{\mathrm{tip}}^2 (E_{\max} - E_{\mathrm{bg}})}{z^2} + E_{\mathrm{bg}}, \tag{58}$$

$$n_e(z) = \int_z^{\infty} K(y)\, e^{\int_z^y \lambda(x)\, dx}\, dy, \tag{59}$$

$$\text{for } z \geq z_{\mathrm{tip}}.$$

值得注意的是，函数 $K(y)$（方程（42））考虑了光电子的产生，并与$n_{i,\ ch}$成正比。根据定义，电子密度和电场给出 j_e ，因此$j_{e,\ \mathrm{tip}}$。最后，我们假设空间在整个雪崩区内，电荷效应可以忽略。因此，我们也假设尖端处准中性$n_{i,\ \mathrm{tip}} \approx n_{e,\ \mathrm{tip}}$。

- 在电荷层（$z_{\mathrm{ch}} \leq z < z_{\text{尖端}}$）中，电场和密度由（方程（29）、（26）、（32））近似表示。

$$E(z) = E_{\max} - \frac{e}{\epsilon_0} \int_z^{z_{\mathrm{tip}}} n_q(z) dz, \tag{60}$$

$$n_i(z) = n_{i,\mathrm{tip}} + \frac{\epsilon_0}{e} \int_{E(z)}^{E_{\max}} \alpha_{\mathrm{eff}}(E)\, dE, + \frac{1}{ev} \int_z^{z_{\mathrm{tip}}} \alpha_{\mathrm{eff}}(E(z)) j_{\mathrm{tot}}\, dz, \tag{61}$$

$$n_e(z) = \frac{v n_i(z) - j_{e,\mathrm{ch}}}{v + v_{\mathrm{dr}}}, \tag{62}$$

$$\text{for } z_{\mathrm{ch}} \leq z < z_{\mathrm{tip}},$$

其中，方程（60）中的 n_q 是方程（27）给出的参数化形式。$n_{i,\mathrm{tip}}$ 和$j_{e,\mathrm{tip}}$ 由雪崩区决定。通道中的准中性条件给出$n_{i,\ \mathrm{ch}} = n_{e,\mathrm{ch}}$。因此，我们可以在电荷层内评估 j_{tot} 和 j_e 。

因此，目标是确定式 (57) 中的 4 个参数，因为我们认为 (v、 R、 L、 E_{bg}) 可通过观测确定。其余四个参数，我们记作$m = (n_{i,\ \mathrm{ch}}$、$E_{\max}$、 E_{ch}、 ℓ)，必须满足关系式 (53)–(56)。求解这个方程组，等价于求四维向量函数 $\mathcal{S}$的根；该函数定义为方程 (53)–(56) 左右两端之差。因此，如果 m 满足以下条件，它就是一个相容解

$$\mathcal{S}(m) = 0. \tag{63}$$

由于 $\mathcal{S}$ 的复杂性，我们采用迭代求根算法，使用Levenberg-Marquardt算法的修改版本 [43]求解方程（63）。此类算法从初始猜测值 m^0开始

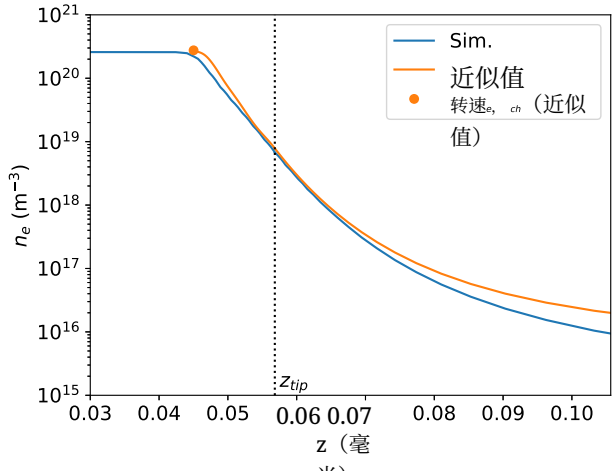


图8：我们对电子密度的近似（橙色），与稳态流注模拟的数值结果（蓝色）进行比较。施加的背景电场为 4.5 千伏/厘米。用于进行此比较的近似参数是在图 (9) 中评估的

并生成一系列逐渐收敛至根的数值 m^k 。我们再次强调，除 m^k 外，输入参数 v、 R、 L 和 E_{bg} 足以计算 $\mathcal{S}(m^k)$。此外，改变初始猜测似乎不会影响所得解 m，这表明解 m 是唯一的。我们在数值模拟 [14, 15] 中也观察到了相同的现象。

6.2. 结果

6.2.1. 稳态流注：本节将把近似的 $n_e(z)$、$n_{i,\ \mathrm{ch}}$、$\tilde{E}_{\max}$、 E_{ch} 和 ℓ 与数值模拟进行比较。我们首先对稳态流注进行比较。为获得这些结果，我们从模拟中提取了 $E_{\mathrm{bg}} = 4.5$ 千伏/厘米、 $v = 0.076$ 毫米/纳秒、$R = 49$ μ 米和 $L_{\mathrm{loss}} = 3.8$ 毫米（见图（5）），并用这些数据求解方程（63）。

在图8中，我们展示了我们的近似对于稳态流注的轴向电子密度（方程（32）和（43））。我们将近似得到的电子密度与数值模拟结果叠加，使相应的 z_{tip} 重合。我们观察到，我们关于雪崩区电子密度分布的解析公式能够很好地复现模拟得到的分布。从图中还可以看出，超过95%的电离发生在电荷层中。这进一步印证了我们先前的论点：电离主要发生在电荷层中，因此可以忽略源自雪崩区的光子。

本次评估得出的近似参数$n_{i,\ \mathrm{ch}}$、 $E_{\max}$、$\tilde{E}_{\mathrm{ch}}$ 和 ℓ 如图 9 所示。结果显示，两者吻合良好；对于 ℓ的预测，最大相对误差约为~30%。其他参数的误差均在25%以内。

6.2.2. 加速流注：如引言中所述，接下来我们将把针对稳态流注建立的分析应用于加速流注。我们还以相同的方法计算了背景电场为10、14和24千伏/厘米时流注的结果。相应的速度和半径随流注长度的变化已在图5中展示。

近似参数列于图 9 中。在这种情况下，我们也观察到较好的一致性，相对误差最多为几十个百分点。只有在 24 千伏/厘米时，我们对$n_{i,\ \mathrm{ch}}$的估算相对误差约为 $50 - 60\%$。此外，我们还展示了对通道电场采用简化处理所引入的误差。对于加速流注，我们在图 9 中同时纳入了 $\bar{E}_{\mathrm{ch}}$和平均的 E_{ch} 。在第 5 节

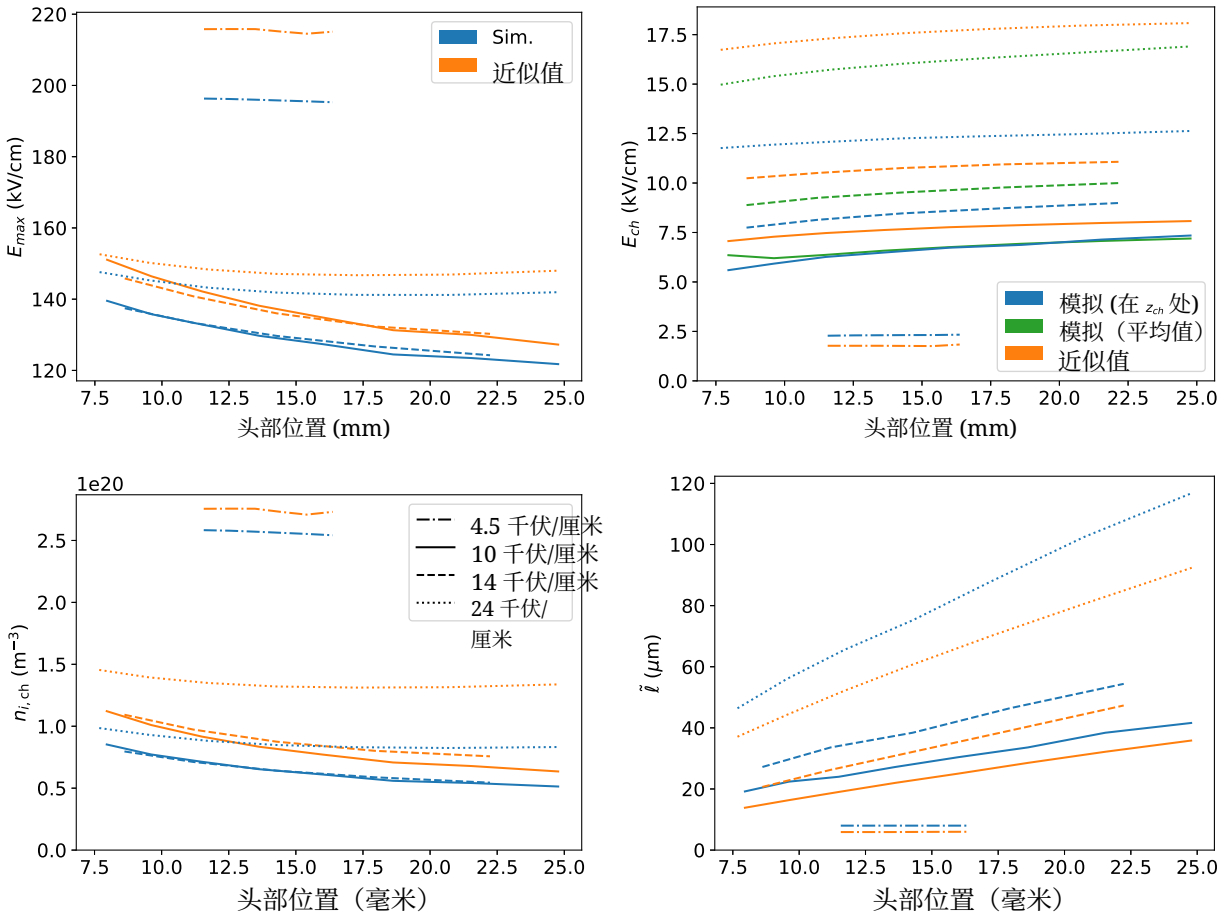


图 9：不同背景电场下，头部位置各异的流注模拟结果（蓝色、绿色）与我们的近似结果（橙色）对比 E_{bg}。 E_{bg}、 L、 R 和 v 取自模拟结果，并用于根据公式 (63) 计算图示近似值。图示量包括最大电场 E_{max}、（平均）通道电场 E_{ch}、$\tilde{}$电离度 $n_{i,\ \mathrm{ch}}$ 以及电荷层宽度 ℓ。四种背景电场 E_{bg}分别以· · 表示 4.5 千伏/厘米（稳态）、10 千伏/厘米、14 千伏/厘米，以及 · · · 表示 24 千伏/厘米）。

$\bar{}$我们使用了 $E_{\mathrm{ch}} = E_{\mathrm{ch}}$，以便在不求解通道内完整电荷输运动力学的情况下，得到通道电场的方程。然而，这种近似通常并不成立，而且在 24 千伏/厘米的情况下精度最差。这有多种原因，例如中性种子持续存在（即由于传播时间较短，初始条件的影响仍然存在）、通道中实际存在的不均匀性，或.....的影响边界条件。

总体而言，我们的模型也能够估算较高背景电场下流注的特性。显然，将加速流注头部的电荷层近似为稳态平面前沿，可以得到合理的结果。

7. 总结与展望

7.1. 总结

在这项工作中，我们提出了一种模型，可根据可观测参数描述单个正极性空气流注。总体而言，我们的近似与典型稳态流注的数值模拟结果吻合良好，相对误差通常低于 30%。对于加速流注，误差略高，在所考察的最高背景电场下，最大偏差可达 60%。

我们最重要的理论贡献如下：

- 我们构建了一个自包含的轴向模型，可近似描述稳态流注头部的宏观特性。该模型对加速流注头部也能给出良好的结果。

- 我们展示了如何根据更容易观测的参数 R、v、 L和 E_{bg}确定量$n_{i,\ \mathrm{ch}}$、$E_{\max}$、 E_{ch} 和 ℓ 。

- 我们给出了流注电离密度的公式。值得注意的是，该公式包含非零总电流密度所产生的贡献，其数值约为经典公式的两倍。

- 我们给出了电子动力学的自洽描述，其中包括雪崩区产生的光电子所带来的隐式贡献。

7.2. 展望

对于未来的研究，我们建议进行以下三项改进：

- 我们尚未显式求解电荷层的动力学，而是通过启发式参数化来描述这些动力学。不过，若采用数值方法解析电荷层内部的密度和电场，预计可以提高准确性。此外，这种方法还可以取代若干参数化，从而更精确地描述流注动力学。

- 我们对通道电场采用了两种处理方法。对于加速流注，我们采用了平均值$E_{\text{通道}} = E$通道；对于稳态流注，我们采用了具有预设长度尺度 $L_{\text{损耗}}$的指数衰减。这些方法显然存在局限性。未来，我们希望将本研究获得的见解与能够显式评估流注通道动力学的模型相结合，例如 [11]。

- 本研究中的所有推导均假设电荷层的动力学可在平面前沿条件下近似处理，因为无量纲参数 ℓ/R 通常较小。根据 ℓ/R 进行系统展开，可能会提高模型的准确性。

最后，我们探讨这项工作对于开发准确的流注树模型（如 [10, 11]）的意义。目前，这些模型的局限在于无法对流注的速度和半径进行自洽描述。这些参数通常是人为设定的。然而，我们的模型可以与树模型结合，从而克服正流注模型的这一关键局限。

致谢

HF 获得了欧盟地平线2020研究与创新计划资助，该计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 SAINT722337 提供支持。

参考文献

[1]Nijdam S、Teunissen J 和 Ebert U，2020，《等离子体源科学与技术》**29** 103001，ISSN 1361-6595，网址：https: //iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/abaa05[2] Bagheri B、Teunissen J、Ebert U、Becker M M、Chen S、Ducasse O、Eichwald O、Loffhagen D、Luque A、Mihailova D、Plewa J M、van Dijk J 和 Yousfi M，2018，《等离子体源科学与技术》**27** 095002，ISSN 1361-6595，网址：https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/aad768[3] Cummer S A、Jaugey N、Li J、Lyons W A、Nelson T Eand GerkenE A，2006，地球物理研究快报**33**，ISSN 00948276[4] Kochkin P O、Nguyen C V、Van Deursen A P 和 Ebert U，2012，《D辑物理学杂志：应用物理学》**45**，ISSN 00223727[5] Hare B M、Scholten O、Dwyer J、Ebert U、Nijdam S、Bonardi A、Buitink S、Corstanje A、Falcke H、Huege T、H¨orandel J R、Krampah G K、Mitra P、Mulrey K、Neijzen B、Nelles A、Pandya H、Rachen J P、Rossetto L、Trinh T N、Ter Veen S 和 Winchen T，2020，物理评论快报**124**，ISSN 10797114[6]Sterpka C、Dwyer J、Liu N、Hare B M、Scholten O、Buitink S、Veen S t 和 Nelles A，2021，地球物理研究快报**48** 2520–2533，ISSN 0094-8276，网址：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2021GL095511[7]Li X、Dijcks S、Nijdam S、Sun A、Ebert U 和 Teunissen J，2021，《等离子体源科学与技术》**30** 095002，ISSN 0963-0252，网址：https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ac1b36[8]Dijcks S、der Leegte M v 和 Nijdam S，2023，《等离子体源科学与技术》**32**，ISSN 13616595[9] Wang Z、Dijcks S、Guo Y、van der Leegte M、Sun A, Ebert U, Nijdam S 和 Teunissen J 2022 arXiv 预印本 arXiv:2208.07279[10]Luque A 和 Ebert U 2014 《新物理学杂志》**16** 013039 ISSN 1367-2630 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/16/1/013039[11]Luque A、Gonz´alez M 和 Gordillo-V´azquez F J 2017 《等离子体源科学与技术》**26** 125006 ISSN 1361-6595 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/aa987a[12]Francisco H、Bagheri B 和 Ebert U 2021 《等离子体源科学与技术》**30** 025006 ISSN 0963-0252 URL https: //iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/abdaa3[13]Francisco H、Teunissen J、Bagheri B 和 Ebert U 2021 《等离子体源科学与技术》**30** 115007 ISSN 0963-0252 URL http://arxiv.org/abs/2107.06781https: //iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ac2f76[14]Li X、Guo B、Sun A、Ebert U 和 Teunis- sen J 2022 《等离子体源科学与技术》**31** 065011 ISSN 0963-0252 URL http://arxiv.org/abs/2201.11257https: //iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ac7747[15] Guo B、Li X、Ebert U 和 Teunissen J 2022 URL http://arxiv.org/abs/2204.02698http: //dx.doi.org/10.1088/1361-6595/ac8e2e[16]Pavan C、Martinez-Sanchez M 和 Guerra- Garcia C 2020 《等离子体源科学与技术》**29** 095004 ISSN 0963-0252 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/aba863[17]Loeb L B 1965 电势梯度电离波 技术报告 3676[18] Dyakonov M 和 Kachorovskii V 1988 《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》**67** 1049–1054[19] D'yakonov M 和 Kachorovskii V 1989 《实验与理论物理学杂志》**95** 1850–1859 URL http://www. jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_068_05_1070.pdf[20] Briels T M P、Kos J、Winands G J J、van Veld- huizen E Mand Ebert U 2008 《D辑物理学杂志：应用物理学》**41** 234004 ISSN 0022-3727 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/41/23/234004[21] Naidis G V 2009 《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》**79** 3–6 ISSN 15393755

[22] Naidis G V 1997 《D辑物理学杂志：应用物理学》 **30** 1214–1218 ISSN 00223727[23] Li C、Brok W J、Ebert U 和 Van Der Mullen J J 2007 《应用物理学杂志》 **101** 1–17 ISSN 00218979[24]Naidis G V 2012 《等离子体源科学与技术》**21** 042001 ISSN 0963-0252 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0963-0252/21/4/042001[25]Pancheshnyi S、Starikovskaia S M 和 Starikovskiy A 2001 《D辑物理学杂志：应用物理学》**34** 105–115 ISSN 0022- 3727 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/34/1/317[26]Lehtinen N 2021 《高等院校学报：无线电物理》**64** 12–28 ISSN 0021- 3462 URL https://elibrary.ru/doi_resolution.asp?doi=10.52452%2F00213462_2021_64_01_12[27] Niknezhad M、Chanrion O、Holbøll J 和 Neu- bert T 2021 《等离子体源科学与技术》**30** 115014 ISSN 0963-0252 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ac3214[28] Babaeva N Y 和 Naidis G V 2021 《D辑物理学杂志：应用物理学》**54** 223002 ISSN 0022-3727 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6463/abe9e0[29]Zhelezniak M B、Mnatsakanian A K、Sizykh S V、Zhelezniak M B、Mnatsakanian A K 和 Sizykh S V 1982 HTemS**20** 357–362 URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982HTemS..20..357Z/abstract[30] Pancheshnyi S 2014 《等离子体源科学与技术》**24** 015023 ISSN 0963-0252 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0963-0252/24/1/015023[31]Teunissen J 和 Ebert U 2017 《D辑物理学杂志：应用物理学》**50** 474001 ISSN 0022-3727 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6463/aa8faf[32] Teunissen J 和 Ebert U 2018 《计算机物理通讯》**233** 156–166 ISSN 00104655 URL https://doi.org/10.1016/j.cpc.2018.06.018https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0010465518302261[33]Hagelaar G J 和 Pitchford L C 2005 《等离子体源科学与技术》**14** 722–733 ISSN 09630252[34] Phelps数据库，检索于2019年3月 URL www. lxcat.net

[35]Wang Z、Sun A 和 Teunissen 2022 《等离子体源科学与技术》**31** ISSN 13616595[36] Bourdon A、Pasko V P、LiuN Y、C´elestin S、S´egur P 和 Marode E 2007 《等离子体源科学与技术》**16** 656–678 ISSN 09630252[37] Bagheri B 和 Teunissen J 2019 《等离子体源科学与技术》**28** 045013 ISSN 1361-6595 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ab1331[38] Bouwman D、Teunissen J 和 Ebert U 2022 《等离子体源科学与技术》**31** 045023 ISSN 0963-0252 URL http://arxiv.org/abs/2203.00442https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/ac64bf[39]Babaeva N Y 和 Naidis G V 1997 IEEE等离子体科学汇刊**25** 375–379 ISSN 00933813[40] Luque A 和 Ebert U 2010 地球物理研究快报**37** n/a–n/a ISSN 00948276 URL http://doi.wiley.com/10.1029/2009GL041982[41] Kulikovsky A A 1998 Physical Review E**57** 7066–7074 ISSN 1063-651X URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.57.7066[42] Starikovskiy A、Bazelyan E 和 Aleksan- drov N L 2022 《等离子体源科学与技术》ISSN 0963-0252 URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6595/aca04c[43]Mor´e J J、Garbow B S 和 Hillstrom K E 1980 minpack-1 用户指南 技术报告 CM- P00068642