arXiv:2305.00846v1 [stat.ME] 1 May 2023

关于有序贝塔分布与广义不完全贝塔函数

Mayad Al-Saidi*、Alexey Kuznetsov† 和 Mikhail Nediak‡

2023年5月2日

摘要

受贝叶斯分析应用的启发，我们在有序单纯形上引入一种多维贝塔分布。我们研究该分布的性质，并将其与广义不完全贝塔函数联系起来。该函数对于多维贝塔分布的应用至关重要，因此我们提出两种高效的广义不完全贝塔函数数值算法：一种基于泰勒级数展开，另一种基于切比雪夫多项式。

关键词：贝塔分布、贝塔函数、不完全贝塔函数、有序单纯形、切比雪夫多项式

2020 数学主题分类：主要分类 60E05，次要分类 65D15

1 引言

在介绍本研究的主要对象——有序贝塔分布——之前，我们先考虑以下启发性示例。设 S 为一个服从参数为N 和 X的二项分布的随机变量，其中 N 为正整数， X 为一个服从 Beta(α, β) 分布的随机变量。那么，众所周知，在给定 $S = m$ （其中 $0 \leq m \leq N$）的条件下， X 的后验分布为 Beta($\alpha+m, \beta+N-m$)。有序贝塔分布自然地出现在上述示例的以下多维推广中。设 $\{S_i\}_{1\leq i\leq n}$ 为随机变量，使得 S_i 服从二项（N_i, X_i）分布，并且 $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ 为随机变量，使得

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n \leq 1$$

几乎必然。我们可以为向量指定什么先验分布

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

*约克大学数学与统计系，加拿大安大略省多伦多市基尔街 4700 号，邮编 M3J 1P3。电子邮件：mayad.alsaidi@gmail.com

†数学与统计系，约克大学，4700 Keele Street，多伦多，安大略省，M3J 1P3，加拿大。电子邮件：akuznets@yorku.ca

‡女王大学商学院，143 Union St., 金斯顿，安大略省，K7L 3N6，加拿大。电子邮箱：mnediak@business.queensu.ca

使得在给定 $S_i = m_i$ for $i = 1$，2，.....，n 的条件下，$\mathbf{X}$ 的后验分布与先验分布具有相同的形式？为回答这个问题，我们首先定义本研究的主要对象。

定义 1. 令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a_i > 0$ 和 $b_i > 0$，其中 $1 \leq i \leq n$。如果随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的参数为 $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$和 $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$，则称其服从有序贝塔分布，若

$$\mathbb{P}(X_1 \in \mathrm{d}x_1, X_2 \in \mathrm{d}x_2, \ldots, X_n \in \mathrm{d}x_n) = C^{-1}\mathbf{1}_{\{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - 1}\mathrm{d}x_i \tag{1}$$

其中 C 为归一化常数。

在继续之前，我们先说明本文中将始终使用的记号。随机变量用大写字母表示（如 X，Y，Z），实数用小写字母表示（如 x，y，z），向量则用粗体表示（如 $\mathbf{X}$ 或 $\mathbf{x}$）。

定义 2也可以用以下等价方式表述。取 n 个相互独立的随机变量$Y_i \sim$ 贝塔(a_i, b_i)，并将 Δ_*^n 有序单纯形

$$\Delta_*^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}. \tag{2}$$

于是，有序贝塔分布可以定义为向量 $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ 在其落入有序单纯形 Δ_*^n这一事件的条件下所服从的分布：

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in \mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{Y} \in \mathrm{d}\mathbf{x} | \mathbf{Y} \in \Delta_*^n). \tag{3}$$

有序贝塔分布最早在 [3] 中提出（随后也在 [1]中使用），用于研究动态定价和需求学习问题。下面简要概述这类问题的设定。考虑一位零售商，他希望找到一个价格水平，使销售某种特定产品能够带来最高收入。为解决这个问题，零售商需要了解该产品的需求如何随价格变化。一种需求学习策略是选定一组 n 有序价格 $p_n < p_{n-1} < \cdots < p_2 < p_1$，然后估计在价格为 p_j 时会购买该产品的总体比例（对每个 j而言）。令 $X_j \in (0, 1)$表示随机抽取的一位顾客在价格为p_j时购买该产品的概率。需求是价格的递减函数，这意味着概率 X_j 必须满足$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n \leq 1$。我们观察顾客在产品定价为 p_j时选择购买或不购买的情况，并用 m_j 表示价格为p_j 时成功销售的次数；而 k_j 表示产品以 p_j 的价格售出但顾客决定不购买的次数。我们假设顾客彼此独立地做出决策，因此，在价格水平为 p_j 时决定购买产品的顾客人数服从参数为 $m_j + k_j$ 和 X_j的二项分布。问题在于，零售商如何利用向量 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ 和 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ 中包含的信息，进一步了解概率 X_j并提高收入？ [3], 中给出了这一问题的答案，其依据是以下易于验证的性质：如果购买概率 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 的先验分布是参数为 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ 的有序贝塔分布，那么给定 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{k}$ 后，$\mathbf{X}$ 的后验分布也为有序贝塔分布，其参数为 $\mathbf{a} + \mathbf{m}$ 和 $\mathbf{b} + \mathbf{k}$。 [1][第 1 号命题（第 13]页）中也给出了这一结果。

本文旨在研究有序贝塔分布，阐述其概率性质，并介绍几种数值算法，以便在应用中更容易使用该分布。本文的组织如下。在第2节中，我们介绍有序贝塔分布的各种概率性质（例如边缘分布）。为阐述这些性质，我们需要引入一种新的

特殊函数，我们称之为广义不完全贝塔函数。广义不完全贝塔函数对于有序贝塔分布的应用不可或缺，尤其是能够对该函数进行数值计算十分重要。在第3 节中，我们研究广义不完全贝塔函数的解析性质；在第4 节中，我们给出两种高效的数值算法来计算该函数。我们在第5节中展示若干数值实验结果，以说明这些算法的效率。

2 有序贝塔分布的性质

描述有序贝塔分布性质时需要用到以下函数:

定义2. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a_i > 0$, $b_i > 0$ ，其中 $1 \le i \le n$。广义不完全贝塔函数（参数为 $\{a_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $\{b_i\}_{1\le i\le n}$）定义如下，其中 $z \in [0,1]$:

$$\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right) = \int \mathbf{1}_{\{0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le z\}}\Big[\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-1}\Big]\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n. \tag{4}$$

我们将 $\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\right) := \mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| 1\right)$ 称为广义贝塔函数。

显然，式（1）中的归一化常数为 $C = \mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\right)$. 当 $n = 1$我们便得到经典的不完全贝塔函数

$$\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle| z\right) = \int_0^z x^{a_1-1}(1-x)^{b_1-1}\mathrm{d}x,$$

以及经典贝塔函数

$$\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\right) = \int_0^1 x^{a_1-1}(1-x)^{b_1-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1+b_1)}.$$

上述两个函数通常记作 $\mathrm{B}_z(a,\ b)$ 和 $\mathrm{B}(a,\ b)$，参见 [5][第 8.38] 节。

在本节中，我们处处假设 $n \ge 2$ ，且 $\mathbf{X}$ 服从参数为 $\{a_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $\{b_i\}_{1\le i\le n}$ 的有序贝塔分布。为简化结果的表述，在本文其余部分中，我们遵循以下约定：对于所有 z，$\mathrm{B}\left(\begin{matrix}-\\ -\end{matrix}\middle| z\right) = 1$ 。

下一个结果汇总了有序贝塔分布的若干性质。

定理 1. 设 $\mathbf{X} = (X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ 服从参数为 $\{a_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $\{b_i\}_{1\le i\le n}$ 的有序贝塔分布，并设 $C = \mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\right)$。以下陈述成立:

(i) 随机向量 $\mathbf{X}$: = （$1-X_n$、$1-X_{n-1}$、...、$1-X_1$）服从参数为（b_n、b_{n-1}、...、b_1）和（a_n、a_{n-1}、...、a_1）的有序贝塔分布。

(ii) 对于 $1 \le k \le n-1$ 和 $z \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(X_k \le z < X_{k+1}) = C^{-1}\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_k\\ b_1,\dots,b_k\end{matrix}\middle| z\right)\mathrm{B}\left(\begin{matrix}b_n, b_{n-1},\dots,b_{k+1}\\ a_n, a_{n-1},\dots,a_{k+1}\end{matrix}\middle| 1-z\right). \tag{5}$$

(iii) 对于 $1 \le k \le n$ 和 $x \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(X_k \in \mathrm{d}x) = C^{-1} x^{a_k - 1}(1-x)^{b_k - 1} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_{k-1}}{b_1, \ldots, b_{k-1}} \Big| x \Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{k+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}} \Big| 1-x \Big) \mathrm{d}x. \tag{6}$$

(iv) 对于 $1 \le k \le n$ 和 $z \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(X_k \le z) = \sum_{j=k}^{n} C^{-1} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_j}{b_1, \ldots, b_j} \Big| z \Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{j+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{j+1}} \Big| 1-z \Big), \tag{7}$$

and

$$\mathbb{P}(z < X_k) = \sum_{j=0}^{k-1} C^{-1} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_j}{b_1, \ldots, b_j} \Big| z \Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{j+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{j+1}} \Big| 1-z \Big). \tag{8}$$

(v) 如果 $\alpha > -a_k$ 和 $\beta > -b_k$，则

$$\mathbb{E}[X_k^{\alpha}(1-X_k)^{\beta}] = C^{-1} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_k + \alpha, \ldots a_n}{b_1, \ldots, b_k + \beta, \ldots, b_n}, \tag{9}$$

更一般地，如果对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，$\alpha_i > -a_i$ 和 $\beta_i > -b_i$，则

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}(1-X_k)^{\beta_i}\Big] = C^{-1} \mathrm{B}\binom{a_1 + \alpha_1, \ldots, a_n + \alpha_n}{b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n}. \tag{10}$$

证明。 **(i)** 项中的结果直接由定义得出2。为证明 **(ii)** 项中的结果，我们先注意以下恒等式：对于 $z \in (0,1)$

$$\int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\{z \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1\}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - 1} \mathrm{d}x_i = \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1} \ldots, b_1}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1} \Big| 1-z \Big). \tag{11}$$

公式（11）可通过应用变量替换 $x_i \mapsto 1 - y_i$ 并利用（4）推导得出。现在利用（4）和（11）进行计算

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k \le z < X_{k+1}) &= \int_{[0,1]^n} C^{-1} \mathbf{1}_{\{0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1\}} \mathbf{1}_{\{x_k < z < x_{k+1}\}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - 1} \mathrm{d}x_i \\
&= C^{-1} \int_{[0,1]^k} \mathbf{1}_{\{0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k < z\}} \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - 1} \mathrm{d}x_i \\
&\quad \times \int_{[0,1]^{n-k}} \mathbf{1}_{\{z < x_{k+1} \le \cdots \le x_n \le 1\}} \prod_{i=k+1}^{n} x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^{b_i - 1} \mathrm{d}x_i \\
&= C^{-1} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_k}{b_1, \ldots, b_k} \Big| z \Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{k+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}} \Big| 1-z \Big).
\end{aligned}$$

由（ X_k ）给出的边缘分布6的推导方式与由（1）推导相同：对所有变量 x_i 进行积分，其中 $i \ne k$ 并使用（4）和（11）。

公式（7）由（5）可得，只需注意，对于有序贝塔分布向量 $\mathbf{X}$ ，事件$\{X_k \le z\}$ 是互不相交事件 $\{X_j \le z < X_{j+1}\}$、 $k \le j \le n$的并集。证明（8）也采用相同的论证。

公式（9）和（10）可直接由（1）和（4）得出。 □

3 性质　　广义不完全贝塔函数

下一条命题汇集了广义不完全贝塔函数的若干性质，这些性质将在后文中发挥作用。

命题 1. 假设 $z \in (0,1)$ 且 $a_i > 0$, $b_i > 0$ 对于 $1 \le i \le n$。则以下陈述成立：

(i)

$$\mathrm{B}\binom{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n} = \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1}, \tag{12}$$

(ii)

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_k}{b_1, \ldots, b_k}\Big| z\Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{k+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}}\Big| 1-z\Big) = \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_n}{b_1, \ldots, b_n}, \tag{13}$$

(iii)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_k}{b_1, \ldots, b_k}\Big| z\Big) \mathrm{B}\binom{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}}{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{k+1}}\Big| z\Big) = 0, \tag{14}$$

(iv)

$$\mathrm{B}\binom{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n}\Big| z\Big) = \int_0^z x^{a_n-1}(1-x)^{b_n-1} \mathrm{B}\binom{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}}\Big| x\Big) \mathrm{d}x, \tag{15}$$

(v) 对于 $1 \le k \le n$

$$\mathrm{B}\binom{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n} = \int_0^1 x^{a_k-1}(1-x)^{b_k-1} \mathrm{B}\binom{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}}{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}}\Big| x\Big) \mathrm{B}\binom{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_{k+1}}{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}}\Big| 1-x\Big) \mathrm{d}x. \tag{16}$$

证明。 公式 (12) 由 (4) 通过令 $z = 1$ 并对积分变量作变换 $x_i \mapsto 1-y_i$得到。恒等式 (13) 由 (7) 和 (8) 得到，注意到 $\mathbb{P}(X_k \le z) + \mathbb{P}(z < X_k) = 1$。

证明对于　公式（14）两边都需要乘以下述恒等式

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n\}} - \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1}\}} + \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-2}\}} \mathbf{1}_{\{x_n < x_{n-1}\}} \\ &- \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-3}\}} \mathbf{1}_{\{x_n < x_{n-1} < x_{n-2}\}} + \cdots + (-1)^n \mathbf{1}_{\{x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1\}} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

by

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-1} \mathrm{d}x_i$$

并对 $[0, z]^n$ 积分。恒等式（17）很容易用归纳法证明；情形 $n = 2$ 等价于一个显然的命题

$$\mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2\}} + \mathbf{1}_{\{x_2 < x_1\}} = 1.$$

公式　（15）由定义式（4）得出，而公式（16）是（6）的推论　　). □

对于 $a_i > 0$、 $b_i > 0$ 和 $z \in (0,1]$，我们定义

$$\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right) := z^{-a_1-a_2-\cdots-a_n}\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right), \tag{18}$$

与广义不完全贝塔函数相比，该函数具有更好的解析性质。

命题 2. 函数 $z \mapsto \beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 中是解析的，并且满足

$$\beta\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_n\\ b_1,b_2,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right) = \int_0^1 y^{a_1+a_2+\cdots+a_n-1}(1-yz)^{b_n-1}\beta\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\\ b_1,b_2,\dots,b_{n-1}\end{matrix}\middle| yz\right)\mathrm{d}y. \tag{19}$$

如果 $b_i \in \mathbb{N}$ 对所有 $1 \le i \le n$成立，那么 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 是关于 z的多项式。

证明。对于 $z \in (0,1)$，公式 (19) 由 (15) 通过变量替换 $x = zy$ 得到。$\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 中解析这一事实，可由 (19) 对 n 归纳得到（注意，对于每个 $y \in (0,1)$，函数 $z \mapsto (1-yz)^{b_n-1}$ 在 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 中解析）。当系数 b_i 为整数时， β-函数是 z 中的多项式这一事实，可由 (19) 对 n 归纳得到。□

由命题 2 可知，广义不完全贝塔函数 $\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 是关于 z的多项式，条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$且所有系数 b_i均为正整数；一般情况下，它是复平面上的解析函数，沿着（$-\infty$, 0] 和 $[1,\infty)$有两条割线。

4 计算广义不完全贝塔函数

现在我们来讨论如何计算任意 $z \in (0,1]$的广义不完全贝塔函数。首先要注意的是，只需能够计算该函数在$z \in (0,1/2]$上的值即可。为说明这一点，我们将恒等式（13）改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right) &= \mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right) + \mathrm{B}\left(\begin{matrix}b_n,b_{n-1},\dots,b_1\\ a_n,a_{n-1},\dots,a_1\end{matrix}\middle| 1-z\right)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{B}\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_k\\ b_1,\dots,b_k\end{matrix}\middle| z\right)\mathrm{B}\left(\begin{matrix}b_n,b_{n-1},\dots,b_{k+1}\\ a_n,a_{n-1},\dots,a_{k+1}\end{matrix}\middle| 1-z\right).\end{aligned} \tag{20}$$

我们可以看到，通过在（$\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\right)$ 20）中令 $z = 1/2$，并且当 $z \in (1/2,1)$ 时，可以计算 B $\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$。这是通过归纳法实现的，因为（20）中的其他项要么依赖于$1-z \in (0,1/2)$，要么参数更少。因此，可以结合对 n的归纳法，利用恒等式（20）计算任意参数个数、任意 $z \in [0,1]$下的广义不完全贝塔函数的值。

与其计算广义不完全贝塔函数 $B\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)$，不如求解一个等价问题，即计算 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)$，因为该函数在更大的区域内解析。接下来，我们介绍两种计算该函数的算法：第一种算法基于泰勒级数展开，第二种算法基于切比雪夫级数。

4.1 泰勒展开法

通过迭代（15）进行计算。首先注意，当 $n=1$ 时，我们有如下级数表示

$$\beta\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\middle|z\right)=\int_0^1 y^{a_1-1}(1-yz)^{b_1-1}\mathrm{d}y=\sum_{k\geq 0}\frac{(1-b_1)_k}{(a_1+k)k!}z^k,\quad |z|<1, \tag{21}$$

这可以通过对项 $(1-yz)^{b_1}$的二项级数展开积分轻易得到。这里 $(a)_k=a(a+1)\dots(a+k-1)$ 表示波赫哈默符号。当 $n\geq 2$时，可以借助以下结果迭代计算 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)$ 的泰勒级数系数。

命题 3. 对于 $n\geq 1$ 和 $k\geq 0$，用 $c_k^{(n)}$ 表示泰勒级数展开中的系数

$$\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)=\sum_{k\geq 0}c_k^{(n)}z^k,\quad |z|<1. \tag{22}$$

那么对于 $n\geq 2$ 和 $k\geq 0$

$$c_k^{(n)}=\frac{1}{k+a_1+\dots+a_n}\sum_{l=0}^{k}c_{k-l}^{(n-1)}\times\frac{(1-b_n)_l}{l!}. \tag{23}$$

证明。 利用二项级数和（15），我们得到 $|z|<1$

$$\begin{aligned}
\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)&=\int_0^1 y^{a_1+\dots+a_n-1}(1-yz)^{b_n-1}\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{n-1}\\ b_1,\dots,b_{n-1}\end{matrix}\middle|yz\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 y^{a_1+\dots+a_n-1}\Big[\sum_{l\geq 0}\frac{(1-b_n)_l}{l!}(yz)^l\Big]\times\Big[\sum_{k\geq 0}c_k^{(n-1)}(yz)^k\Big]\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 y^{a_1+\dots+a_n-1}\sum_{k\geq 0}\Big[\sum_{l=0}^{k}c_{k-l}^{(n-1)}\times\frac{(1-b_n)_l}{l!}\Big](yz)^k\mathrm{d}y\\
&=\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k+a_1+\dots+a_n}\Big[\sum_{l=0}^{k}c_{k-l}^{(n-1)}\times\frac{(1-b_n)_l}{l!}\Big].
\end{aligned}$$

□

现在我们给出计算 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix}\middle|z\right)$ for $z\in(0,1/2]$ 的算法。

步骤 1： 取一个较大的整数 N 并通过（ $\{c_k^{(1)}\}_{0\le k\le N}$ ）计算 21。

步骤 2： 对于 $m = 2, 3、\ldots\ldots、 n$，一旦我们获得了 $\{c_k^{(m-1)}\}_{0\le k\le N}$的值，就通过$\{c_k^{(m)}\}_{0\le k\le N}$ （23）计算相应的值。该计算涉及两个序列的卷积，因此借助快速傅里叶变换可以提高每一步的计算效率。

步骤 3： 通过截断（ $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 中的级数来计算其值，截断位置为（21）式中的 N项之后。

需要作几点说明。首先，我们需要讨论式（21）中级数截断所导致的误差。由于函数 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 上是解析的，并且在 $z\to 1$时连续，因此，对于每个 n ，都有 $c_k^{(n)}\to 0$ 当 $k\to+\infty$时成立。这一事实可以通过将这些系数识别为某个连续函数的傅里叶级数系数来说明。

$$t\mapsto \beta\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_n\end{matrix}\middle| e^{2\pi i t}\right).$$

因此，在截断（21）中的级数，保留 N 项之后，误差为 $O(|z|^N)$。由于$z\in(0,1/2]$，该误差小于 $C2^{-N}$，其中某个常数 C可能取决于 a_i和 b_i。其次，我们来讨论该算法的计算复杂度。利用快速傅里叶变换，每个步骤 2 都可通过 $O(N\ln(N))$ 次算术运算完成。因此，计算 $\beta\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)$ 的计算复杂度为 $O(nN\ln(N))$ 次算术运算。

前面的两点说明表明，基于泰勒级数的算法收敛速度快且效率很高。不过，该算法存在一个潜在问题。当一个或多个参数a_i （或 b_i）较大时，系数（$1-a_i$）$_l$ （或（$1-b_i$）$_l$）在（23）中也会变得很大，且符号交替，从而导致（23）中的求和出现大量消去，造成精度损失。因此，当某些参数 a_i, b_i 较大时，必须注意这种潜在的精度损失。我们通过在计算系数 $c_k^{(n)}$ 时采用多精度算术来解决这一问题，计算依据为（23）。

4.2 切比雪夫展开法

设 $\{\xi_k^{(n)}\}_{0\le k\le N}$ 为切比雪夫展开中的系数

$$\beta\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_n\end{matrix}\middle| z\right)=\frac{1}{2}\xi_0^{(n)}+\sum_{k\ge 1}\xi_k^{(n)}T_k(4z-1). \tag{24}$$

注意，我们使用缩放切比雪夫多项式 $T_k(4z-1)$，因为我们只关心在 $z\in(0,1/2]$ 上计算β函数，而函数 $4z-1$ 将区间 $(0,1/2]$ 映射到 $(-1,1)$。下面给出一种算法，利用先前计算得到的 $\{\xi_k^{(m-1)}\}_{0\le k\le N}$来计算系数 $\{\xi_k^{(m)}\}_{0\le k\le N}$。

初始步骤： 取一个较大的整数 N 并令 $m=1$。令 $\hat{}\xi_0^{(0)}=2$ 和 $\hat{}\xi_k^{(0)}=0$ ，其中 $1\le k\le N$。

步骤 1： 对于 $j=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$进行计算（使用快速傅里叶变换）

$$v_j=\frac{1}{2}\hat{\xi}_0^{(m-1)}+\sum_{k=1}^{N}\hat{\xi}_k^{(m-1)}\cos\left(\frac{\pi k(j+1/2)}{N+1}\right). \tag{25}$$

步骤 2： 对于 $k = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N$进行计算（使用快速傅里叶变换 ）

$$\eta_k = \frac{2}{N+1}\sum_{j=0}^{N}(1-(1+x_j)/4)^{b_m-1}v_j\cos\Big(\frac{\pi k(j+1/2)}{N+1}\Big), \tag{26}$$

其中

$$x_j := \cos\Big(\frac{\pi(j+1/2)}{N+1}\Big).$$

步骤3： 我们 设定 $\mu_N = \mu_{N+1} = 0$和 $A_m := a_1 + a_2 + \cdots + a_m$，并递归计算

$$\mu_{k-1} = \frac{1}{1+A_m/k}\Big(8\eta_k - 2\mu_k - \mu_{k+1}(1-A_m/k)\Big), \quad k = N, N-1, \ldots, 1, \tag{27}$$

步骤4： 我们计算

$$\hat{\xi}_0^{(m)} = \frac{1}{A_m}\Big(\eta_0 - \frac{1}{4}(\mu_0+\mu_1)\Big) \tag{28}$$

and

$$\hat{\xi}_k^{(m)} = \frac{\mu_{k-1}-\mu_{k+1}}{8k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{29}$$

运行上述算法，取 $m = 1$、2、.....、n，即可得到系数 $\{\hat{\xi}_k^{(n)}\}_{0\le k\le N}$（它们也取决于 N），作为所需系数 $\xi_k^{(n)}$ 的近似值。显然，该算法的计算复杂度也是 $O(nN\ln(N))$，与泰勒展开法相同。下一个定理给出了近似误差的一个界。

定理2。 存在一个常数 C （取决于 a_i 和 b_i），使得对所有 $N \ge 1$

$$\max_{0\le k\le N}|\hat{\xi}_k^{(n)} - \xi_k^{(n)}| < C3^{-8N/5}. \tag{30}$$

注1。 （30）中的常数可以略作改进：正如定理 2 的证明所示，事实上有

$$\max_{0\le k\le N}|\hat{\xi}_k^{(n)} - \xi_k^{(n)}| = O(\rho^{-N})$$

对于每个 $\rho \in (0, 3+8\sqrt{8})$，其中大$O$记号中的常数取决于 a_i、 b_i 和 ρ。注意到$3^{8/5} = 5.7995...$ 且 $3+\sqrt{8} = 5.8284...$，因此 (30)中给出的界虽然不是最优的，但对于所有实际用途而言应该已经足够好。

定理 2 的证明依赖于以下

事实： 假设函数 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 内解析。那么切比雪夫展开中的系数

$$g(z) = w_0/2 + \sum_{k\ge1} w_k T_k(4z-1), \quad 0 \le z \le 1/2,$$

满足 $w_k = O(\rho^{-k})$，对于任意 $\rho \in (0、\ 3+\sqrt{8})$。

上述结果可由一个经典事实轻易推出：函数 f 的切比雪夫级数展开在函数 f 解析的最大伯恩斯坦椭圆内收敛（参见 [4][定理

5.16])。更准确地说，函数 $f((1+z)/4)$ 在 $\mathbb{C}\setminus[3,\infty)$ 中解析，因此它在伯恩斯坦椭圆内部解析。

$$E_\rho := \{z\in\mathbb{C} : \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{a_\rho^2}+\frac{\mathrm{Im}(z)^2}{b_\rho^2}=1\}$$

其中 $a_\rho=(\rho+\rho^{-1})/2$ 和 $b_\rho=(\rho-\rho^{-1})/2$，且 $\rho=3+\sqrt{8}$。

定理2的证明： 初始步骤中 $\hat{}\xi_k^{(0)}$ 的选取对应于我们的约定，即

$$\beta\left(\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\middle| z\right)\equiv 1=\frac{1}{2}\hat{\xi}_0^{(0)}+\sum_{k\ge 1}\hat{\xi}_k^{(0)}T_k(4z-1),$$

因此在这一层没有近似误差：$\xi_k^{(0)}=\hat{}\xi_k^{(0)}$ 对所有 k均成立。

现在我们来证明步骤 1–4。记

$$f(z):=\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{m-1}\\ b_1,\dots,b_{m-1}\end{matrix}\middle| z\right),\quad F(z):=\beta\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\ b_1,\dots,b_m\end{matrix}\middle| z\right).$$

根据（15）和（18），这两个函数之间满足以下方程

$$z^{A_m}F(z)=\int_0^z x^{A_m-1}(1-x)^{b_m-1}f(x)dx,\quad z\in(0,1),$$

其中 $A_m := a_1+a_2+\cdots+a_m$。对上述方程两边求导，得到一个微分方程

$$A_mF(z)+zF'(z)=(1-z)^{b_m-1}f(z),\quad z\in(0,1). \tag{31}$$

假设我们知道切比雪夫展开中的系数 θ_k

$$(1-z)^{b_m-1}f(z)=\theta_0/2+\sum_{k\ge 1}\theta_kT_k(4z-1),\quad 0\le z\le 1/2. \tag{32}$$

记 ν_k 为切比雪夫展开中的系数

$$F'(z)=\nu_0/2+\sum_{k\ge 1}\nu_kT_k(4z-1),\quad 0\le z\le 1/2. \tag{33}$$

切比雪夫多项式满足

$$\int T_n(x)dx=\frac{T_{n+1}(x)}{2(n+1)}-\frac{T_{n-1}(x)}{2(n-1)},$$

这可由 [5] 中的公式 8.941 和 8.949.1 推得。由此可得

$$\int T_k(4z-1)dz=\frac{1}{8}\Big(\frac{T_{k+1}(4z-1)}{k+1}-\frac{T_{k-1}(4z-1)}{k-1}\Big),\quad k\ge 2.$$

我们还直接验证（利用以下事实 $T_1(x)=x$ 和 $T_2(x)=2x^2-1$）tha t

$$\int 1dz=T_1(4z-1)/4,\quad \int T_1(4z-1)dz=T_2(4z-1)/16.$$

结合上述公式，对（33）两边积分并重新排列级数中的各项后，可得到以下展开式

$$F(z) = Q + \sum_{k\geq 1} \frac{\nu_{k-1} - \nu_{k+1}}{8k} T_k(4z-1), \quad 0 \leq z \leq 1/2, \tag{34}$$

对于某个常数 Q。接下来我们使用公式

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(T_1(4z-1)+1), \\ zT_k(4z-1) &= \frac{1}{8}(T_{k+1}(4z-1) + 2T_k(4z-1) + T_{k-1}(4z-1)), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

以及方程（31）、（32）、（33）和（34），由此得出

$$\begin{aligned} &A_m\Big[Q + \sum_{k\geq 1} \frac{\nu_{k-1} - \nu_{k+1}}{8k} T_k(4z-1)\Big] + \frac{\nu_0}{8}\Big(T_1(4z-1)+1\Big) \\ &+ \sum_{k\geq 1} \frac{\nu_k}{8}\Big(T_{k+1}(4z-1) + 2T_k(4z-1) + T_{k-1}(4z-1)\Big) = \theta_0/2 + \sum_{k\geq 1} \theta_k T_k(4z-1). \end{aligned}$$

比较这些系数　　将上述方程中 T_k 前面的系数进行比较，可得以下恒等式。　　s:

$$2A_m Q + \frac{1}{4}(\nu_0 + \nu_1) = \theta_0, \tag{35}$$

$$A_m \frac{\nu_{k-1} - \nu_{k+1}}{8k} + \frac{1}{8}(\nu_{k-1} + 2\nu_k + \nu_{k+1}) = \theta_k, \quad k \geq 1. \tag{36}$$

方程（36）可以写成一个等价形式

$$\nu_{k-1} = \frac{1}{1 + \frac{A_m}{k}}\Big(8\theta_k - 2\nu_k - \nu_{k+1}\Big(1 - \frac{A_m}{k}\Big)\Big) \tag{37}$$

现在我们得到了用于计算 $\xi_k^{(m)}$ 的算法的初步形式：首先通过（37）递归计算 ν_k，然后计算

$$\xi_0^{(m)} = 2Q = \frac{1}{A_m}\Big(\theta_0 - \frac{1}{4}(\nu_0 + \nu_1)\Big), \tag{38}$$

$$\xi_k^{(m)} = \frac{\nu_{k-1} - \nu_{k+1}}{8k}, \quad 1 \leq k \leq N. \tag{39}$$

要使这项工作得以实现，我们需要克服两个问题。首先，在（37）中进行反向迭代时，我们需要从一些值 ν_N 和 ν_{N+1} 开始，以便计算 ν_k 对于$k = N-1,\ N-2$、.....、1、0，然而我们不知道 ν_N和 ν_{N+1}的值。其次，我们不知道切比雪夫展开（32）中的系数值，因此需要对其进行近似，并控制由此产生的误差。我们先考虑前一个问题。

我们定义 $\{\hat{}\nu_k\}_{0\leq k<N}$ 为从 ˆ37) 开始通过递推得到的值$\nu_N = \hat{}\nu_{N+1} = 0$。下面估计差值 $y_k = \nu_k - \hat{}\nu_k$ 当 $0 \leq k < N$时的取值。注意到 y_k 满足齐次递推方程

$$y_{k-1} = \frac{1}{1 + \frac{A_m}{k}}\Big(- 2y_k - y_{k+1}\Big(1 - \frac{A_m}{k}\Big)\Big), \quad 0 \leq k < N \tag{40}$$

从.....开始 h 值 $y_N = \nu_N$ 和 $y_{N+1} = \nu_{N+1}$。我们将 $\mathbf{u}_k = [y_{k-1}, y_k]^T \in \mathbb{R}^2$ 和

$$Q_k := \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+A_m/k} & -\frac{1-A_m/k}{1+A_m/k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

那么，递推式（40）可以改写为如下向量矩阵形式

$$\mathbf{u}_k = Q_k \mathbf{u}_{k+1}$$

并且我们得到

$$\mathbf{u}_k = Q_k Q_{k+1} \dots Q_N \mathbf{u}_{N+1}. \tag{41}$$

我们还定义 $R_k = V^{-1} Q_k V$，其中

$$V := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

可以验证

$$R_k = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1-A_m/k}{1+A_m/k} \end{bmatrix},$$

因此 R_k 属于形式如下的矩阵类 $\mathcal{D}$

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & d_{2,2} \end{bmatrix}$$

其中 $|d_{2,2}| < 1$。这很容易做到。用归纳法证明，类 $\mathcal{D}$ 中 l 个矩阵的乘积具有如下形式

$$\begin{bmatrix} (-1)^l & d_{1,2} \\ 0 & d_{2,2} \end{bmatrix}$$

其中 $|d_{1,2}| < l/2$ 且 $|d_{2,2}| < 1$，因此 $\|\cdot\|_\infty$ 该矩阵的范数小于 $1 + l$。由（41）可得

$$\mathbf{u}_k = V R_k R_{k+1} \dots R_N V^{-1} \mathbf{u}_{N+1}$$

因此，对于 $0 \le k \le N$，有 $\|\mathbf{u}_k\|_\infty < 6(2 + N - k)\|\mathbf{u}_{N+1}\|_\infty$（因为 $\|V\|_\infty = 3$ 且 $\|V^{-1}\|_\infty = 2$）。由于 ν_k 是函数 $F'(z)$ 的切比雪夫展开（33）中的系数，且该函数在 $\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$ 上解析，我们知道，对于任意 $\rho \in (0, 3 + \sqrt{8})$，都有 $\nu_k = O(\rho^{-k})$。因此，$\|\mathbf{u}_{N+1}\|_\infty = O(\rho^{-N})$，并且对于每个 $0 \le k \le N$，任意 $\rho \in (0, 3 + \sqrt{8})$ 都有 $\|\mathbf{u}_k\|_\infty = O(N\rho^{-N})$。由于 $3^{8/5} < (3 + \sqrt{8})$，对于 $\rho \in (3^{8/5}, 3 + \sqrt{8})$，我们有 $N\rho^{-N} = O(3^{-8N/5})$，从而得出 $y_k = \nu_k - \hat{\nu}_k = O(3^{-8N/5})$。

由此我们证明了反向递推（37）是稳定的；若从 $\nu_N = \nu_{N+1} = 0$ 开始，则会产生大小为 $O(3^{-8N/5})$ 的误差。

现在我们需要处理第二个问题，即我们不知道 θ_k 切比雪夫展开中的系数（32）。不过，我们可以用 f 的截断切比雪夫级数来近似它，从而得到一个近似值

$$(1-z)^{b_m - 1} f(z) \approx g(z) := (1-z)^{b_m - 1} \left[\frac{1}{2} \xi_0^{(m-1)} + \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(m-1)} T_k(4z - 1) \right],$$

并且对于任意 $\rho \in (0, 3+\sqrt{8})$，差值$(1-z)^{b_m-1} f(z) - g(z)$在 $0 \le z \le 1/2$ 上是一致有界的，其上界为 $O(\rho^{-N})$（这是因为系数 $\xi_k^{(m-1)}$ 随着 $k \to +\infty$以 $O(\rho^{-k})$的速率衰减）。在（26）中计算出的数值 η_k 恰好是 $g(z)$在 $0 \le z \le 1/2$上的切比雪夫系数。因此，对于 $0 \le k \le N$以及任意 $\rho \in (0, 3+\sqrt{8})$，有 $|\eta_k - \theta_k| = O(\rho^{-N})$。既然我们已经证明反向迭代（37）是稳定的，就可以看出，当我们用 η_k 替换 θ_k 时，引入的总误差大小为 $O(3^{-8N/5})$。□

5 数值示例

本节将展示几个示例，以说明用于计算广义贝塔函数的两种算法的性能。

$$\mathrm{B}\binom{a_1, \ldots, a_n}{b_1, \ldots, b_n}.$$

我们选择计算这一特定函数，是因为它是式（1）中有序贝塔分布的归一化常数，也用于计算广义贝塔分布的各种矩，如式（10）所示。这两项计算在 [3] 中发挥了重要作用，而高效计算广义贝塔函数数值这一问题正是本研究的动机。不过，正如我们在第 4 节所述，计算广义不完全贝塔函数的计算复杂度相同，所用算法也非常相似。

在第一个示例中，我们令 $n = 3$ 和

$$[a_1, a_2, a_3] = [0.8,\ 0.3,\ 1.5], \quad [b_1, b_2, b_3] = [0.4,\ 1.7,\ 0.8].$$

我们计算

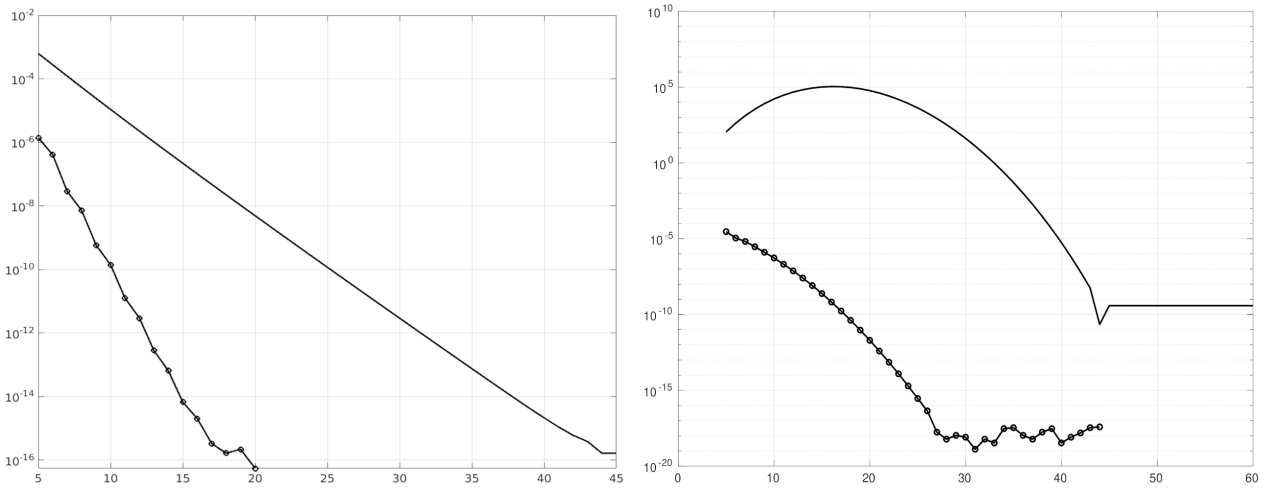
$$\mathrm{B}\binom{a_1, a_2, a_3}{b_1, b_2, b_3} = 0.48689404704378342315427134812 77\ldots \tag{42}$$

采用第 4.1 节所述的泰勒级数展开方法。代码使用 Fortran 编写，并采用了多精度模块 MPFUN（由 David Bailey 编写 [2]）。泰勒级数截断于 $N = 500$，所有计算均使用 500 位精度完成，随后又以 1000 位精度重复计算——这有助于确保式（42）中显示的所有数字均正确。

接下来，我们将（42）中的值视为“精确”值，并使用泰勒方法和切比雪夫方法，在 N取不同值的情况下计算近似值。这里，我们使用 Matlab 以标准双精度实现了代码。我们定义 $\mathcal{E}^T$（N）为（绝对值意义下的）精确值（42）与使用第4.1节中介绍的算法、取 N项泰勒级数展开所计算出的值之差。类似地，我们定义 $\mathcal{E}^C$（N）为（绝对值意义下的）精确值（42）与使用第4.2 节中介绍的算法、取 N 项切比雪夫级数展开所计算出的值之差。在图 1a 中，我们给出了两个误差相对于 N的图像。可以看出，两个误差都以指数速度收敛于零，并且切比雪夫近似的收敛速度更快。这证实了我们在第4节中的理论结果。

作为第二个示例，我们考虑以下参数

$$[a_1, a_2, a_3] = [50.8,\ 0.3,\ 1.5], \quad [b_1, b_2, b_3] = [0.4,\ 1.7,\ 0.8].$$



(a) 参数组 1　　(b) 参数组 2

图1：近似值 $\mathcal{E}^{\mathrm{T}}(N)$（实线）和 $\mathcal{E}^{\mathrm{C}}(N)$（带圆圈的线）相对于 N在 x 轴上的误差。

请注意，我们将 a_1 的值改为相对较大的 50。8，同时其他参数均与第一个示例保持不变。我们再次计算“精确”值

$$\mathrm{B}\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix} = 10^{-6} \times 9.97524363946012815515857490184 68\ldots$$

使用带多精度模块的 Fortran 代码。在图1b中，我们展示了泰勒级数和切比雪夫近似的收敛速度。可以看到，切比雪夫方法仍然以指数速度快速收敛，且稳定；相比之下，基于泰勒展开的方法在此例中表现不佳：误差先增大到约 10^6，然后才开始减小。即使 $N = 200$很大，泰勒级数方法得到的值仍为 $10^{-6} \times 9.975628\ldots$，因此只能得到四位正确数字。这证实了我们在第 4.1 节末尾的观察：当某些参数 a_i, b_i 较大时，泰勒级数算法并不适用，因为对 (23) 中的大数进行相减会导致精度损失。在这种情况下，应使用切比雪夫方法，或采用高精度的泰勒级数方法。

最后，我们考虑一个参数数量较多的例子。这里我们考虑一个含有 100 个参数的例子，并设定

$$a_i = \frac{2i-1}{200}, \quad b_i = 1 - a(i),$$

对于 $1 \le i \le 100$。我们再次使用 Fortran，以 500 位精度和 500 项泰勒级数计算“精确”值：

$$\mathrm{B}\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{100} \\ b_1, b_2, \ldots, b_{100} \end{pmatrix} = 10^{-33} \times 4.22175535289148841244019212342 46\ldots$$

然后，我们尝试使用 Matlab 代码计算相同的值。基于泰勒展开、包含 $N = 50$ 项的方法得到的结果是

$$10^{-33} \times 4.221755352891131\ldots$$

以及基于切 包含 $N = 20$ 项的切比雪夫展开得到的结果同样准确

$$10^{-33} \times 4.221755352891663\ldots.$$

我们看到，这两种方法在这种情况下都效果良好。

我们提供了用于计算广义贝塔函数 B 的 Matlab 程序（泰勒方法和切比雪夫方法）$\binom{a_1, a_2, \ldots, a_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n}$ 关于 https://kuznetsov.mathstats.yorku.ca/code/。

致谢

A.K. 的研究得到了加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。

参考文献

[1] G. Achtari。机器学习在收益管理与路径规划中的应用。博士论文，女王大学，加拿大，ISBN 979-8-209-57148-3，2018[2] D. Bailey。《高精度软件目录》。https://www.davidhbailey.com/dhbsoftware/.[3] T. Levina、Y. Levin、J. McGill 和 M. Nediak。在自主定价渠道中的消费者战略合作。《生产与运营管理》，24(12):1883–1900，2015。https://doi.org/10.1111/poms.12412.[4] J. C. Mason 和 D. C. Handscomb。切比雪夫多项式。Chapman and Hall/CRC，2002。 https://doi.org/10.1201/9781420036114.[5] D. Zwillinger 和 A. Jeffrey。积分、级数与乘积表。学术出版社，第7版，2007。