arXiv:2305.00852v2 [math.ST] 1 Jun 2024

加权（残余）方差熵及其应用**

Shital **Saha***和 Suchandan **Kayal**†鲁尔克拉国家理工学院数学系，鲁尔克拉-*769008*，印度

摘要

近年来，研究不确定性度量的变异性已成为信息论中的一个新兴课题。对此，数位作者在近期提出并研究了方差熵的概念。本文研究加权变熵和加权残余变熵，并探讨这些变异性度量的若干理论结果，例如单调变换的影响及其界限。本文还阐述了加权残余变熵相较于残余变熵的重要性。此外，我们研究相干系统的加权变熵，以及比例风险率模型的加权残余变熵。我们还提出一种基于核的加权残余变熵非参数估计量，并使用模拟数据和两个真实数据集演示该估计方法。

关键词： 加权变熵；残余寿命；单调变换；界；相干系统；比例风险模型；非参数估计。

MSCs： 62N05；60E05；94A17。

缩略语

PMF： 概率质量函数

SE： 香农熵

PDF： 概率密度函数

WSE： 加权香农熵

CDF： 累积分布函数

*电子邮箱地址：shitalmath@gmail.com, 520MA2012@nitrkl.ac.in

†电子邮箱地址（通讯作者）：kayals@nitrkl.ac.in, suchandan.kayal@gmail.com **已被《**计算与应用数学杂志**》接收。

WRSE： 加权残余香农熵

变熵： 方差熵**加权方差熵：** 加权方差熵**WRVE：** 加权残余变熵**平均残余寿命：** 平均残余寿命**残余寿命方差：** 残余寿命方差**比例风险率：** 比例风险率

1 引言

香农（1948）提出的《熵》概念，已广泛用于计算系统的混沌和不确定性。对于概率质量函数（PMF）为 $P(X = x_i) = p_i$ 的离散型随机变量 X，其中 $i = 1, \ldots, n$，香农熵（SE）定义为

$$S(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \tag{1.1}$$

其中，“log”表示自然对数。公式（1.1）量化了随机变量 X 所包含的信息。显然，$S(X)$ 仅是事件发生概率的函数。在某些情况下，为了量化随机试验中包含的不确定性，有必要同时考虑这些概率和事件的一些定性特征。例如，在双人游戏中，玩家需要同时考虑不同随机策略的概率以及与这些策略相对应的胜利。为了计算一个概率试验中所包含的信息，其中的基本事件同时由其概率和某些定性权重表征，Gui a.su（1971）提出了离散型随机变量 X 的加权熵，其定义如下（另见 Guiasu（1986））

$$S^w(X) = -\sum_{i=1}^{n} w_i p_i \log p_i, \tag{1.2}$$

其中，$w_i \geq 0$ 称为与第 i 个基本事件相对应的权函数。权函数通常由分析者根据具体情况指定。

对于非负绝对连续随机变量 X，其概率密度函数（PDF）为 $f(\cdot)$，其香农熵（SE）和加权香农熵（WSE）分别定义为

$$H(X) = -\int_0^\infty f(x) \log f(x) dx \text{ and } H^x(X) = -\int_0^\infty x f(x) \log f(x) dx, \tag{1.3}$$

在文献中， $H(X)$ 和 $H^{x}(X)$ 也分别称为微分熵和加权微分熵。在式（1.3）中， $H^{x}(X)$ 被积函数中的因子 x 可视为一个权函数，用于线性强调事件 $\{X = x\}$ 的发生。值得一提的是，在式（1.3）中对 $H^{x}(X)$ 积分时，可以用一般的权函数 $w(x) \geq 0$ 替代 x 。请注意，微分熵是一种与平移无关的度量，而加权微分熵则与平移有关。在某些情况下，这一性质使 $H^{x}(X)$ 比 $H(X)$ 更有用。有关加权微分熵的详情，请参阅 Di Crescenzo 和 Longobardi（2006）。

记 $IC(X) = -\log f(X)$ 为非负绝对连续随机变量 X （其概率密度函数为 $f(\cdot)$）的随机信息量。于是， $H(X) = E[IC(X)]$, 也就是说，式（1.3）中的 SE 是 X. 的信息含量的期望。我们注意到，在离散情形下可以证明 $IC(X)$ 的合理性；在这种情况下，它表示通过使平均码长最小化的编码方案表示 X 所必需的基本比特数（见 Shannon（1948年））。对于连续情形，仍然可以将 $IC(X)$ 称为信息含量，尽管其编码解释并不成立（见 Bobkov 和 Madiman（2011年））。微分熵的取值范围是扩展实数轴，而离散随机变量的 SE 始终非负。关于微分熵的其他一些缺陷，可参见 Schroeder（2004年）。微分熵的概念已广泛应用于随机建模及各种应用领域。鉴于信息含量在信息论、概率论和统计学中的重要性，研究其性质具有意义。Bobkov 和 Madiman（2011年）研究发现，当概率密度函数为对数凹时，在高维情形下，信息含量会集中于熵附近。有时，两个随机变量具有相同的 SE。区间 (0,1) 上均匀分布与均值为 $1/e$ 的指数分布的 Shannon 熵相等，且均为零。在这种情况下，研究信息含量在熵附近的集中性这一概念有助于分析。信息含量越集中于熵附近，所得结果就越好。可以通过 $IC(X)$ 的方差来计算这种集中程度，该方差称为方差熵。近年来，计算机科学家开始关注方差熵，将其用于衡量信源离散度；它在数据压缩中也有许多应用，详情可参考 Kontoyiannis（1997年）以及 Kontoyiannis 和 Verd´u（2014年）。设 X 是一个非负绝对连续随机变量，其概率密度函数为 $f(\cdot)$，则方差熵定义为（见 Fradelizi 等人（2016年））

$$VE(X) = Var(-\log f(X)) = \int_0^\infty f(x)(\log f(x))^2 dx - \left(\int_0^\infty f(x) \log f(x) dx \right)^2. \quad (1.4)$$

类似地，离散随机变量 X，其取值为 x_i、$i = 1$、……、 n，其方差熵可定义为（参见 Di Crescenzo 和 Paolillo（2021））

$$VE^*(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [\log p_i]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \right]^2, \quad (1.5)$$

其中 $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1$, ……, n. 由（1.4）可知， X 的方差熵始终为非负值。对于均匀分布，其值为零。方差熵表示信息含量围绕熵的离散程度。已有多位研究者对方差熵进行了研究，并

讨论了其性质，包括一些刻画结果。在这方面，可参阅 Bobkov 和 Madiman（2011年）、Arıkan（2016年）、Fradelizi 等人（2016年）、Di Crescenzo 和 Paolillo（2021）以及 Maadani 等人（2022）。特别地，Bobkov 和 Madiman（2011年）证明了当一个 n 维随机向量具有对数凹密度函数时，其信息含量 $IC(X)$ 具有集中性质。Arıkan （2016年）确立了极化变换输出端的方差熵之和小于或等于输入端的方差熵之和；当且仅当至少有一个输入的方差熵为零时，等号成立。Fradelizi 等人（2016年）给出了具有对数凹密度的随机向量的方差熵界，该界比 Bobkov 和 Madiman（2011年）提出的界更精确。Di Crescenzo 和 Paolillo（2021）引入了残余变熵，并研究了其各种性质及相关应用，包括比例风险模型和奥恩斯坦-乌伦贝克跳跃扩散过程的首次通过时间。最近，Maadani 等人（2022）研究了次序统计量的方差熵。作者基于方差熵引入了一种新的随机序，并研究了该随机序与其他随机序之间的关系。此外，还可参阅 Buono 等人（2022）、Raqab 等人（2022）以及 Sharma 和 Kundu（2023年）关于方差熵的一些研究结果。

与微分熵不同，式（1.3）中给出的加权微分熵可以表示为 $H^x(X) = E(-X \log f(X))$。记

$$IC^w(X) = -w(X) \log f(X), \tag{1.6}$$

对于给定的权函数选择 $w(x) = x$. 我们将 $IC^x(X)$ 称为加权随机信息含量。因此，加权微分熵是 X. 的加权信息含量的期望。在统计学中，可以将加权信息含量视为加权对数似然函数。本文介绍随机变量 X 的加权变熵（WVE），并研究其性质。我们稍后会看到，加权变熵并非仿射不变，而方差熵则是仿射不变的。也就是说，方差熵无法区分随机过程在不同时间点的信息含量变化。使用加权变熵可以弥补这一缺陷。请注意，在各种通信与传输问题中，需要用方差度量来表达事件的有用性，这也促使了加权变熵的应用。此外，人类视觉系统的一个重要特征是能够以尺度不变和仿射平移不变的方式识别物体。详情请参见 Wallis（1996）。要利用生物学上逼真的网络实现这种理想行为颇具挑战。事实上，得知某个设备无法运行，或某个神经元在给定时间间隔内未能释放尖峰，与得知此类事件发生在另一个宽度相同的时间间隔内，所包含的信息显然不同。因此，在某些情况下，我们需要采用依赖于平移的信息/方差度量，例如，为这些分布赋予不同的度量。在这类情形下，可以运用加权变熵，获得优于通常方差熵的结果。

本文组织如下。第 2 节介绍 WVE 并讨论其一些性质。我们得到了某些分布的 WVE 的闭式表达式，并给出了仿射变换后随机变量的 WVE。同时还给出了 WVE 的各种界。在第 3 节中，我们提出 WRVE 并给出一些结果，得到了 WRVE 的各种界，并研究了 WRVE 在

一般单调变换下的性质。此外，我们对研究 WRVE 的合理性进行了说明。针对指数分布和均匀分布，我们比较了 WRVE 与 WRE。第 4 节讨论相干系统的 WVE，并提出了一些界。第 5 节研究比例风险率模型下的 WRVE。第 6 节重点研究 WRVE 的非参数估计量。为说明所提出的估计方法，我们采用了一个模拟数据集和两个真实数据集。最后，第 7 节总结全文。

在本文其余部分中，我们假设随机变量均为非负的绝对连续随机变量。凡使用导数之处，均假设导数存在。使用记号“′”表示导数，例如 $h'(x) = \frac{d}{dx}h(x)$。

2 加权变熵

在本节中，我们介绍 WVE 并讨论其各种性质。设 X 是一个非负的绝对连续随机变量，其概率密度函数为 $f(\cdot)$。带权信息量 X，记为 $IC^w(X) = -w(X)\log f(X)$，其权函数为 $w(\cdot)$，则其方差定义为

$$\begin{aligned} VE^w(X) = Var[IC^w(X)] &= E[(IC^w(X))^2] - [E(IC^w(X))]^2 \\ &= \int_0^\infty w^2(x)f(x)[\log f(x)]^2dx - \left[\int_0^\infty w(x)f(x)\log f(x)dx\right]^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

由式 (1.3) 中的 $H(X)$ 和式 (1.4) 中的 $VE(X)$ 的表达式可知，SE 和方差熵不依赖于随机变量 X 的实现值，而只依赖于其概率密度函数。对于 WSE 和 WVE，这一结论并不成立。由式 (1.3) 和式 (2.1) 可容易看出，WSE 和 WVE 同时依赖于概率密度函数和随机变量的实现值。对于取值为 x_i、$i = 1$、.....、n 的离散随机变量 X，WVE 为

$$VE^{*^w}(X) = \sum_{i=1}^n w_i^2 p_i[\log p_i]^2 - \left[\sum_{i=1}^n w_i p_i \log p_i\right]^2, \tag{2.2}$$

其中，$w_i \geq 0$ 是与事件 $\{X = x_i\}$对应的权函数。（2.2）中的加权方差熵衡量概率试验所提供的信息含量的变异性，该变异性同时取决于事件的概率以及可能事件的定性（客观或主观）权重。定性权重通常是物理学中的权重，或决策理论中的效用。尽管为每个基本事件赋予权重并非易事，但通常我们会根据目标，为更重要或更有用的事件赋予较大的权重。具体而言，可以为每个概率事件赋予非负数值（权重），使其与该事件的重要性或意义成正比。根据权重的取值，加权方差熵可化为不同的变异性度量。例如，

若选择权重为 1，则加权方差熵化为（1.5）中给出的方差熵。此外，令权重为事件概率与事件所提供信息之比，并乘以缩放因子 $_{1\ 2}$，即

$$w_i = -\frac{p_i}{2\log p_i}. \tag{2.3}$$

此时，（2.2）中的加权方差熵可化为离散型随机变量 X 的方差扩展熵，定义如下（参见 Vaselabadi 等人（2021））。

$$VEx(X) = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^3 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)^2\right]. \tag{2.4}$$

关于加权熵的重要性以及权函数的一些选择，我们参考 Guia,su（1971）中的详细讨论。由（1.5）式可以很容易地证明，离散随机变量的方差熵关于其概率（p_1，. . . ， p_n）具有置换对称性。然而，对于（2.2）式中给出的加权方差熵，这一性质并不成立。现在，我们考虑一个例子，以说明加权方差熵关于所赋予的概率不具有置换对称性。

Ex示例 2.1. 考虑一个离散型随机变量 $X \in \{1,2,3\}$ *wit* h

$$P(X=1) = p, \quad P(X=2) = 1-p-q, \quad and \quad P(X=3) = q,$$

其中 $0 \le q \le 1-p \le 1$。利用 *(1.2)* 和 *(2.2)*，并假设 $w_i = x_i$，我们得到

$$S^x(X) = -x_1 p\log p - x_2(1-p-q)\log(1-p-q) - x_3 q\log q \tag{2.5}$$

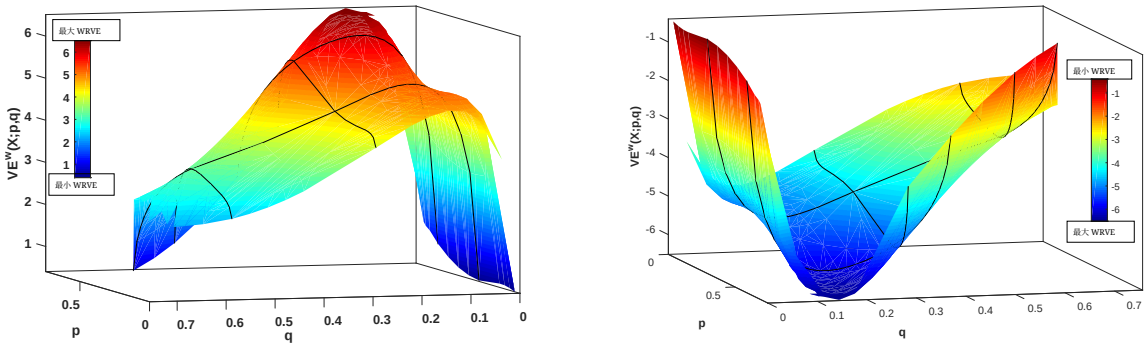
and

$$\begin{aligned} VE^{*^x}(X) &= x_1^2 p(\log p)^2 + x_2^2(1-p-q)(\log(1-p-q))^2 + x_3^2 q(\log q)^2 - [S^x(X)]^2 \\ &= VE^{*^x}(X;p,q), \ say, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $x_1 = 1$、$x_2 = 2$ 和 $x_3 = 3.$。现在，考虑两组不同的概率 $\{p = 0.5, 1-p-q = 0.2$、$q = 0.3\}$ 和 $\{p = 0.3, 1-p-q = 0.2, q = 0.5\}$，它们分别对应两个不同的 $X.$ 分布。这里，*VE *(X; p, q)* $= 0.13296441046 =$ *VE*(X; q, p)*，也就是说，这两个不同分布的变熵相同。但是，它们的加权方差熵并不相同。这里，*VE*$^{*^x}$*(X; p, q) =1.92508326678*，而 *VE*$^{*^x}$*(X; q, p)* $= 0.48838794637$，这表明加权方差熵不具有置换对称性。式 *(2.6)* 中加权方差熵的曲面图（俯视图和仰视图）见图 *1*。

在下一个示例中，我们使用 $w(x) = x$ 计算某些连续分布的式（2.1）中给出的加权方差熵。

例 2.2.



(a) (b)

图 1：(*a*) 示例 2.1 中分布对应的式 (2.6) 所给出的 WVE 的向上视图和 (*b*) 向下视图。

(*i*) 设 X 服从区间 (a, b) 上的均匀分布。加权方差熵可表示为

$$VE^x(X) = \frac{1}{12}(a-b)^2[\log(b-a)]^2,$$

该图如图$2(a)$ 所示，其中固定 a 的值，并令 b 变化。此外，请注意，对于区间$(0,1)$上均匀分布的随机变量，*WVE* 为0。从图中可以观察到，当参数 a 和 b 彼此接近时，正如预期，*WVE* 趋于零。

(ii) 假设 X 服从均值为正的指数分布 $1/\lambda.$，则加权方差熵为

$$VE^x(X) = \frac{1}{\lambda^2}[(\log\lambda - 4)^2 + 4],$$

其绘制结果如图 $2(b)$ 所示。从该图可以观察到，当 λ 取较大值时，加权方差熵接近于零。在此，变熵$^x(X) \lesssim 0.1201$，对于 $\lambda > 8$。

(iii) 设 X服从幂分布，其累积分布函数为 $F(x) = (\frac{x}{b})^k$、 $0 < x < b$、 $k > 0$ 和 $b > 0$。则加权方差熵为

$$\begin{aligned} VE^x(X) \;=\; & \frac{kb^2}{(k+2)^3}[(k+2)^2(\log(k/b^k))^2 + 2(k-1)(k+2)\log(k/b^k)\{(k+2)\log(b) \\ & - 1\} + (k-1)^2\{(k+2)^2(\log(b))^2 - 2\big((k+2)\log(b) - 1\big)\}] \\ & + \frac{(kb)^2}{(k+1)^2}[(k+1)\log(k/b^k) + (k-1)\{(k+1)\log(b) - 1\}]^2. \end{aligned}$$

该图分别针对不同的 b 和 k 取值，展示了 *WVE* 随 k 和 b 变化的情况，见图 $2(c)$ 和 $2(d)$ 。图中显示，幂分布的加权方差熵并非关于模型参数单调变化。

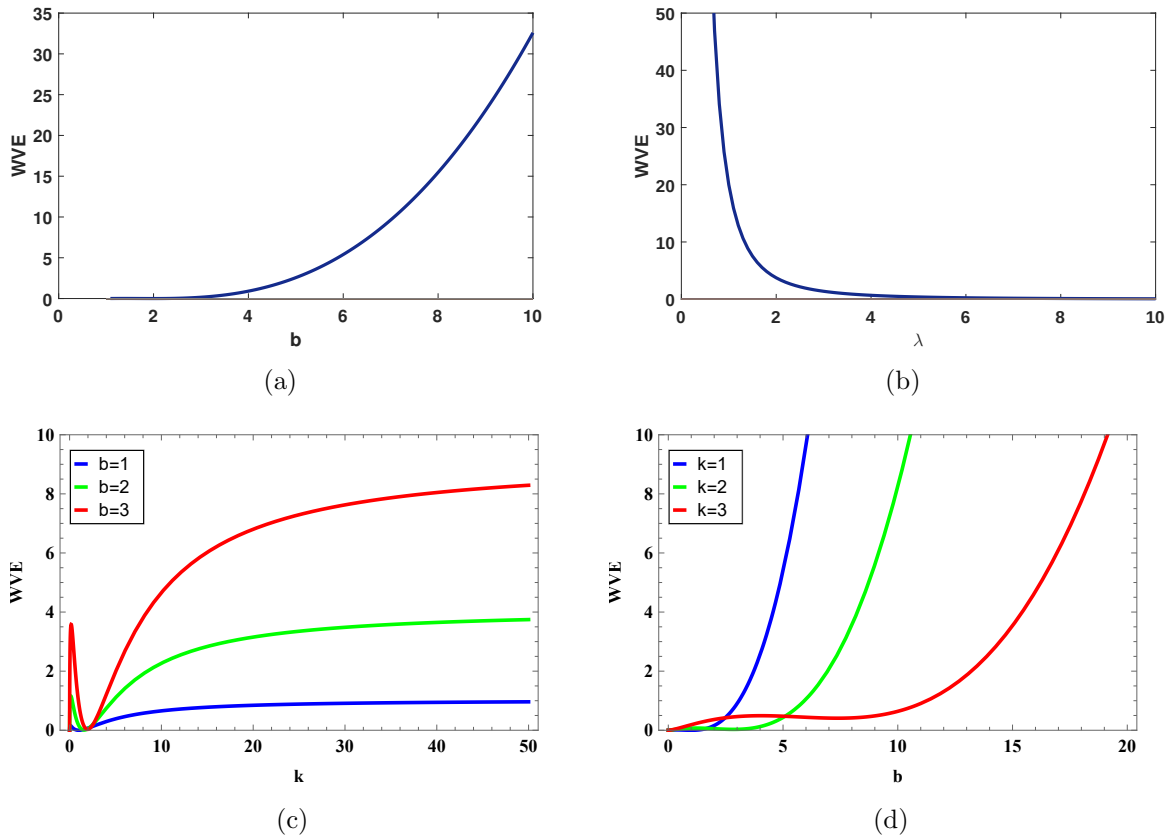


图 2：(*a*) 均匀分布相对于 b 的 WVE 图，如例 2.2(*i*) 所示，适用于 $a = 1$；(*b*) 指数分布相对于 λ 的 WVE 图，如例 2.2(*ii*) 所示；(*c*) 幂分布相对于 k 的 WVE 图，适用于 $b = 1,\ 2,\ 3$，如例 2.2(*iii*) 所示；以及 (*d*) 幂分布相对于 b 的 WVE 图，适用于 $k = 1,\ 2,\ 3$，如例 2.2(*iii*) 所示。

要得到感兴趣的随机变量的加权方差熵的闭式表达式，并不总是容易的。在这种情况下，可以使用某种变换，根据已知分布的加权方差熵计算变换后随机变量（新分布）的加权方差熵。以下结果对此很有帮助。

命题 2.1。 假设 X 是一个概率密度函数为 $f(\cdot)$ 且满足 $Y = aX + b$、$a > 0$ 和 $b \geq 0$ 的随机变量。那么， Y 的 *WVE* 可表示为

$$VE^{y}(Y) = VE^{w_1}(X) + (a \log a)^2 Var(X) + 2 \log a (H^{w_1^2}(X) - H^{w_1}(X) E[aX + b]),$$

其中，对于给定的 $w_1(x) = ax + b$， $H^{w_1}(X)$ 和 $VE^{w_1}(X)$ 分别是 X 的 *WSE* 和 *WVE*。

证明。 记 $g(.)$ 为 $Y = aX + b$ 的概率密度函数，其中 $g(y) = \frac{1}{a} f(\frac{y-b}{a})$ $y > b$. 由 (2.1) 得，

我们有

$$VE^y(Y) = \int_0^\infty y^2 g(y)[\log g(y)]^2 dy - [H^y(Y)]^2. \tag{2.7}$$

此外,

$$\begin{aligned} H^y(Y) = -\int_0^\infty yg(y)\log g(y)dy &= -\int_b^\infty y\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)\log\left(\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)dy \\ &= -\int_0^\infty (ax+b)f(x)\{\log f(x) - \log a\}dx \\ &= H^{w_1}(X) + \log a\ E[aX+b] \end{aligned} \tag{2.8}$$

and

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^2 g(y)[\log g(y)]^2 dy &= \int_0^\infty (ax+b)^2 f(x)\{\log f(x) - \log a\}^2 dx \\ &= \int_0^\infty (ax+b)^2 f(x)\{\log f(x)\}^2 dx + 2\log a H^{w_1^2}(X) \\ &\quad +(\log a)^2 E[(aX+b)^2]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

将（2.8） 和（2.9）代入（2.7），即可得到所需结果。因此，证明完成。 d. ■

有时，未必总能得到 WVE 的闭式表达式。在这种情况下，界限有助于我们了解变异性度量。下一个命题给出了式（2.1）中定义的、权函数为 $w(x) = x$ 的 WVE 的上界。请注意，此处的界限取决于 WSE。

命题 2.2. 设 X 是一个非负的绝对连续随机变量，其概率密度函数为 $f(\cdot)$，满足

$$e^{-(\alpha x+\beta)} \le f(x) \le 1, \quad x > 0, \tag{2.10}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta \ge 0$。那么，

$$VE^x(X) \le H^{w_2}(X),$$

其中 H^{w_2}（X）是权函数为 w_2（x） $= \alpha x^3 + \beta x^2$. 的加权香农熵

证明。U nder在所作假设下，根据（2.1）式，经过一些化简，我们得到 in

$$\begin{aligned} VE^w(X) &\le -\int_0^\infty x^2 f(x)(\alpha x+\beta)\log f(x)dx \\ &= -\int_0^\infty (\alpha x^3 + \beta x^2) f(x)\log f(x)dx \\ &= H^{w_2}(X). \end{aligned}$$

因此，结论得证。 ■

下面的例子表明，洛马克斯分布满足命题 2.2 中的条件。

例 2.3。 设 X服从洛马克斯分布，其累积分布函数为 $F(x) = 1-(1+\frac{x}{a})^{-b}$, x >0, a–> 0, $b > 0$。那么，通过图示可以证明（见图 3），对于某些取值选择，条件$e^{-(\alpha x+\beta)} \leq f(x) \leq 1$, $x > 0$ 成立，其中取值为 α、 β、 a 和 b。

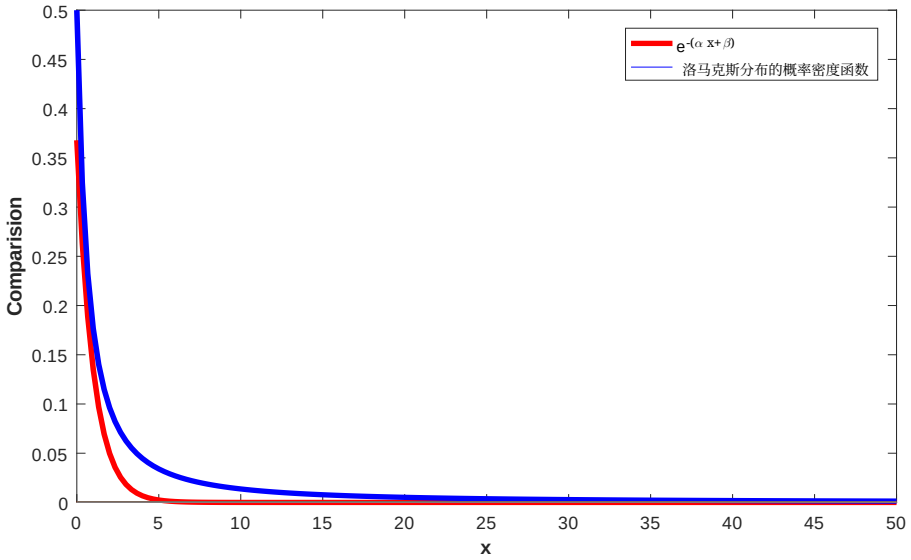


图 3： $e^{-(\alpha x+\beta)}$ 在 $\alpha = 1$、 $\beta = 0.5$ 下的图像，以及参数$a = 1$ 和 $b = 1$ 如例 2.3 所示的洛马克斯分布的概率密度函数

.

接下来，我们研究单调变换下的加权方差熵，并探讨其特征。记

$$\eta_1(x) = \phi(x)\log\phi'(x) \text{ and } \eta_2(x) = \phi(x)\log(-\phi'(x)),\ x > 0.$$

定理 2.1。 设 X 为一个非负随机变量，其概率密度函数为 $f(\cdot)$。假设 $\phi(\cdot)$ 是严格单调、连续且可微的函数；并且 $Y = \phi(X)$。那么，

$$VE^y(Y) = \begin{cases} VE^{\phi}(X) + Var[\eta_1(X)] - 2E[\phi(X)\eta_1(X)\log f(X)] - 2H^{\phi}(X)E[\eta_1(X)], \\ \textit{if } \phi \textit{ is strictly increasing;} \\ \\ -VE^{\phi}(X) - Var[\eta_2(X)\big)] + 2E[\phi(X)\eta_2(X)\log f(X)] - 2\big(H^{\phi}(X)\big)^2 \\ -2H^{\phi}(X)E[\eta_2(X)] - 2\{E[\eta_2(X)]\}^2, \ \textit{if } \phi \textit{ is strictly decreasing,} \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $H^{\phi}(X)$ 是权函数为 $w(x) = \phi(x)$ 的加权香农熵，而变熵$^{\phi}(X)$ 由式 *(2.1)* 给出，其中$w(x) = \phi(x)$。

证明。 首先，我们考虑 $\phi(\cdot)$ 严格递增。然后，由式 (2.1) 可将$Y = \phi(X)$ 的加权方差熵表示为

$$\begin{aligned} VE^{y}(Y) &= \int_0^{\infty} y^2 f(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(y))} \right| \left[\log f(\phi^{-1}(y)) - \log \phi'(\phi^{-1}(y)) \right]^2 dy \\ &\quad - \left[\int_0^{\infty} y f(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(y))} \right| \left[\log f(\phi^{-1}(y)) - \log \phi'(\phi^{-1}(y)) \right] dy \right]^2 . \end{aligned} \tag{2.12}$$

现在，将 $y = \phi(x)$ 代入 (2.12) 的右侧，经过一些化简后，即可得到所需结果。当 $\phi(\cdot)$ 严格递减时，证明过程类似，故为简洁起见省略。

■

以下注记可由定理 2.1 直接得出，说明加权方差熵在尺度变换和位置变换下的影响。

注记 2.1。

(a) 设 $Y = aX$, $a > 0$ 为尺度变换。那么，

$$\begin{aligned} VE^{ax}(aX) &= a^2 \big\{ VE^{x}(X) + (\log a)^2 Var(X) - 2 \log a \big(H^{x}(X) E(X) \\ &\quad + E[X^2 \log f(X)] \big) \big\}. \end{aligned}$$

(b) 设 $Y = X + b$, $b \geq 0$ 为位置变换。那么，

$$VE^{x+b}(X + b) = VE^{x}(X) - b\, VE(X),$$

其中 $VE(X)$ 是 X 的方差熵，由 *(1.4)* 给出。

Fradelizi 等人（2016年）证明，对于具有对数凹概率密度函数的分布，其方差熵小于 1。对数凹密度意味着概率密度函数属于强单峰密度类。此外，Di Crescenzo 和 Paolillo（2021）针对递增似然比（ILR）的随机寿命 X，即其概率密度函数为对数凹的情形，得出了类似结果。最近，Di Crescenzo 等人（2021）在 X_t 具有递增失效率（IFR）且其概率密度函数严格递减时，得出了类似结果。因此，自然会想到探究对于对数凹密度函数的情形，由（2.1）给出的加权方差熵是否小于 1。接下来，我们考虑一个例子，说明加权方差熵不像方差熵和残余变熵那样具有此类上界。

例 2.4. 考虑概率密度函数如下的威布尔分布

$$f(x) = c x^{c-1} e^{-x^c}, \quad x > 0,\ c > 1, \tag{2.13}$$

显然，关于 x 它是对数凹的，因为 $\frac{d^2 \log f(x)}{dx^2} = -\frac{c-1}{x^2} - c^{()}(c-1)x^{c-2} < 0$，对于 $c > 1.$ 。对于这一分布，我们计算了 $c = 2$的 *WVE*，结果为 $VE^{w}(X) \approx 1.87$，由此可知，一般而言，对数凹概率密度函数的 *WVE* 不小于 1 。

3 加权残余方差熵

本节研究系统残余寿命的 WVE，并讨论其若干性质。残余寿命是系统的一项重要可靠性度量，它提供了系统存活至时间 $t > 0$.时与其剩余寿命相关的信息。它记为 $X_t = [X - t|X > t]$.。 X_t的概率密度函数为 $f_t(x) = {}^{f(x)\tilde{F}(t)}\ x > t$，其中$\tilde{F}(t) = P(X > t)$。然后， X的加权残余变熵（WRVE）定义为

$$VE^w(X;t) = Var[IC^w(X_t)] = \int_t^\infty \frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\left(w(x)\log\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\right)^2 dx - [H^w(X;t)]^2, \qquad (3.1)$$

其中， $IC^w(X_t) = -w(X)\log f_t(X)$，且 $H^w(X;t)$ 是权函数为 $w(x)$ 的加权残余香农熵（WRSE），定义为

$$H^w(X;t) = \int_t^\infty w(x)\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\log\left(\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\right)dx.$$

对于 $w(x) = x$，式（3.1）中的 WRVE 可进一步表示为

$$\begin{aligned} VE^w(X;t) &= \frac{1}{\tilde{F}(t)}\int_t^\infty x^2 f(x)[\log f(x)]^2 dx - \Lambda^2(t)E[X^2|X > t] - 2\Lambda(t)H^{w^*}(X;t) \\ &\quad -[H^w(X;t)]^2, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

其中， $\Lambda(t) = -\log \tilde{F}(t)$ 是累积风险率函数， $H^{w^*}(X;\ t)$ 是权函数为 $w^*(x) = x^2$ 的 WRSE。容易得到

$$\lim_{t\to 0} VE^w(X;t) = VE^w(X),$$

其中，变熵 $^w(X)$ 是式（2.1）中给出的加权方差熵。接下来，我们将得到某些分布的 WRVE 闭式表达式。

例 3.1。

(i) 假设 X 在区间 $(0, b)$ 上服从均匀分布。那么，*WRVE* 为

$$VE^x(X;t) = \frac{1}{12}[(b-t)\log(b-t)]^2,\ b > t > 0.$$

(ii) 令 X *h* 取一个概率密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$、 $\lambda > 0$、 $x > 0$ 的指数分布。然后 ，

$$\begin{aligned} VE^x(X;t) &= \frac{1}{\lambda^2}\big[(\lambda^2t^2 + 2\lambda t + 2)(\log\lambda + \lambda t)^2 - 2(\lambda^3t^3 + 3\lambda^2t^2 + 6\lambda t + 6)(\log\lambda + \lambda t) \\ &\quad +(\lambda^4t^4 + 4\lambda^3t^3 + 12\lambda^2t^2 + 24\lambda t + 24) - \{(\lambda t + 1)\log\lambda - (2 + \lambda t)\}^2\big]. \end{aligned}$$

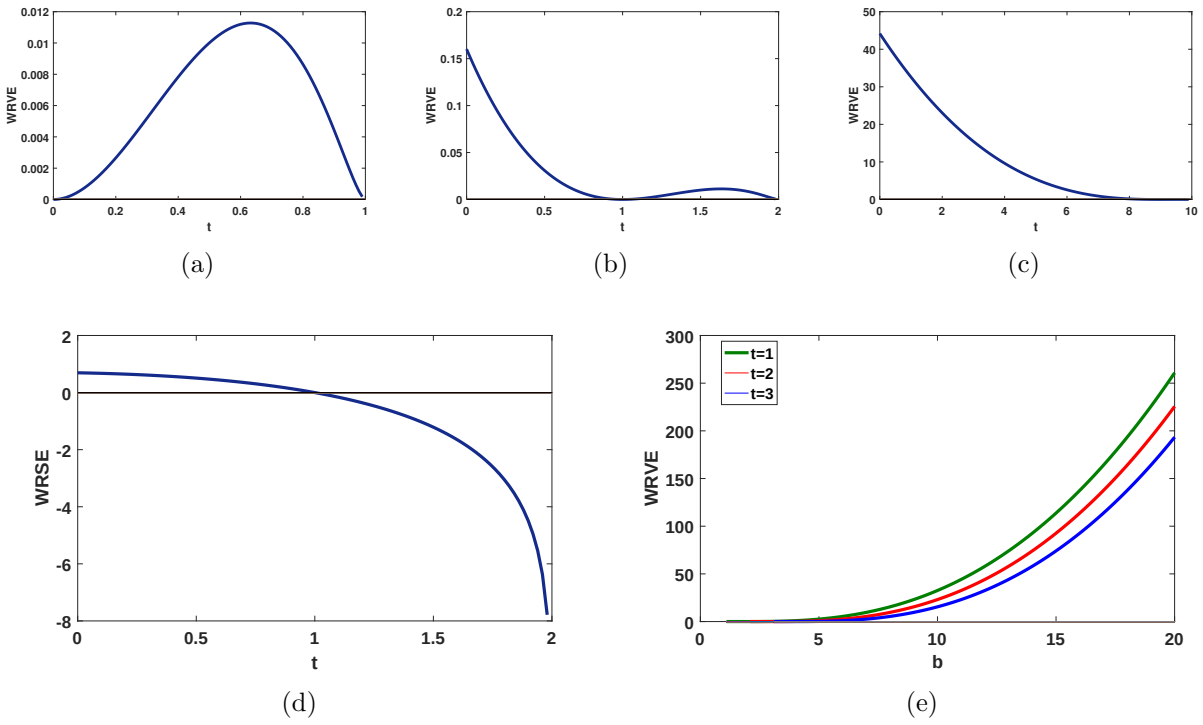


图 4：如例 3.1（i）所示，在区间 (0，b) 上均匀分布的 WRVE 关于 t 的图像，其中 (a) $b = 1$、(b) $b = 2$ 以及 (c) $b = 10$。(d) 均匀分布在 (0，2) 上关于 t 的 WRSE 图像。(e) 对于不同的 t. 值，均匀分布的 WRVE 关于 b, 的图像

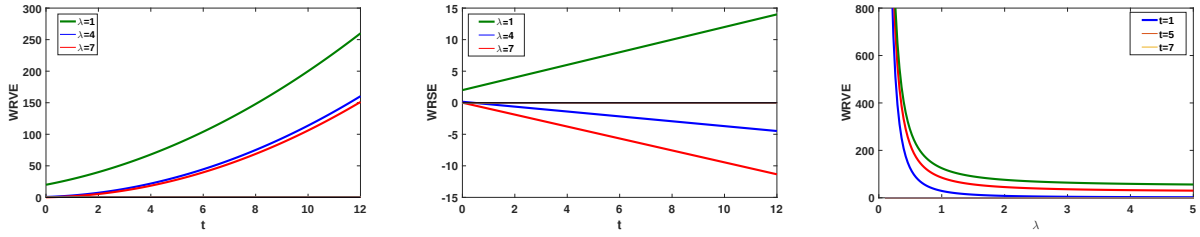
(iii) 令 X 为一个 幂随机变量，其累积分布函数为 $F(x) = x^k$、 $0 < x < 1$ 和 $k > 0$。该 n,

$$\begin{aligned} VE^x(X;t) &= \frac{k}{(k+2)^3(1-t^k)}[2(k-1)^2 - (k-1)^2 t^{k+2}\{(k+2)^2(\log t)^2 \\ &\quad -2(k+2)\log t\} + 2(k-1)(k+2)\psi(k,t)\{t^{k+2}(1-(k+2)\log t) - 1\} \\ &\quad +(k+2)^2\left(\psi(k,t)\right)^2(1-t^{k+2})] - \frac{k^2}{(k+1)^2(1-t^k)^2}[(k+1)\psi(k,t) \\ &\quad -t^{k+1}\{(k+1)\psi(k,t) + (k^2-1)\log t - (k-1)\} - (k-1)]^2, \end{aligned}$$

其中 $\psi(k,\ t) = \log(\frac{k}{1-t^k})$。

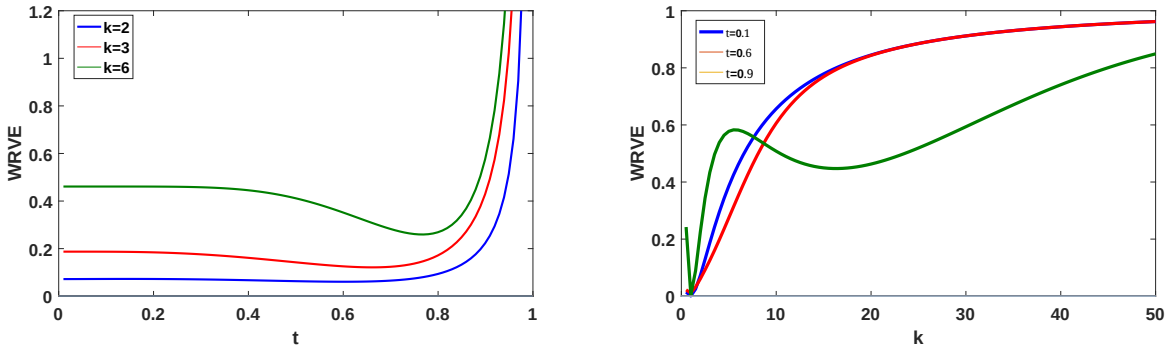
我们展示了例 3.1(i) 中均匀分布相对于 t 的 WRVE 曲线，见图 4(a)、(b)、以及 (c), 以观察其在 b、分别取 1、2 和 10、时的行为。从图中可以清楚地看出，分布的 WRVE 通常并非单调变化。我们还在图 4(d) 中给出了均匀分布相对于 t 的加权残余香农熵（WRSE）图，其中 $b = 2$. 从图 4(b) 和 (d) 可以看出，WRVE 与 WRSE 的单调性表现并不相同。在图 4(e) 中，我们

给出了均匀分布相对于 b 的 WRVE 图，t 取若干不同值。例 3.1(ii) 中指数分布的 WRVE 和加权残余香农熵（WRSE）图见图 5(a) 和 (b)，其中 λ. 取不同值。图 5(c) 展示了指数分布相对于 λ 的 WRVE 曲线，其中 $t = 1$、5、7。在图 6(a) 和 6(b) 中，我们分别绘制了幂分布相对于 t 和 k 的 WRVE 图，这表明幂分布的 WRVE 相对于 t 和 k 并非单调变化。



(a) (b) (c)

图 5：如示例 3.1（ii）所示，指数分布相对于 t 的（a）WRVE 和（b）WRSE 图，其中 $\lambda = 1$、$\lambda = 4$, 和 $\lambda = 7$。（c）如示例 3.1（ii）所示，不同 $t = 1$,5,7 取值下，指数分布相对于 λ 的 WRVE 图。



(a) (b)

图 6：如例 3.1(iii) 所示的幂分布的 WRVE 图，分别对应 (a) t 和 (b) k。

以下结果给出了 WRVE 关于 t 的导数的显式表达式。我们回顾一下，绝对连续随机变量 X 的活力函数由 Kupka 和 Loo（1989年）提出，其定义为

$$v(t) = E[X|X > t] = \int_t^{\infty} x \frac{f(x)}{\tilde{F}(t)} dx. \tag{3.3}$$

活力函数可解释为年龄超过 $t > 0.$ 的系统的平均寿命。危险率是生存分析和可靠性理论中广泛使用的重要概念。它表示某个项目存活至时间 $t.$ 后的瞬时失效率。对于非负的绝对连续随机变量 X，危险率定义为

$$r(t) = \frac{f(t)}{\tilde{F}(t)},\ t > 0, \tag{3.4}$$

使得 $F(t) > 0.$

命题 3.1. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} VE^w(X;t) &= r(t)\{ VE^w(X;t) - 2(H^w(X;t)v(t) + H^{w^*}(X;t))^2 \\ &\quad -(H^w(X;t) + t\log r(t))^2\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中， $H^w(X;t)$ 和 $H^{w^*}(X;t)$ 分别是权函数为 $w(x) = x$ 和 $w^*(x) = x^2$的加权残余香农熵。

证明。 对 (3.2) 关于 t 求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} VE^w(X;t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\tilde{F}(t)}\int_t^\infty x^2 f(x)[\log f(x)]^2 dx\right) - \frac{d}{dt}\big(\Lambda^2(t)E[X^2|X>t]\big) \\ &\quad -2\frac{d}{dt}\big(\Lambda(t)H^{w^*}(X;t)\big) - \frac{d}{dt}\big([H^w(X;t)]^2\big) \\ &= \frac{f(t)}{(\tilde{F}(t))^2}\int_t^\infty x^2 f(x)[\log f(x)]^2 dx - \frac{1}{\tilde{F}(t)}t^2 f(t)[\log f(t)]^2 \\ &\quad -2\Lambda(t)r(t)E[X^2|X>t] - \Lambda^2(t)\frac{d}{dt}E[X^2|X>t] - 2r(t)H^{w^*}(X;t) \\ &\quad -2\Lambda(t)\frac{d}{dt}H^{w^*}(X;t) - 2H^w(X;t)\frac{d}{dt}H^w(X;t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

进一步,

$$\frac{d}{dt}\big(H^{w^*}(X;t)\big) = r(t)\{H^{w^*}(X;t) + t^2\log r(t) - E[X^2|X>t]\}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}\big(E[X^2|X>t]\big) = r(t)\{E[X^2|X>t] - t^2\}, \tag{3.8}$$

and

$$\frac{d}{dt}\big(H^w(X;t)\big) = r(t)\{H^w(X;t) + t\log r(t) - v(t)\}. \tag{3.9}$$

现在，将 (3.7)、(3.8)，和 (3.9) 代入 (3.6)，即可得到所需结果。证明至此完成。

■

接下来，我们给出 WRVE 的一个上界。

定理 3.1. 设 X 为一个满足 *(2.10)* 中条件的非负绝对连续随机变量，其概率密度函数为$f(\cdot)$。则对所有 $t>0$，有

$$VE^x(X;t) \leq H^{w_2}(X;t)+\Lambda^2(t)E[X^2|X>t],$$

其中 $H^{w_2}(X;t)$ 是权函数为 $w_2(x)=\alpha x^3+\beta x^2$的加权残余香农熵。

证明。 由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} VE^x(X;t) &= \int_t^\infty x^2\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}[\log f(x)+\Lambda(t)]^2dx-[H^x(X;t)]^2 \\ &\leq \int_t^\infty x^2\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}[\log f(x)+\Lambda(t)]^2dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

在 (3.10) 右侧的积分中使用 (2.10)，得

$$\begin{aligned} \int_t^\infty x^2\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}[\log f(x)+\Lambda(t)]^2dx &= \int_t^\infty x^2\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}(\log f(x))^2dx+2\int_t^\infty x^2\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\Lambda(t)\log f(x)dx \\ &\quad +\frac{\Lambda^2(t)}{\tilde{F}(t)}\int_t^\infty x^2f(x)dx \\ &\leq -\int_t^\infty x^2(\alpha x+\beta)\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}\log f(x)dx+\frac{\Lambda(t)}{\tilde{F}(t)}\int_t^\infty x^2f(x)dx \\ &\quad -2\Lambda(t)\int_t^\infty x^2(\alpha x+\beta)\frac{f(x)}{\tilde{F}(t)}dx \\ &= H^{w_2}(X;t)+\Lambda^2(t)E[X^2|X>t]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

现在，在 (3.10) 中使用 (3.11)，即可得到结论。 ■

接下来，我们考虑 考虑一个例子来说明前述定理。

例 3.2。 设 X 为累积分布函数为 $F(x)=1-e^{-x}$, $x\in(0,\infty)$ 的指数分布随机变量。那么，可以很容易地证明条件 $e^{-(\alpha x+\beta)}\leq f(x)\leq 1$, $x>0$ 在 $\alpha=1$ 和 $\beta=2$ 下成立。此外，

$$\begin{aligned} H^{w_2}(X;t)+\Lambda^2(t)E[X^2|X>t] = [&\alpha(t^4+4t^3+12t^2+24t+24)-(t^3+3t^2 \\ &+6t+6)(-\beta+\alpha t)-(t^2+2t+2)\beta t \\ &+t^2(t^2+2t+2)], \end{aligned}$$

其中 $\alpha=1$和 $\beta=2$。$VE^x(X;t)$ 的闭式表达式见例 *3.1*（ii）。现在，在图 7 中，绘制了 $H^{w_2}(X;t)+\Lambda^2(t)E[X^2|X>t]$ 和 $VE^x(X;t)$ 的图像，展示了定理 *3.1* 的结果。

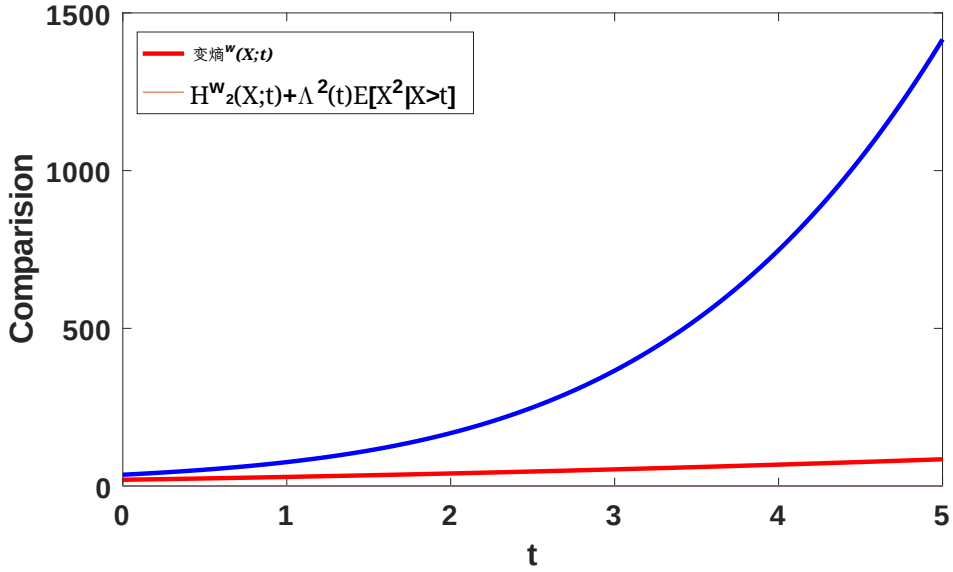


图 7：如例 3.2 所示的 $H^{w_2}(X;\ t)\ +\Lambda^2(t)E[X^2|X>t]$ 和 变熵 $^{x}(X;\ t)$。

接下来，我们用残余寿命方差（VRL）得到 WRVE 的一个下界，其定义为

$$\sigma^2(t)=Var[X-t|X>t]=\frac{2}{\tilde{F}(t)}\int_t^{\infty}dv\int_v^{\infty}\tilde{F}(u)du-[\mu(t)]^2, \tag{3.12}$$

其中， $\mu(t)$称为平均残余寿命（平均残余寿命），定义为

$$\mu(t)=E[X-t|X>t]=\int_t^{\infty}\frac{\tilde{F}(x)}{\tilde{F}(t)}dx. \tag{3.13}$$

定理 3.2. 设 X_t 是平均残余寿命有限 $\mu(t)$ 且残余寿命方差有限$\sigma^2(t)$的残余寿命。那么，

$$VE^{x}(X;t)\geq\sigma^2(t)\{1+E[-\eta_t(X_t)\log f_t(X_t)]+E[X_t\eta_t^{'}(X_t)]\}^2, \tag{3.14}$$

其中 $\eta_t(x)$ 是由该关系得到的实值函数

$$\sigma^2(t)\eta_t(x)f_t(x)=\int_0^x(\mu(t)-u)f_t(u)du,\ x>0.$$

证明。 对于具有概率密度函数 $f(\cdot)$、均值 μ，且方差σ^2的绝对连续随机变量 X，可以得到以下不等式（参见 Cacoullos 和 Papathanasiou（1989年））

$$Var[h(X)]\geq\sigma^2(E[\xi(X)h^{'}(X)])^2, \tag{3.15}$$

其中，实值函数 $\xi(\cdot)$ 由关系式 $\sigma^2\xi(x)f(x) = \int_0^x (\mu(t) - u)f(u)du$. 定义。为了证明该结果，我们假设以 X_t 作为参考随机变量，其中$h(x) = IC^x(x) = -x\log f(x)$。因此，

$$\begin{aligned} VE^x(X;t) = Var[-X_t \log f_t(X_t)] &\geq \sigma^2(t)\left\{E\left[\eta_t(X_t)\left(X_t \log f_t(X_t)\right)'\right]\right\}^2 \\ &= \sigma^2(t)\left\{E[-\eta_t(X_t)\log f_t(X_t)] - E\left[\eta_t(X_t)X_t\frac{f_t'(X_t)}{f_t(X_t)}\right]\right\}^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

进一步，

$$\begin{aligned} E\left[\eta_t(X_t)X_t\frac{f_t'(X_t)}{f_t(X_t)}\right] &= E\left[X_t\left(\frac{\mu(t)-X_t}{\sigma^2(t)} - \eta_t'(X_t)\right)\right] \\ &= -1 - E[X_t\eta_t'(X_t)]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

将 (3.17) 代入 (3.16)，即可得到所需结果，从而完成定理的证明。

■

作为定理 3.2 的推论，我们得到以下注记。

注 3.1.

(i) 设 $\eta_t(x)$ 在 x 中递增。那么，

$$VE^x(X;t) \geq \sigma^2(t)(E[\eta_t(X_t)\log f_t(X_t)])^2,\ t \geq 0.$$

(ii) 对于 $f_t(x) \leq 1$，有

$$VE^x(X;t) \geq \sigma^2(t)(E[X_t\eta_t'(X_t)])^2,\ t \geq 0.$$

接下来，我们研究一般单调变换下的 WRVE。

定理 3.3。设 $\phi(\cdot)$ 是严格单调、连续且可微的函数，并且$Y = \phi(X)$，其中 X 是非负绝对连续随机变量。于是，

$$VE^y(Y;t) = \begin{cases} VE^\phi(X;\phi^{-1}(t)) - 2H^\phi(X;\phi^{-1}(t))E[\eta_1(X)|X > \phi^{-1}(t)] \\ +Var[\eta_1(X)|X > \phi^{-1}(t)] - 2E[\phi(X)\eta_1(X)\log\frac{f(X)}{\bar{F}(\phi^{-1}(t)}|X > \phi^{-1}(t)], \\ if\ \phi(\cdot)\ is\ strictly\ increasing, \\ \\ \overline{VE}^\phi(X;\phi^{-1}(t)) - 2\bar{H}^\phi(X;\phi^{-1}(t))E[\eta_2(X)|X \leq \phi^{-1}(t)] \\ +Var[\eta_2(X)|X \leq \phi^{-1}(t)] - 2E[\phi(X)\eta_2(X)\log\frac{f(X)}{F(\phi^{-1}(t))}|X \leq \phi^{-1}(t)], \\ if\ \phi(\cdot)\ is\ strictly\ decreasing, \end{cases} \tag{3.18}$$

其中，$\eta_1(x) = \phi(x)\log\phi'(x)$，$\eta_2(x) = \phi(x)\log(-\phi'(x))$，$H^\phi(X;t) = \int_t^\infty \phi(x)\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}\log\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}dx$，变熵 $^\phi(X;t) = \int_t^\infty \phi^2(x)\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}(\log\frac{f(x)}{\bar{F}(t)})^2dx - [H^\phi(X;t)]^2$，$\bar{H}^\phi(X;t) = \int_0^t \phi(x)\frac{f(x)}{F(t)}\log\frac{f(x)}{F(t)}dx$，以及变熵 $^\phi(X;t) = \int_0^t \phi^2(x)\frac{f(x)}{F(t)}(\log\frac{f(x)}{F(t)})^2dx - [\bar{H}^\phi(X;t)]^2$。 —— ——

证明。 设 $\phi(\cdot)$ 严格递增。然后，经过一些计算，我们得到

$$\begin{aligned} VE^{y}(Y;t) &= \int_{\phi^{-1}(t)}^{\phi^{-1}(\infty)} \phi^{2}(x)\frac{f(x)}{\tilde{F}(\phi^{-1}(t))}\left[\log\left\{\frac{f(x)}{\tilde{F}(\phi^{-1}(t))}\right\}\right]^{2}dx \\ &\quad -E[\phi^{2}(X)\{2\log\phi^{'}(X)\log\frac{f(X)}{\tilde{F}(\phi^{-1}(t)}-(\log\phi^{'}(X))^{2}\}|X>\phi^{-1}(t)] \\ &\quad -\{H^{\phi}(X;\phi^{-1}(t))+E[\phi(X)\log\phi^{'}(X)|X>\phi^{-1}(t)]\}^{2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

现在，证明的其余部分可直接由 (3.19) 得出。当 $\phi(\cdot)$ 严格递减时，证明过程类似。

■

下面，我们给出一个例子来说明定理 3.3。

例3.3。 设 X 为一个随机变量，其累积分布函数为 $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, $x>0$ 且 $\lambda>0$。我们考虑变换 $Y=\phi(X) = X^{2}$。这里， $\phi(\cdot)$ 是严格递增的。随机变量 Y 服从威布尔分布，其累积分布函数为 $G(x) = 1-e^{-\lambda\sqrt{x}}$, $x>0$, $\lambda>0$.现在，利用定理 *3.3*，我们得到 Y 的*WRVE*，为

$$\begin{aligned} VE^{y}(Y;t) &= \frac{12}{\lambda}(\log\lambda+\lambda\sqrt{t}-5)^{2}+2\lambda t\sqrt{t}(3-\log\lambda-\lambda\sqrt{t})\left(t+\frac{5}{\lambda}\sqrt{t}+\frac{20}{\lambda^{2}}\right) \\ &\quad -\left\{(\log\lambda+\lambda\sqrt{t}-3)\left(t+\frac{2\sqrt{t}}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^{2}}\right)-\lambda t\sqrt{t}\right\}^{2}+Var[X^{2}\log(2X)|X>\sqrt{t}] \\ &\quad -2\left\{(\log\lambda+\lambda\sqrt{t}-3)\left(t+\frac{2\sqrt{t}}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^{2}}\right)-\lambda t\sqrt{t}\right\}E[X^{2}\log(2X)|X>\sqrt{t}] \\ &\quad +(\log\lambda+\lambda\sqrt{t})^{2}\left(t^{2}+\frac{4t\sqrt{t}}{\lambda}\right)+\frac{60}{\lambda^{4}}(1+\lambda\sqrt{t})^{2}+\left(\lambda^{2}t^{3}+\frac{60}{\lambda^{4}}\right) \\ &\quad -2E\left[X^{4}\log(2X)\log\frac{\lambda e^{-\lambda X}}{e^{-\lambda\sqrt{t}}}|X>\sqrt{t}\right], \end{aligned}$$

which ***h*** 已在图8 中针对不同的 t 值相对于 λ 绘出。 .

接下来，我们研究 WRVE 在仿射变换下的性质。

推论 3.1. 设 X 是一个非负绝对连续随机变量。此外，设 $Y=aX+b$，其中 $a>0$ 和 $b\geq 0$。那么，

$$\begin{aligned} VE^{y}(Y;t) &= VE^{w_1}\left(X;\frac{t-b}{a}\right)+(\log a)^{2}E\left[aX+b|X>\frac{t-b}{a}\right]\left\{1-E\left[aX+b|X>\frac{t-b}{a}\right]\right\} \\ &\quad -2\log aH^{w_1}\left(X;\frac{t-b}{a}\right)\left\{1+E\left[aX+b|X>\frac{t-b}{a}\right]\right\}, \end{aligned}$$

其中，$VE^{w_1}(X;\frac{t-b}{a})$ 和 $H^{w_1}(X;\frac{t-b}{a})$ 分别为 *WRVE* 和加权残余香农熵，权函数为 $w_1(x) = ax+b$。

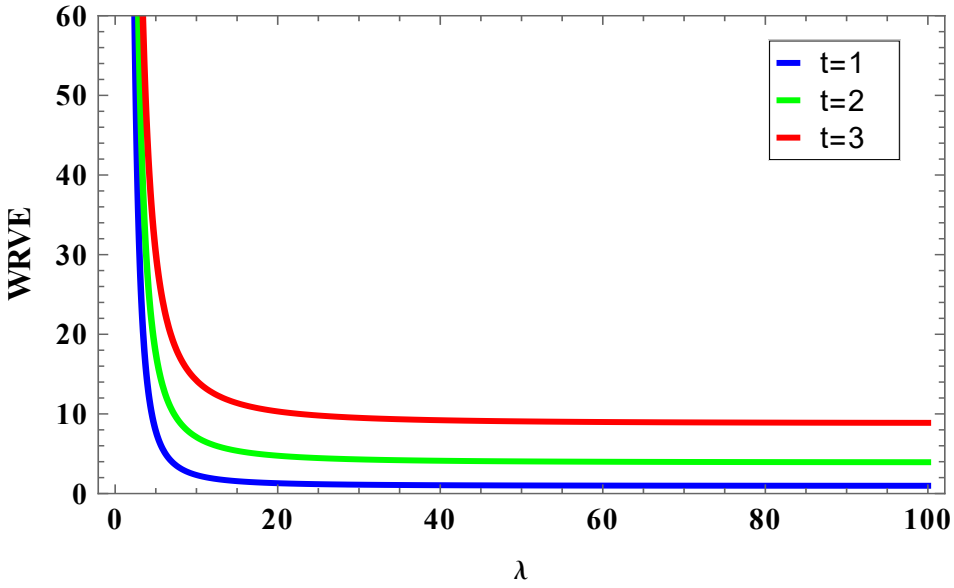


图 8：如例3.3所示， λ的 WRVE 随 $t = 1$、2、5 的变化图

.

证明。 Y的累积分布函数和概率密度函数分别为 $G(x) = F(\frac{x-b}{a})$ 和 $g(x) = \frac{1}{a}f(\frac{x-b}{a})$, — $x > b$。现在，利用这些结果，经过一些化简即可得到该推论的证明，因此略去。 ■

以下示例给出了推论 3.1 的一个应用。

例3.4。 假设 X 是一个服从帕累托*I*型分布、累积分布函数为$F(x) = 1 - (\frac{\alpha}{x})^{\beta}$, $x > \alpha > 0$, $\beta > 0$的随机变量。考虑变换 $Y = X - b$, $b > 0$. 那么，对于 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 2$, 由推论 *3.1* 可得

$$\begin{aligned} VE^{y}(Y;t) &= \log(3(t+b)^3)\{(3t^2+3bt+b^2)\log(3(t+b)) + \frac{8}{3}(9t^2+9bt+b^2)\} \\ &\quad +16(3t^2+3bt+b^2)(\log(t+b))^2 + \frac{16}{3}(18t^2+27tb+11b^2)\log(t+b) \\ &\quad -\{2(3t+b)\log(t+b) + \frac{1}{2}(3t+b)\log(3(t+b)^3) + (3t+\frac{5b}{3})\}^2 \\ &\quad +\frac{8}{9}(108t^2+189tb+83b^2) - 8\log(3(t+b)^3)\log(t+b)(3t^2+3bt+b^2), \end{aligned}$$

其关于 b. 的图像绘于图 9 中。这里，我们考虑了 t.的三种不同取值

了解各种不确定性度量在现实问题中的作用至关重要。Burnhan 和 Anderson（2002年）认为，信息更多的分布应当优先考虑。这里，我们通过比较式（3.1）中的 WRVE 与指数分布和均匀分布的 RVE，展示所提度量的有效性。我们回顾

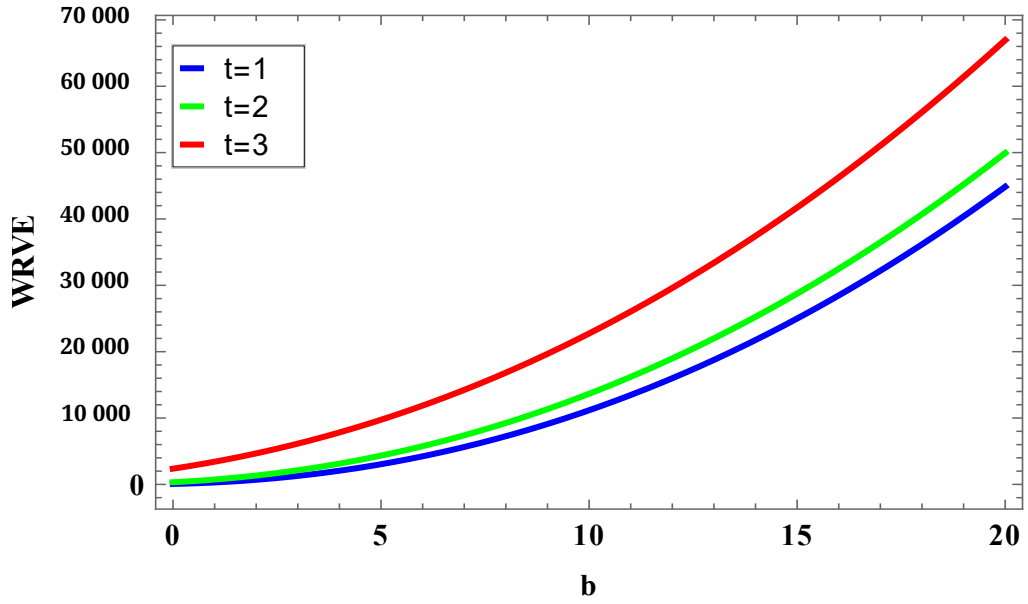


图9：例3.4中 WRVE 关于 b 的图形，其中 $t = 1$，2，5

.

一下，RVE 是由 Di Crescenzo 和 Paolillo（2021）提出的。作者还探讨了这一度量的各种性质。

(a) 图 10，展示了例3.1(ii)中得到的指数分布的加权相对熵，以及指数分布的 RVE（其值为 1）。从图 10 可以看出，对于不同的 $\lambda = 1$，5，7，12，WRVE 的图形覆盖面积大于 RVE 的图形。

(b) 图 11 展示了例3.1(i)中 (0，b) 上均匀分布的 WRVE 和 RVE 图形，其中 b 取不同值。注意，(0，b) 上均匀分布的 RVE 为零。从图 11($a - d$)，可以看出，WRVE 的覆盖面积大于 RVE 的覆盖面积。

4 相干系统的加权变熵

本节研究相干系统的加权方差熵。相干系统在许多现实应用中都很有用，例如工业系统、电信系统和石油管道系统。详情请参阅Elsayed（2012）。考虑一个由 n个组件组成的相干系统。该相干系统的寿命记为 T。该相干系统中 n个组件的随机寿命相互独立且服从相同分布，其共同的累积分布函数为 $F(\cdot)$。T 的累积分布函数表示为

$$F_T(x) = q(F(x)), \tag{4.1}$$

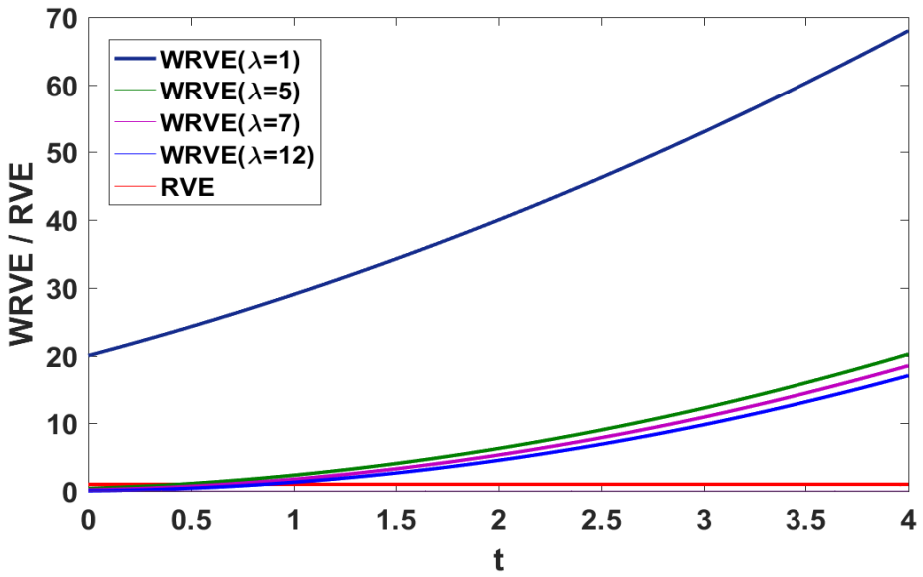


图10：不同 λ 取值下 WRVE 关于 t 和 RVE 的图。

其中， $q:\ [0,1]\to[0,1]$ 是失真函数（参见Navarro等（2013））。许多作者研究了相干系统中成熟的信息度量。例如，可参阅Toomaj等（2017）、Calı等（2020）以及Saha和Kayal（2023）的相关文献。我们回顾一下，失真函数取决于系统的结构以及部件寿命的联结函数。此外， $q(\cdot)$是连续递增的，且 $q(0)=0$ 以及 $q(1)=1$。有关失真函数的详情，请参阅Burkschat和Navarro（2018）。具有概率密度函数 $f_T(\cdot)$的 T 的加权方差熵定义为

$$\begin{aligned} VE^x(T) &= \int_0^\infty x^2 f_T(x)[\log f_T(x)]^2 dx - \left[\int_0^\infty x f_T(x)\log f_T(x)dx\right]^2 \\ &= \int_0^\infty \phi\big(F_T(x)\big)dx - \left[\int_0^\infty \psi\big(F_T(x)\big)dx\right]^2 \\ &= \int_0^\infty \phi\big(q(F(x))\big)dx - \left[\int_0^\infty \psi\big(q(F(x))\big)dx\right]^2 \\ &= \int_0^1 \frac{\phi\big(q(u)\big)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du - \left[\int_0^1 \frac{\psi\big(q(u)\big)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du\right]^2, \text{ using u=F(x)}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)\log f(F^{-1}(u))]^2 \tag{4.3}$$

and

$$\psi(u) = F^{-1}(u)f(F^{-1}(u))[-\log f(F^{-1}(u))], \tag{4.4}$$

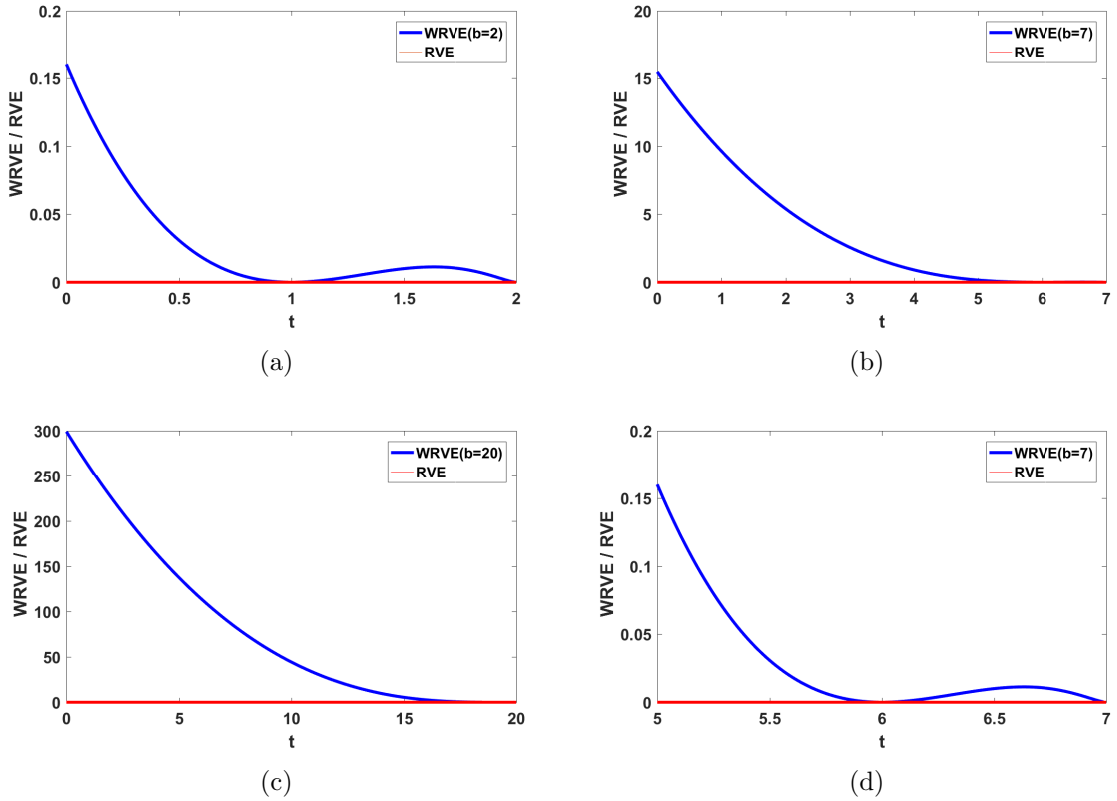


图 11：区间 $(0, b)$ 上均匀分布关于 t 的 WRVE 图，如例 3.1(i) 中所示，当 (a) $b = 2$、(b) $b = 7$ 和 (c) $b = 20$. (d) 时，区间 $(0,7)$ 上均匀分布关于 t 的 WRVE 图，如例 3.1(i) 中所示，当 $t \in (5,7)$。

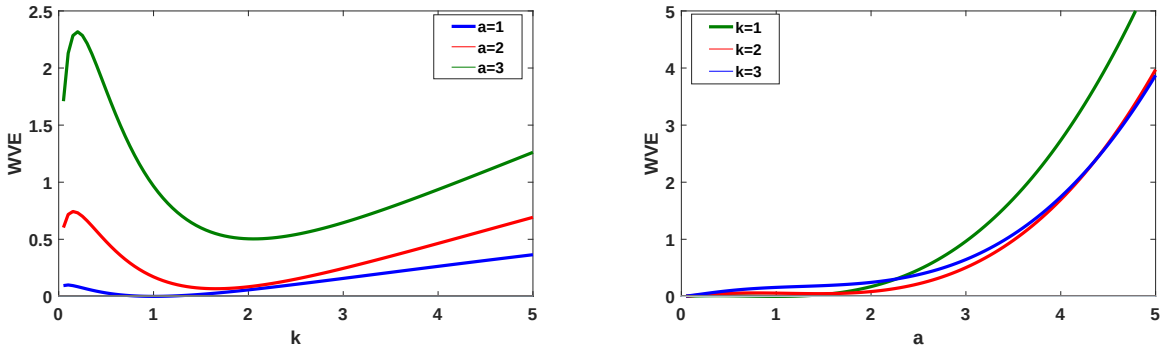
对于 $0 \le u \le 1$。接下来，我们考虑一个寿命为 $T = \max\{X_1, X_2\}$ 的相干系统，其中X_1 和 X_2 表示部件寿命。假设 X_1 和 X_2 相互独立，且都服从区间 $(0, a)$ 内的幂分布。

例 4.1。设 X_1 和 X_2 是具有相同累积分布函数 $F(x) = (\frac{x}{a})^k$ 的相干系统的部件寿命，$0 < x < a$、$k > 0$，并考虑寿命为 $T = X_{2:2} = \max\{X_1, X_2\}$ 的并联系统。失真函数为 $q(u) = u^2$，其中 $0 \le u \le 1$。利用 *(4.2)*，可得相干（并联）系统的加权方差熵为

$$\begin{aligned} VE^x(T) &= \frac{a^2}{(2+3/k)}\left[\big(\log(k/a)\big) - \frac{2(1-1/k)}{(2+3/k)}\right]^2 + \frac{4a^2(1-1/k)^2}{(2+3/k)^3} \\ &\quad -\left(\frac{a}{2+1/k}\right)^2\left[\log(k/a) - \frac{2(1-1/k)}{(2+1/k)}\right]^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

关于 k 和 a 的加权方差熵（*WVE*）图绘于图 $12(a)$ 和 $12(b)$ 中，

分别。



(a) (b)

图 12：示例 4.1 中，相干系统寿命的加权方差熵关于 (a) k 和 (b) a 的图。

现在，我们得到相干系统寿命的加权方差熵与其组件的加权方差熵之间的关系。

命题*4.1*。设 T 是一个相干系统的寿命，其组件同分布。失真函数记为 $q(\cdot)$。部件寿命记为 X，其累积分布函数为 $F(\cdot)$，概率密度函数为 $f(\cdot)$。另假设，对于所有 $u \in [0,1]$，$\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)\log f(F^{-1}(u))]^2$，且 $\psi(u) = F^{-1}(u)f(F^{-1}(u))[-\log f(F^{-1}(u))]$,。那么，若 $\phi\big(q(u)\big) \geq (resp. \leq)\phi(u)$，且 $\psi\big(q(u)\big) \leq (resp. \geq)\psi(u)$，对于 $0 \leq u \leq 1$，有

$$VE^x(T) \geq (resp. \leq) VE^x(X).$$

证明。 证明很直接，因此省略。 ■

接下来，我们用加权香农熵表示相干系统的加权方差熵，得到其界。

命题4.2。 考虑命题*4.1*中的相干系统。记上确界$_{u\in[0,1]}$ $^{\phi_{(q(u))}\,\phi(u)} = \beta_{1,\,u}$，其中 $\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)$ 对数 $f(F^{-1}(u))]^2$.那么，在假设（*2.10*）下，有

$$VE^x(T) \leq \beta_{1,u} H^{w_2}(X),$$

其中 $H^{w_2}(X)$ 是权函数为 $w_2(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ 的加权香农熵。

证明。 由 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} VE^x(T) &= \int_0^1 \frac{\phi\big(q(u)\big)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du - \left[\int_0^1 \frac{\psi\big(q(u)\big)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du\right]^2 \\ &= \int_0^1 \frac{\phi\big(q(u)\big)}{\phi(u)}\frac{\phi(u)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du - \left[\int_0^1 \frac{\psi\big(q(u)\big)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du\right]^2 \\ &\leq \left(sup_{u\in[0,1]}\frac{\phi(q(u))}{\phi(u)}\right)\int_0^1 \frac{\phi(u)}{f\big(F^{-1}(u)\big)}du \\ &\leq \beta_{1,u}\int_0^\infty x^2(-\alpha x-\beta)f(x)\log f(x)dx \\ &= \beta_{1,u}H^{w_2}(X). \end{aligned}$$

因此，证明完成。 ■

下面，我们将相干系统的加权方差熵界表示为部件寿命的加权方差熵和加权香农熵的函数。

命题 4.3. 考虑命题*4.1*中的相干系统。记$\sup_{u\in[0,1]}{}^{\phi_{(q(u))}\,\phi(u)} = \beta_{1,u}$, 其中 $\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)\log f(F^{-1}(u))]^2$. 则，

$$VE^x(T) \leq \beta_{1,u}[VE^x(X) + (H^x(X))^2].$$

证明。 证明过程很简单，因此为简洁起见不再赘述。 ■

以下命题给出了当相干系统的部件寿命的概率密度函数存在下界时，变熵 $^x(T)$ 的上界。

命题 *4.4.* 考虑命题*4.1*中的相干系统。设组件的概率密度函数为 $f(x)$，其支撑集为 S，且对所有 $x \in S.$， $f(x) \geq L > 0$。则，变熵 $^x(T) \leq \frac{1}{L}\int_0^1 \phi\big(q(u)\big)du$，其中 $\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)\log f(F^{-1}(u))]^2$.

证明。 根据所作假设，证明可由 (4.2) 直接得出。 ■

下面通过一个例子来说明命题 4.4。

例 4.2。 设 T 表示一个相干系统的寿命，其组件相互独立且同分布，服从对数均匀分布，分布函数为$F(x) = \log x - \log\alpha \log\beta - \log\alpha$，$0 < \alpha \leq x \leq \beta$。于是，$L = \beta^{\frac{1}{\log(\beta/\alpha)}}$，由命题 *4.4* 可得

$$VE^x(T) \leq \beta\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\int_0^1 \phi\big(q(u)\big)du,$$

其中 $\phi(u) = f(F^{-1}(u))[F^{-1}(u)\log f(F^{-1}(u))]^2$.

5 比例风险率模型的 WRVE

本节研究比例风险率（PHR）模型下的 WRVE。设~ ~X 和 Y 是两个非负随机变量，其生存函数分别为 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$，。若 Y 的生存函数可写为，则 X 和 Y 服从 PHR 模型

$$\tilde{G}(x) = [\tilde{F}(x)]^a,\ x > 0,\ a > 0. \tag{5.1}$$

Y 的概率密度函数为

$$g(x) = a[\tilde{F}(x)]^{a-1} f(x),\ x > 0, \tag{5.2}$$

其中，$f(x) = -\frac{d}{dx}\tilde{F}(x)$ 是 X 的（基准）概率密度函数。Cox（1959年）提出了比例风险率模型。此后，数位研究人员对比例风险率模型进行了研究。最近，Parsa等人（2018年）研究了比例风险率模型的基尼型指数刻画。在此，我们针对比例风险率模型引入 WRVE。Y 的累积风险率函数 $\Lambda^*(x)$ 为

$$\Lambda^*(x) = -\log \tilde{G}(x) = -\log[\tilde{F}(x)]^a = a\Lambda(x),\ x > 0, \tag{5.3}$$

~其中，$\Lambda(x) = -\log F(x)$ 是累积风险率函数。Y 的加权残余香农熵可表示为

$$\begin{aligned} H^x(Y;t) &= -\int_t^\infty x\frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\log g(x)dx - \int_t^\infty x\frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\Lambda^*(t)dx \\ &= \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^a}\left\{\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}\sigma(y:a)dy + a\Lambda(t)\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}\tilde{F}^{-1}(y^{1/a})dy\right\} \\ &= \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^a}\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}\gamma(y:a,t)dy, \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中，$y = [\tilde{F}(x)]^a$，$\sigma(y:a) = \tilde{F}^{-1}(y^{1/a})\log\left\{ay^{1-1/a}f[\tilde{F}^{-1}(y^{1/a})]\right\}$，并且

$$\gamma(y:a,t) = \tilde{F}^{-1}(y^{1/a})\log\left\{a\frac{y^{1-1/a}}{[\tilde{F}(t)]^a}f[\tilde{F}^{-1}(y^{1/a})]\right\}. \tag{5.5}$$

注意，$\tilde{F}^{-1}(y^{1/a}) = \sup\{x:\ \tilde{F}(x) \geq y^{1/a}\}$ 被称为 $\tilde{F}(\cdot)$ 的分位数函数。在下面的定理中，我们对比例风险率模型的 WRVE 进行求值。

定理5.1。设 Y 的生存函数由（*5.1*）给出。Y 的*WRVE*为

$$VE^x(Y;t) = \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^a}\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}[\gamma(y:a,t)]^2dy - \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^{2a}}\left\{\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}\gamma(y:a,t)dy\right\}^2, \tag{5.6}$$

其中，$\gamma(y:\ a,t)$ 在（*5.5*）中定义。

证明。 由 (3.1) 并利用 (5.1)， Y 的 WRVE 是

$$VE^x(Y;t)=\int_t^\infty \frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\left(x\log\frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\right)^2dx-[H^x(Y;t)]^2. \tag{5.7}$$

˜现在，使用 $y=[F(x)]^a$,

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\left(x\log\frac{g(x)}{\tilde{G}(t)}\right)^2dx &= \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^a}\Big\{\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}[\sigma(y:a)]^2dy\\ &\quad+2\Lambda^{(a)}(t)\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}\tilde{F}^{-1}(y^{1/a})\sigma(y:a)dy\\ &\quad+(\Lambda^{(a)}(t))^2\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}[\tilde{F}^{-1}(y^{1/a})]^2dy\Big\}\\ &= \frac{1}{[\tilde{F}(t)]^a}\int_0^{[\tilde{F}(t)]^a}[\gamma(y:a,t)]^2dy. \end{aligned}\tag{5.8}$$

最后，将（5.4）和（5.8）代入（5.7），即可证明该定理。 ■

利用风险函数和累积风险率函数的概念，可以得到 $\gamma(y:\ a,t)$ 的另一种表达形式

$$\gamma(y:a,t)=\Lambda^{-1}\left(-\frac{1}{a}\log y\right)\log\left\{aye^{a\Lambda(t)}r\left(\Lambda^{-1}(-\frac{1}{a}\log y)\right)\right\}. \tag{5.9}$$

设一个系统有 $n\ (\geq 1)$ 个组件串联。组件寿命$X_1,\ldots,X_n$相互独立且服从相同分布，其共同的累积分布函数为 $F(t)=P(X_i\leq t)$。第 i 个组件的生存函数记为 $F(t)=P(X_i>t)$。串联系统的寿命为 $Y=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$。容易看出，当 $a=n.$ 时，串联系统模型满足式 (5.1) 中的比例风险率模型。现在，我们给出一个例子。

例5.1。 考虑一个部件寿命服从具有共同累积分布函数 $F(x)=1-e^{-\lambda x},\ x>0,\ \lambda>0$ 的指数分布的串联系统。由式（*5.9*），我们得到

$$\gamma(y:a,t) = -\frac{1}{a\lambda}\big[\big(a\lambda t+\log(a\lambda)\big)\log y+\big(\log y\big)^2\big]. \tag{5.10}$$

现在，将 *(5.10)* 代入 *(5.6)*，经过一些计算后，可得到系统寿命 Y 的 *WRVE* 闭式表达为

$$\begin{aligned}VE^x(Y;t) &= \frac{1}{(a\lambda)^2}\big\{[(a\lambda t+log(a\lambda))^2(a^2\lambda^2t^2+2a\lambda t+2)-2(a\lambda t+log(a\lambda))(a^3\lambda^3t^3\\ &\quad+3a^2\lambda^2t^2+6a\lambda t+6)+a^4\lambda^4t^4+4a^3\lambda^3t^3+12a^2\lambda^2t^2+24a\lambda t+24]\\ &\quad-[(1+a\lambda t)\big(a\lambda t+\log(a\lambda)\big)-(a\lambda t+1)^2-1]^2\big\}. \end{aligned}\tag{5.11}$$

图 13*(a-d)* 绘出了在不同 a 和 λ 取值下的式 *(5.11)* 中的 *WRVE*，由此可清楚看出，*WRVE* 随着 t 的增大而增大。此外，图 $13(e)$ 展示了参数 λ 变化时式 *(5.11)* 的曲线。

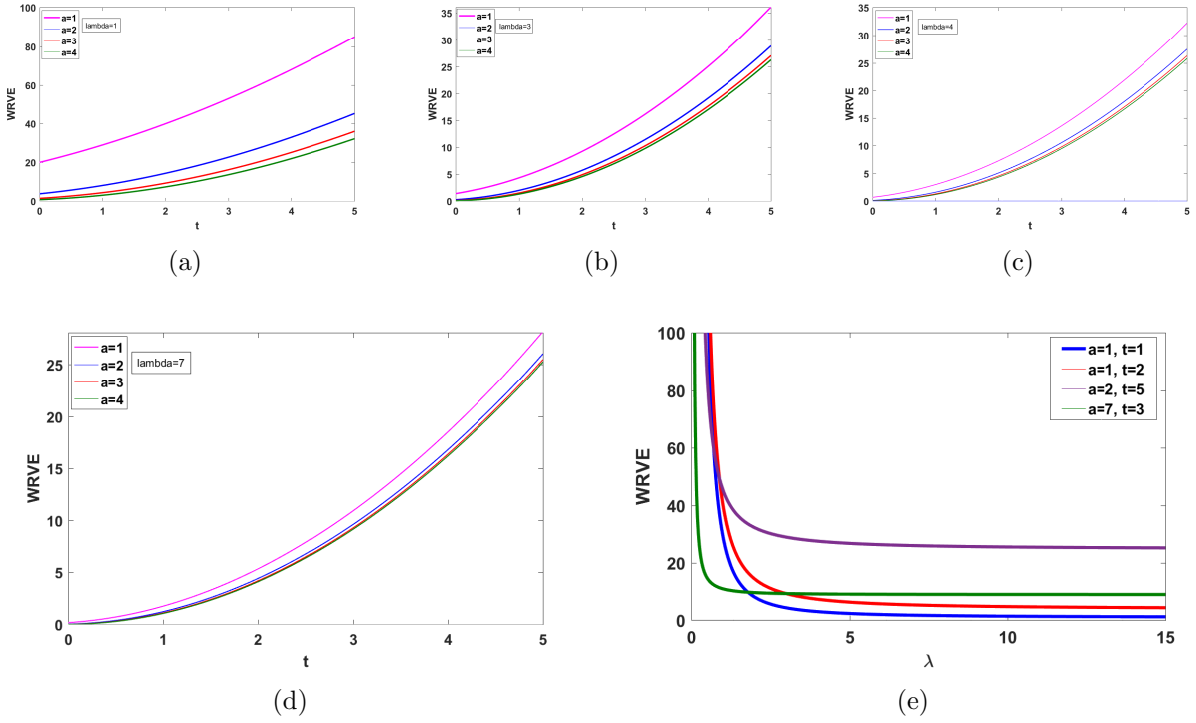


图 13：对于例5.1中的系统寿命，WRVE 关于 t 的图形，其中 $a = 1$，2，3， 4，且 (*a*) $\lambda = 1$、(*b*) $\lambda = 3$、(*c*) $\lambda = 4$，以及 (*d*) $\lambda = 7$。(*e*) 例5.1中的系统寿命的 WRVE 关于 λ，的图形，对应于 a 和 t的不同组合。

6 WRVE 的非参数估计

本节基于 $f(\cdot)$ 的核密度估计量，提出式 (3.1) 中 WRVE 的非参数估计方法，其定义如下：

$$\widehat{f}(x_i) = \frac{1}{nb_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right), \tag{6.1}$$

其中， $K(\cdot)$ (≥ 0) 称为核函数，满足 Lipschitz 条件 $\int K(x)dx = 1$。已知核函数 $K(\cdot)$ 关于原点对称，且 $\{b_n\}$（称为带宽）是一个正实数序列，使得 $b_n \to 0$ and $nb_n \to \infty$，对于$n \to \infty$。有关核密度估计量的更多详情，请参阅 Rosenblatt（1956）和 Parzen（1962）的文献。WRVE 的非参数核估计量，其权函数为 $w(x) = x$，定义为

$$\widehat{VE^x}(X;t) = \int_t^{\infty} \widehat{\delta}(x)(x\log\widehat{\delta}(x))^2 dx - \left[\int_t^{\infty} x\widehat{\delta}(x)\log\widehat{\delta}(x)dx\right]^2;\ t \geq 0, \tag{6.2}$$

其中，$\widehat{\delta}(x) = \widehat{f}(x)\,\widehat{\bar{F}}(t)$ 且 $\widehat{\bar{F}}(t) = \int_t^{\infty} \widehat{f}(x)dx$。接下来，我们将考虑一个模拟数据集和两个真实数据集，以说明式（6.2）中提出的非参数估计量。

模拟数据集

我们采用蒙特卡洛模拟技术，从指数分布中生成了一个数据集。模拟是在 Mathematica 软件中进行的。指数分布参数的真实值设为 $\lambda = 5.5.$ 。为进行估计，这里采用了高斯核，其形式为

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{6.3}$$

其中，x 属于实数集。我们计算了所提出估计量在不同 t 和 n 取值下的偏差和均方误差（MSE），结果列于表 1。从表 1 可以看出，随着样本量 n 增加，所提出估计量的均方误差逐渐减小，这保证了该估计量的一致性。

表 1：基于模拟数据集的 WRVE 核估计量的偏差和均方误差。此处，变熵$^{x}(X;\, t)$ 表示 WRVE 的真实值。

t	n	Bias	MSE	变熵$^{x}(X;\, t)$
	50	-0.17774	0.05540	
	80	-0.18743	0.05006	
0.1	100	-0.17959	0.04531	0.39985
	150	-0.14185	0.03680	
	200	-0.12904	0.02887	
	50	-0.29152	0.10735	
	80	-0.26200	0.08933	
0.2	100	-0.24604	0.07807	0.51331
	150	-0.22374	0.06857	
	200	-0.19449	0.05819	
	50	-0.41856	0.20092	
	80	-0.36331	0.16481	
0.3	100	-0.35657	0.15335	0.64677
	150	-0.30160	0.13545	
	200	-0.28645	0.11460	

真实数据集

为了进行估计，我们考虑了两个与纳米液滴分散和新冠肺炎相关的数据集。平板上的纳米液滴分散数据集已在 Panahi 和 Asadi (2021) 中讨论。该数据集通过分子动力学模拟方法获得，该方法利用牛顿运动方程研究纳米组分的平衡性质和输运性质。根据 Panahi 和 Asadi (2021) 以及 Dutta 和 Kayal (2022)，Burr III 型分布对该数据集的拟合效果相当好，优于一些其他常见分布，例如威布尔分布和逆伽马分布。数据集见表 2。我们估计了 Burr III 型分布的未知参数。形状参数 $\alpha = 1.202347$ 和尺度参数$\beta = 4.701481$ 的估计值。此外，我们使用 $b_n = 0.999$ ，基于 600 个容量为 58 的自助样本，评估了式 (6.2) 中估计量的偏差和均方误差，结果见表 3。

表 2：纳米液滴分散数据集。

0.2289300,	0.5810291,	0.6935846,	0.7221355,	0.7357869,	0.7389012,	0.7486177,	0.7491848,
0.7688918,	0.7689745,	0.7857656,	0.7882443,	0.7962973,	0.7972708,	0.8094872,	0.8342509,
0.8451560,	0.8527647,	0.8744825,	0.8832821,	0.8905104,	0.8928568,	0.9603346,	0.9624409,
0.9677539,	0.9792698,	0.9926678,	1.0297182,	1.0890227,	1.0972401,	1.1235326,	1.1559192,
1.1755080,	1.1764967,	1.1836366,	1.1975052,	1.2171928,	1.2456470,	1.2475189,	1.3245510,
1.3485822,	1.3796668,	1.3932774,	1.4432065,	1.4697339,	1.4974976,	1.5356593,	1.5375506,
1.5426158,	1.5430411,	1.5679230,	1.6287098,	1.6744305,	1.6838840,	1.7235515,	1.7685406,
			1.7980336,	1.8073133.			

在本节的这部分中，我们考虑 Alrumayh 等（2023）报告的法国新冠肺炎数据集，其中包含从2021年10月1日至10月24日收集的24天每日死亡率。该数据集见表4。最近，Dutta 等（2023）对该数据集进行了拟合优度检验。作者指出，该数据集服从逻辑指数分布，其形状参数为 $\alpha = 2.4719$ ，尺度参数为$\lambda = 1.7619$。与前一个数据集类似，这里在表5中列出了所提出估计量的偏差和均方误差（MSE），以及变熵 $^{x}(X; t)$的取值。我们假设 $b_n = 0.45$的值用于估计目的。

7 结论

本文介绍了 WVE 和 WRVE 的概念，并得出了这两种变异性度量的若干性质。我们研究了它们在仿射变换下的影响，并给出了一些界限。通过示例说明了 WRVE 相较于 RVE 的实用性。此外，我们还研究了相干系统中的 WVE，并推导出系统寿命的 WVE 小于或大于其部件寿命的 WVE 的充分条件。我们还研究了 PHR 模型中的 WRVE。

表 3：表 2 中真实数据集的偏差、均方误差和变熵 $^{x}(X;\ t)$。

t	Bias	MSE	变熵 $^{x}(X;\ t)$
0.01	-0.39998	0.18895	7.65442
0.05	-0.39147	0.18287	7.65442
0.10	-0.38704	0.18229	7.65443
0.20	-0.37023	0.16924	7.65503
0.30	-0.35943	0.16094	7.66043
0.40	-0.34001	0.14839	7.68493
0.50	-0.36229	0.16217	7.76122
0.60	-0.49115	0.27427	7.94443
0.70	-0.77791	0.63932	8.30439

表4：法国的新冠肺炎数据集，包含每日死亡率。

0.0740,	0.1190,	0.1344,	0.1926,	0.2232,	0.3140,	0.3243,	0.3393,	0.3563,	0.3706,
0.3843,	0.4164,	0.4482,	0.4578,	0.4616,	0.4755,	0.4917,	0.5045,	0.5069,	0.5325,
0.5625,	0.5972,	0.8057,	0.8078。						

我们提出了 WRVE 的非参数估计量，并通过一个模拟数据集和两个真实数据集展示了该估计量的应用。最后需要指出的是，所提出的度量可在更一般的情形下引入，而不受非负性假设的限制。不过，其用途和解释仍需谨慎考察。

致谢

两位作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议使本文得到了显著改进。作者 Shital Saha 感谢印度 UGC 提供的资助（奖励编号：191620139416），使其得以开展本研究。两位作者感谢印度奥迪沙鲁尔克拉国家理工学院数学系提供的研究设施。

表5：表4中真实数据集的偏差、均方误差和变熵 $^{x}(X;\ t)$。

t	Bias	MSE	变熵 $^{x}(X;t)$
0.01	0.21895	0.05103	0.61632
0.05	0.22029	0.05171	0.61733
0.10	0.22024	0.05195	0.62262
0.20	0.21703	0.05050	0.65976
0.25	0.18425	0.03773	0.69855
0.30	0.12787	0.02024	0.75391
0.35	0.10462	0.01523	0.82615
0.40	0.10176	0.01813	0.91412
0.45	0.07619	0.01650	1.01581

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

Alrumayh, A., Weera, W., Khogeer, H. A. 和 Almetwally, E. M.（2023年）。新型单位林德利模型的自适应II型渐进删失最优分析，《沙特国王大学学报：科学》。**35**(2), 102462。Arıkan, E.（2016年）。极化变换下方差熵递减，《*IEEE*信息论汇刊》。**62**(6), 3390–3400。Bobkov, S. 和 Madiman, M.（2011年）。对数凹分布数据中的信息集中，《概率年刊》。**39**, 1528–1543。Buono, F., Longobardi, M. 和 Pellerey, F.（2022）。过去寿命的方差熵，《统计学数学方法》。**31**(2), 57–73。Burkschat, M. 和 Navarro, J.（2018年）。通过扭曲分布的性质对基于顺序次序统计量的系统进行随机比较，《工程与信息科学中的概率》。**32**(2), 246–274。Burnhan, K. 和 Anderson, D. R.（2002年）。模型选择与多模型推断，Springer。Cacoullos, T. 和 Papathanasiou, V.（1989年）。通过方差界刻画分布，《统计与概率快报》。**7**(5), 351–356。Calì, C., Longobardi, M. 和 Navarro, J.（2020年）。广义累积过去信息度量的性质，《工程与信息科学中的概率》*style*>。*34*(1), 92–111。Cox, D. R.（1959年）。两类失效情况下指数分布寿命的分析，《英国皇家统计学会会刊：*B*辑（方法论）》。**21**(2), 411–421。

Di Crescenzo, A. 和 Longobardi, M.（2006）。关于加权残余熵和过去熵，Scientiae Mathemat- icae Japonicae。64(3), 255–266。Di Crescenzo, A. 和 Paolillo, L.（2021）。随机寿命的残余变熵分析与应用，《工程与信息科学中的概率》。35(3), 680–698。Di Crescenzo, A., Paolillo, L. 和 Suarez-Llorens, A.（2021）。由概率密度函数诱导的分布的随机比较、微分熵与方差熵，arXiv 预印本 arXiv:2103.11038。. Dutta, S., Dey, S. 和 Kayal, S.（2023年）。自适应渐进II型删失数据的逻辑指数分布贝叶斯生存分析，《计算统计学》。第1–47页。Dutta, S. 和 Kayal, S.（2022）。基于统一渐进混合删失方案的 Burr III 型分布估计与预测，《应用统计学杂志》。第1–33页。Elsayed, E. A.（2012）。《可靠性工程》，约翰·威利父子公司，纽约。Fradelizi, M., Madiman, M. 和 Wang, L.（2016）。对数凹密度信息含量的最优集中，《高维概率论VII：卡尔热斯卷》，Springer，第45–60页。Guia¸su, S.（1971）。加权熵，《数学物理学报告》。2(3), 165–179。Guiasu, S.（1986）。利用加权熵进行数据分组，《统计规划与推断杂志》。15, 63–69。Kontoyiannis, I.（1997）。二阶无噪声信源编码定理，《IEEE信息论汇刊》。43(4), 1339–1341。Kontoyiannis, I. 和 Verd´u, S.（2014）。最优无损数据压缩：非渐近性与渐近性，《IEEE信息论汇刊》。60(2), 777–795。Kupka, J. 和 Loo, S.（1989年）。老化的风险度量与活力度量，《应用概率杂志》。26(3), 532–542。Maadani, S., Mohtashami Borzadaran, G. R. 和 Rezaei Roknabadi, A.（2022）。次序统计量的方差熵及一些随机比较，《统计学通讯：理论与方法》。51(18), 6447–6460。Navarro, J., del ´Aguila, Y., Sordo, M. A. 和 Su´arez-Llorens, A.（2013）。相依同分布组件系统的随机序性质，《商业与工业中的应用随机模型》。29(3), 264–278。Panahi, H. 和 Asadi, S.（2021）。自适应渐进混合删失下的 Burr III 型分布：纳米液滴分散数据的应用，《质量技术与定量管理》。18(2), 179–201。Parsa, M., Di Crescenzo, A. 和 Jabbari, H.（2018）。通过基尼型指数分析可靠性系统，《欧洲运筹学杂志》。264(1), 340–353。Parzen, E.（1962）。概率密度函数与众数的估计，《数学统计年刊》。33(3), 1065–1076。Raqab, M. Z., Bayoud, H. A. 和 Qiu, G.（2022）。随机变量非活动时间的方差熵及其相关应用，《IMA数学控制与信息杂志》。39(1), 132–154。Rosenblatt, M.（1956）。关于某些密度函数非参数估计的评论，《数学统计年刊》。第832–837页。Saha, S. 和 Kayal, S.（2023年）。扩展分数阶累积过去熵与配对 ϕ-熵度量，《物理学A：统计力学及其应用》。614, 128552。Schroeder, M. J.（2004）。信息度量中熵的一种替代方法，《熵》。6(5), 388–412。Shannon, C. E.（1948）。通信的数学理论，《贝尔系统技术杂志》。27(3), 379–423。Sharma, A. 和 Kundu, C.（2023年）。双截断随机变量的方差熵，《工程与信息科学中的概率》。37(3), 852–871。Toomaj, A., Sunoj, S. 和 Navarro, J.（2017）。相干系统与混合系统累积残余熵的一些性质，《应用概率杂志》。54(2), 379–393。Vaselabadi, N. M., Tahmasebi, S., Kazemi, M. R. 和 Buono, F.（2021）。随机变量变外熵度量的相关结果，《熵》。23(3), 356。Wallis, G.（1996）。利用时空相关性学习不变目标识别，《神经网络》。9(9), 1513–1519。