arXiv:2305.00859v1 [math.FA] 1 May 2023

´圆盘代数的一个 Bishop-Phelps-Bollobas 定理

Neeru Bala、Jaydeb Sarkar 和 Aryaman Sensarma

Abstract. 令 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$中的开单位圆盘。记圆盘代数为 $A(\mathbb{D})$，并用 $\mathscr{B}(X, A(\mathbb{D}))$表示从巴拿赫空间 X到 $A(\mathbb{D})$的所有有界线性算子构成的巴拿赫空间。我们证明，在 $\partial\mathbb{D}$中的某一点满足等度连续性这一假设下，$\mathscr{B}(X, A(\mathbb{D}))$具有 Bishop-Phelps-Bollobas 性质。

1. Introduction

范数达到是作用于巴拿赫空间上的有界线性算子或泛函所能具有的最自然性质之一。鉴于作用于有限维巴拿赫空间上的泛函或算子必然具有这一性质，而作用于无限维巴拿赫空间上的泛函或算子则不然，人们不禁会想了解作用于无限维巴拿赫空间且达到范数的泛函或算子的行为（参见综述[5]）。回顾一下，在巴拿赫空间 X 与 Y之间的有界线性算子 $T : X \to Y$ （简记为 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$，且当 $Y = X$时记为 $T \in \mathscr{B}(X)$）若存在单位向量 $x_0 \in S_X$ 使得

$$\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} = \|Tx_0\|_Y,$$

其中 $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$，即 X 的单位球面。本文中所考虑的所有巴拿赫空间均定义在域 $\mathbb{C}$ 上。

关于巴拿赫空间上达到范数的泛函的性质，经典的 Bishop-Phelps 定理指出 [7]:

定理 1.1（Bishop-Phelps）。巴拿赫空间上达到范数的泛函在对偶空间中范数稠密。

Bollob´as 强化了这一重要结果：对于在某点处接近达到范数的泛函，可以同时用达到范数的泛函对其进行逼近，同时使范数达到点仍接近给定点。更具体地说， [11, 推论 3.3]:

定理 1.2（Bishop-Phelps-Bollob´as）。设 X是一个巴拿赫空间， $x \in S_X$、 $f \in S_{X^*}$，且令 $\epsilon \in (0, 1)$。假设

$$|f(x)| > 1 - \epsilon.$$

则存在 $y \in S_X$ 和 $g \in S_{X^*}$ 使得

(1) $|g(y)| = 1$,
(2) $\|x - y\| < \sqrt{2\epsilon}$, *and*

2020 年数学主题分类。46E15、46E22、46H10、30H05、47L20、46J10。关键词和短语：Bishop-Phelps-Bollob´as 性质、圆盘代数、范数达到算子、算子理想、等度连续性。

(3) $\|f-g\| < \sqrt{2\epsilon}$.

现在我们来讨论一个自然出现的后续问题：Banach 空间上算子的范数达到。Lindenstrauss [19] 开创了对 Banach 空间之间算子的范数达到或 Bishop-Phelps 型性质的研究。最后，Acosta、Aron、Garc´ıa 和 Maestre [1, 定义 1.1] 引入了 Banach 空间上算子的 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质这一概念。

定义1.3. 若一对巴拿赫空间 (X, Y) 满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质，则对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $\beta(\epsilon) > 0$ 以及 $\gamma(\epsilon) > 0$，使得 $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0$，且对所有$T \in S_{\mathscr{B}(X,Y)}$ 和 $x \in S_X$，

$$\|Tx\| > 1 - \gamma,$$

那么存在 $y \in S_X$ 和 $N \in S_{\mathscr{B}(X,Y)}$，使得

(1) $\|Ny\| = 1$, (2)
$\|x - y\| < \beta$，以及
(3) $\|T - N\| < \epsilon$。

若 $X = Y$，则我们简单地说 X 满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。

仿照巴拿赫空间上的泛函情形，人们可能会想知道 Bishop-Phelps-Bollob´as 定理是否也适用于巴拿赫空间 X 和 Y 上的 $\mathscr{B}(X, Y)$。然而，根据 Lindenstrass [19] 的同一篇论文，任意一对巴拿赫空间都不满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。此后，确定满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质的巴拿赫空间，已成为一个既具挑战性又重要的问题。

让我们重点介绍这一方向的一些值得关注的结果。在 [1], Acosta、Aron、Garc´ıa 和 Maestre 给出了关于 Y的一个条件，在该条件下，对于任意巴拿赫空间 X，(X, Y) 满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。特别地，若 Y 是 c_0 或 ℓ^∞，则对于任意巴拿赫空间 X，(X, Y) 满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。若对于某些紧 Hausdorff 空间 K和 M，有 $X = C(K)$ 和 $Y = C(M)$，则在实数情形下，(X, Y) 满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质 [2] （然而，复数情形仍是一个未解决的问题）。关于这一点，另请参阅 Johnson 和 Wolfe [17]。此外，[11, 18],证明了：若 Y 是 $C(K)$ 或 $C_b(K)$ 的子代数，则对于任意巴拿赫空间 X，(X, Y) 满足关于 Asplund 算子的 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。另一个例子是空间 $H^\infty(\mathbb{D})$ [6], ，下文将对此进行讨论。关于不同背景下的 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质，更多内容请参阅 [3, 10] 。

现在我们转向本文的核心研究对象——圆盘代数。圆盘代数 $A(\mathbb{D})$ 是由所有在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上有界解析且可连续延拓至 $\overline{\mathbb{D}}$ 的函数构成的交换巴拿赫代数。因此

$$A(\mathbb{D}) = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}).$$

在此背景下，我们回顾一下， $A(\mathbb{D})$ 是 $H^\infty(\mathbb{D})$ 的一个闭子代数，而后者是定义在 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数所构成的交换巴拿赫代数。空间 $H^\infty(\mathbb{D})$（以及它的闭子代数

$A(\mathbb{D})$) 配备一致范数

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)| \qquad (\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})).$$

研究圆盘代数有很多理由。事实上，圆盘代数是最重要、最具体的非自伴交换巴拿赫代数之一 [8, 9, 12]。由于这个空间比方说 $H^\infty(\mathbb{D})$ 更“易于处理”，因此可以用它来检验一套感兴趣的理论。另一个引起我们对圆盘代数兴趣的因素，是近期的一篇论文 [6] ，该论文揭示了 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质对 $H^\infty(\mathbb{D})$ 成立。显然， $H^\infty(\mathbb{D})$ 是非自伴算子代数的另一个具体例子。为圆盘代数寻找后续解法似乎是一个迫切的问题，而这正是本文所做的工作。然而，在这种情况下，我们尚未能完全解决关于 $A(\mathbb{D})$的问题，尽管我们先验地“知道” $H^\infty(\mathbb{D})$是比 $A(\mathbb{D})$更复杂的对象。此外，我们假设给定算子的单位球面的像在 $\mathbb{T}$中的某一点具有等度连续性。

因此，本文的主要贡献在于证明：在等度连续性假设下（见下文定义2.1），同时逼近的 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质（如定义1.3所述）对 $A(\mathbb{D})$成立。事实上，我们证明了一个更强的结论：在等度连续性假设下，对于任意巴拿赫空间 X，$(X, A(\mathbb{D}))$ 均满足 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。

对于一致代数 [4, 11] 上的 Asplund 算子，也有类似的结论。然而，$A(\mathbb{D})$ 不是 Asplund 的；另一方面，就检查相关条件而言，当前的等度连续性条件似乎更为实用（参见第3节）。

本文结构如下。除本节外，本文还包括另外两节。第一节介绍主要结果，最后一节则给出一些能够（以及不能）接受范数的算子的例子，以及满足主要定理假设的 $A(\mathbb{D})$ 上的算子。

2. The main result

本节中，我们证明 $A(\mathbb{D})$的 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质。首先回顾巴拿赫空间之间函数族的等度连续性定义。

定义2.1. 设 X 和 Y 是两个巴拿赫空间，且 $x_0 \in X$。若函数族$\mathcal{F}$ 从 X 到 Y 在 x_0 处等度连续，则对每个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon,$$

对所有满足 $\|x - x_0\| < \delta$的 $f \in \mathcal{F}$和 $x \in X$,

现在我们着手介绍本文的主要结果。该结果证明的出发点与空间 $H^\infty(\mathbb{D})$ [6, 引理2.1]（以及其他一些空间，参见[11, 引理2.5] 和 [18, 引理 3]）相似。然而，随着证明的推进，其思路与先前空间的证明显著不同。

下文将采用一种特定的符号约定。对于每个 $f \in A(\mathbb{D})$，我们将用 f 表示 f 在整个 $\mathbb{D}$ 上的连续延拓$\tilde{}$ $\bar{}$。

定理 2.2. 设 X 为一个巴拿赫空间，$x_0 \in S_X$、$T \in S_{\mathcal{B}(X,A(\mathbb{D}))}$ 属于 $\epsilon \in (0,1)$，且 θ_0 为一个实数。假设

$$\mathcal{F} = \{\widetilde{Tx} \mid x \in S_X\},$$

在 $e^{i\theta_0}$ 处等度连续，并且

$$\left|\widetilde{Tx_0}(e^{i\theta_0})\right| > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

那么存在 $y_0 \in S_X$ 和 $N \in S_{\mathcal{B}(X,A(\mathbb{D}))}$，使得

(1) $\|Ny_0\| = 1$，(2) $\|x_0 - y_0\| < \sqrt{2\epsilon}$，以及

(3) $\|T - N\| < 8\epsilon$。

证明。由于 $0 < \epsilon < 1$，Stolz 区域 Ω_ϵ 定义良好，其中

$$\Omega_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z| + (1-\epsilon)|1-z| \leq 1\}.$$

根据上述定义，显然 $0, 1 \in \Omega_\epsilon$。此外，存在一个同胚$\psi_\epsilon : \overline{\mathbb{D}} \to \Omega_\epsilon$（黎曼映射定理的一个改进，参见 [20, 定理 14.8、14.19]），使得

(1) $\psi_\epsilon|_{\mathbb{D}}$ 是到 Ω_ϵ内部的共形映射，(2) $\psi_\epsilon(1) = 1$，且

(3) $\psi_\epsilon(0) = 0$。

根据 Ω_ϵ 的构造，可得 $\epsilon^2\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega_\epsilon$。此外，由于 0 属于开集 ${\psi_\epsilon}^{-1}(\epsilon^2\mathbb{D})$，存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $\delta_1 < \epsilon$ 且

$$\delta_1\mathbb{D} \subseteq {\psi_\epsilon}^{-1}(\epsilon^2\mathbb{D}). \tag{2.1}$$

现在我们不再沿用 [6, 引理 2.1] 的证明。由于 $\mathcal{F} = \{Tx \mid x \in S_X\}$ 在 $e^{i\theta_0}$ 处等度连续，存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$|\widetilde{Tx}(z) - \widetilde{Tx}(e^{i\theta_0})| < \epsilon, \tag{2.2}$$

对所有满足 $|z - e^{i\theta_0}| < \delta_2$ 的 $z \in \overline{\mathbb{D}}$。在 $\overline{\mathbb{D}}$ 中定义开集 U 如下：

$$U = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |z - e^{i\theta_0}| < \delta_2\}.$$

由于 $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$，存在 $\tilde{g_1} \in A(\mathbb{D})$，使得（参见 [14, 第 80-81] 页）

$$\tilde{g_1}(e^{i\theta_0}) = 0,$$

and

$$\mathrm{Re}\tilde{g_1}(z) < 0 \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus K),$$

其中

$$K = \{e^{i\theta_0}\}.$$

由 $\overline{\mathbb{D}}$ 上 $\tilde{g_1}$ 的连续性可知，存在一个数 $\gamma > 0$，使得

$$\mathrm{Re}\tilde{g_1}(z) \leq -\gamma \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus U).$$

选择 $0 < \epsilon_1 < 1$，使得

$$\epsilon_1^\gamma < \delta_1.$$

由于 $e^{-n} \to 0$ as $n \to \infty$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$e^{-n_0} < \epsilon_1.$$

定义

$$\tilde{h}(z) := e^{n_0 \tilde{g_1}(z)} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

鉴于 $\mathrm{Re}\tilde{g_1}(z) \leq 0$，我们得到

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(z)| &= e^{n_0 \mathrm{Re}\tilde{g_1}(z)} \\ &\leq e^0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

而 $\tilde{g_1}(e^{i\theta_0}) = 0$ 则推出

$$\tilde{h}(e^{i\theta_0}) = e^{n_0 \tilde{g_1}(e^{i\theta_0})} = 1.$$

对于每个 $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus U$，我们有

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(z)| &= e^{n_0 \mathrm{Re}\tilde{g_1}(z)} \\ &= e^{-n_0 - \mathrm{Re}\tilde{g_1}(z)} \\ &< \epsilon_1^{-\mathrm{Re}\tilde{g_1}(z)}. \end{aligned}$$

由 由事实可知，对于所有 $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus U$，都有 $-\mathrm{Re}\,\tilde{g_1}(z) \geq \gamma$，且 $0 < \epsilon_1 < 1$，因此我们得出 t

$$|\tilde{h}(z)| < \epsilon_1^{\gamma}.$$

根据不等式 $\epsilon_1^{\gamma} < \delta_1$，必有

$$|\tilde{h}(z)| < \delta_1 \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus U).$$

在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上定义 η 如下:

$$\eta := \Psi_\epsilon \circ \tilde{h}.$$

Then

$$\begin{aligned} \eta(e^{i\theta_0}) &= (\Psi_\epsilon \circ \tilde{h})(e^{i\theta_0}) \\ &= \Psi_\epsilon(1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \eta(\overline{\mathbb{D}} \setminus U) &= \Psi_\epsilon(\tilde{h}(\overline{\mathbb{D}} \setminus U)) \\ &\subseteq \Psi_\epsilon(\delta_1 \mathbb{D}) \\ &\subseteq \epsilon^2 \mathbb{D}. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} |\eta(z)| &= |\Psi_\epsilon(\tilde{h}(z))| \\ &\leq |\tilde{h}(z)| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

对于所有 $z \in \overline{\mathbb{D}}$，可得 $\|\eta\| \leq 1$。此外，对于 $z \in \overline{\mathbb{D}}$，我们有

$$\begin{aligned} |\eta(z)| + (1-\epsilon)|1-\eta(z)| &= |\Psi_\epsilon(\tilde{h}(z))| + (1-\epsilon)|1-\Psi_\epsilon(\tilde{h}(z))| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

定义泛函 $\Psi:\ X \longrightarrow \mathbb{C}$ 如下

$$\Psi x = \widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) \qquad (x \in X).$$

容易看出，$\|\Psi\| \leq 1$。此外

$$\begin{aligned} |\Psi x_0| &= |\widetilde{Tx_0}(e^{i\theta_0})| \\ &> 1 - \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

最后，定义 $\Psi_1 = \dfrac{\Psi}{\|\Psi\|}:\ X \longrightarrow \mathbb{C}$。于是 $\|\Psi_1\| = 1$，并且

$$\begin{aligned} |\Psi_1 x_0| &= \left|\frac{\Psi}{\|\Psi\|}x_0\right| \\ &\geq |\Psi x_0| \\ &> 1 - \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

现在，我们可以对 Ψ_1应用 Bishop-Phelps-Bollob´as 定理（定理 1.2）。因此，存在一个向量 $y_0 \in S_X$ 和一个线性泛函 $\Psi_2:\ X \to \mathbb{C}$，使得 $\|\Psi_2\| = 1$，并且

(i) $|\Psi_2(y_0)| = 1$, (ii) $\|y_0 - x_0\| \leq \sqrt{2\epsilon}$, 以及

(iii) $\|\Psi_1 - \Psi_2\| < \sqrt{2\epsilon}$。

定义一个线性算子 $N:\ X \longrightarrow A(\mathbb{D})$，其定义为

$$(Nx)(z) := \eta(z)\Psi_2(x) + (1-\epsilon)(1-\eta(z))Tx(z), \tag{2.3}$$

对于所有 $x \in X$ 和 $z \in \mathbb{D}$。由于

$$\begin{aligned} |Nx(z)| &\leq |\eta(z)||\Psi_2(x)| + (1-\epsilon)|1-\eta(z)||Tx(z)| \\ &\leq |\eta(z)| + (1-\epsilon)|1-\eta(z)| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

对于所有 $z \in \mathbb{D}$，可得 $\|N\| \leq 1$。此外，注意到

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{Ny_0}(e^{i\theta_0})\right| &= \left|\eta(e^{i\theta_0})\Psi_2(y_0) + (1-\epsilon)(1-\eta(e^{i\theta_0}))\widetilde{Ty_0}(e^{i\theta_0})\right| \\ &= |\Psi_2(y_0)| \\ &= 1. \end{aligned}$$

固定 $x \in S_X$。然后

$$\begin{aligned}\|(N-T)x\| &= \|\eta\Psi_2(x) + (1-\epsilon)(1-\eta)Tx - Tx\| \\ &= \|\eta\Psi_2(x) - \epsilon(1-\eta)Tx + Tx - \eta Tx - Tx\| \\ &= \|\eta(\Psi_2(x) - Tx) - \epsilon(1-\eta)Tx\| \\ &\leq \|\eta(\Psi_2(x) - Tx)\| + \epsilon\|1-\eta\|\|Tx\| \\ &\leq \|\eta(\Psi_2(x) - Tx)\| + 2\epsilon.\end{aligned}$$

接下来，我们估计

$$\begin{aligned}\|\eta(\Psi_2 x - Tx)\| &= \|\eta(\Psi_2 x - \Psi_1 x + \Psi_1 x - \Psi x + \Psi x - Tx)\| \\ &\leq \|\eta\|\|\Psi_2 x - \Psi_1 x\| + \|\eta\|\|\Psi_1 x - \Psi x\| + \|\eta(\Psi x - Tx)\| \\ &\leq \sqrt{2\epsilon} + \left\|\frac{\Psi}{\|\Psi\|}x - \Psi x\right\| + \|\eta(\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - Tx)\| \\ &\leq \sqrt{2\epsilon} + |1 - \|\Psi\|| + \|\eta(\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - Tx)\| \\ &\leq \sqrt{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{3} + \|\eta(\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - Tx)\|,\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\|\eta(\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - \widetilde{Tx})\| &= \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\eta(z)||\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - \widetilde{Tx}(z)| \\ &\leq \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}\setminus U} |\eta(z)||\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - \widetilde{Tx}(z)| + \sup_{z\in U} |\eta(z)||\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - \widetilde{Tx}(z)| \\ &\leq 2\epsilon^2 + \sup_{z\in U} |\eta(z)||\widetilde{Tx}(e^{i\theta_0}) - \widetilde{Tx}(z)| \\ &< 2\epsilon + \epsilon.\end{aligned}$$

最后，我们得出结论： $\|S - T\| < 8\epsilon$。证明至此完成。 □

特别地，我们得到圆盘代数的以下 Bishop-Phelps-Bollob´as 性质：

推论 2.3。设 $T \in \mathcal{B}(A(\mathbb{D}))$、$f_0 \in S_{A(\mathbb{D})}$、$\|T\| = 1$、$\epsilon \in (0,1)$，并设 θ_0 为实数。假设

$$\mathcal{F} = \{\widetilde{Tg} \mid g \in S_{A(\mathbb{D})}\},$$

在 $e^{i\theta_0}$ 处等度连续，且

$$\left|\widetilde{Tf_0}(e^{i\theta_0})\right| > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

那么存在 $N \in S_{\mathcal{B}(A(\mathbb{D}))}$ 和 $g_0 \in S_{A(\mathbb{D})}$ 使得

(1) $\|Ng_0\| = 1$、(2) $\|f_0 - g_0\| < \sqrt{2\epsilon}$ 和 (3) $\|T - N\| < 8\epsilon$。

我们不知道如何去掉前述定理中的等度连续性假设。此外，等度连续性假设对于范数达到而言，似乎并非必要，但我们也没有证据支持这一判断。在下一节中，我们将证明满足等度连续性条件的算子确实存在。

3. Examples

关于范数达到或未达到的算子的非平凡例子，一直备受关注。本节是最后一节，旨在给出一些属于这一范围的算子例子。我们还将对 $\mathscr{B}(A(\mathbb{D}))$ 的算子理想作出一项一般性观察。

我们先介绍两类简单（但经典）的达到范数的算子。令$\varphi \in A(\mathbb{D})$。在 $A(\mathbb{D})$上定义乘法算子 M_ϕ 和复合算子 C_φ，如下：

$$M_\varphi f = \varphi f \qquad (f \in A(\mathbb{D})),$$

and

$$C_\varphi f = f \circ \varphi \qquad (f \in A(\mathbb{D})),$$

分别地。对于复合算子的情形，我们还必须假设 φ 是 $\mathbb{D}$的自映射。无论哪种情形，我们都可以观察到

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \|M_\varphi 1\|,$$

and

$$\|C_\varphi\| = 1 = \|C_\varphi 1\|.$$

因此， M_φ 和 C_φ 都是范数达到算子。

未达到范数的非平凡算子例子基于另一个重要空间，即 Hardy空间 $H^2(\mathbb{D})$和圆盘代数 $A(\mathbb{D})$。回忆一下（见 [13, 14]）

$$H^2(\mathbb{D}) = \Big\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_2 := \Big(\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^2 d\mu(z) \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\},$$

其中， $d\mu$是 定义在 $\mathbb{T}$ $(= \partial\mathbb{D})$上的归一化勒贝格测度。已知一个函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}),$$

属于 $H^2(\mathbb{D})$当且仅当

$$\|f\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

现在，我们准备给出一个有界线性算子 T： $A(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$，该算子不达到范数。

例 3.1. 对于每个 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$，定义线性算子 T: $A(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ 如下：

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) a_n z^n.$$

我们计算

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &< \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|f\|_2\\ &\leq \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

这意味着 T 有界，而且不达到范数。

构造满足本文主要结果假设的例子至关重要。在下面的例子中，我们正是这样做的。注意，根据 James定理 [15, 16], ，在 $A(\mathbb{D})^*$ 中存在不达到范数的泛函。

例3.2。固定一个不达到范数的泛函 $x^* \in A(\mathbb{D})^*$。再固定一个非零的 $h \in A(\mathbb{D})$。定义 $T \in \mathscr{B}(A(\mathbb{D}))$ 如下:

$$Tf = x^*(f)h,$$

对所有 $f \in A(\mathbb{D})$ 均成立。简单计算可得 $\|T\| = \|x^*\|\|h\|$，并且 T 不达到范数。接下来，我们考虑以下集合

$$\mathcal{F} = \{\widetilde{Tf} : f \in S_{A(\mathbb{D})}\}.$$

根据 T 的定义可知

$$\mathcal{F} = \{x^*(f)\tilde{h} : f \in S_{A(\mathbb{D})}\}.$$

固定 $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ 和 $\epsilon > 0$。我们声称 $\mathcal{F}$ 在 $e^{i\theta_0}$ 处是等度连续的。由 $\tilde{h}$ 的连续性，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|\tilde{h}(z) - \tilde{h}(e^{i\theta_0})\| < \frac{\epsilon}{\|x^*\|},$$

当 $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ 时。对于所有满足 $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ 的 z，我们有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{Tf}(z) - \widetilde{Tf}(e^{i\theta_0})\| &= \|x^*(f)\tilde{h}(z) - x^*(f)\tilde{h}(e^{i\theta_0})\|\\ &\leq \|x^*(f)\|\|\tilde{h}(z) - \tilde{h}(e^{i\theta_0})\|\\ &\leq \|x^*\|\|\tilde{h}(z) - \tilde{h}(e^{i\theta_0})\|\\ &< \|x^*\|\frac{\epsilon}{\|x^*\|}\\ &= \epsilon,\end{aligned}$$

这证明了 $\mathcal{F}$ 在 $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ 处等度连续。因此， T 满足定理 2.2 的假设。

特别地，定理 2.2使我们得出结论：如上面例3.2中构造的 T可以由达到范数的算子逼近。类似的其他例子包括:

例3.3. 设 X 是一个非自反巴拿赫空间。根据James定理，存在一个不能达到范数的线性泛函 $x_0^* \in X^*$。固定一个非零函数 h，其属于 $A(\mathbb{D})$。定义 $T \in \mathscr{B}(X, A(\mathbb{D}))$为

$$Tx = x_0^*(x)h \qquad (x \in X).$$

通过与例3.2中类似的计算，我们得出 T 不达到范数，且该族

$$\mathcal{F} = \{x_0^*(x)h : x \in S_X\},$$

在 $\mathbb{T}$的每一点都等度连续。

最后，给出一个 $A(\mathbb{D})$ 上达到范数的算子的例子：

例3.4. 设 $x^* \in A(\mathbb{D})^*$, $\|x^*\| = 1$ 是一个达到范数的泛函。存在$f_0 \in S_{A(\mathbb{D})}$ 使得 $|x^*(f_0)| = 1$。取一个非零的 $h \in A(\mathbb{D})$。定义 $T \in \mathscr{B}(A(\mathbb{D}))$ 如下：

$$Tf = x^*(f)h,$$

对所有 $f \in A(\mathbb{D})$。通过常规计算可得

$$\|T\| = \|x^*\|\|h\|.$$

Then

$$\begin{aligned}\|Tf_0\| &= \|x^*(f_0)h\| \\ &= |x^*(f_0)|\|h\| \\ &= \|x^*\|\|h\| \\ &= \|T\|,\end{aligned}$$

这意味着 T 达到范数。

上述例子尤其适用于求值泛函。对于固定的 $z_0 \in \mathbb{D}$，定义求值泛函 $ev_{z_0} \in A(\mathbb{D})^*$ 如下：

$$ev_{z_0} f = f(z_0) \qquad (f \in A(\mathbb{D})).$$

显然

$$\|ev_{z_0}\| = 1 = |ev_{z_0}(1)|,$$

也就是说，ev_{z_0} 达到范数。此外，$\|T1\| = \|T\|$，其中 T 的定义与上述例子相同。

现在我们转向 $\mathscr{B}(A(\mathbb{D}))$ 的算子理想。给定一个巴拿赫空间 X，如果子集$\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B}(X)$ 包含所有有限秩算子，并且

$$T_1 \circ T \circ T_2 \in \mathscr{I},$$

对所有 $T \in \mathscr{I}$和 $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(X)$ 均成立。后续推论的证明本质上与 [6,推论 4.1] 的证明相似。

推论 3.5. 设 $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B}(A(\mathbb{D}))$ 是一个算子理想，$T \in \mathscr{I}$，$\|T\| = 1$，$f_0 \in S_{A(\mathbb{D})}$，$\sim\epsilon \in (0, 1)$，且 θ_0 是一个实数。假设 $\mathcal{F} = \{Tg\colon g \in S_{A(\mathbb{D})}\}$ 在 $e^{i\theta_0}$ 处等度连续，并且

$$\left|\widetilde{Tf_0}(e^{i\theta_0})\right| > 1 - \frac{\epsilon}{3}.$$

则存在 $N \in \mathscr{I}$ 和 $g_0 \in S_{A(\mathbb{D})}$，使得

(1) $\|Ng_0\| = \|N\| = 1$,

(2) $\|f_0 - g_0\| < \sqrt{2\epsilon}$，以

及 (3) $\|T - N\| < 8\epsilon$。

证明。通过将推论 2.3 应用于 T，只需证明 $N \in \mathscr{I}$，其中 N 的定义如 (2.3) 所示:

$$(Ng)(z) := \eta(z)\Psi_2(g) + (1-\epsilon)(1-\eta(z))Tg(z),$$

对所有 $g \in A(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$。记

$$N = N_1 + N_2,$$

其中

$$(N_1 g)(z) = \eta(z)\Psi_2(g),$$

and

$$(N_2 g)(z) = (1-\epsilon)(1-\eta(z))Tg(z),$$

对于所有的 $g \in A(\mathbb{D})$ 和 $z \in \mathbb{D}$。由于 $\mathscr{I}$ 是一个理想，只需证明 $N_1, N_2 \in \mathscr{I}$。我们注意到 $N_1 \in \mathscr{I}$，因为 N_1 是一个秩一算子。因此，$T \in \mathscr{I}$ 得出 $N_2 \in \mathscr{I}$，从而完成证明。□

与 [6] 中的结果一样，对于弱紧算子，该结论同样成立。

致谢：第一作者的研究得到印度班加罗尔印度统计学院理论统计与数学部的支持。第二位作者的研究部分得到印度政府科学技术部（DST）SERB 项目 TARE（TAR/2022/000063）的支持。第三位作者的研究得到印度政府原子能部（DAE）NBHM 博士后奖学金的支持（档案编号：0204/3/2020/R&D-II/2445）。

References

[1] M. D. Acosta, R. M. Aron, D. Garc´ıa and M. Maestre, 《算子上的 Bishop-Phelps-Bollobás 定理》，《泛函分析杂志》254 (2008)，第 11 期，2780–2799。[2] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, Y. S. Choi, M. Ciesielski, S. K. Kim, H. J. Lee, M. L. Lourenc.o and M. Mart´ın, 《连续函数空间之间算子的 Bishop-Phelps-Bollobás 性质》，Nonlinear Anal. 95 (2014)，323–332。[3] R. M. Aron, D. Garc´ıa and M. Maestre, 《关于达到范数的多项式》，《数学科学研究所出版物》39 (2003)，第 1 期，165–172。[4] R. Aron, B. Cascales and O. Kozhushkina, 《Bishop-Phelps-Bollobás 定理与 Asplund 算子》，Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011)，3553–3560。[5] R. Aron and V. Lomonosov, 《Bishop–Phelps 定理之后》，Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. 18 (2014)，39-49。

[6] N. Bala, K. Dhara, J. Sarkar and A. Sensarma, 《有界解析函数的 Bishop-Phelps-Bollobás 定理》, 《泛函分析杂志》第 284 卷, 第 6 期（2023年）, 文章编号 109834。[7] E. Bishop and R. Phelps, 《每个巴拿赫空间都是次自反的证明》, 《美国数学会通报》67 (1961), 97–98。[8] J. Bourgain, 《圆盘代数的新巴拿赫空间性质及 H^∞》, 《数学学报》152 (1984), 第 1-2 期, 1–48。[9] J. Bourgain, 《圆盘代数中的基》, 《美国数学会汇刊》285 (1984), 第 1 期, 133–139。[10] D. Carando and M. Mazzitelli, 《在二重对偶中达到范数的有界全纯函数》, 《数学科学研究所出版物》51 (2015), 第 3 期, 489–512。[11] B. Cascales, A. J. Guirao and V. Kadets, 《一致代数的 Bishop-Phelps-Bollobás 型定理》, 《数学进展》240 (2013), 370–382。[12] A. Felikson, P. Tumarkin, 《无圈簇代数、反射群与带 puncture 的圆盘上的曲线》, 《数学进展》340 (2018), 855–882。[13] J. Garnett, 《有界解析函数》, 修订第 1 版, 数学研究生教材 236。Springer, 纽约, 2007。[14] K. Hoffman, 《解析函数巴拿赫空间》, 现代分析丛书, Prentice-Hall, Inc., 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1962。[15] R. James, 《自反性与线性泛函的上确界》, 《数学年刊》66 (1957), 159–169。[16] R. James, 《自反性的刻画》, 《数学研究》23 (1964), 205–216。[17] J. Johnson and J. Wolfe, 《范数达到算子》, 《数学研究》65 (1979), 7–19。[18] S. K. Kim and H. J. Lee, 《乌雷松型定理与全纯函数的 Bishop-Phelps-Bollobás 定理》, 《数学分析及其应用杂志》480 (2019), 123393, 8 页。[19] J. Lindenstrauss, 《关于达到其范数的算子》, 《以色列数学杂志》1 (1963), 139–148。[20] W. Rudin, 《实分析与复分析》, 第 3 版。McGraw-Hill Book Co., 纽约, 1987。

Indian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560 059, India电子邮箱：neerusingh41@gmail.com
Indian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road, Bangalore, 560 059, India电子邮箱：jaydeb@gmail.com, jay@isibang.ac.in
Indian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road, Bangalore, 560 059, India电子邮箱：aryamansensarma@gmail.com