arXiv:2305.00850v1 [math.HO] 1 May 2023

约翰·基思·斯图尔特·麦凯：1939—2022年

Yang-Hui He

我不会彻底消亡，我的一大部分将逃过死神——《贺拉斯诗集》，*III.30*

> “若不是因为 John McKay 不懈的关注，我绝不可能涉足这一领域。他常常让我觉得，自己就像某个先进银河文明派来的使者，被送到这里来加速我们的进化。”
>
> ——杰克·莫拉瓦 [**1**]

拓扑学家莫拉瓦的这番话很好地概括了数学界对 John McKay 所怀有的敬畏，以及在某种程度上的困惑。当然，在这门学科近代乃至整个历史上的所有数学家中，McKay 都十分罕见：他从远处观察数学的全景，发现了其中深刻而隐秘的联系，其中一些联系起初甚至遭到嘲笑，被视为疯狂之想。

我有幸也很荣幸，成为 John 晚年最后一位亲密合作者；正如他的妻子 Trinh 转述他的话，我也是他“最好的朋友”。过去这十年，我觉得自己一直受到童年偶像的庇护。我从未有过祖父，两位祖父在我出生前就已离世。然而，颇为巧合的是，John McKay 成了我和家人的祖父般的人物，在智识和情感上都是如此[†]。伦敦数学会请我撰写这篇讣告时，我既感到自豪，也深感责任重大，同时心中涌起阵阵悲痛。我只希望，在讲述接下来的故事时，能以某种微小的方式，成为他的维吉尔身边的但丁，或他的约翰逊身边的鲍斯韦尔。

1. 传记

约翰·基思·斯图尔特·麦凯于1939年11月18日出生在伦敦郊外的肯特郡，来自一个生活宽裕的英国人家庭。他的父亲欧内斯特·斯图尔特·麦凯在伦敦经营着一家成功的装订业务（伦敦装订商，创立于1880年），母亲诺拉·弗洛伦斯（娘家姓卡尔肖）则出身于人脉广泛的家庭。在英国的家人和朋友眼中，McKay以“基思”之名为人熟知；“John”这一身份则是他后来在跨大西洋及全球同事面前使用的。他和仍居住在英国的姐姐伊丽莎白在一栋宽敞的维多利亚时代的家庭住宅中长大，童年时期的宁静只因第二次世界大战的动荡而被打破，其中包括一枚德国V型飞弹落在离他们家不远处的那次经历。和许多出身富裕英国家庭的同辈男孩一样，John被送去

2000 *Mathematics Subject Classification* 01Axx, 20-XX, 11-XX, 17BXX, 06Bxx, 14E16。部分经费来自英国科学技术设施委员会资助 ST/J00037X/2 和 2022 年 Leverhulme项目资助。

[†]这里有三位关系密切的英国朋友兼同事：John Horton Conway（1937—2020）、西蒙·菲利普斯·诺顿（1952—2019）和 JohnKeith Stuart McKay（1939—2022）。Conway 和Norton将在第2节中占据重要篇幅。亚历山大·马斯特斯在 *The Genius in my Basement* [**2**]中讲述了Norton的故事，Siobhan Roberts则在 *Genius at Play* [**3**]中讲述了Conway的故事。我目前正在撰写 *The Genius on Skype* [**4**]，算是这部三部曲的第三部。

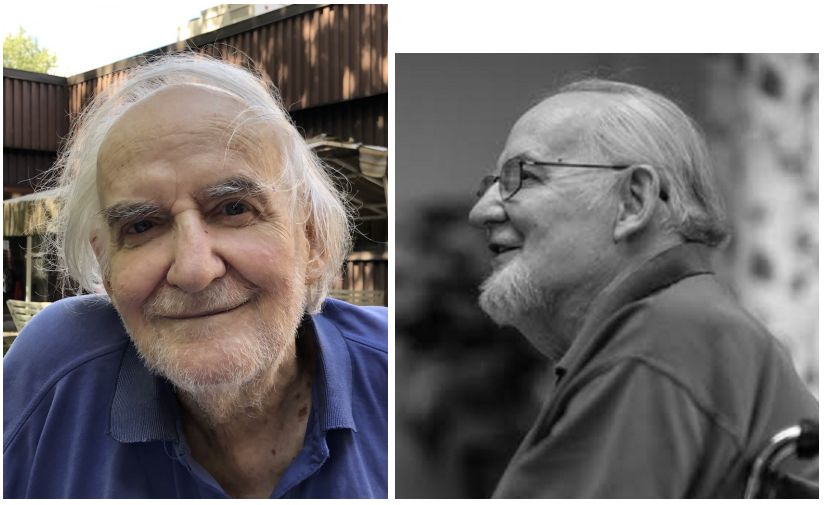


FIGURE 1 *John McKay*，承蒙其妻子 *Trinh Vo-McKay* 惠允

寄宿学校就读。从1950年到1958年，他就读于著名的公学德威学院[‡]，和父亲当年一样。

取得 A-level考试 后，McKay 前往爱丁堡大学学习数学，在那里接触了当时刚刚兴起的计算学科。该大学当时正在建造曼彻斯特 Atlas 超级计算机；这台计算机是当时世界上最强大的机器之一。对纯数学、科学计算以及数学数据的共同兴趣，为他未来的研究奠定了基础。事实上，1962年完成本科学习后，McKay 留校至1964年，担任纳菲尔德研究员，参与使用 Atlas，成为将计算机应用于纯数学领域的先驱之一。

数学与计算机这一主题在1964年延续了下来。当时，McKay 获得了爱丁堡大学的博士学位名额，由苏格兰首位计算机科学教授 Sidney Michaelson 与专门研究群和半群表示论的代数学家 W. Douglas Munn 共同指导。恰如其分的是，McKay 的论文题为 有限群计算，这是对两个领域的一次重要且开创性的综合 [5]。论文致谢部分写道：“感谢我的导师 W. D. Munn 教授和 S. Michaelson 教授，在准备本论文期间给予我的耐心与诸多善意。我也要感谢我的妻子 Wendy，她不知疲倦地为我反复打字、整理稿件，并安排我的生活。”由此我们可以推断出关于 John 的几个事实。首先，他非常感激自己的导师。事实上，在 John 的一生中，无论是对老师、同辈，还是年轻一代，他始终都是一个善良而温和的人。其次，他在攻读博士学位期间结了婚，对方是 Wendy Sue-A-Quan，一位在爱丁堡大学就读的同学。第三，Wendy 负责安排他的生活。对于那些认识 McKay 的人而言，大家普遍认为他是典型的心不在焉的教授：才华横溢、说话轻声细语，而且不拘小节得令人着迷。

获得博士学位后——论文于数年后的1971年正式完成并提交——McKay于1967年回到阿特拉斯计算机的世界，在牛津郊外的奇尔顿成为一名研究员。同年，他成为伦敦数学会会员。奇尔顿为McKay提供了充分的机会与牛津大学合作

[‡]我曾几次受邀到达利奇演讲，有些演讲与John无关，有些则专门谈论John。凭借我与各位校长之间的交情，我曾多次提议在McKay的母校为他设立一块纪念牌。

，尤其是与当时担任韦恩弗利特纯数学讲席的Graham Higman合作，借助计算机显式构造若干散在单群——具体来说，是第三 Janko 群J_3 和Held 群 He 。McKay在奇尔顿的一位同事是John Leech，他提出了以自己名字命名的Leech 格 [**6**], ；这是24维中唯一的偶自对偶格，也是该维数中最适合球堆积的格。尽管Leech怀疑这个格的巨大自同构群理应具有普遍意义，他却始终未能引起群论界对此的兴趣。幸运的是，McKay对此产生了兴趣，随后又让John Horton Conway也产生了兴趣，由此促成Conway发现并构造了三个新的散在单群，如今称为 Co_1、 Co_2和 Co_3。群 Co_1是Leech 格的自同构群除以其二阶中心所得的商群；后来证明，它在传奇的Monster 群的构造中发挥了关键作用，我们很快就会花不少时间讨论它。

John 最突出的能力之一，就是能将人与创意联系起来。Siobhan Roberts 在她那部屡获殊荣的 Conway 传记中， [**3**],以俏皮风趣的笔触将这一点描绘得淋漓尽致：

> “[Leech] 把这个问题摆在几位对对称性着迷的人面前 OS，Donald Coxeter 也在其中。他四处传扬，把这件事告诉了朋友 John McKay。McKay Conway 动了心，最终上了钩……McKay 总是不停地兜售数学联姻，让人与人相连，让人与思想相连。”

奇尔顿之后，McKay 开始了他的国际生涯。1969 年，John 与妻子 Wendy 横渡大西洋，前往加州理工学院担任访问助理教授。在那里，他继续研究特征标表，并与 Hershy Kisilevsky 结下了终身友谊并展开合作。几年后，后者也来到蒙特利尔与他共事。这段短暂的加州经历之后，McKay 于 1971 年迁至蒙特利尔，在麦吉尔大学计算机科学学院担任副教授，并获得永久职位。John 曾对我说，移居加拿大的原因很简单：他认为，当时加拿大的典型学术薪资与生活成本之比最高。这很可能确实如此。

McKay 和麦吉尔大学相处得并不融洽，也许那里对他来说太过体制化。他的好友兼同事 John Harnad 一直探望他，直至他生命的最后几天。John Harnad 在加拿大数学研究中心（CRM）的讣告中写道´ [**7**]:

> “John McKay 是一位好朋友、一位杰出的同事，也是一位非常特别的人，个性独特。他在许多方面都卓尔不凡：既是一位想象力丰富、富有创造力的数学家，以善于发现看似毫不相关领域之间出人意料的联系而闻名；也是一位头脑清醒、洞察敏锐的思想者，为人诚实正直。正因如此，他无法对自己察觉到的不妥之事视而不见，总会探究其缘由。他总是以谦逊而风趣的态度这样做，秉持求真而非评判的精神，不过有时坚持得太久，以至于某些高校管理人员颇难领受……除了他非凡的数学洞见与贡献之外，若不进一步谈谈 John McKay 的为人、他极高的道德操守，以及他在历史、科学和文化方面广博的兴趣与知识，那这番介绍便很不完整。尤其是，他对学术机构中行事方式的是非曲直有着深刻的认识，对于那些在他看来缺乏正当依据或轻重安排不当的事情，他从未停止质疑。”

1974年，John 搬到了几条街外的康考迪亚大学，并在那里一直工作到生命的最后时光。1979年，他晋升为计算机科学正教授；1990年，又获聘为数学与计算机科学联合正教授；2009年，他在70岁退休时获授杰出荣誉退休教授称号。与他搬到康考迪亚大学前后发生的另一件事是，John 和 Wendy 于1985年离婚。Wendy 后来嫁给了数学家 Robert Moody，而 John 于1988年与 TrinhVo 结婚。Trinh 一直满怀深情与奉献陪伴在 John 身边。可以说，是她把他的生活安排得井井有条。2010年我和 John 成为朋友与合作伙伴后的十年间，我们几乎每天都会通过 Skype [**4**] 交谈。蒙特利尔与

伦敦／牛津有5小时的时差，这对我们的交流大有帮助，因为他的上午正好是我的下午。Trinh 偶尔也会加入我们，尤其是在我有了两个孩子之后；他们通过视频聊天看着孩子们长大。从许多方面来说，McKay 成了孩子们的 John 爷爷。

Trinh 越来越难以照顾一次跌倒后的 John。2016年，我在麦吉尔大学讲学时去看望过他们，当时就发现他们家的楼梯十分危险。于是，2017年，她安排 John 入住路易-里尔护理院，他在那里一直住到生命的最后一天。通过 Skype 联系越来越困难，Trinh 便尽可能让 John 用上 iPad，这样他就能继续和我以及其他朋友聊天。路易-里尔护理院有一个令人感伤的传统：每位入住者入院时，都会为其撰写一篇简短的讣告。Trinh 请我执笔，因此五年多前，我便有机会提前梳理如今正在写下的这段人生故事。那篇向 John 致敬的短文由他的母校刊登在《德威学院阿莱恩俱乐部年鉴》[9]上。John 于2022年4月19日安详离世，Trinh 陪伴在他身边。就在几天前，她还设法让我和他通了电话，因为用她的话说，我的声音“总能让他开心起来”。

McKay毕生致力于数学，并搭建思想与人际交流的桥梁；2000年，他当选加拿大皇家学会会士，这些贡献由此得到应有的赞誉与认可。2003年，他荣获CRM-菲尔兹数学奖，这是加拿大授予数学家的最高荣誉。2007年，康考迪亚大学与蒙特利尔大学联合举办了一场会议，向John致敬，并赞叹他为数学世界带来的贡献。会议的名称恰如其分：“群与对称性：从新石器时代的苏格兰人到John McKay”[10]。

2. 数学奇迹

> “John McKay是一位杰出的数学家。他广泛的数学兴趣与渊博的知识，加上他的好奇心、直觉和洞察力，使他发现了数学不同领域之间重要的新联系，并开辟了全新的研究领域。”
>
> - Leonard Soicher [8]

爱因斯坦将1905年称为他的奇迹年，那一年他发表了四篇论文，每一篇都彻底改变了我们对宇宙的认识。在回顾McKay对数学的贡献时，同样有必要着重介绍他的三个奇迹：它们在十年间相继出现，每一个都催生了全新的研究领域，而这些领域至今仍然活跃。它们分别是：（i）月光，这是他最为人熟知的成果；（ii）*McKay*的*A-D-E*对应，这是他最钟爱的成果；以及（iii）关于群表示的麦凯猜想，这是他最早的重要发现。John最非凡的能力，是将数学中彼此难以想象地迥异的分支联系起来；我也深信，每一位研究生都应当了解并欣赏这些奇迹。因此，我将以足够广泛的视角，并提供必要的背景，来介绍它们，至少尝试展现其中之美。

2.1. “这就是月光！”

McKay 最著名的方程是

$$196884 = 196883 + 1\ . \tag{2.1}$$

菲尔兹研究所制作了印有这段文字的 T 恤，而事实上，在 John 的骨灰旁边的 *Cimeti`ere Notre-Dame-des-Neiges* 是 John 指向这个方程的照片（见图 2）。这条方程究竟是什么意思？！让我们依次解释左边和右边。

(a) 

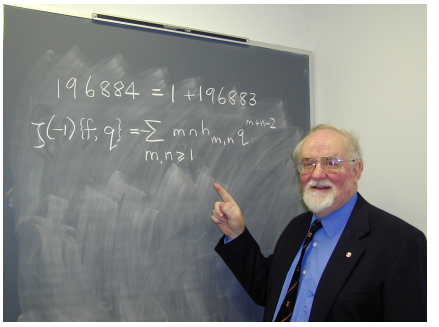
(b) 

FIGURE 2. *(a) John 在 2014 年通过 Skype 通话向我当时还是婴儿的女儿 Kitty 展示这件 T 恤；(b) McKay 在黑板前的一张著名照片，由 John Harnad 惠允提供。*

2.1.1. 模不变量考虑数学中最重要的概念之一——模群 $SL(2;\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z};\ ad-bc=1 \right\}$，即由 2×2 行列式为单位元的整数矩阵†构成的群。这个群无处不在，在组合学、几何学、数论等领域均有体现。首先，其元素的列所构成的无穷多个平行四边形，面积都与单位元 $\mathbb{I}_{2\times 2}$所对应的单位正方形相同。例如，由向量 $\{489,100\}$ 和 $\{2000,409\}$ 生成边的那个极度倾斜的平行四边形，其面积为 1，这一点绝非显而易见。

是否存在一个在其作用下保持不变的函数？为了解决这个问题，我们将平面复化，并将 $SL(2;\mathbb{Z})$ 作用重新表述为整数线性分式变换 $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ for $\tau \in \mathbb{C}$，然后寻找在这种变换下保持不变的解析函数。这样的函数可以推广一些广为人知的函数，它们在重要的变换子群作用下保持不变，例如三角函数 $\sin(2\pi\tau)$ 在 $\tau \mapsto \tau+1$ 下保持不变。相差一个权因子 的不变函数就是著名的模形式。艾森斯坦级数给出了它们的定义：对于 $k \in \mathbb{Z}_{>1}$，我们有

$$E_{2k}(\tau) = (2\zeta(2k))^{-1} \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (m+n\tau)^{-2k} \quad \Rightarrow \quad E_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} E_{2k}(\tau)\ , \tag{2.2}$$

带有权重因子（$c\tau+d$）^{2k}。该级数在 $\tau \in \mathcal{H}$（即上半平面）上绝对收敛，其中 $\Im(\tau) > 0$。数值因子 $2\zeta(2k)$ 涉及在正偶整数处取值的黎曼ζ函数，因此可以用伯努利数表示；它具有深刻的数论意义，但这并非我们目前所要讨论的内容。

现在，只需引入一个极点，我们就可以通过定义来消除权重因子。

$$j(\tau) := 1728\frac{E_4(\tau)^3}{E_4(\tau)^3 - 27E_6(\tau)^2} \quad \Rightarrow \quad j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau)\ . \tag{2.3}$$

顺便一提，拉马努金熟悉这个函数的 $1728 = 12^3$ 前因子，想必正是出租车传说（ E_4 的朗伯级数具有系数 n^3）背后的根本原因。如此定义后，显然，由（2.2）可知， E_{2k} 在模变换下的性质使得 $j(\tau)$ 在 $SL(2;\mathbb{Z})$ 下是不变量。然而，它不 被称为“权为零的模形式”，因为它不是全纯的：与模形式 $E_{2k}(\tau)$ 不同， $j(\tau)$ 在 $\tau = i\infty$ 处有一个简单极点。

†有时，模群被射影地定义为 $PSL(2;\mathbb{Z})$，其中行列式 $ad-bc=\pm 1$。我们的许多讨论在 $\pm$ 符号下仍然成立。

这个函数 j 通常被认为是 Klein [**11**] 提出的，且大多称为 Klein j-不变量。不过，McKay 一直告诉我，至少高斯和艾森斯坦早已知道它，因此他坚持将其简称为模不变量函数，以强调它是唯一的：它是上半平面上唯一一个在 $SL(2;\mathbb{Z})$ 下为不变量、除 $i\infty$ 处的简单极点外处处全纯，并且经过规范化使得

$$j(\exp(2\pi i/3))=0\ ,\quad j(i)=1728\ . \tag{2.4}$$

任何其他模不变量（在这些点上的取值不同）都是 j 中的有理函数。

$j(\tau)$ 有无数美妙的性质，涉及几何学（例如，它可用于判定椭圆曲线的同构类）和数论（例如，它与类域论的联系）；但与我们最相关的是它的级数展开。定义 $q:=\exp(2\pi i\tau)$ 后，q 中的洛朗级数（等价地，τ 中的傅里叶级数）为

$$j(q)=q^{-1}+744+196884q+21493760q^2+864299970q^3+20245856256q^4+\dots \tag{2.5}$$

我们可以看到，q^{-1} 的首项表示它在 $q=0$ 处有一个简单极点，即 $\tau=i\infty$。从艾森斯坦 E_{2k}的整数傅里叶展开可以看出，所有系数都是整数；然而，这些看似毫无意义的整数究竟意味着什么，直到近一个世纪后 McKay 出现时才有了答案。

2.1.2. 有限单群 现在，来谈点截然不同的内容。与分析、几何学和数论并行，19 世纪的另一项重大发展是群论；它的开端，是伽罗瓦在命运般的决斗前夜写下的悲剧性潦草笔记。自从伽罗瓦提出将多项式根之间的置换组织起来的想法——这就是我们如今所说的伽罗瓦群——有限群的分类便一直是抽象代数中的一个重要主题。

首先，这个问题归结为有限简单群的分类，也就是说，这些群没有非平凡的真正规子群。我们提醒自己，正规子群 N是群 G 的一个在共轭作用下封闭的子群：$gng^{-1}\in N$ 对任意 $n\in N$ 和任意 $g\in G$都成立；这种正规性记作 $N\triangleleft G$。正规性使我们能够构造商群 G/N。每个有限群 G 都有一个合成列，它以某种方式编码了该群的结构：$\mathbb{I}=H_0\triangleleft H_1\triangleleft\ldots\triangleleft H_n=G$，其中每个 H_i 都是 H_{i+1} 的极大真正规子群，而每个商群 H_{i+1}/H_i 都是简单群。Jordan–H¨older 定理指出，除排列顺序和同构外，合成列是唯一的。有限群的合成列就像整数的素因数分解，因此，简单群之于有限群，正如素数之于整数。

有限单群分类本身就是一段史诗。伽罗瓦注意到，作用在 $n\geq 5$ 个元素上的交错群 $\mathcal{A}_n$ 是简单群。这一发现，加上我们如今所称的域扩张伽罗瓦理论，足以解决一个由来已久的问题：为什么五次及以上的一般多项式无法用根式求解。从这个意义上说，分类问题始于1832年。有限单群分类正式完成时，这段非凡的历程已跨越了一个多世纪。证明中有相当一部分运用了计算机代数，而 McKay 正是这一领域的先驱。详述证明步骤的权威卷册近万页，至今仍在编纂中 [**12**]。对于尚未准备好细读这些巨著的人来说，[**13**] 中有一篇轻松但专业的介绍，读来十分明白，结尾甚至还附有一首歌，帮助你记住其中的要点：

THEOREM 2.1. 有限单群包括(i) 阶为素数的循环群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p；(ii) 由 $n\geq 5$ 个元素上的偶置换构成的交错群 $\mathcal{A}_n$；(iii) 定义在有限域上的李群；(iv) *26* 个散在群。

请注意，我使用了“大小”而非“群阶”，并且没有用“次数”来描述交错群。这是为了向 John 致意，他总觉得“阶”和“次数”这两个词在数学中被滥用了。上面所列的第（i）至（iii）类对象多少有些“经典”，并且属于无限族。第（i）类显然是简单群，因为它们没有任何非平凡的真子群。第（ii）类源于伽罗瓦最初的观察。第（iii）类很有意思：李群通常与连续对称性相关联，但定义在有限域上时 $\mathbb{F}_{p^r}$，它们就变成了离散且有限的对象；我们将在下一节很快再谈李群。第（iv）类，即散在群，[†] 最为神秘：它们全是离群项，而且大小相当大——其中最小的 Mathieu 群 M_{11} 于 1861年 被发现，大小为 7920。这 26 个群的存在与构造，占据了长达一个世纪的分类故事中相当重要的一部分。除了持续推动大量活跃研究之外，它们本身的存在仍令人费解。这就好比我告诉你，素数中有梅森素数或费马素数这样的系列，但除此之外，还有 26 个特定的、规模相当大的素数，它们就那么存在着，十分特殊，而且再没有别的了！

2.1.3. 怪兽月光 散在群中最大的群的阶为

$$\begin{aligned}&808017424794512875886459904961710757005754368000000000 = \\ &2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71\ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

这个数目的巨大促成了“怪兽”这一名称的诞生。它的存在最初由贝恩德·菲舍尔和罗伯特·格里斯于20世纪70年代初分别独立预言 [**14**] 。1982年，格里斯发表了怪兽群的第一个构造，随后 Conway 发表了一个简化的构造。约翰·汤普森证明了其唯一性，但以存在一个维数为 196883 的忠实复表示为前提；西蒙·诺顿则表明，在给定素数元素中心化子的结构这一前提下，这样的表示必然存在。最终，格里斯、迈尔-弗兰肯费尔德和塞格夫于1989年发表了怪兽群的完整唯一性证明 [**15**]。

这个维数为 $196883 = 47\cdot 59\cdot 71$ 的忠实复表示十分引人入胜。它是最小的表示。换句话说，生成怪兽群所需的最小矩阵——事实上，只需要两个这样的矩阵，因为所有有限单群都由两个矩阵生成！——大小为 196883×196883。以当今的技术，写出这两个矩阵并不困难，只需要大约 1 Tb 的磁盘空间。写出怪兽群的所有元素是不可能的——它的元素个数比地球上的原子还多。Conway 对怪兽群的发现总结得很好：“人们从未对它为何存在作出任何解释，而它显然不是偶然出现的。它有太多引人入胜的性质，不可能这一切都只是意外。”

传说是这样的。1978 年，John Conway[†] 向 John McKay[‡] 展示了数字 196883。McKay 看到这个数字后，回答说这就是式 (2.1)。Conway 回答说这太荒谬了，“这是月光！”Moonshine 在英语俚语中有两种意思：(1) 私自酿造的非法酒；(2) 极其荒诞离奇的事情。由于这两位 John 都是英国人，他们自然明白其中的典故。

Conway的激烈反应完全有道理。方程（2.1）的左边属于数论和解析函数的范畴；右边则属于有限群的范畴

[†]还有蒂茨群，有时被称为第 27 个散在群，有时则与李型群族归为一类。

[†]要记得，Conway 和 McKay 在 20 世纪 60 年代末就彼此相识，当时 McKay 向 Conway 提起了 Leech 格。事实证明，怪兽群与 Leech 格的自同构群有着密切的关系。

[‡]当时，这个 196883 维表示仍只是一个猜想。基于这个猜想中的次数，Fischer、Livingstone 和 Thorne 在伯明翰大学完成了一项了不起的工作，构造出了怪兽群的完整特征标表。因此，Thompson、Conway 和 Norton 得以利用这些数据，验证 McKay 的想法并没有那么离谱！

和表示论的范畴。在数学的版图中，这两个领域相距如此遥远，它们之间确实不可能存在关联。为了确保这不只是数值上的巧合，他们检查了接下来几个（极大的）系数

$$\begin{aligned} 1 &= r_1 \\ 196884 &= r_1 + r_2 \\ 21493760 &= r_1 + r_2 + r_3 \\ 864299970 &= 2r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4 \\ 20245856256 &= 3r_1 + 3r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5 = 2r_1 + 3r_2 + 2r_3 + r_4 + r_6 \\ &\cdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中左侧是方程 (2.5) 中 $j(q)$ 的傅里叶系数，而 $r_{n=1,\ldots,194} = \{\ 1,\ 196883, 21296876, 842609326, 18538750076, 19360062527, \ldots,\ 258823477531055064045234375\ \}$ 是怪兽群的不可约表示的维数——由于它是一个有限群，这些维数只有有限多个，总计 194 个。因此，模不变量的无穷多个整数系数都编码为怪兽单群的不可约表示维数的简单线性组合。尤其是考虑到其中涉及如此天文数字般大的整数，这不可能仅仅是巧合。

Thompson 因其在简单群方面的工作获得了菲尔兹奖，并发现了一个以他名字命名的散在群。他提出，可能存在一个分次向量空间（现称为月光模块），$V^\natural = \oplus_n V_n$ 使得 $j(q) - 744 = \sum_n \mathrm{Tr}(\mathbb{I}|_{V_n}) q^n$，因为恒等变换的迹 $\mathbb{I}$ 等于向量空间的维数[†]。由于迹在共轭下不变，这一结果便可推广到怪兽群的其他元素 g （或共轭类），因为怪兽群的迹具有共轭不变性。

$$j_g(q) = \sum_n \mathrm{Tr}(g|_{V_n}) q^n \ . \tag{2.8}$$

这个展开式如今称为 McKay–Thompson级数。Conway 上钩之后，他和 Norton 将他最初难以置信的惊呼 [**16**] 正式表述为:

Conjecture 1. （月光猜想）McKay–Thompson级数 $j_g(q)$ 是模群 $SL(2;\mathbb{Z})$ 中介于 $\Gamma_0(N)$ 与其正规化子 $\Gamma_0(N)^+$ 之间的某个群的唯一模不变量。

这里， $\Gamma_0(N)$ 是模群中由通常元素 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$ad - bc = 1$组成、但还满足同余条件 $c \mod N \equiv 0$ 的 N 级同余子群。当 $N = 1$ 且 $g = \mathbb{I}$ 时， $j_g(q)$ 是与 McKay 最初的观察相关、定义在整个模群上的模不变量 $j(q) - 744$。当然，这个故事还有许多内容。猜想包含更多精确的细节，甚至有整本著作专门论述它，例如，[**17**, **18**, **19**] 就有很精彩的介绍[‡]。我在这里只是想用一些亮点引起读者的兴趣。学界随即作出回应 [**22**, **23**] ，运用共形场论和弦理论的思想，尤其是顶点算子代数，构造了怪兽模 $V^\natural$。Borcherds 证明了关于怪兽群的月光猜想，并因此获得了1998年的菲尔兹奖。

这种由 McKay 深刻直觉所促成的、模性、有限群与格、表示论以及理论物理之间令人惊讶的联系，如今已发展成为

[†]月光中并未出现常数项 744，因此需要将其减去。不过，一个非凡的事实是， $744/3 = 248$ 这与这样一个事实有关： $j(q)^{1/3}$ 编码了李群 E_8 的不可约表示，我们很快就会遇到这个群 [**21**]。

[‡]若想了解简短、有趣但仍具技术性的介绍，请参阅 [**20**], , 作者是我以前的学生 Tatitscheff，他曾与 John 和我共事。

一个独立的研究领域，称为月光。将研究范围从 Monster 群推广到其他散在群、从 Leech 格推广到其他格，并将 $j(q)$ 推广到分拆函数，至今仍是一个活跃的研究领域：自 20 世纪 90 年代以来，ArXiv 上已有约 300 篇关于这一主题的论文。

Conway 80 岁时，曾举办一场会议，并出版了一卷纪念文集 [**25**]。McKay 和我撰写了开篇章节 [**109**], ，这是一篇只有一页的数学（半）玩笑，题为《月光与生命的意义》。我们把 $j(q)$ 的前 24 个系数的平方求和，再加上相关的拉马努金 tau 函数的前 24 个系数的平方和，并对 70 取模（24 和 70 都是 Leech 格的关键数字），结果得到 42。Conway 对此十分开心。我很荣幸，自己与 John 合作发表的最后一篇作品，是由我编辑并整理他最后一次现场演讲的笔记，内容是他对月光的思考和新想法 [**114**]。

让我用 Norton 的话来结束本节 [**2**]:

> “我可以用一句话解释什么是怪兽月光：那就是上帝的声音。”

2.2. *A-D-E*

我们的第二个数学奇迹，是 John 一直告诉我他最喜欢的成果，甚至胜过月光。它同样连接了彼此无关的领域：有限群、图、几何奇点和李理论。如今它被称为 ***McKay*** 对应 ，人们普遍认为，这不过是数学中许多尚待发现的深刻联系的冰山一角。

2.2.1. 李群

Sophus Lie 最初雄心勃勃的计划，是通过考察多元解析函数变量上的变换群，对连续对称性进行分类。这引出了我们如今称为 **李群** 的概念，即同时也是流形的连续群。我们熟悉许多标准例子。例如，将圆 S^1 的元素视为模为一的复数 $\exp(i\theta)$，并采用通常的乘法运算，就构成了一个群；这个李群记作 $U(1)$。另一个例子是 $SU(2)$，它由满足 $M^H M = \mathbb{I}_{2\times 2}$ 且 $\det(M) = 1$ 的2×2复矩阵 M组成，其中 H 表示共轭转置。换言之， M 是特殊酉 2×2 矩阵，它们构成的李群在几何上就是三维球面 S^3。再举一个例子，我们很快就会用到： $SO(3)$，它由满足 $M^T M = \mathbb{I}_{3\times 3}$ 且 $\det(M) = 1$ 的 3×3 实矩阵 M组成，也就是特殊正交矩阵；这个李群在拓扑上是实射影空间 $\mathbb{RP}^3$。以上都是经典李群的例子，对 19 世纪的数学家[†]来说，它们或多或少都耳熟能详。

李的洞见在于，李群作为一个流形，在群单位元处具有一个切空间。这个切空间是一个向量空间，并带有从群运算继承而来的二元运算，使其成为一个代数；这种代数如今被称为李代数 ，而该二元运算则称为李括号。这种群-代数对应将对李群的研究转化为对李代数的研究；李代数的向量空间结构使其更易于处理。

Killing、Cartan、Levi 等人的杰出工作随后将李群的分类归结为复向量空间上的李代数分类。类比于有限群，李代数可以由单李代数构造而成；所谓单李代数，是指没有非零真理想的李代数。Levi结构定理指出，任何李代数在对其根基（最大的可解理想）取商后，都是若干单李代数的直和。因此，单李代数再次充当了“素数”，而完整的列表则相当朴素地称为如下内容：

THEOREM 2.2. 在 $\mathbb{C}$ 上的单李代数包括

[†]回到上一节的内容：这些连续李群若不是定义在实数域或复数域上，而是定义在有限域上，就会变成离散群，并构成有限单群中的李族。

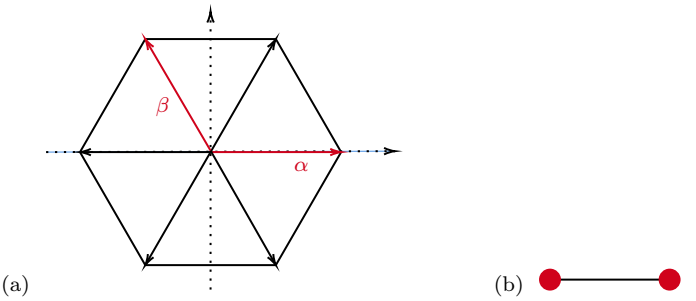


FIGURE 3. *(a)* A_2的根系和 *(b)* A_2的 *Dynkin* 图。

(i) A_n型：$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$；(ii) B_n型：$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$；(iii) C_n型：$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$；(iv) D_n型：$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$；*(v) </style}*例外型：$E_6$、$E_7$、$E_8$、$F_4$和 G_2。

在上述内容中，$n \in \mathbb{Z}_{>1}$ 以及 A 型至 D 型被称为经典李代数，它们构成无限族；而 E 型至 G 型被称为例外型。我们可以看到，这与有限群的分类颇为相似!

现在，对于显式矩阵而言，李代数与李群之间的对应关系就是指数映射。因此，A 型是无迹的（$n+1$）×（$n+1$）复矩阵；对其进行指数化后，会得到（$n+1$）×（$n+1$）行列式为 1 的矩阵，即 $SL(n;\mathbb{C})$。其实形式为 $\mathfrak{su}_{n+1}$——也就是说，$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_{n+1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$——并且它们是无迹的反厄米矩阵。这些矩阵指数化后得到特殊酉矩阵。换言之，A 型李代数对应于李群 $SU(n+1)$。同样，B 型和 D 型李群分别是奇数维和偶数维的特殊正交群；C 型是辛群。例外型则更加神秘，其根系分别存在于 6、7、8、4 和 2 维空间中。

最后，Dynkin 和 Coxeter 为定理 2.2 给出了绝妙的图形表示，将研究单李代数的问题进一步归结为 根系，并使用所谓的 Cartan 基底；我们暂且不深入探讨。只需指出，李群的分类首先归结为单李群的分类，进而归结为单李代数的分类，最终归结为根系中正单根的分类：

DEFINITION 1. 根系 Φ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^r$ 中的有限个非零向量集合，称为根，该空间带有标准点积 $(\cdot,\cdot)$，满足

– 根张成 $\mathbb{R}^r$；r 称为秩；– 根 $\alpha \in \Phi$ 的标量倍数中，仍属于 Φ 的只有 $\pm\alpha$，没有其他；– 对任意两个根 α，β，向量 $\beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$（它是关于垂直于 α 的超平面的反射）也是一个根 †

在 Φ 中，我们总能（可能有多种方式）选取正根集合 Φ^+，使其满足

– 对于每个根 $\alpha \in \Phi$，$\pm\alpha$ 中只有一个属于 Φ^+；– 对于任意两个不同的根 α，$\beta \in \Phi^+$，若 $\alpha+\beta$ 是一个根，则 $\alpha+\beta \in \Phi^+$。

†对于李代数，反射中的因子 $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 是一个整数。

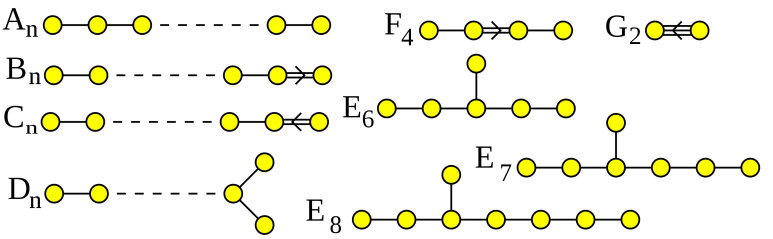


FIGURE 4.单李代数/群的 *Dynkin* 图（来源：*Wiki*）。

最后，简单根是不能写成另外两个正简单根之和的正根。我们将正简单根的集合记为 $\Delta \subset \Phi^+ \subset \Phi$；简单根的数量恰好等于秩 r。

根系的典型例子如图 3(a) 所示， $\mathbb{R}^2$ 中的根系由正六边形的顶点规定。可以验证，根为 $\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$，正根为 $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$，正单根为 $\{\alpha, \beta\}$，它们所张的角为 $\frac{2}{3}\pi$。这个根系称为 A_2，它确实对应于单李代数 A_2，以及与之关联的李群 $SU(3)$。

使用 Coxeter–Dynkin 图（或简称 Dynkin 图），还可以进一步简化根系表示，规则如下：(1) 设 Δ 为单根，并构造一个有限图，其中每个节点对应一个单根，因此将有 r 个节点，其中 r 是秩。(2) 两个节点之间的边由对应单根之间的夹角确定，规则如下：

$$\pi/2\text{: no edge; } 2\pi/3\text{: single edge; } 3\pi/4\text{: double edge; } 5\pi/6\text{: triple edge.}$$

事实证明，这些就是所有可能的角度。(3) 我们引入方向，也就是将边变成箭头——让较长的简单根指向较短的简单根；如果两个根长度相同，则无需标注方向。因此，在上面关于 A_2的例子中，有两个分别对应 α 和 β的节点；由于它们之间的夹角为120度，且长度相同，所以两者之间只有一条边。Dynkin 图见图3(b)。

总之，定理2.2的图形表示如图4所示。很容易看出，在这些图中，A-D-E 类型只有单边（且无方向），这意味着所有简单根长度相同，并且彼此垂直或夹角为 $2\pi/3$ 。这类图称为单键Dynkin 图，或简称**A-D-E 图**。它们分为两个无限族 A_n 和 D_n，以及三个例外图$E_{6、7、8}$。

2.2.2. 柏拉图立体 现在，来谈点截然不同的内容。欧几里得空间具有哪些离散对称性，这是一个古老的问题。换成古希腊人能理解的说法：有哪些正凸多面体？显然有两类：（1）正多边形；（2）五种柏拉图立体，即正四面体、立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体。为供参考，我们在图5中展示这五种著名的立体。

换一种更现代的表述： $SO(3)$ 的离散有限子群是什么？ $SO(3)$ 是由构成 $\mathbb{R}^3$ 旋转对称的特殊正交矩阵组成的群。这些有限群正是前述正则凸形状（多胞体）的对称群。

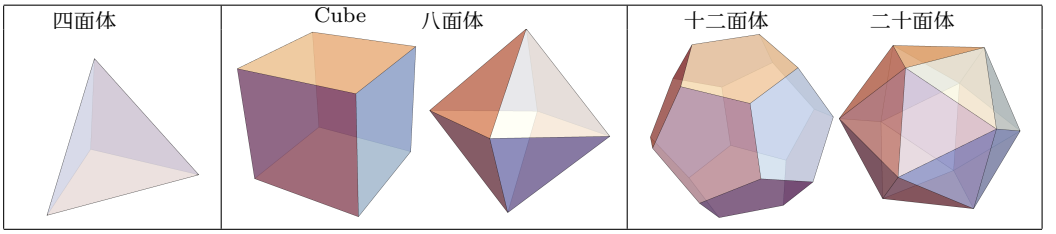


FIGURE 5.五种柏拉图立体：正四面体、立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体。我们按照对偶关系将它们分组。

正则 n 边形是退化的，因为它们位于平面内，而不是严格意义上的三维形体。对于它们，对称群为：（1）阶为 n 的循环群，由 $2\pi/n$ 旋转生成；以及（2）阶为 $2n$ 的二面体群，由 $2\pi/n$ 旋转和沿任意对称轴的翻转生成。对于五种柏拉图立体，只有三个对称群。这是由于（图）对偶性，即将面替换为顶点，并将边替换为垂直的边。立方体与八面体互为对偶，同样，十二面体与二十面体也互为对偶，而四面体是自对偶的。因此，共有三个对称群：

– (3a) 四面体群，结果是阶为 $4!/2 = 12$ 的交错群 $\mathcal{A}_4$，– (3b) 立方体–八面体群（或简称八面体群），即阶为 $4! = 24$ 的对称群 $\mathcal{S}_4$，以及 – (3c) 十二面体–二十面体群（或简称二十面体群），即阶为 $5!/2 = 60$ 的交错群 $\mathcal{A}_5$。

我在这里所说的一切，19 世纪的数学家本应都已知晓；而李群和李代数的知识，则是 20 世纪初的数学家所掌握的。然而，再一次，人们又等了数十年，直到 John 出现，才注意到这组 $\mathbb{R}^3$ 对称群 ——2 个无限族和 3 个离群项 —— 与看似毫无关联的这组单连 Dynkin 图 ——2 个无限族和 3 个例外项——之间存在非凡的联系。1979年，McKay 在一次群论会议上宣布了他的发现，后来这一发现被称为*McKay* 对应。

2.2.3. *McKay* 对应 John 曾多次对我说，这项 1979年 对应是他最喜爱、也最引以为傲的观察——以他谦和的性情，提及自己时从不使用“发现”之类的词。McKay 首先通过将 $SO(3)$ 提升到其二重覆盖 $SU(2)$，引入一个复表示（顺带一提，这两个李群拥有相同的李代数）。这种提升对物理学家来说并不陌生，因为它是经典（矢量）与量子力学（旋量）角动量之间的关键区别。在群的层面上，离散对称群称为二元 群，是上述群的二重覆盖。具体来说，我们有（注意，循环群是阿贝尔群，因此没有非平凡的二重覆盖）

THEOREM 2.3. $SU(2)$ 的有限离散子群有：

Name	表示	$\lvert G\rvert$
循环群	$\langle R \mid R^n = \mathbb{I}\rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	n
二元二面体群	$\langle R,\ S \mid R^n = S^2 = (RS)^2\rangle$	$4n$
二元四面体群	$\langle R,\ S,\ T \mid RST = R^2 = S^3 = T^3\rangle$	24
二元八面体群	$\langle R、S、T \mid RST = R^2 = S^3 = T^4\rangle$	48
二元二十面体群	$\langle R、S、T \mid RST = R^2 = S^3 = T^5\rangle$	120

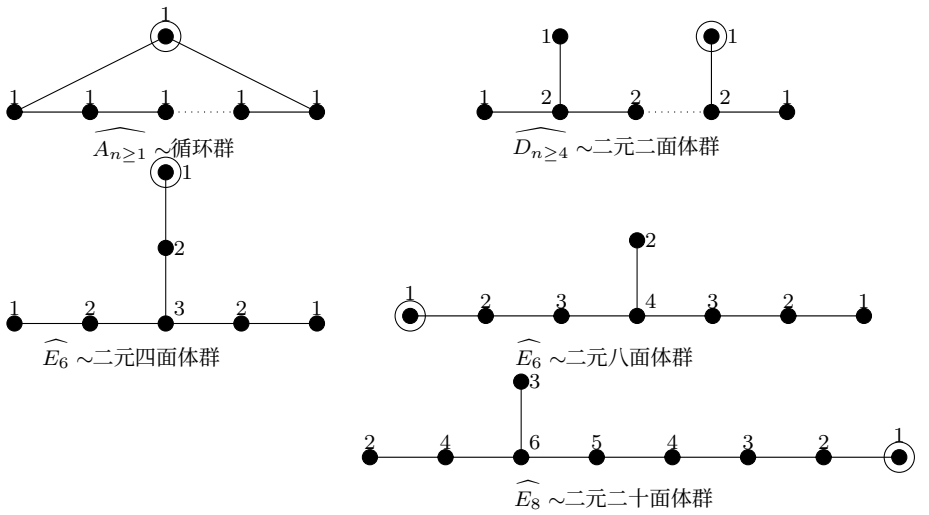


FIGURE 6.仿射单连通 *Dynkin* 图与 $SU(2)$ 的离散有限子群之间的 *McKay* 对应，或仿射李代数与柏拉图立体之间的对应。

接下来，McKay 取每个群的二维复定义表示 $\mathbf{R_2}$ （由于这些群属于 $SU(2)$，该表示必然存在），并对所有不可约表示 $\mathbf{r_i}$构造张量分解

$$\mathbf{R_2} \otimes \mathbf{r_i} = \bigoplus_j a_{ij}\mathbf{r_j} \tag{2.9}$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示重数。虽然对群（无论离散群还是连续群）进行这样的张量分解是常规做法，但不知为何，竟没有人想到也应当对$SU(2)$ 子群进行这种分解。

最后，McKay 注意到了矩阵 a_{ij}，它们恰好是对称矩阵，且对角线上为 2，其他位置为 0 或 1！具体而言，它们可以用有限群 G 的特征标表 $\chi_\gamma^{(i)}$ 表示为

$$a_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma=1}^{r} C_\gamma \chi_\gamma^{\mathbf{R_2}} \chi_\gamma^{(i)} \overline{\chi}_\gamma^{(j)} \ , \tag{2.10}$$

其中求和遍历各个 r 共轭类， C_γ 是第 γ 个共轭类的大小。他将这些矩阵视为某些有限图的邻接矩阵——这些图如今称为 McKay 箭图——其构造方式是为每一行／列关联一个节点，并在顶点 i 与 j之间满足 $a_{ij} = 1$ 时连一条边。结果见图 6。这些图几乎就是单连通 ADE Dynkin 图，只是多了一个节点！事实证明，这些图称为仿射 ADE Dynkin 图，并编码了相应李代数的一种无限推广，称为仿射李代数。在 McKay 对应中，额外的仿射节点与有限群中的单位元相关联。

John 再一次成功地将数学中两个至少半个世纪以来互不相通的领域联系起来：李理论与柏拉图立体的对称群。或许数学家们之所以错过了这一联系，是因为双方都需要经过一些处理：李理论一侧需要仿射化，旋转群一侧需要提升到 $SU(2)$；此外，还需要

式 (2.9) 的天才之处† 。人们或许会想，月光散在群与 McKay 对应中的例外群是否有关联。最初的种子确实由 John 播下，并在 [**111**],中得到进一步阐释，尚待更多说明。

我的第一篇论文以及博士论文的大部分内容，都是为了寻找 McKay 对应的推广，尤其是探究它们在物理学中的超弦理论实现。因此，从职业生涯一开始，我就对 McKay 怀有崇敬之情。为了圆满收尾，我与他合作的最后一项工作，是一本面向广大数学读者的教材 [**115**], ，书名为《 A-D-E》，合著者还有 Cameron 和 Dechant。遗憾的是，John 永远无法看到这项工作的完成。

McKay 对应所做的远不止连接两个领域。它促使数学家们在各处寻找 ADE元模式。从代数几何到共形场论，这种模式似乎遍布数学的各个学科，并且几乎获得了宗教般的地位。V. Arnol'd 发现了大约 20 个彼此迥异的例子，并恰如其分地称之为"三位一体"，$E_{6,\ 7,\ 8}$ [**28**]。如果你在数学中遇到一个分类问题，其中有两个无限族和三个例外情形，那就要当心！它们很可能属于某种 A-D-E 类型的元模式。

2.3. 特征标与素数

最后，我们来谈谈 John 最早的一项奇迹 [**49**, **50**], ，它诞生于1971—1972年，至今仍是表示论中最重要的未解决问题之一（关于这一问题的最新综述，参见 [**29**]）。这一问题通常被称为麦凯猜想，后来又经过推广和形式化[**30**]，发展为阿尔佩林-麦凯猜想。用 Markus Linckelmann 的话来说，

> 1972 年提出的麦凯猜想，以及 1976 年提出的、被称为阿尔佩林-麦凯猜想的分块理论推广，都是一系列表面上看似不可思议的数值巧合的实例，而这些巧合始终萦绕着有限群的模表示论。

这一奇妙的观察再次出自 John，他刚获得博士学位不久便作出了这一观察。考虑有限群 G 的复特征标 $\chi_\gamma^{(i)}$——对它们进行计算机计算，正是他博士论文的主题。回顾一下，特征标是矩阵表示的迹，而 $\chi_\gamma^{(i)}$ 是一个 $r\times r$ 方阵，其中 r 既等于 G 的共轭类数，也等于不可约表示的数目，这些表示称为"不可约表示"（irreps）。以 γ 为索引的行依次列出各不可约表示，第一行总是全由 1 组成，对应于平凡表示，在该表示中，群的所有元素都表示为 1。也就是说，$\chi_1^{(i)}=1$。以 i 为索引的列依次列出各共轭类，第一列总是不可约表示的维数列表，它们是 $\mathbb{I}_G$ 的单位矩阵表示的迹。也就是说，$\chi_\gamma^{(1)}$ 是不可约表示的维数，例如怪兽群在式（2.7）中的 r_i。在前文中，我们使用了特征标表，既用于式（2.8）中的麦凯-汤普森级数，也用于对式（2.9）中的麦凯分解求逆。

现在，固定一个素数 p，并考虑 G 的一个 Sylow p-子群 S_p。回顾一下，p-子群是阶为素数幂 p^n的子群，而 Sylow p-子群是极大的，即它不是任何其他 p-子群的真子群。接下来，考虑 G 中 S_p的正规化子，即 $N_G(S_p):=\{g\in G:\ gS_pg^{-1}=S_p\}$。麦凯猜想对于任意有限群†仍未解决，其表述为

---

†简单来说，启发 John 的首先是由 2 个无限族和 3 个离群项构成的模式；其次，Dynkin 图中某些 Coxeter 标记的平方和（限于篇幅，我在此不作讨论）会得出有限群的阶。

†有趣的是，John 最初提出的"麦凯猜想"针对的是有限单群和素数 $p=2$，如今这一猜想已获证明 [**33**]）。

Conjecture 2. (McKay) 记 $Irr_{p'}(H)$ 为满足以下条件的特征标集合： p 不整除群 H 的不可约表示的维数，即 $p \nmid \chi_\gamma^{(1)}$。那么

$$|Irr_{p'}(G)| = |Irr_{p'}(N_G(S_p))| \ .$$

也就是说，这两个集合的基数相同。

让我们看看这个猜想如何发挥作用。它应该适用于任何有限群，因此不妨选一个我们熟悉的群。根据定理 2.3，考虑二元二十面体群（事实证明它与 $SL(2;5)$ 同构，后者是在有限域 $\mathbb{F}_5$ 上定义的二维特殊线性群）。该群的特征标表列于表 1 (a)。秉承 McKay 的优良传统，我们可以轻松使用计算机代数 [**31**] 得到它。我们看到有 $r = 9$ 个不可约表示和共轭类，并在最上方加了一行，完整列出各共轭类的大小。我们可以验证这一行的总和为 120，也就是该群的阶；此外，根据特征标表的标准 Schur 正交关系，第一列的平方和 $1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 120$ 也 †。

(a)

1	12	12	20	30	20	12	1	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	$-\phi'$	$-\phi$	1	0	-1	ϕ'	-2	ϕ
2	$-\phi$	$-\phi'$	1	0	-1	ϕ	-2	ϕ'
3	ϕ	ϕ'	0	-1	0	ϕ	3	ϕ'
3	ϕ'	ϕ	0	-1	0	ϕ'	3	ϕ
4	-1	-1	1	0	1	-1	4	-1
4	-1	-1	-1	0	1	1	-4	1
5	0	0	-1	1	-1	0	5	0
6	1	1	0	0	0	-1	-6	-1

(b)

1	4	4	6	1	4	4
1	1	1	1	1	1	1
1	ω_3^2	ω_3^2	1	1	ω_3	ω_3
1	ω_3	ω_3	1	1	ω_3^2	ω_3^2
2	-1	1	0	-2	1	-1
2	$-\omega_3$	ω_3	0	-2	ω_3^2	$-\omega_3^2$
2	$-\omega_3^2$	ω_3^2	0	-2	ω_3	$-\omega_3$
3	0	0	-1	3	0	0

Table 1. (*a*) 二元二十面体群和 (*b*) 其西罗 2-子群的正规化子的特征标表。这里，$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 和 $\omega_3 = \exp(2\pi i/3)$。

现在选取素数 $p = 2$。西罗 2-子群 S_2 结果是一个阶为 8 的四元数群Q_8 。其正规化子 $N_G(Q_8)$结果是 $SL(2;3)$，恰好是一个阶为 24 的二元四面体群，其特征标表见表 1（b）。这里有 $r = 7$个不可约表示和共轭类，我们再次在顶部添加一行，列出共轭类的大小。

G 中第一列条目不能被 $p = 2$整除的特征标，是表 1（a）中以 $\{1, 3, 3, 5\}$ 开头的那些行。同样，根据表 1（b）， $N_G(Q_8)$中第一列条目不能被 2 整除的特征标，是以 $\{1, 1, 1, 3\}$ 开头的那些行。事实上，两组的基数都是 4，正如猜想所要求的。

有人尝试利用有限单群分类来证明这些猜想。对于 $p = 2$，Malle 和 Sp¨ath [**32**] 于 2016年 证明了猜想 2；而 Alperin-McKay推广，同样针对 $p = 2$，直到去年才由 Ruhstorfer[**33**]，在 John 去世前一周证明。继续引用 Linckelmann 的话，

> “与运用有限单群分类的尝试并行，这些数值猜想促使人们投入大量研究，试图从模范畴及其导出范畴的角度寻找结构性解释，并借鉴更远领域的成果，例如同伦论。除了一些特殊情形外，结构性解释仍大多难以捉摸——将谜团转化为洞见似乎依然遥不可及。”

†确实，顺便提一句，还可以进一步验证，将这个特征标表代入式（2.10），得到的就是仿射 E_8 Dynkin 图的邻接矩阵。正如可以验证的那样，(b) 部分中的特征标表给出了仿射 E_6 Dynkin 图。

3. 遗泽

> “除了精力充沛、兴趣广泛之外，最令我印象深刻的是，他有着非凡的直觉，能在一堆普通石子中找到那颗独特的数学珍珠。我认为，他之所以能在截然不同的数学领域作出卓越贡献，正是因为他拥有惊人的洞察力，能够识别出那些（看似平凡的）事实，而它们正是揭示深层结构的关键。这些贡献充分体现了他将计算方法灵活运用于抽象数学问题的能力……我将永远感激能与John成为朋友和同事。他让康考迪亚大学和整个世界都变得更加有趣。”
>
> - Hershy Kisilevsky

严格来说，McKay 从不拘泥于形式，他只有一位博士生：1974年在麦吉尔大学就读的 K.-C. Young。然而，他极其慷慨地付出时间，也乐于与人分享自己的想法，尤其是与年轻一代分享。因此，我们许多人都觉得自己仿佛属于他的学术家族。这些年来，这个家族成员包括：John 的硕士生 Leonard Soicher，他按照 John 的建议继续跟随 Conway 攻读博士学位，之后又回来担任 McKay 的博士后；曾担任他博士后的 Abdellah Sebbar；曾在康考迪亚大学就读的 Abdelkrim Elbasraoui；以及与他合作研究自由概率论、并经常给他打电话的 Roland Friedrich。此外，还有我本人、我的学生 James Read 和 Valdo Tatitscheff，以及许多其他人。我们都觉得自己是 John 的学生。在长达半个世纪的学术生涯中，McKay 发表了许多有影响力的出版物，我在此汇编于此 [**35**] - [**115**]。当然，在所有这些成果中，他创造的三大奇迹尤为突出，而我也正是为此撰写了这篇讣告。

我听过一些非数学家，甚至偶尔也有数学家，不以为然地否定我在此描述的事。他们认定，如果你每天提出一个猜想，迟早总会碰上重要的东西。对于这些自命不凡又令人厌烦的人，我会嘟囔一句：“好啊，那你为什么不试试！”能做成他们做不到的事，并与 John McKay 在某种程度上平起平坐地共事，对我而言是莫大的荣幸。得以一窥 McKay 的方法与想法，让我明白，碰上他的一个奇迹已然令人惊叹，而要做到三次，则需要超人的力量。我还要指出，John 所做的一切都发生在互联网出现几十年前，那时人们无法随心所欲地直接用 Google 搜索。如今，如果你在在线整数数列百科全书中输入“196884”， [**34**], 你会找到 j复数域不变量系数以及月光相关材料。

John 他所拥有的只有渊博的知识和敏锐深刻的洞察力。他的思想近乎神圣。 .

致谢。 我衷心感谢约翰的妻子 Trinh McKay-Vo、他的姐姐 Liz Hurt，以及他的前妻 Wendy McKay；她们不辞辛劳地回答了我关于他生平的问题。最重要的是，Trinh 和 John 一起，早已成为我家庭的一员；谨以此讣告献给她。也诚挚感谢 John 的朋友 Leonard Soicher、John Harnad、Hershy Kisilevsky 和 John Ball，他们提供了约翰在不同时期生活中的点滴；还要感谢 Madeleine Hall 、 John Harnad 、 Leonard Soicher 、 Pierre-Philippe Dechant 、 Thomas Hodgkinson 和 Markus Linckelmann 提供的许多宝贵意见。

参考文献

1. J. Morava, 《椭圆上同调中的月光元素》，《群与对称性》，247 - 257，CRM会议论文集与讲义，47， 2009 https://arxiv.org/abs/0712.1032 AMS，。，《西蒙：我地下室里的天才》，哈珀·柯林斯 **2** A. Masters 2011， 9780007445264 ISBN 。，《游戏中的天才：约翰·霍顿·康威的好奇心智》，Bloomsbury 2015，ISBN 9781620405949。4. Y.-H. He。《Skype上的天才：约翰·麦凯的非凡且散在的思维》，编写中。5. J. McKay, 《有限群计算》，博士论文，爱丁堡大学，1970年， https://era.ed.ac.uk/bitstream/handle/1842/6615/McKay1971.pdf 请注意，McKay 于1967年获得博士学位，但论文全文直到1970年、他获得首个研究奖学金之后才完成。6. J. Leech, 《球堆积札记》，《加拿大数学杂志》，19：251 - 267（1967年）7. J. Harnad, 《约翰·麦凯讣告》，Le Bulletin du Centre de Recherches Math´ematiques， https://www.crmath.ca/wp-content/uploads/2023/02/bulletin_crm_2023_28_1.pdf **8** L. Soicher 2022 。《约翰·麦凯讣告》，伦敦数学学会通讯， https://www.lms.ac.uk/sites/default/files/inline-files/NLMS_503_for%20web_0.pdf **9** Y.-H. He 。《约翰·麦凯，德威校友，讣告》，德威学院， https://www.dulwich.org.uk/old-alleynians-home/obituaries/board/1930s/post/john-mckay-oa-obituary **10** J. Harnad F. Lalonde P. Winternitz 27 29 。，，组织者，4月 - ，2007 http://www.crm.umontreal.ca/McKay07/index_e.shtml 47 。会议论文集发表于 AMS CRM会议论文集与讲义第：；2009年，ISBN 978-0-8218-4481-6。11. F. Klein R. Fricke, 《椭圆模函数理论讲义》（4卷），1890-2。12. D. Gorenstein R. Lyons R. Solomon M. Aschbacher D. Smith I. Capdeboscq et al., 《有限单群分类》，第1 - 9卷，AMS，1983 - 2021。13. J. A. Gallian, 《有限单群的探索》，Math Mag，49，4（1976），第163 - 180页。14. R. Griess, 《怪兽单群的结构》。载于 Scott、Gross、Fletcher（编），有限群会议论文集（犹他大学，1975 978 012633650 4 ）。波士顿，ISBN - - 。，，《怪兽群的唯一性证明》。《数学年刊》130卷第3期（1989）：567-602。 https://doi.org/10.2307/1971455。16. J. H. Conway S. P. Norton, 《怪兽月光》，《伦敦数学学会通报》。11，308-339，1979年。17. M. Ronan *Symmetry and the Monster*，ISBN 978-0-19-280723-6，牛津大学出版社，2006年。18. T. Gannon *Moonshine beyond the Monster: The Bridge Connecting Algebra Modular Forms and Physics*，ISBN 978-0-521-83531-2。剑桥专著，2006年。19. M. Du Sautoy *Finding Moonshine A Mathematician's Journey Through Symmetry*，ISBN 978-0-00- 721461 7, 2008 - 。，《怪兽月光：简明导论》，Reson. **20** V. Tatitscheff [1902 03118 [ ]] **27** 2022 12，2107 2126 （）第 - 期，arXiv: . math.NT。21. V. G. Kac, 《无限维代数、戴德金的 q 函数、经典莫比乌斯函数与非常奇异公式》，《数学进展》30（1978），85-136。22. P. Fong, 《怪兽群—模形式联系中出现的特征标》，载于《圣克鲁兹有限群会议》，《纯数学研讨会论文集》，37， 1980 557 559 AMS（）第 - 页。，，，〈以模函数 J 为特征标的费舍尔–格里斯怪兽的自然表示〉，《美国国家科学院院刊》81.10（1984）：3256 - 3260。24. R.E. Borcherds, 《顶点代数、卡茨–穆迪代数与怪兽群》，《美国国家科学院院刊》，83（1986）第3068–3071页；-, 《怪兽月光与怪兽李超代数》，《数学发明》 109 1992 405 444 （）第 **25** M. Bhargava et al. eds. *Finite simple groups: thirty years of the Atlas and beyond* - 页。。，。。，《当代数学》。第 694 卷。AMS，2017 年（“纪念《图谱》并向 John Conway 致敬”，2015 年 11 月 2 - 5 日，普林斯顿大学）26. H. Kisilevsky, 《关于认识 John McKay 的一些想法》，CRM讣告，2022年。27. A. Hanany 和 Y.-H. He, 《非阿贝尔有限规范理论》，JHEP 02 (1999) ，013 [arXiv:hep-th/9811183]。28 V. Arnold https://www.maths.ed.ac.uk/~vbranick/papers/arnold4.pdf 《辛化、复化与数学三位一体》，多伦多讲座，1997年。**29** 。A. Evseev, 《麦凯猜想与布劳尔归纳定理》，《伦敦数学学会会议论文集》，106（6）2013，1248 - 1290。 [1009 1413 [ ]] **30** arXiv: . math.RT。J. L. Alperin, 《块理论的主要问题》，有限群会议论文集（犹他大学，犹他州帕克城，1975 1976， 341 356 ），Academic Press，纽约，第 - 页。GAP Group，，，**31** *GAP – Groups Algorithms and Programming* 2022 https://www. *Version 4.12.2*；，。gap-system.org **32** 1506 07690 [ ] 。 G. Malle B. Späth, 《奇数次数特征标》，arXiv: . math.RT。，《素数 2204 2， 06373 [ ] 的阿尔佩林-麦凯猜想》，**33** L. Ruhstorfer 2023 arXiv: . math.RT。OEIS基金会（），《在线整数序列百科全书》， http://oeis.org **34**

John McKay 的作品

35. Atkin, A., Bratley, P., Macdonald, I. & McKay, J. 关于m维分拆的一些计算。 *Proc.*. pp. - ( ) 36. *Cambridge Philos. Soc.* **63** 1097 1100 1967 Bratley, P. & McKay, J. 更多亲和数。 *Math. Comp.*. 22 pp. 677-678 (1968) 37. McKay, J. 一种计算有限群特征标表的方法。 *Computers In Mathematical Research* 140 148 1968 . pp. - ( ) 38. Higman, G. & McKay, J. 关于阶为 $50,232,960$ *Theory Of Finite Groups* 的扬科简单群。 . *(Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968)* 65 77 1969 pp. - ( ) 39. Higman, G. & McKay, J. 关于阶为50,232,960的扬科简单群。 *Bull. London Math. Soc.*. 1 pp. 89-94；勘误，见同上, 1 (1969), 219 (1969) 40. McKay, J. 表格勘误：M. Hall, Jr. 和 J. K. Senior 所著《阶为 2^n的群》，($n \leq 6$)（麦克米伦，纽约, 1964）。 *Math. Comp.*. 23, 691-692 (1969) 41. Higman, G. & McKay, J. 更正：关于阶为 $50,232,960$ *Bull. London Math.* 的扬科简单群。 . *Soc.* 1969 1, 219 ( ) 42. Higman, G. & McKay, J. 关于阶为50,232,960的扬科简单群。 *Bull. London Math. Soc.*. 1, 89-94 (1969) 43. McKay, J. 从生成元与关系构造有限群的特征标表。*Computational Problems In Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*. pp. 89-100 (1970) 44. Bratley, P., Lunnon, F. & McKay, J. 亲和数及其分布。 *Math. Comp.*. 24 pp. 431-432 (1970) 45. McKay, J. & Wales, D. 阶为604,800和50,232,960的简单群的乘子。 *J. Algebra*. 17 pp. 262-272 (1971) 46. McKay, J. 多维分拆。 *Combinatorial Mathematics And Its Applications (Proc. Conf.,* . pp. - ( ) 47. *Oxford, 1969)* 183 184 1971 McKay, J. & Wales, D. 希格曼-西姆斯简单群的乘子。 *Bull. London Math. Soc.*. 3 pp. 283-285 (1971) 48. McKay, J. 子群与置换特征标。 *Computers In Algebra And Number Theory (Proc.* . pp. - ( ) *SIAM-AMS Sympos. Appl. Math., New York, 1970)* 177 181 1971 **49** 18 1971 397 . J. McKay，简单群的一个新不变量。 **50** *J. Algebra* **20** 416 Notices AMS ( )，. McKay, J. 奇数次不可约表示。 . pp. -418 (1972) 51. McKay, J. Leech 格的一种构造。 *Finite Groups '72 (Proc. Gainesville Conf., Univ. Florida,* . pp. - ( ) 52. *Gainesville, Fla., 1972)* 117 118 1973 McKay, J. 有限单群的计算。 *Proceedings Of The Second International Conference On The Theory Of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)* 448 452 1974 . pp. - ( ) 53. McKay, J. 对称群不可约特征标的最大次数。 *Math. Comp.*. 30, 624-631 (1976) 54. Jansson, W. & McKay, J. 关于 Mathieu 群的更多结果 M_{22}。 *Canadian J. Math.*. 28, 929-937 (1976) 55. Fischer, J. & McKay, J. 非阿贝尔单群G，$|G| < 10^6$ —极大子群。 *Math. Comp.*. 32, 1293-1302 (1978) 56. McKay, J. & Young, K. 非阿贝尔单群G，$|G| < 10^6$ *Math.* —极小生成对。 . - *Comp.* **33**, 812 814 1979 ( ) 57. Erbach, D., Fisher, J. & McKay, J. 以 PSL(2, 7) 为伽罗瓦群的多项式。 *J. Number Theory*. 11, 69-75 (1979) 58. McKay, J. 关于计算伽罗瓦群的一些评论。 *SIAM J. Comput.*. 8, 344-347 (1979) 59. Cannon, J., McKay, J. & Young, K. 非阿贝尔单群G，$G < 10^5$ *Comm.* —表示。 . - ( ) *Algebra* **7**, 1397 1406 1979 60. McKay, J. 非阿贝尔单群G，$|G| < 10^6$ —特征标表。 *Comm. Algebra*. 7, 1407-1445 (1979) 61. McKay, J. 图、奇点与有限群。 *The Santa Cruz Conference On Finite Groups (Univ.* . pp. - ( ) 62. *California, Santa Cruz, Calif., 1979)* **37** 183 186 1980 McKay, J. 嘉当矩阵、有限四元数群与克莱因奇点。 *Proc. Amer. Math.* . 81, 153- ( ) 63. *Soc.* 154 1981 McKay, J., Patera, J. & Sharp, R. 复合运算的第二和第四指标。 *J. Math. Phys.*. 22, 2770-2774 (1981) 64. Ford, D. & McKay, J. 表示与考克斯特图。 *The Geometric Vein*. pp. 549-554 (1981) 65. Butler, G. & McKay, J. 次数不超过十一的传递群。 *Comm. Algebra*. 11, 863-911 (1983) 66. Lam, C., Thiel, L., Swiercz, S. & McKay, J. 阶为10的射影平面中卵形不存在。 *Discrete Math.*. 45, 319-321 (1983) 67. McKay, J. 图、奇点与有限群。 *Uspekhi Mat. Nauk*. 38, 159-162 (1983)，由S. A. Syskin从英文翻译 68. Kolesova, G. & McKay, J. 计算伽罗瓦群的实用策略。 *Computational Group Theory (Durham, 1982)* 297 299 1984 . pp. - ( ) 69. McKay, J. & Regener, E. 置换群在r元子集上的作用。 *Comm. Algebra*. 13, 619-630 (1985) 70. Soicher, L. & McKay, J. 在有理数域上计算伽罗瓦群。 *J. Number Theory*. 20, 273-281 (1985) 71. Dummit, D., Kisilevsky, H. & McKay, J. L函数的乘积。 *Finite Groups: coming Of Age (Montreal, Que., 1982)* **45** 89 98 1985 . pp. - ( )

72. Ford, D. & McKay, J. 从多项式到伽罗瓦群。 *EUROCAL '85, Vol. 2 (Linz, 1985)*. 204 pp. 535-536 (1985) 73. McKay, J. & Stauduhar, R. 舒尔定理的补遗。 *J. Reine Angew. Math.*. 377 pp. 219-220 (1987) 74. McKay, J. 关于判别式的计算。 *Amer. Math. Monthly*. 94, 523-527 (1987) 75. Conder, M. & McKay, J. 有限置换群传递性的一个必要条件。 *Bull. London* . 20, 235- ( ) 76. McKay, J. *Math. Soc.* 238 1988
计算伽罗瓦理论的进展。 *Computers In Algebra (Chicago, IL, 1985)*. 111 pp. 99-101 (1988) 77. Ford, D. & McKay, J. 从有理数域上的多项式计算伽罗瓦群。*(New York, 1984)* **113** 145 150 1989 *Computer Algebra* . pp. - ( ) 78. Ford, D. & McKay, J. 拉马努金关于ˆI-乘积的工作的影响。 *Proc. Indian Acad. Sci. Math.* . 99, 221- ( ) 79. McKay, J. *Sci.* 229 1989
& Strauss, H. 怪兽月光的q级数与头部特征标的分解。*Comm. Algebra*. 18, 253-278 (1990) 80. Darmon, H. & McKay, J. 连分数与具有不动点的置换。 *Amer. Math. Monthly*. 98, 25-27 (1991) 81. Alexander, D., Cummins, C., McKay, J. & Simons, C. 完全可复制函数。 *Groups,Combinatorics & Geometry (Durham, 1990)* **165** 87 98 1992 . pp. - ( ) 82. Casperson, D. & McKay, J. 对称函数、m元子集与伽罗瓦群。 *Math. Comp.*. 63, 749-757 (1994) 83. Ford, D., McKay, J. & Norton, S. 关于可复制函数的更多结果。 *Comm. Algebra*. 22, 5175-5193 (1994) 84. Cohn, H. & McKay, J. 模不变量的自发生成。 *Math. Comp.*. 65, 1295-1309 (1996) 85. Casperson, D., Ford, D. & McKay, J. 理想分解与子域。 *J. Symbolic Comput.*. 21, 133-137 (1996) 86. McKay, J. 关于Harada-Lang椭圆曲线的一则注记。 *Groups Difference Sets And The Monster* , , . pp. - ( ) 87. Conder, *(Columbus, OH, 1993)* **4** 409 410 1996
M. & McKay, J. Golay码的标记。 *New Zealand J. Math.*. 25, 133-139 (1996) 88. Mattman, T. & McKay, J., 计算函数域上的伽罗瓦群。 *Math. Comp.*. 66, 823-831 (1997) 89. McKay, J. & Stauduhar, R. 求不可约多项式根之间的关系。 *Proc. 1997* . pp. - ( ) 90. Conway, J., *International Symposium On Symbolic And Algebraic Computation (Kihei, HI)* 75 77 1997
Hulpke, A. & McKay, J. 关于传递置换群。 *LMS J. Comp. Math.*. 1 pp. 1-8 (1998) 91. McKay, J. & Sebbar, A. Fuchsian群、Schwarzian导数与theta函数。 *C. R. Acad. Sci. Paris I* . - ( ) 92. McKay, J. 半仿射 *Math.* **327**, 343 348 1998
考克斯特-戴因金图与 $G \subseteq SU(2, C)$。 *Canad. J. Math.*. 51 pp. 1226-1229 (1999)，献给H. S. M. Coxeter，以庆祝他90岁生日 93. Harnad, J. & McKay, J. 模不变量与广义Halphen系统。 *SIDE III: symmetries And Integrability Of Difference Equations (Sabaudia, 1998)* **25** 181 195 2000 . pp. - ( ) 94.

J. McKay and A. Sebbar 编者，《月光及相关主题》，蒙特利尔月光研讨会论文集，魁北克省蒙特利尔，1999 30 2001 0 8218 2879 7 年5月。CRM会议论文集与讲义，AMS ISBN：- - -。McKay, J. & Sebbar, A. Fuchsian群、自守函数与Schwarzian导数。 . 318, 255-275 (2000) 96. Harnad, J. & McKay, J. 广义Halphen型方程的模解。 *Math. Ann.* **95** *R. Soc. Lond. Proc.* . - ( ) 97. McKay, J. 完全可 *Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **456**, 261 294 2000
复制函数之间的线性依赖关系。 *Proceedings On Moonshine And Related Topics (Montreal, QC, 1999)* **30** 117 118 2001 . pp. - ( ) 98. McKay, J. & Sebbar, A. 算术半稳定椭圆曲面。 *Proceedings On Moonshine And Related Topics (Montreal, QC, 1999)* **30** 119 130 2001 . pp. - ( ) 99. McKay, J. 怪兽月光的要义。*Suzuki* **32** 347 353 2001 *Groups And Combinatorics:in Memory Of Michio* . pp. - ( ) 100. Cox, D., McKay, J. & Stevenhagen, P. 主模与类域。 *Bull. LMS*. 36, 3-12 (2004) 101. Conway, J., McKay, J. & Sebbar, A. 关于月光的离散群。 *Proc. AMS*. 132, 2233-2240 (2004) 102. McKay, J. & Sebbar, A. 可复制函数：导论。 *Frontiers In Number Theory Physics And* , , . pp. - ( ) 103. McKay, J. *Geometry. II* 373 386 2007
& Sevilla, D. 分解可复制函数。 *LMS J. Comput. Math.*. 11 pp. 146-171 (2008) 104. Conway, J., McKay, J. & Trojan, A. 正特征函数域上的伽罗瓦群。 *Proc.* . 138, 1205- *Amer. Math. Soc.* 1212 2010
( ) 105. Friedrich, R. & McKay, J. 自由概率与复数上同调。 *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*. 33, 116-122 (2011) 106. He, Y.-H. & McKay, "N=2 规范理论：同余子群、陪集图与模曲面。"*J. Math. Phys.*. 54, 012301, 24 (2013) [arXiv:1201.3633 [hep-th]]. 107. He, Y.-H., McKay, J. & Read, J., "模子群、儿童画与椭圆K 3 *LMS* 曲面"。pp. - ( ) arXiv: . *J. Comput. Math.* **16** 271 318 2013 [1211 1931 [ ]] math.AG . 108. Y.-H. He 和 J. McKay，"Eta乘积、BPS态与K 3 **01** 2014 113 曲面"，JHEP ( )，arXiv: . [1308 5233 [ ]] hep-th。

109. He *Finite Simple Groups: Thirty Years Of*, *The Atlas And Beyond* **694** 1 2 2017 https://doi.org/10.1073/pnas.81.10.3256 [1408 Y.-H. & McKay, J. 月光与生命的意义。. pp. - ( ), arXiv: . 2083 [ ]] math.NT 。**110.** El Basraoui, A. & McKay, J. 完全可复制函数的施瓦茨导数方程。 *LMS J. Comput.* 。**20**，30- ( ) **111.** Y.-H. *Math.* 52 2017 He 和 J. McKay，“散在与例外”，[arXiv:1505.06742 [math.AG]]。**112.** A. Chen、Y.-H. He 和 J. Mckay，“Erland Samuel Bring 的《代数方程的变换》”，[arXiv:1711.09253 [math.HO]]。**113.** Tatitscheff, V.、He, Y.-H. & McKay, J. 尖点、同余群与怪兽素描。 *Indag. Math.*。 **31**, 1015 1065 2020 [1812 11752 [ ]] - ( ) arXiv: . math.NT。 J. McKay & Y.-H. He，关于怪兽群的新方法的柏讲座。 **114** *ICCM Not.* **10**，71-88 (2022) [arXiv:2106.01162 [math.HO]]。**115.** P.-P. Dechant、P. Cameron、Y.-H. He、J. McKay， *A-D-E*，剑桥大学出版社，即将出版。

YANG-HUI HE 伦敦数学科学研究所，英国皇家研究院，*21 Albemarle Street*，伦敦 *W1S 4BS*，英国& 莫顿学院，牛津大学，*OX14JD*，英国
hey@maths.ox.ac.uk