arXiv:2305.00854v1 [math.DG] 1 May 2023

$\mathbb{RP}^3$ 通过调和函数研究 Yamabe不变量

LIAM MAZUROWSKI 和 XUAN YAO

摘要。我们利用调和函数，为 Bray 和 Neves 关于 $\mathbb{RP}^3$ 的 Yamabe不变量的一个结果给出新的证明。

1. 引言

Yamabe问题探讨的是，每个闭黎曼流形（M^n， g）是否都存在一个具有常标量曲率的共形度量。这等价于求解$L\varphi = \lambda\varphi^{(n+2)/(n-2)}$，其中

$$L = \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)}R_g$$

即所谓的共形拉普拉斯算子。Yamabe [14] 声称该问题有肯定的答案，但后来发现他的证明存在一个漏洞。Trudinger [13] 成功弥补了这一漏洞，但仅限于共形Yamabe不变量的情形。

$$Y(M,[g]) = \inf\left\{-\frac{4(n-1)}{n-2}\frac{\int_M \varphi L\varphi\, dV}{\left(\int_M \varphi^6\, dV\right)^{1/3}} : \varphi \in H^1(M)\right\}$$

满足 $Y(M,[g]) \leq 0$。随后，Aubin [4] 证明，事实上， $Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0])$ 蕴含存在一个与 g 共形的常标量曲率度量。这里， g_0 是 S^n 上的圆度量。最后，Schoen [10] 通过证明 $Y(M,[g]) < Y(S^n,[g_0])$，除非 (M,g) 与圆球面共形，彻底解决了 Yamabe 问题。

现在我们将注意力集中在三维流形上。Schoen [11] 将闭流形 M^3 的 σ不变量（或光滑Yamabe不变量）定义为

$$\sigma(M) = \sup_g Y(M,[g]).$$

由 Yamabe问题的解可知

$$\sigma(S^3) = Y(S^3,g_0) = 6(2\pi^2)^{2/3} =: \sigma_1.$$

已知 $\sigma(S^2\times S^1) = \sigma_1$，且 $\sigma(T^3) = 0$。Bray 和 Neves [6] 计算了 $\mathbb{RP}^3$ 的 σ不变量，并证明了

$$\sigma(\mathbb{RP}^3) = \frac{\sigma_1}{2^{2/3}} =: \sigma_2.$$

他们还计算了 $\sigma(\mathbb{RP}^2\times S^1) = \sigma_2$，并且更一般地证明，任何满足特定拓扑性质的三维流形M 都有 $\sigma(M) \leq \sigma_2$。Akutagawa 和 Neves [3]计算得出 $\mathbb{RP}^3\#(S^2\times S^1) = \sigma_2$。据作者所知，尚无已知三维流形的 σ 不变量为正且不同于 σ_1 和 σ_2，尽管 Schoen 猜想认为。

$$\sigma(M) = \frac{\sigma_1}{n^{2/3}}$$

当 $M = S^3/G$ 和 $|G| = n$ 时。

为了计算 σ（$\mathbb{RP}^3$），Bray 和 Neves 采用如下论证。给定$\mathbb{RP}^3$上的任意度量 g，他们首先构造一个与之相应的渐近平坦度量 g_{AF}，该度量在 $\mathbb{RP}^3$ 去掉一点后的区域上具有恒为零的标量曲率。在模型情形中，若 g 是圆度量，这一构造会得到施瓦西度量。接着，他们利用逆平均曲率流，将最优测试函数从施瓦西流形传输到流形（$\mathbb{RP}^3 - \{p\}$， g_{AF}）。最后，他们利用逆平均曲率流的性质，并且在

特别地，霍金质量的单调性表明，传输后的测试函数见证了 $Y(\mathbb{RP}^3, [g]) \leq \sigma_2$。

近年来，人们发现调和函数和 p-调和函数是研究非负标量曲率流形的有用工具。Stern [12] 最先揭示了调和函数与标量曲率之间的联系，并利用这一联系给出了 T^3 不允许存在正标量曲率度量的新证明，此外还取得了其他成果。此后，许多关于非负标量曲率的结果——这些结果最初是借助极小曲面或逆平均曲率流证明的——也有了基于调和函数或 p-调和函数的新证明。例如，Agostiniani-Mazzieri-Oronzio[2], Miao [8], 和 Bray-Kazaras-Khuri-Stern [5] 利用调和函数给出了正质量定理的新证明。同样，Agostiniani-Mantegazza-Mazzieri-Oronzio [1] 和 Hirsch-Miao-Tam [7] 利用 p-调和函数给出了彭罗斯不等式（不涉及刚性）的新证明。

本文使用调和函数，对关于 $\mathbb{RP}^3$的 σ-不变量的 Bray-Neves 结果给出一种新的证明。我们采用与 [6]相同的拓扑假设。

定义 1.1（性质 A）。若三维流形 M^3 满足以下条件，则称其具有性质 A：M^3 不是 S^3，也不是与一个在 S^1 上的 S^2 丛的连通和；并且可以表示为 $P^3 \# Q^3$，其中 P^3 是素的，且Q^3 可定向。

定义 1.2（性质 B）。若三维流形 M^3 满足以下条件，则称其具有性质 B：M^3 不是 S^3，也不是与一个在 S^1 上的 S^2 丛的连通和；并且可以表示为 $P^3 \# Q^3$，其中 P^3 是素的，且$\alpha(Q_3) = 2$；这里，$\alpha(Q)$是所有光滑连通区域（具有双侧边界）的边界欧拉示性数的上确界（边界不一定连通），且这些区域的补集也连通。

备注 1.3。性质 *A* 蕴含性质 *B*，见 [6]中的引理 *2.10*。

我们的主要结果是对以下定理给出一种新的证明；该定理最初由 Bray 和 Neves 得出。

定理 A。假设 M 是一个满足性质 *A* 或性质 *B* 的闭*3*维流形。那么 $\sigma(M) \leq \sigma_2$。

如同 [6], 所述，这立即得到以下推论。

推论 1.4。$\mathbb{RP}^3$ 的 *Yamabe*不变量满足 $\sigma(\mathbb{RP}^3) = \sigma_2$。

1.1. **证明概要**。我们遵循 Bray 和 Neves 所采用的相同基本策略，将逆平均曲率流替换为调和函数的等值集。给定一个满足性质 A 或性质 B 的流形 (M^3, g)，我们首先在 M 去掉一点后的空间上构造一个相应的渐近平坦度量 g_{AF}。该度量的标量曲率为零，并且在圆形 $\mathbb{RP}^3$这一模型情形下，它等于施瓦茨schild度量。接下来，我们沿某个调和函数的等值集，将施瓦西流形上的最优测试函数传输到 $(M - \{p\}, g_{AF})$ 上。随后，我们利用渐近平坦流形上调和函数的一个单调性公式；该公式的刚性情形是空间施瓦西流形。结合沿调和函数等值集定义的指数型量使用这一单调性公式，我们得到 M的 Yamabe不变量的统一上界，从而完成定理 A 的证明。

1.2. **文章结构**。本文其余部分的组织如下。第 2 节介绍在渐近平坦流形上处理调和函数等值集时所使用的一些记号。第 3 节讨论沿调和函数等值集成立的一个单调性公式，该公式在某种意义上类似于霍金质量的单调性。最后，第 4 节给出主定理的证明。

1.3. **致谢**。作者谨向周鑫教授致以诚挚的谢意，感谢他在本问题研究过程中给予的指导与鼓励，以及进行的诸多富有帮助的讨论。

2. 调和函数的记号

设 (M^3, g) 是一个边界 Σ 非空且连通的渐近平坦流形。我们始终假设 M 具有非负标量曲率，并且 $H_2(M,\Sigma) = 0$。回顾一下，对于任意 $p \in [1,\infty)$，函数 u 的 p-拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

特别地，2-拉普拉斯算子就是通常的拉普拉斯算子，而1-拉普拉斯算子

$$\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

计算 u 的等值集的平均曲率（在有意义的点处）。

现在假设对于每个 $p \in (1,2]$, 函数 u_p 满足

$$\begin{cases} \Delta_p u_p = 0, & \text{on } M \\ u_p = 1, & \text{on } \Sigma \\ u_p \to 0, & \text{at infinity.} \end{cases}$$

Moser [9] 观察到，函数 $w_p = -(p-1)\log(u_p)$ 满足方程

$$\Delta_p w_p = |\nabla w_p|^p.$$

形式上，让 $p \to 1$ 趋于极限，可得 $\Delta_1 w_1 = |\nabla w_1|$，这就是逆平均曲率流的方程。事实上，Moser 证明了可以对函数 w_p 取 $p \to 1$时的弱极限，而该弱极限是 Huisken和 Ilmanen 的弱逆平均曲率流的一个解。

受此启发，我们将采用以下记号。令 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{on } M \\ u = 1, & \text{on } \Sigma \\ u \to 0, & \text{at infinity.} \end{cases} \tag{1}$$

令 $w = -\log(u)$，并定义等值集 $\Sigma_t = \{w = t\}$。特别注意， $\Sigma_0 = \Sigma$。定义以下量

$$W(t) = \int_{\Sigma_t} |\nabla w|^2 \, da \quad \text{and} \quad \mathcal{B}(t) = e^t(4\pi - W(t)). \tag{2}$$

那么， $\mathcal{B}(t)$ 与 Miao 在 [8]，中定义的量相同，差别仅在于一个常数因子和重新参数化。特别地，正如 [8] 中所证明的， $\mathcal{B}(t)$ 是 t 的单调递增函数。此外，如果对于某个 $t > 0$, $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(0)$，那么 (M, g) 在一个圆球之外与欧氏空间等距（参见 [7] 定理 1.3(iii)）。

读者应注意，我们使用的记号不同于文献中的常见记号。在文献中， u 是定义在 M 上的调和函数，它在 Σ 上满足 $u = 0$ ，并在无穷远处满足 $u \to 1$ ； t参数化 u的等值集，而量 $\mathcal{B}$ 则直接根据 u定义。我们选择使用自己的记号，是因为我们认为这样更便于比较w 与逆平均曲率流、 W 与Willmore能量，以及 $\mathcal{B}$ 与霍金质量。希望这不会让读者感到困惑。

沿逆平均曲率流，面积呈指数增长。本节最后，我们记录调和函数等值集上相应的指数型量。

命题 2.1. 有

$$\int_{\Sigma_t} |\nabla w| \, da = C_0 e^t, \tag{3}$$

其中 $C_0 = \int_\Sigma |\nabla w| \, da$。

证明。 这可通过直接计算得到。首先，计算等值集的平均曲率，记为 H。由此得到

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\right) \\ &= \frac{\Delta w}{|\nabla w|} - \frac{\langle \nabla |\nabla w|, \nabla w\rangle}{|\nabla w|^2} \\ &= |\nabla w| - \frac{\langle \nabla |\nabla w|, \nabla w\rangle}{|\nabla w|^2}. \end{aligned}$$

接着利用一阶变分，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_t} |\nabla w| da &= \int_{\Sigma_t} H da + \int_{\Sigma_t} \frac{\langle \nabla |\nabla w|, \nabla w\rangle}{|\nabla w|^2} da \\ &= \int_{\Sigma_t} |\nabla w| da, \end{aligned}$$

命题得证。 □

3。施瓦茨schild上的单调性公式 HILD

本节的目标是为渐近平坦流形上的调和函数推导一个单调性公式，其取等情形为空间施瓦西流形。我们注意到，Miao [8] 已经证明了若干此类定理。尽管他没有陈述我们所需的精确结果，但他的论证几乎可以原封不动地应用。为完整起见，我们列出详细证明。

下一个命题实质上是 [8], 中的定理 7.3，只不过我们比较的是 $\mathcal{B}(0)$ 与$\mathcal{B}(t)$，而不是比较 $\mathcal{B}(0)$ 与 $\lim_{t\to\infty}\mathcal{B}(t)$。

命题 3.1。 假设 (M^3, g) 是一个边界 Σ 非空且连通的完备渐近平坦流形。假设 M 具有非负标量曲率，且$H_2(M, \Sigma) = 0$。令 u 为 M 上满足 Σ 上的 $u = 1$ 且在无穷远处为 $u \to 0$ 的调和函数。定义 $w = -\log(u)$ ，并令 $\Sigma_t = \{w = t\}$。按（2）定义 W 。那么对任意 $t \geq 0$ ，都有

$$W(t) \leq \left[e^{-t}\sqrt{W(0)} + (1 - e^{-t})\sqrt{4\pi}\right]^2. \tag{4}$$

此外，如果对某个 $t > 0$ 等号成立，那么在某个旋转对称球面之外， M 与一个空间施瓦西流形（质量可能为负）等距。

证明。 对于任意 $k > 0$，定义函数 $v = u + k(1 - u)$。令 $\bar{g} = k^{-4}v^4 g$ ，并令$\bar{u} = u/v$。容易验证， $\bar{u}$ 是 $\bar{g}$-调和的，并且在 Σ 上为 $\bar{u} = 1$ ，在无穷远处为 $\bar{u} \to 0$ 。此外，$(M, \bar{g})$ 仍然是具有非负标量曲率的渐近平坦流形。令 $\bar{w} = -\log(\bar{u})$。于是

$$\nabla \bar{w} = \frac{\nabla v}{v} - \frac{\nabla u}{u} = \left(\frac{1-k}{1 + k(\frac{1-u}{u})} - 1\right)\frac{\nabla u}{u} = \left(\frac{k}{v}\right)\nabla w.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(s) &= e^s\left(4\pi - \int_{\bar{\Sigma}_s} |\bar{\nabla}\bar{w}|^2 \, d\bar{a}\right) \\ &= e^s\left(4\pi - \int_{\bar{\Sigma}_s} |\nabla \bar{w}|^2 \, da\right) = e^s\left(4\pi - \int_{\bar{\Sigma}_s} \left(\frac{k}{v}\right)^2 |\nabla w|^2 \, da\right). \end{aligned}$$

这是 $s \geq 0$ 的增函数。特别地，我们有 $\mathcal{B}(s) \geq \mathcal{B}(0)$，即，

$$e^s\left(4\pi - \int_{\bar{\Sigma}_s} \left(\frac{k}{v}\right)^2 |\nabla w|^2 \, da\right) \geq 4\pi - k^2 \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 \, da.$$

¯注意到 $e^{-s} = \bar{u} = u/v$ 并且 u 和 v 在 Σ_s上均为常数。因此，对于任意$t \geq 0$，上述不等式意味着

$$\int_{\Sigma_t} |\nabla w|^2 \, da \leq \frac{4\pi(1-u)v}{k^2} + uv \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 \, da,$$

其中，右边的 u 和 v 取其在 Σ_t 上的值。初等微积分表明，右边在 $k = \sqrt{4\pi/W(0)}$ 时取得最小值，而这一选择给出

$$W(t) \leq \left[e^{-t} \sqrt{W(0)} + (1 - e^{-t}) \sqrt{4\pi} \right]^2,$$

这就是所需的不等式。

接下来研究刚性情形。假设等号成立，则对于这一选择的 k 和某个 $s > 0$，必有 $k = \sqrt{4\pi/W(0)}$，且 $\bar{\mathcal{B}}(s) = \bar{\mathcal{B}}(0)$。根据 $\bar{\mathcal{B}}$ 的刚性，这意味着 $(M, \bar{g})$ 与某个 $r > 0$ 对应的 $(\mathbb{R}^3 - B_r(0), g_{\text{euc}})$ 等距，而且

$$\frac{u}{u + k(1-u)} = \bar{u} = \frac{r}{|x|}.$$

这意味着

$$u = \frac{k\bar{u}}{1 + (k-1)\bar{u}} \quad \text{and} \quad v = \frac{k}{1 + (k-1)\bar{u}} = \frac{k|x|}{r(k-1) + |x|}.$$

由此可得

$$g = k^4 v^{-4} \bar{g} = \left(1 + \frac{r(k-1)}{|x|} \right)^4 g_{\text{euc}},$$

因此，在一个旋转对称球面之外，(M, g)与质量为 $2r(k-1)$ 的施瓦西流形等距。

最后，通过直接计算很容易验证，在施瓦西流形上等号成立。给定 $m \in \mathbb{R}$ 和 $r > 0$，考虑度量

$$\tilde{g} = \left(1 + \frac{m}{2|x|} \right)^4 g_{\text{euc}}.$$

在 $\mathbb{R}^3 - B_r(0)$ 上。若 m 为负，则要求 $r > |m|/2$。令 $\Sigma = \partial B_r$。 $\tilde{g}$-调和 c
函数在 Σ 上满足 $u = 1$，并且在无穷远处满足 $u \to 0$，其表达式为

$$u(x) = \frac{m + 2r}{m + 2|x|}.$$

由此可得 $|\nabla w| = \frac{2}{m+2|x|}$，进而得到

$$W(0) = \int_{\Sigma} |\tilde{\nabla} w|^2 \, d\tilde{a} = \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 \, da = \frac{16\pi r^2}{(m+2r)^2}.$$

更一般地，注意到

$$\Sigma_t = \left\{ |x| = \frac{e^t(m+2r) - m}{2} \right\}$$

因此

$$W(t) = \int_{\Sigma_t} |\nabla w|^2 \, da = \frac{4\pi}{(m+2r)^2} \left(m + 2r - me^{-t} \right)^2.$$

还可以计算得出

$$\left[e^{-t} \sqrt{W(0)} + (1 - e^{-t}) \sqrt{4\pi} \right]^2 = \frac{4\pi}{(m+2r)^2} \left(m + 2r - me^{-t} \right)^2,$$

因此等号成立。 □

为了有效地应用这个单调性公式，我们需要能够估计$W(0)$。幸运的是，利用 Miao 的另一个定理可以做到这一点。以下是根据我们的记号改写的 [8]，中的推论 7.1。

命题 3.2. 在与命题 *3.1* 相同的记号和假设下，有

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma}|\nabla w|^2\,da\right)^{1/2}\leq\left(\frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma}H^2\,da\right)^{1/2}+1.$$

此外，当且仅当(M,g) 与一个旋转对称球面外部的施瓦西流形等距，且该球面具有非负的常平均曲率时，等号成立。

由此可得以下推论。

推论 3.3. 在与命题 *3.1* 相同的记号和假设下，进一步假设 Σ 是极小的。那么

$$W(t)\leq\pi\left(2-e^{-t}\right)^2$$

对于所有 $t\geq 0$。当且仅当 $(M,\ g)$ 与具有正质量的空间施瓦西流形等距，且 Σ 是视界时，等号对某些 $t\geq 0$ 成立。

证明。 由于 Σ 是极小的，命题 3.2 表明 $W(0)\leq\pi$。将其代入方程 (4) 并化简可得，

$$W(t)\leq\pi(2-e^{-t})^2.$$

若对某个 $t\geq 0$成立等号，则 $W(0)=\pi$，因此命题 3.2 表明，(M,g) 与一个以 Σ 为视界的空间施瓦西流形等距。□

4. Application of the monotonicity formula

在本节中，我们利用推论 3.3 给出 Bray-Neves 的结果 [6]的一种新证明。我们首先介绍一些定义和基本事实。

假设 (M^3,g) 是一个具有 $Y(M,[g])>0$的紧致三维流形，且 M满足性质 B 1.2。那么它不可能与带有圆度量的三维球面共形等价，因此 Yamabe 常数可由某个正常标量曲率度量$g_0\in[g]$取得。现在在 (M,g_0) 内，我们将共形拉普拉斯算子定义为

$$L_0\equiv\Delta_{g_0}-\frac{1}{8}R_{g_0},\tag{5}$$

其中，R_{g_0} 是 (M,g_0) 的正常标量曲率。

现在任取 $p\in M$，若 $G_p(x)$ 满足以下条件，则称其为 (M,g_0) 的格林函数。

$$L_0G_p(x)=0,\quad\forall x\in M\setminus\{p\},\tag{6}$$

and

$$\lim_{q\to p}d(p,q)G_p(q)=1.\tag{7}$$

格林函数存在，并且由 R_0 的正性和最大值原理可知它为正。

令 $g_{AF}=G_p(x)^4g_0$在 $M\setminus\{p\}$。若记 $M_p=M\setminus\{p\}$，则 $(M\setminus\{p\},g_{AF})$ 是标量曲率为零的渐近平坦三维流形，而 p 是其无穷远。注意，

$$Y(M,[g])=Y(M,[g_0])=Y(M_p,[g_{AF}]),\tag{8}$$

并且根据定义

$$Y(M_p,[g_{AF}])=\inf\left\{\frac{\int_{M_p}8|\nabla\phi|^2dV}{(\int_{M_p}\phi^6dV)^{1/3}}:\phi\in H^1_c(M_p,g_{AF})\right\}.\tag{9}$$

注4.1。 实际上，在取上述下确界时，只需假设 $\phi\in H^1_{loc}(M_p,g_{AF})\cap L^6(M_p,g_{AF})$且极限 $_{x\to\infty}\,\phi(x)|x|^{1/2}=0$ 。

现在我们可以给出主定理的证明。

定理 A。 假设 M 是满足性质 *A* 或性质 *B* 的闭*3*维流形。那么 $\sigma(M)\leq\sigma_2$。

证明。我们先考虑模型情形，此时 $M = \mathbb{RP}^3$，且 g_0 是标准圆度量。根据 [6], $(\mathbb{RP}^3_p, g_{AF})$ 可识别为一个空间施瓦西流形，其视界上进行对跖点识别。令 $w_s = -\log(u_s)$，其中我们用 u_s 表示 $(\mathbb{RP}^3_p, g_{AF})$ 上方程 (1) 的解。然后定义

$$f(t) = u_0(\Sigma^s_t), \tag{10}$$

其中 $\Sigma^s_t = \{x \in (\mathbb{RP}^3_p, g_{AF}) : \ w_s(x) = t\}$，且 $u_0(x) = G_p(x)^{-1}$。令 $\phi_s = f \circ w_s$。与[6], 中一样，大场定理表明 ϕ_s 是该模型中的最优测试函数，且

$$\frac{\int_{\mathbb{RP}^3_p} 8|\nabla \phi_s|^2 \, dV}{\left(\int_{\mathbb{RP}^3_p} \phi_s^6 \, dV\right)^{1/3}} = \sigma_2.$$

接下来，我们的目标是将这个测试函数推广到任意的 M。

对于满足性质 A 或性质 B 的任意 (M, g_0)，采用与 [6], 中相同的论证，我们知道存在一个最外侧的极小 $\Sigma \subset M_p$，它是一个极小包络的边界。以此作为初始条件，令 $w = -\log(u)$，其中 u 是方程 (1) 的解。我们可以通过以下方式构造一个测试函数 $\phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(M_p, g_{AF})$

$$\phi(x) = f(w(x)). \tag{11}$$

接下来需要估计的是

$$\frac{\int_{M_p} 8|\nabla \phi|^2 dV}{(\int_{M_p} \phi^6 dV)^{1/3}}.$$

利用余面积公式估计分子，可得

$$\begin{aligned} \int_{M_p} |\nabla \phi|^2 dV &= \int_{M_p} f'(w(x))^2 |\nabla w|^2 dV \\ &= \int_0^\infty f'(t)^2 (\int_{\Sigma_t} |\nabla w| da) dt \\ &= C_0 \int_0^\infty f'(t) e^t dt, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $C_0 = \int_{\Sigma_0} |\nabla w| \, da$，并且我们使用了命题 2.1。

对于分母，我们需要使用余面积公式、霍尔德不等式和推论 3.3。由此可得

$$\begin{aligned} \int_{M_p} \phi^6 \, dV &= \int_{M_p} f(w(x))^6 \, dV \\ &= \int_0^\infty f(t)^6 (\int_{\Sigma_t} |\nabla w|^{-1} \, da) \, dt \\ &\geq \int_0^\infty f(t)^6 (\int_{\Sigma_t} |\nabla w|^2 da)^{-2} (\int_{\Sigma_t} |\nabla w| da)^3 \, dt \\ &\geq C_0^3 \int_0^\infty f(t)^6 e^{3t} W(t)^{-2} \, dt \\ &\geq \pi^{-2} C_0^3 \int_0^\infty f(t)^6 e^{3t} (2 - e^{-t})^{-4} \, dt. \end{aligned} \tag{13}$$

结合前面的估计，我们得到

$$\frac{\int_{M_p} 8|\nabla \phi|^2 dV}{(\int_{M_p} \phi^6 dV)^{1/3}} \leq \frac{8 \int_0^\infty f'(t) e^t dt}{(\pi^{-2} \int_0^\infty f(t)^6 e^{3t} (2 - e^{-t})^{-4})^{1/3}} = \sigma_2. \tag{14}$$

第二个等式成立，是因为在模型情形下，(12) 和 (13) 中的所有不等式都成为等式。□

注 4.2. 对于(13)，需要像 [6] 中那样使用勒贝格单调收敛定理。

参考文献

[1] V. Agostiniani、C. Mantegazza、L. Mazzieri 和 F. Oronzio。通过非线性势理论证明黎曼几何彭罗斯不等式。arXiv:2205.11642，2022。[2] V. Agostiniani、L. Mazzieri 和 F. Oronzio。正质量定理的格林函数证明。arXiv:2108.08402，2021。[3] K. Akutagawa 和 A. Neves。Yamabe不变量大于 $\mathbb{RP}^3$的三维流形。微分几何杂志，75(3):359–386，2007。[4] T. Aubin。关于标量曲率的Yamabe问题的非线性微分方程。纯粹与应用数学杂志，55:269–296，1976。[5] H.L. Bray、D. Kazaras、M. Khuri 和 D. Stern。调和函数与三维渐近平坦黎曼流形的质量。几何分析杂志，32(184)，2022。[6] H.L. Bray 和 A. Neves。Yamabe不变量大于 $\mathbb{RP}^3$的素三维流形分类。数学年刊，第407–424页，2004。[7] S. Hirsch、P. Miao 和 L-F. Tam。p-调和函数的单调量及其应用。arXiv:2211.06939，2022。[8] P. Miao。质量、容量函数与质量与容量之比。arXiv:2207.03467，2022。[9] R. Moser。逆平均曲率流与p-调和函数。欧洲数学会杂志，009 83，2007 1 77。: – 。[10] R. Schoen。将黎曼度量共形变形为常标量曲率。微分几何杂志，20:479–495，1984。[11] Richard M. Schoen。黎曼度量的总标量曲率泛函的变分理论及相关主题。载于Mariano Giaquinta编，变分法专题，第120–154页，柏林、海德堡，1989。Springer Berlin Heidelberg。[12] D. Stern。标量曲率与映至 s^1的调和映射。微分几何杂志，122(2):259–269，2022。[13] N. Trudinger。关于紧流形上黎曼结构的共形变形的评注。比萨高等师范学院年刊，22:265–274，1968。[14] H. Yamabe。关于紧流形上黎曼结构的一种变形。大阪数学杂志，12 37，1960 21: – 。

数学系，康奈尔大学，纽约州伊萨卡，14853电子邮件地址：lmm334@cornell.edu

数学系，康奈尔大学，纽约州伊萨卡，14853电子邮件地址：xy346@cornell.edu