arXiv:2305.00864v2 [math.NT] 5 May 2023

关于皮亚特茨基–沙皮罗型素数与几乎素数上的陈氏定理

Jinjiang Li & Fei Xue & Min Zhang

Abstract. 本文建立了皮亚特茨基–沙皮罗数列上的一种新的 Bombieri–Vinogradov 型均值定理。具体而言，证明了对于任意给定的常数 $A>0$以及任意充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{\xi}\\(d,l)=1}}\left|\sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}}g(a)\left(\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)\\ap=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap=[k^{1/\gamma}]}}1\right)\right|\ll\frac{x^{\gamma}}{(\log x)^{A}},$$

pr条件是 $1\leqslant A_1(x)<A_2(x)\leqslant x^{1-\varepsilon}$ 且 $g(a)\ll\tau_r^s(a)$，其中 $l\neq 0$ 是一个固定整数，并且

$$\xi:=\xi(\gamma)=\frac{2^{38}+17}{38}\gamma-\frac{2^{38}-1}{38}-\varepsilon$$

with

$$1-\frac{18}{2^{38}+17}<\gamma<1.$$

此外，对于满足以下条件的 γ

$$1-\frac{0.03208}{2^{38}+17}<\gamma<1,$$

我们证明存在无穷多个素数 p 使得 $p+2=\mathcal{P}_2$ 其中 $\mathcal{P}_2$ 是型为 γ的皮亚特茨基–沙皮罗几乎素数，并且存在无穷多个型为 p的皮亚特茨基–沙皮罗素数 γ 使得 $p+2=\mathcal{P}_2$。这些结果推广了 Pan 和 Ding 定理[37]，并改进了一系列此前的结果 [29, 31, 39, 47]。

1. Introduction and main result

三元哥德巴赫问题断言，每个奇数 $n\geqslant 9$ 都可以表示为

$$n=p_1+p_2+p_3, \tag{1.1}$$

其中 p_1，p_2，p_3 均为奇素数。1937年，维诺格拉多夫 [46] 证明了对于每个充分大的奇数，都存在这种形式（1.1）的渐近表示。最近，Helfgott [14, 15, 16, 17] 彻底解决了这一问题，并证明三元哥德巴赫猜想成立。二元哥德巴赫问题指出，每个偶数 $N\geqslant 6$都可以写成两个奇素数之和，这一问题也仍未解决。素数分布理论中的另一个核心问题，即孪生素数猜想，断言存在无穷多个素数 p 使得 $p+2$ 也是素数。尽管这一猜想至今未能攻克，但人们已取得了卓越的部分成果。其中一项著名结果归功于 Chen， [7, 8], 他证明了存在无穷多个素数 p 使得 $p+2$ 至多有 2 个素因子。

研究二元哥德巴赫问题的一个重要方法是使用筛法，尤其是塞尔伯格筛法。通常，我们用 $\mathcal{P}_r$ 表示至多有 r 个素因子（按重数计）的几乎素数。在塞尔伯格筛法中，误差项的估计至关重要。均值定理可用于在某些特殊算术级数上对该估计进行平均意义下的处理。一般来说，更强的结果

*Min Zhang 是通讯作者。关键词：Bombieri–Vinogradov定理；陈氏定理；皮亚特茨基–沙皮罗数列；几乎素数；指数和 MR(2020) 主题分类：11L20、11N05、11N36、11P32

如果能够对均值定理的“水平”推广取得更好的改进，则可以推导出。

1947年，Linnik 利用其提出的大筛法，R´enyi [41] 率先证明了以下估计成立

$$\sum_{d\leqslant x^{\xi}}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)-\frac{y}{\varphi(d)}\right|\ll\frac{x}{(\log x)^{A}} \tag{1.2}$$

对 $\xi<\xi_0$ 成立，其中某个固定的 $\xi_0<1$， $A>0$ 为任意给定值。由（1.2），R´enyi [41] 证明存在一个 $r\in\mathbb{N}^+$，使得每个充分大的偶数 N 都可表示为

$$N=p+\mathcal{P}_r, \tag{1.3}$$

其中 p 是素数。然而，R´enyi 并未给出 ξ_0与 r之间的定量联系。后来，Barban [3] 和 Pan [32, 34] 分别独立证明了（1.2）对 $\xi_0=1/6$ 和 $\xi_0=1/3$成立。当 $\xi_0=1/3$时，Pan [32] 首次给出了 r 的定量估计，并证明（1.3）对 $r=5$成立。此后，Barban [4] 和 Pan [33], 分别独立证明了（1.2）对 $\xi_0=3/8$成立，并由此都得出（1.3）对 $r=4$成立。显然，在广义黎曼猜想（GRH）成立的条件下，（1.2）对 $\xi_0=1/2$成立。1965年，Bombieri [5] 和维诺格拉多夫 [45] 分别独立且无条件地证明了（1.2）对 $\xi_0=1/2$成立。具体而言，Bombieri [5] 证明，对任意给定的 $A>0$，有

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}(\log x)^{-B}}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)-\frac{y}{\varphi(d)}\right|\ll\frac{x}{(\log x)^{A}}, \tag{1.4}$$

在 $B\geqslant 3A+23$的条件下。随后，Gallagher [10] 给出了（1.4）的一个简洁而有价值的证明。1965年，利用 Barban [4], 的结果，即 $\xi_0=3/8$，Buchstab [6] 证明了（1.3）对 $r=3$成立。迄今为止，这方面最好的结果归功于 Chen [7, 8]，他利用自己建立的“加权筛法”以及自己构造的“转换原理”，证明了（1.3）对 $r=2$ 成立。在其著名的工作中，Chen [8]必须证明一个结果，该结果是 Bombieri [5] 关于算术级数中素数分布的定理的一个变体。随后，Pan 和 Ding [35, 36, 37] 提出了一个新的均值定理，它是 Bombieri–Vinogradov 定理的一般化形式，并涵盖了 Chen 的情形。在 [37], 中，Pan 和 Ding 证明，对于任意给定的 $A>0$，若 $1\leqslant A_1(x)<A_2(x)\leqslant x^{1-\varepsilon}$，则有

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}(\log x)^{-B}}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{A_1(y)\leqslant a<A_2(y)\\ (a,d)=1}}f(a)\left(\sum_{\substack{an\leqslant y\\ an\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)-\frac{y}{a\varphi(d)}\right)\right|\ll\frac{x}{(\log x)^{A}}, \tag{1.5}$$

其中 $f(a)\ll\tau^k(a)$ 和 $B\geqslant 2A+2^{2k+2}(2^{2k+2}+1)+21$， $\tau(a)$ 表示狄利克雷除数函数。这里我们强调，(1.4) 可通过选取适当的函数 $f(a)$ 从 (1.5) 推导得出。

对于 $1/2<\gamma<1$，Piatetski–Shapiro 数列是形如 $([n^{1/\gamma}])_{n=1}^{\infty}$ 的数列。这类数列是为纪念 Piatetski–Shapiro 而命名的；他在 [40], 证明了 $([n^{1/\gamma}])_{n=1}^{\infty}$ 对于 $\frac{11}{12}<\gamma<1$ 含有无穷多个素数。具体而言，Piatetski–Shapiro 证明，对于 $\gamma\in(\frac{11}{12},1)$，计数函数

$$\pi_{\gamma}(x):=\#\left\{p\leqslant x:p=[n^{1/\gamma}]\ \text{ for some }\ n\in\mathbb{N}^+\right\}$$

满足渐近公式

$$\pi_{\gamma}(x)=\frac{x^{\gamma}}{\log x}(1+o(1)) \tag{1.6}$$

当 $x \to \infty$时。在上述渐近公式中， γ的取值范围内，已知（$[n^{1/\gamma}]$）$_{n=1}^{\infty}$包含无穷多个素数；多年来，许多数学家不断扩展了这一范围[1, 13, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 30, 42]。迄今为止，使（1.6）成立的最佳结果目前已知适用于所有 $\gamma \in (\frac{2426}{2817}, 1)$，这要归功于 Rivat 和 Sargos[43]。此外，Rivat 和 Wu [44] 还证明，对于 $\gamma \in (\frac{205}{243}, 1)$，存在无穷多个皮亚特斯基–沙皮罗素数；他们通过证明下界为 $\pi_\gamma(x)$，且其阶与预期相符，得出了这一结论。

1992年，Balog 和 Friedlander [2] 首次找到了一个渐近公式，用于计算方程（1.1）的解的个数，其中变量被限制为 Piatetski–Shapiro 素数。其定理的一个有趣推论是，每个充分大的奇数都可以表示为两个素数与一个类型为 γ 的 Piatetski–Shapiro 素数之和，前提是 $\gamma \in (\frac{8}{9}, 1)$。此后，Jia [21] 以及 Kumchev [24], 相继继续了这一方向的研究，而 Cui [9] 以及 Li 和 Zhang [28], 则分别对其进行了推广。

基于上述结果，研究方程（1.3）在 p 为 Piatetski–Shapiro 素数时的可解性很有意义。自然可以预期，Piatetski–Shapiro 素数满足 Bombieri–Vinogradov 型定理。早期，Leitmann [26], 在这一方向上唯一的结果给出了一个非常低的分布水平，因此无法确定参数 r。

2003 年，Peneva [39] 得到了适用于皮亚特斯基–沙皮罗素数的 Bombieri–Vinigradov 型均值定理。具体而言，她证明：对于任意给定常数 $A > 0$ 以及任意充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\sum_{\substack{d \leqslant x^{\xi} \\ (d,l)=1}} \left| \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\ d) \\ p=[k^{1/\gamma}]}} 1 - \frac{1}{\varphi(d)} \pi_\gamma(x) \right| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}, \tag{1.7}$$

其中 $l \neq 0$ 是一个固定整数，并且

$$\xi = \xi(\gamma) = \begin{cases} \frac{755}{424}\gamma - \frac{331}{212} - \varepsilon, & \text{for } \frac{662}{755} < \gamma \leqslant \frac{608}{675}, \\ \frac{5}{4}\gamma - \frac{13}{12} - \varepsilon, & \text{for } \frac{608}{675} < \gamma < 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

由（1.8）和筛法，Peneva [39] 首先证明，对于每个充分大的偶数 N，（1.3）存在解，其中 $p = [n^{1/\gamma}]$是一个皮亚特斯基–沙皮罗素数，而 r是满足该不等式的最小正整数

$$r + 1 - \frac{\log \frac{4}{1+3^{-r}}}{\log 3} > \frac{1}{\xi(\gamma)} + \varepsilon.$$

利用上述（ ξ 在（1.8）中的水平，Peneva [39] 证明了（1.3）对于 $r = 7$ 存在一个皮亚特斯基–沙皮罗素数 $p = [n^{1/\gamma}]$，且 $0.9854 < \gamma < 1$。实质上，依据 Peneva [39], 中的类似论证，可以得到存在无穷多个 γ型的皮亚特斯基–沙皮罗素数，使得 $p + 2 = \mathcal{P}_7$ 且 $0.9854 < \gamma < 1$。

2011年，Wang 和 Cai 使用 (1.8) 中相同的水平 ξ，改进了 Peneva 的结果 [47]，并证明存在无穷多个类型为 γ 的皮亚特斯基–沙皮罗素数[39]，使得$p + 2 = \mathcal{P}_5$ 且 $\frac{29}{30} < \gamma < 1$。随后，Lu 于 2018年 [31], 重新建立了适用于$\frac{12}{13} < \gamma < 1$的、水平为 $\xi = \xi(\gamma) = (13\gamma - 12)/4 - \varepsilon$ 的 Bombieri–Vinigradov 型均值定理。利用这一水平，Lu [31] 加强了 Wang 和 Cai 的结果 [47]。他证明存在无穷多个类型为 γ 的皮亚特斯基–沙皮罗素数 [29]，使得 $p + 2 = \mathcal{P}_4$ 且 $0.9993 < \gamma < 1$。随后，Li、Zhang 和 Xue 重建了水平为.....的 Bombieri–Vinigradov 型均值定理

$$\xi = \xi(\gamma) = \frac{129}{4}\gamma - \frac{255}{8} - \varepsilon$$

对于 $\frac{85}{86} < \gamma < 1$，他们利用这一结果和 Richert 加权筛法，证明存在无穷多个类型为 γ 的皮亚特斯基–沙皮罗素数，使得 $p + 2 = \mathcal{P}_3$，其中 $0.9989445 < \gamma < 1$。

在本文中，我们首先将推广 Pan 和 Ding 定理的结果 [37] 并提出一个新均值定理，它是关于包含 Chen 论证的 Piatetski–Shapiro 数列的 Bombieri–Vinogradov 型定理的一般形式 [8]。随后，通过使用 Chen的技巧，即“Chen 的加权筛法”和“转换原理”，我们将得出更强的结论，并改进此前关于 Piatetski–Shapiro 数列上平移素数这一主题的结果。

THEOREM 1.1. 假设 $l \neq 0$ 是一个固定的整数，且 γ 是满足以下条件的实数

$$1-\frac{18}{2^{38}+17}<\gamma<1.$$

那么对于任意给定的常数 $A>0$ 以及任意充分小的 $\varepsilon>0$，都有

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{\xi}\\(d,l)=1}}\left|\sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}}g(a)\left(\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)\\ap=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap=[k^{1/\gamma}]}}1\right)\right|\ll\frac{x^{\gamma}}{(\log x)^{A}},\tag{1.9}$$

如果 $1\leqslant A_1(x)<A_2(x)\leqslant x^{1-\varepsilon}$ 且 $g(a)\ll\tau_r^s(a)$，其中

$$\xi:=\xi(\gamma)=\frac{2^{38}+17}{38}\gamma-\frac{2^{38}-1}{38}-\varepsilon;$$

(1.9)中的隐含常数仅取决于 A 和 ε。

在定理 1.1中，若取 $A_1(x)\equiv 1$ 且

$$g(a)=\begin{cases}1, & \text{if } a=1,\\ 0, & \text{if } a>1.\end{cases}\tag{1.10}$$

那么（1.9）变为

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{\xi}\\(d,l)=1}}\left|\sum_{\substack{p\leqslant x\\p\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)\\p=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p\leqslant x\\p=[k^{1/\gamma}]}}1\right|\ll\frac{x^{\gamma}}{(\log x)^{A}},$$

从而定理 1.1 是（1.7）在其扩大的水平 $\xi\to\frac{9}{19}=0.473684\ldots$下，当 γ 趋于 1 时的推广。因此，可以得到以下推论。

COROLLARY 1.2. 假设 $l\neq 0$ 是一个固定的整数，并且 γ 是一个满足以下条件的实数

$$1-\frac{18}{2^{38}+17}<\gamma<1.$$

那么，对于任意给定的常数 $A>0$ 和任意充分小的 $\varepsilon>0$，以下结论成立。

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{\xi}\\(d,l)=1}}\left|\sum_{\substack{p\leqslant x\\p\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)\\p=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p\leqslant x\\p=[k^{1/\gamma}]}}1\right|\ll\frac{x^{\gamma}}{(\log x)^{A}},\tag{1.11}$$

其中

$$\xi:=\xi(\gamma)=\frac{2^{38}+17}{38}\gamma-\frac{2^{38}-1}{38}-\varepsilon;$$

(1.11) 中的隐含常数仅依赖于 A 和 ε。

REMARK 1. 在指数对假设下，即 $(\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon)$ 是一个指数对，由引理 3.2、引理 4.1 和引理 5.1 可知，(1.9) 对

$$\xi=\xi(\gamma)=\frac{5}{2}\gamma-2-\varepsilon\tag{1.12}$$

其中 $\frac{4}{5}<\gamma<1$，由此以及（1.10），可得（1.7），其中“水平”的定义与（1.12）相同，条件是 $\frac{4}{5}<\gamma<1$。

REMARK 2. 通过采用与证明定理 *1.1* 完全相同的方法，可以得到如下关于 Piatetski–Shapiro 型移位乘积的均值定理 ap:

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{\xi}\\(d,l)=1}}\left|\sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}}g(a)\left(\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)\\ap\pm 2=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ap\pm 2=[k^{1/\gamma}]}}1\right)\right|\ll\frac{x^{\gamma}}{(\log x)^{A}},\tag{1.13}$$

其中 $\xi=\xi(\gamma)$ 的显式公式以及 γ的取值范围，使得（*1.13*）成立，与定理 *1.1*中所示的完全相同。

THEOREM 1.3. 假设 γ 是一个满足的实数

$$1-\frac{0.03208}{2^{38}+17}<\gamma<1.$$

那么，存在无穷多个素数 p，使得

$$p+2=\mathcal{P}_2$$

其中 $\mathcal{P}_2$ 是类型为 γ 的 Piatetski–Shapiro 几乎素数。

THEOREM 1.4. 假设 γ 是一个满足条件的实数

$$1-\frac{0.03208}{2^{38}+17}<\gamma<1.$$

那么，存在无穷多个类型为 γ 的皮亚特斯基–沙皮罗素数 p，使得

$$p+2=\mathcal{P}_2.$$

REMARK 3. 定理 *1.4* 的证明过程与定理*1.3* 的证明过程基本相同，只需将定理 *1.1* 替换为推论 *1.2*。因此，我们只给出定理 *1.3* 的证明细节，并省略定理 *1.4*的证明。

REMARK 4. 改进满足 r 的数 $p+2=\mathcal{P}_r$ 为皮亚特斯基–沙皮罗素数或几乎素数的关键，在于增大皮亚特斯基–沙皮罗数列上 Bombieri–Vinigradov 型均值定理的水平 $\xi=\xi(\gamma)$，其中 γ 接近 1。为了将本文的结果与先前的结果进行比较（例如，参见文献[39, 31, 29]），我们将数值结果列如下:

$$\begin{aligned}
&\xi(\gamma)=\frac{5}{4}\gamma-\frac{13}{12}-\varepsilon\to\frac{1}{6}=0.1666\ldots, && for\ \gamma\to 1;\\
&\xi(\gamma)=\frac{13\gamma-12}{4}-\varepsilon\to\frac{1}{4}=0.25, && for\ \gamma\to 1;\\
&\xi(\gamma)=\frac{129}{4}\gamma-\frac{255}{8}-\varepsilon\to\frac{3}{8}=0.375, && for\ \gamma\to 1;\\
&\xi(\gamma)=\frac{2^{38}+17}{38}\gamma-\frac{2^{38}-1}{38}-\varepsilon\to\frac{9}{19}=0.473684\ldots, && for\ \gamma\to 1;\\
&\xi(\gamma)=\frac{5}{2}\gamma-2-\varepsilon\to\frac{1}{2}=0.5, && for\ \gamma\to 1. \quad (under\ exponent\ pair\ hypothesis)
\end{aligned}$$

NOTATION. 在本文中，x 表示一个充分大的数；ε 和 η 表示充分小的正数，每次出现时其取值可能不同。带或不带下标的 p 和 q始终表示素数。我们分别用 $[x]$、$\{x\}$ 和 $\|x\|$ 表示 x 的整数部分、x 的小数部分以及 x 到最近整数的距离。用 $\mathcal{P}_r$ 表示一个至多含有 r 个素因子（按重数计算）的几乎素数。通常，$\varphi(n)$、$\Lambda(n)$、$\tau_r(n)$和 $\mu(n)$分别表示欧拉函数、冯·曼戈尔特函数、维数为 r的狄利克雷除数函数以及莫比乌斯函数。m_1、m_2、……、m_k的最大公约数和最小公倍数分别记为（m_1、m_2、……、m_k）和 $[m_1,m_2,\ldots,m_k]$。记 $L=$为log x；$e(t)$为 $=\exp(2\pi it)$；$\psi(t)$为$=t-[t]-\frac{1}{2}$。

记号 $n \sim X$ 表示 n 在（X、$2X$]）的一个子区间内取值；不同位置出现时，该子区间的端点不一定相同，且可能依赖于外层求和变量。 $f(x)$表示 $\ll g(x)$； $f(x)$表示 $= O(g(x))$； $f(x)$表示 $\asymp g(x)$，即 $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$。

2. PRELIMINARIES

在本节中，我们将把估计（1.9）中的求和问题化为估计素数上的指数和。

对于 $1/2 < \gamma < 1$，容易看出

$$[-k^\gamma] - [-(k+1)^\gamma] = \begin{cases} 1, & \text{if } k = [m^{1/\gamma}] \text{ for some } m \in \mathbb{N}^+, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For 为方便起见，令 $D = x^\xi$。为了证明（1.9），我们只需证明 at

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \Bigg(\sum_{\substack{an\leqslant x\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big([-(an)^\gamma] - [-(an+1)^\gamma]\big) - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{an\leqslant x} \Lambda(n)\big([-(an)^\gamma] - [-(an+1)^\gamma]\big) \Bigg) \Bigg| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.$$

因此，只需证明

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \Bigg(\sum_{\substack{an\leqslant x\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big((an+1)^\gamma - (an)^\gamma\big) - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{an\leqslant x} \Lambda(n)\big((an+1)^\gamma - (an)^\gamma\big) \Bigg) \Bigg| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{\substack{an\leqslant x\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big(\psi\big(-(an)^\gamma\big) - \psi\big(-(an+1)^\gamma\big)\big) \Bigg| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}, \tag{2.2}$$

and

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \Bigg| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{an\leqslant x} \Lambda(n)\big(\psi\big(-(an)^\gamma\big) - \psi\big(-(an+1)^\gamma\big)\big) \Bigg| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}. \tag{2.3}$$

估计式(2.1)可以由 Bombieri–Vinogradov 型新均值定理得到，该定理由 Pan 和 Ding [35, 36, 37], 通过分部求和消去光滑权函数 $f(t) = (t+1)^\gamma - t^\gamma$ 并且它对每一个 $\gamma \in (1/2, 1)$ 以及$D = x^{1/2-\varepsilon}$都成立，其中 $\varepsilon > 0$ 充分小。因此，我们只需证明(2.2)和(2.3)。首先，我们将详细给出(2.2)的证明，而(2.3)可以按照(2.2)的证明过程类似地处理。显然，如果我们能够证明对于 $X \leqslant x$，有如下结论成立，那么(

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big(\psi\big(-(an)^\gamma\big) - \psi\big(-(an+1)^\gamma\big)\big) \Bigg| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}, \tag{2.4}$$

设 $\eta > 0$ 为一个充分小的数。若 $X \leqslant x^{1-\eta}$，则（2.4）的左端为

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \left| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big((an+1)^\gamma-(an)^\gamma\big)\right| \\
&\quad + \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \left| \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big([-(an)^\gamma]-[-(an+1)^\gamma]\big)\right| \\
&\ll L \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} (an)^{\gamma-1}\tau(|an-l|) + L \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an=[k^{1/\gamma}]}} \tau(|an-l|) \\
&\ll X^{\frac{\eta}{3}} \sum_{b\sim X} b^{\gamma-1}\tau(b) + X^{\frac{\eta}{3}} \sum_{\substack{b\sim X\\b=[k^{1/\gamma}]}} \tau(b) \ll X^{\gamma+\frac{\eta}{2}} \ll x^\gamma L^{-A}.
\end{aligned}$$

因此，我们可以假设 $x^{1-\eta} \leqslant X \leqslant x$。容易看出，对于 $\xi \leqslant (1-\eta)/2$，有以下结论。

$$X^\xi \leqslant D \leqslant X^{\xi+\frac{\eta}{2}}.$$

现在，我们使用众所周知的展开式（例如，参见 Heath–Brown 第 245 页中的论证[13]）

$$\psi(t) = -\sum_{0<|h|\leqslant H} \frac{e(th)}{2\pi i h} + O(E(t,H)), \tag{2.5}$$

其中

$$E(t,H) := \min\left(1, \frac{1}{H\|t\|}\right) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h e(th)$$

and

$$b_h \ll \min\left(\frac{\log 2H}{H}, \frac{1}{|h|}, \frac{H}{|h|^2}\right).$$

将（2.5）代入（2.4）的左端，（2.5）中的误差项对（2.4）左端的贡献为

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} g(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n)\big(E((an)^\gamma,H)+E((an+1)^\gamma,H)\big) = E_1+E_2, \tag{2.6}$$

可以说。W 我们只处理 E_1，因为 E_2 的估计完全相同。对于 E_1，我们有

$$\begin{aligned}
E_1 &\ll L \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a) \sum_{\substack{an\sim X\\an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} E((an)^\gamma,H) \\
&\ll X^{\eta/10} \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{\substack{m\sim X\\m\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \left(\sum_{\substack{m=an\\A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \right) E(m^\gamma,H) \\
&\ll X^{\eta/9} \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{\substack{m\sim X\\m\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h e(hm^\gamma) \\
&\ll X^{\eta/9} \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} |b_h| \left| \sum_{\substack{m\sim X\\m\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} e(hm^\gamma) \right|.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

现在，我们使用以下估计，这是 Heath–Brown 的引理1[13] 关于算术级数的一个类似结果，用于给出（2.7）中最内层求和的上界估计。

LEMMA 2.1. 设 $1 \leqslant d \leqslant X$, $X < X_1 \leqslant 2X$。则

$$\sum_{\substack{X<m\leqslant X_1\\ m\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} e(hm^\gamma) \ll \min\Big(Xd^{-1}, d^{-1}|h|^{-1}X^{1-\gamma} + d^{\kappa-\ell}|h|^{\kappa}X^{\kappa\gamma-\kappa+\ell}\Big),$$

其中 (κ, ℓ) 是一个指数对。

证明。 参见 Li、Zhang 和 Xue 的引理 2.1 [29]。 □

取 $(\kappa, \ell) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，由引理 2.1，可得

$$\begin{aligned} E_1 &\ll X^{\eta/9}\sum_{d\leqslant D}\Big(|b_0|Xd^{-1} + \sum_{h\neq 0}|b_h|\Big(|h|^{-1}X^{1-\gamma}d^{-1} + |h|^{1/2}X^{\gamma/2}\Big)\Big)\\ &\ll X^{1+\eta/8}H^{-1} + X^{1-\gamma+\eta/9}\sum_{d\leqslant D}d^{-1}\sum_{h\neq 0}|h|^{-2}\\ &\quad + X^{\gamma/2+\eta/9}D\Big(\sum_{0<|h|\leqslant H}|h|^{-1/2} + H\sum_{|h|>H}|h|^{-3/2}\Big)\\ &\ll X^{1+\eta/8}H^{-1} + X^{1-\gamma+\eta/8} + X^{\gamma/2+\eta/8}H^{1/2}D \ll x^\gamma L^{-A}, \end{aligned}$$

在.....条件下

$$H = X^{1-\gamma+\eta} \qquad \text{and} \qquad \gamma > \frac{1}{2} + \xi. \tag{2.8}$$

因此，接下来只需证明

$$\begin{aligned} S := \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{1}{h}\sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\ (a,d)=1}}\tau_r^s(a)\\ \times\Big|\sum_{\substack{an\sim X\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)\Big(e\big(-h(an)^\gamma\big) - e\big(-h(an+1)^\gamma\big)\Big)\Big| \ll x^\gamma L^{-A}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

定义

$$\phi_{h,a}(n) = 1 - e\big(h((an)^\gamma - (an+1)^\gamma)\big).$$

通过分部求和，式（2.9）左侧最内层的求和为

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{an\sim X\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)e(-h(an)^\gamma)\phi_{h,a}(n)\\ &= \int_{\frac{X}{a}}^{\frac{2X}{a}}\phi_{h,a}(t)\mathrm{d}\Big(\sum_{\substack{X/a<n\leqslant t\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)e(-h(an)^\gamma)\Big)\\ &\ll \Big|\phi_{h,a}\Big(\frac{2X}{a}\Big)\Big|\Big|\sum_{\substack{an\sim X\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)e(-h(an)^\gamma)\Big|\\ &\quad + \int_{\frac{X}{a}}^{\frac{2X}{a}}\Big|\sum_{\substack{X/a<n\leqslant t\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)e(-h(an)^\gamma)\Big|\Big|\frac{\partial\phi_{h,a}(t)}{\partial t}\Big|\mathrm{d}t\\ &\ll hX^{\gamma-1}\times\max_{X/a<t\leqslant 2X/a}\Big|\sum_{\substack{X/a<n\leqslant t\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)e(-h(an)^\gamma)\Big|, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中我们使用了估计式

$$\phi_{h,a}(t) \ll ha^{\gamma-1}t^{\gamma-1} \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \phi_{h,a}(t)}{\partial t} \ll ha^{\gamma-1}t^{\gamma-2}.$$

将 (2.10代入 (2.9的左端，得到

$$\begin{aligned} S &\ll X^{\gamma-1} \times \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{0<h\leqslant H} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a) \Bigg| \sum_{\substack{an\sim X\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n) e(-h(an)^\gamma)\Bigg| \\ &= X^{\gamma-1} \times \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \sum_{0<h\leqslant H} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a)\cdot c(d,h,a) \sum_{\substack{an\sim X\\ an\equiv l \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Lambda(n) e(-h(an)^\gamma) \\ &\ll X^{\gamma-1} \times \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) \sum_{0<h\leqslant H} e(-h(an)^\gamma) \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1\\ d\mid an-l}} c(d,h,a) \\ &= X^{\gamma-1} \times \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) G_a(n), \end{aligned}$$

其中

$$G_a(n) = \sum_{0<h\leqslant H} \Xi_{h,a}(n) e(-h(an)^\gamma)$$

and

$$\Xi_{h,a}(n) = \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1\\ d\mid an-l}} c(d,h,a), \qquad |c(d,h,a)| = 1.$$

A因此，为了证明估计式 (2.9)，只需证明

$$\Bigg| \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) G_a(n)\Bigg| \ll XL^{-A}. \tag{2.11}$$

Heath–Brown 恒等式 [12]的一个特例为

$$-\frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(1-Z\zeta)^3 - \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} (-1)^j Z^j \zeta^{j-1}(-\zeta'),$$

其中 $Z = Z(s) = \sum \mu(k)k^{-s}$。由此可将 $\Lambda(n)$ 对于 $n\sim X/a$ 分解为$k\leqslant (X/a)^{1/3}$

$$\Lambda(n) = \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} (-1)^{j-1} \sum_{k_1\dots k_{2j}=n} \mu(k_1)\cdots\mu(k_j)\log k_{2j}.$$

因此，我们可以用求和表示$\sum \Lambda(n)G_a(n)$。

$$\sum_{\substack{k_1\cdots k_{2j}\sim X/a\\ k_i\sim K_i}} \dots \sum \mu(k_1)\cdots\mu(k_j)(\log k_{2j}) G_a(k_1\cdots k_{2j}),$$

其中 $1\leqslant j\leqslant 3$、$K_1K_2\cdots K_{2j}\sim X/a$ 和 $K_1,\dots,K_j\leqslant (2X/a)^{1/3}$。将 K_j 分成两组后，我们得到

$$\Bigg| \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{n\sim X/a} \Lambda(n) G_a(n)\Bigg| \ll_\eta X^\eta \max \Bigg| \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{kn\sim X/a} \sum_{k\sim K} \alpha(k)\beta(n) G_a(kn)\Bigg|, \tag{2.12}$$

其中最大值是在系数满足以下条件之一的所有双线性型中取得的

$$|\alpha(k)| \leqslant 1, \qquad |\beta(n)| \leqslant 1, \tag{2.13}$$

or

$$|\alpha(k)| \leqslant 1, \qquad \beta(n) = 1,$$

or

$$|\alpha(k)| \leqslant 1, \qquad \beta(n) = \log n,$$

并且在所有情况下均满足

$$K \leqslant X/a. \tag{2.14}$$

我们将情形（2.13）称为 II 型和情形，将其他情形称为 I 型和。为简便起见，分别记作 Σ_{II} 和 Σ_I。在接下来的两节中，我们将分别给出 II 型和与 I 型和的适当上界估计。

3. Estimate of Type II Sums

我们先将两个变量 a 和 k 合并，即 $m = ak$，再将 m和 h的取值范围划分为区间 $(M, 2M]$和 $(J, 2J]$，使得 $MN \asymp X$和 $\frac{1}{2} \leqslant J \leqslant H$。于是，对于 II 型和 Σ_{II}，有

$$\begin{aligned}\Sigma_{II} &= \sum_{\substack{m\sim M\\ MN\sim X}}\sum_{n\sim N}\Bigg(\sum_{\substack{m=ak\\ A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\ k\sim K}}\tau_r^s(a)\alpha(k)\Bigg)\beta(n)\sum_{h\sim J}\Phi_h(mn)e\big(-h(mn)^\gamma\big)\\ &\ll X^\eta\sum_{m\sim M}\Bigg|\sum_{\substack{n\sim N\\ mn\sim X}}\sum_{h\sim J}\beta(n)\Phi_h(mn)e(-h(mn)^\gamma)\Bigg|,\end{aligned}$$

其中

$$\Phi_h(mn) = \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1\\ d\mid mn-l}} c'(d,h), \qquad |c'(d,h)| = 1.$$

记 T 为一个参数，稍后将对其进行选取。我们将可用的配对 (n, h) 的集合分解为集合 $\mathscr{S}_t$，其中 $1 \leqslant t \leqslant T$，定义如下：

$$\mathscr{S}_t = \left\{(n,h):\ n\sim N,\ h\sim J,\ \frac{4JN^\gamma(t-1)}{T} < hn^\gamma \leqslant \frac{4JN^\gamma t}{T}\right\}.$$

因此有

$$\Sigma_{II} \ll X^\eta\sum_{1\leqslant t\leqslant T}\sum_{m\sim M}\Bigg|\sum_{\substack{(n,h)\in\mathscr{S}_t\\ mn\sim X}}\sum\beta(n)\Phi_h(mn)e(-h(mn)^\gamma)\Bigg|,$$

结合柯西不等式可得

$$\begin{aligned}|\Sigma_{II}|^2 &\ll X^\eta TM\sum_{1\leqslant t\leqslant T}\sum_{m\sim M}\Bigg|\sum_{\substack{(n,h)\in\mathscr{S}_t\\ mn\sim X}}\sum\beta(n)\Phi_h(mn)e(-h(mn)^\gamma)\Bigg|^2\\ &\ll X^\eta TM\sum_{1\leqslant t\leqslant T}\sum_{(n_1,h_1)\in\mathscr{S}_t}\sum\sum_{(n_2,h_2)\in\mathscr{S}_t}\sum\Bigg|\sum_{\substack{m\sim M\\ mn_1\sim X\\ mn_2\sim X}}\Phi_{h_1}(mn_1)\Phi_{h_2}(mn_2)e\big(\big(h_1n_1^\gamma - h_2n_2^\gamma\big)m^\gamma\big)\Bigg|\\ &\ll X^\eta TM\sum_{n_1\sim N}\sum_{n_2\sim N}\sum_{h_1\sim J}\sum_{h_2\sim J}\Bigg|\sum_{\substack{m\sim M\\ mn_1\sim X\\ mn_2\sim X}}\Phi_{h_1}(mn_1)\Phi_{h_2}(mn_2)e(\lambda m^\gamma)\Bigg|,\\ &\qquad\qquad |\lambda|\leqslant 4JN^\gamma T^{-1}\end{aligned}$$

其中

$$\lambda = h_1 n_1^{\gamma} - h_2 n_2^{\gamma}.$$

将关于 m 的最内层求和记为 $\mathcal{S}$。根据量 $\Phi_h(\cdot)$ 的定义，我们有

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{m\sim M\\ mn_1\sim X\\ mn_2\sim X}} \sum_{\substack{d_1\leqslant D\\ (d_1,l)=1\\ d_1\mid mn_1-l}} c'(d_1,h_1) \sum_{\substack{d_2\leqslant D\\ (d_2,l)=1\\ d_2\mid mn_2-l}} c'(d_2,h_2) e(\lambda m^{\gamma}).$$

如果同余式组

$$\begin{cases} mn_1 \equiv l \pmod{d_1} \\ mn_2 \equiv l \pmod{d_2} \end{cases}$$

不可解，则 $\mathcal{S}=0$。若上述方程组可解，则存在某个正整数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(d_1,d_2,l,n_1,n_2)$，满足 $1\leqslant \mathfrak{g}\leqslant [d_1,d_2]$，使得该方程组等价于 $m\equiv \mathfrak{g}$(模 $[d_1,d_2]$)。此时，我们改变 $\mathcal{S}$ 的求和顺序，得到

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{d_1\leqslant D\\ (d_1,l)=1}} c'(d_1,h_1) \sum_{\substack{d_2\leqslant D\\ (d_2,l)=1}} c'(d_2,h_2) \sum_{\substack{m\sim M\\ mn_1\sim X\\ mn_2\sim X\\ m\equiv \mathfrak{g} \,(\mathrm{mod}\ [d_1,d_2])}} e\big(\lambda m^{\gamma}\big).$$

因此，由引理 2.1，我们推得对任意指数对（κ，ℓ）均有

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\ll \sum_{\substack{d_1\leqslant D\\ (d_1,l)=1}} \sum_{\substack{d_2\leqslant D\\ (d_2,l)=1}} \left| \sum_{\substack{m\sim M\\ mn_1\sim X\\ mn_2\sim X\\ m\equiv \mathfrak{g} \,(\mathrm{mod}\ [d_1,d_2])}} e(\lambda m^{\gamma}) \right| \\ &\ll \sum_{\substack{d_1\leqslant D\\ (d_1,l)=1}} \sum_{\substack{d_2\leqslant D\\ (d_2,l)=1}} \min\left(\frac{M}{[d_1,d_2]}, \frac{M^{1-\gamma}}{|\lambda|[d_1,d_2]} + |\lambda|^{\kappa}[d_1,d_2]^{\kappa-\ell} M^{\kappa\gamma-\kappa+\ell} \right). \end{aligned}$$

为了计算项 $|\lambda|^{\kappa}[d_1,d_2]^{\kappa-\ell}M^{\kappa\gamma-\kappa+\ell}$ 对 $|\Sigma_{II}|^2$ 的贡献，我们需要以下引理。

LEMMA 3.1. 对于 $\frac{1}{2}<\alpha<1$, $J\geqslant 1$, $N\geqslant 1$, $\Delta>0$，令 $\mathscr{N}(\Delta)$ 表示下列不等式的解的个数

$$\left|h_1 n_1^{\alpha} - h_2 n_2^{\alpha}\right| \leqslant \Delta, \qquad h_1,h_2\sim J, \quad n_1,n_2\sim N.$$

于是我们有

$$\mathscr{N}(\Delta) \ll \Delta J N^{2-\alpha} + JN\log(JN).$$

证明。 参见 Heath–Brown [13] 中第 256–257 页的论证。 □

由下列估计

$$\begin{aligned} \sum_{d_1\leqslant D}\sum_{d_2\leqslant D}[d_1,d_2]^{\kappa-\ell} &\ll \sum_{d_1\leqslant D}\sum_{d_2\leqslant D}\left(\frac{(d_1,d_2)}{d_1d_2}\right)^{\ell-\kappa} = \sum_{1\leqslant r\leqslant D}\sum_{k_1\leqslant D/r}\sum_{k_2\leqslant D/r}\frac{1}{r^{\ell-\kappa}k_1^{\ell-\kappa}k_2^{\ell-\kappa}} \\ &\ll \sum_{1\leqslant r\leqslant D} r^{\kappa-\ell}\left(\sum_{k\leqslant D/r}k^{\kappa-\ell}\right)^2 \ll \sum_{1\leqslant r\leqslant D} r^{\kappa-\ell}\big(Dr^{-1}\big)^{2(\kappa-\ell+1)} \ll D^{\kappa-\ell+1}, \end{aligned}$$

we 可知，项 $|\lambda|^{\kappa}[d_1,d_2]^{\kappa-\ell}M^{\kappa\gamma-\kappa+\ell}$ 对 $|\Sigma_{II}|^2$ 的总贡献为

$$\begin{aligned} &\ll X^{\eta}TM\left(\sum_{d_1\leqslant D}\sum_{d_2\leqslant D}[d_1,d_2]^{\kappa-\ell}\right)|\lambda|^{\kappa}M^{\kappa\gamma-\kappa+\ell} \times \sum_{\substack{n_1\sim N\\ |\lambda|\leqslant 4JN^{\gamma}T^{-1}}}\sum_{n_2\sim N}\sum_{h_1\sim J}\sum_{h_2\sim J}1 \\ &\ll X^{\eta}TMD^{\kappa-\ell+1}(JN^{\gamma}T^{-1})^{\kappa}M^{\kappa\gamma-\kappa+\ell}\cdot\mathscr{N}(4JN^{\gamma}T^{-1}) \end{aligned}$$

$$\ll X^{\eta}TM^{-\kappa+\ell+1}D^{\kappa-\ell+1}(JM^{\gamma}N^{\gamma}T^{-1})^{\kappa}\cdot\mathscr{N}(4JN^{\gamma}T^{-1})$$
$$\ll X^{\kappa\gamma+\eta}T^{1-\kappa}M^{-\kappa+\ell+1}D^{\kappa-\ell+1}J^{\kappa}\cdot\mathscr{N}(4JN^{\gamma}T^{-1}). \tag{3.1}$$

若 $|\lambda|\leqslant M^{-\gamma}$，则 $M[d_1,d_2]^{-1}\leqslant M^{1-\gamma}|\lambda|^{-1}[d_1,d_2]^{-1}$，因此项 $M[d_1,d_2]^{-1}$ 对 $|\Sigma_{II}|^2$ 的总贡献为

$$\ll X^{\eta}TM\cdot ML^3\times\sum_{\substack{n_1\sim N\\ |\lambda|\leqslant M^{-\gamma}}}\sum_{n_2\sim N}\sum_{h_1\sim J}\sum_{h_2\sim J}1\ll X^{\eta}TM^2\cdot\mathscr{N}(M^{-\gamma}), \tag{3.2}$$

其中我们使用初等估计

$$\sum_{d_1\leqslant D}\sum_{d_2\leqslant D}[d_1,d_2]^{-1}\ll(\log D)^3.$$

若 $|\lambda|>M^{-\gamma}$，则 $M[d_1,d_2]^{-1}>M^{1-\gamma}|\lambda|^{-1}[d_1,d_2]^{-1}$。由拆分论证可得，项 $M^{1-\gamma}|\lambda|^{-1}[d_1,d_2]^{-1}$ 对 $|\Sigma_{II}|^2$ 的总贡献为

$$\ll X^{\eta}TM\cdot M^{1-\gamma}L^3\times\max_{M^{-\gamma}\leqslant\Delta\leqslant 4JN^{\gamma}T^{-1}}\sum_{n_1\sim N}\sum_{\substack{n_2\sim N\\ \Delta<|\lambda|\leqslant 2\Delta}}\sum_{h_1\sim J}\sum_{h_2\sim J}\frac{1}{|\lambda|}$$
$$\ll X^{\eta}TM^{2-\gamma}\times\max_{M^{-\gamma}\leqslant\Delta\leqslant 4JN^{\gamma}T^{-1}}\Delta^{-1}\cdot\mathscr{N}(2\Delta), \tag{3.3}$$

这给出了上界估计（3.2）。由引理 3.1，我们知道

$$\mathscr{N}(\Delta)\ll\Delta JN^{2-\gamma}+JNL,$$

将其与（3.1）和（3.3）结合可得

$$\begin{aligned}\big|\Sigma_{II}\big|^2&\ll X^{\kappa\gamma+\eta}T^{1-\kappa}M^{-\kappa+\ell+1}D^{\kappa-\ell+1}J^{\kappa}\cdot\mathscr{N}(4JN^{\gamma}T^{-1})\\&\quad+X^{\eta}TM^{2-\gamma}\times\max_{M^{-\gamma}\leqslant\Delta\leqslant 4JN^{\gamma}T^{-1}}(JN^{2-\gamma}+JN\Delta^{-1})\\&\ll X^{\eta}\big(X^{\kappa\gamma+2}T^{-\kappa}M^{-\kappa+\ell-1}D^{\kappa-\ell+1}J^{\kappa+2}+X^{\kappa\gamma+1}T^{1-\kappa}M^{-\kappa+\ell}D^{\kappa-\ell+1}J^{\kappa+1}\\&\quad+TJX^{2-\gamma}+TMXJ\big).\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们选择 T，使得上述估计中的第一项与第四项相等。因此，我们取

$$T=\big[X^{\frac{\kappa\gamma+1}{\kappa+1}}M^{\frac{-\kappa+\ell-2}{\kappa+1}}D^{\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa+1}}J\big]+1. \tag{3.5}$$

将（3.5）代入（3.4），得到

$$\begin{aligned}\big|\Sigma_{II}\big|^2&\ll X^{\eta}\Big(X^{\frac{\kappa(\gamma+1)+2}{\kappa+1}}M^{\frac{\ell-1}{\kappa+1}}D^{\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa+1}}J^2+X^{\frac{2(\kappa\gamma+1)}{\kappa+1}}M^{\frac{2(\ell-1)}{\kappa+1}}D^{\frac{2(\kappa-\ell+1)}{\kappa+1}}J^2\\&\quad+X^{\frac{2\kappa+3-\gamma}{\kappa+1}}M^{\frac{-\kappa+\ell-2}{\kappa+1}}D^{\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa+1}}J^2+X^{\kappa\gamma+1}M^{-\kappa+\ell}D^{\kappa-\ell+1}J^{\kappa+1}+JX^{2-\gamma}+MXJ\Big),\end{aligned}$$

其中结合 $J\ll H=X^{1-\gamma+\eta}$ 和 $D\leqslant X^{\xi+\eta/2}$ 用于 $\xi\leqslant(1-\eta)/2$ 得到

$$\begin{aligned}\big|\Sigma_{II}\big|^2&\ll X^{\eta}\Big(X^{\frac{3\kappa+4-(\kappa+2)\gamma}{\kappa+1}+\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa+1}\xi}M^{\frac{\ell-1}{\kappa+1}}+X^{\frac{2(\kappa+2-\gamma)}{\kappa+1}+\frac{2(\kappa-\ell+1)}{\kappa+1}\xi}M^{\frac{2(\ell-1)}{\kappa+1}}\\&\quad+X^{\frac{4\kappa+5-(2\kappa+3)\gamma}{\kappa+1}+\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa+1}\xi}M^{\frac{-\kappa+\ell-2}{\kappa+1}}+X^{\kappa+2-\gamma+(\kappa-\ell+1)\xi}M^{-\kappa+\ell}+X^{3-2\gamma}+MX^{2-\gamma}\Big).\end{aligned}$$

根据上述论证，我们推导出以下引理。

LEMMA 3.2. 假设 (κ,ℓ) 是一个指数对。设 $\frac{1}{2}<\gamma<1$ 和 $0<\xi\leqslant(1-\eta)/2$ 满足以下条件

$$\gamma>\frac{\kappa}{\kappa-\ell+1}+\xi+\eta \tag{3.6}$$

and

$$\gamma>\frac{\kappa+2}{\kappa-\ell+3}+\frac{\kappa-\ell+1}{\kappa-\ell+3}\xi+\eta. \tag{3.7}$$

如果成立的话

$$X^{\frac{(\kappa+2)(1-\gamma)+(\kappa-\ell+1)\xi}{1-\ell}+\eta} \ll M \ll X^{\gamma-\eta},$$

于是我们有

$$\Sigma_{II} \ll X^{1-\eta}.$$

4. Estimate of Type I Sums

如第 3 节中一样，我们也令 $m = ak$ 并将 m 的取值范围划分为区间（M， $2M$]使得 $MN \asymp X$。根据量 $\Xi_h(\cdot)$ 的定义，可得

$$\Sigma_I = \sum_{\substack{m\sim M\\ MN\sim X}} \sum_{n\sim N} \varpi(m)\beta(n) \sum_{0<|h|\leqslant H} e(-h(mn)^\gamma) \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1\\ d\mid mn-l}} c''(d,h),$$

其中

$$\varpi(m) = \sum_{\substack{m=ak\\ A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\ k\sim K}} \tau_r^s(a)\alpha(k) \ll X^\eta.$$

改变求和顺序后，我们得到

$$\Sigma_I \ll L \sum_{0<h\leqslant H} \mathcal{H}_h, \tag{4.1}$$

其中

$$\mathcal{H}_h = \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1}} c''(d,h) \sum_{m\sim M} \varpi(m) \sum_{\substack{n\sim N\\ mn\sim X\\ mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)}} e(h(mn)^\gamma).$$

由引理 2.1，我们推得，对于任意指数对（κ， ℓ），都有

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_h &\ll X^\eta \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1}} \sum_{m\sim M} \left| \sum_{\substack{n\sim N\\ mn\sim X\\ mn\equiv l\,(\mathrm{mod}\ d)}} e(h(mn)^\gamma) \right| \\
&\ll X^\eta \sum_{\substack{d\leqslant D\\ (d,l)=1}} \sum_{m\sim M} \left(h^{-1}X^{1-\gamma}M^{-1}d^{-1} + h^\kappa M^{\kappa-\ell}d^{\kappa-\ell}X^{\kappa\gamma-\kappa+\ell} \right) \\
&\ll h^{-1}X^{1-\gamma+\eta} + h^\kappa X^{\kappa\gamma-\kappa+\ell+\eta}M^{\kappa-\ell+1}D^{\kappa-\ell+1}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

由（4.1）和（4.2），可得

$$\begin{aligned}
\Sigma_I &\ll X^{1-\gamma+\eta} + H^{\kappa+1}X^{\kappa\gamma-\kappa+\ell}M^{\kappa-\ell+1}D^{\kappa-\ell+1} \\
&\ll X^{1-\gamma+\eta} + M^{\kappa-\ell+1}X^{1+\ell-\gamma+(\kappa-\ell+1)\xi+\eta}.
\end{aligned}$$

根据上述估计，我们得到以下引理。

Lemma 4.1. 假设 (κ,ℓ) 是一个指数对。假设 M 满足条件。

$$M \ll X^{\frac{\gamma-\ell}{\kappa-\ell+1}-\xi-\eta}.$$

于是我们得到

$$\Sigma_I \ll X^{1-\eta}.$$

5. Proof of Theorem 1.1

如第 3 节和第 4 节中的示例所示，在处理指数求和估计的过程中，我们将 $m = ak$ 视为一个变量，将 n 视为另一个变量。因此，由（2.12）可推得

$$\left| \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{n\sim X/a} \Lambda(n) G_a(n) \right| \ll_\eta X^\eta \max \left| \sum_{\substack{m\sim M \\ MN\sim X}} \sum_{n\sim N} \varpi(m)\beta(n)\mathcal{F}(mn) \right|, \tag{5.1}$$

其中 最大值取遍所有系数满足某个 o 条件的双线性型 f

$$|\varpi(m)| \leqslant 1, \qquad |\beta(n)| \leqslant 1, \tag{5.2}$$

or

$$|\varpi(m)| \leqslant 1, \qquad \beta(n) = 1,$$

or

$$|\varpi(m)| \leqslant 1, \qquad \beta(n) = \log n,$$

并且在所有情形下还满足

$$M \leqslant X. \tag{5.3}$$

在（2.11）– （2.13）之间的论证中，通过巧妙地将 K_j 分成两组，并通过将 a 结合起来构造一个新变量 m 以及相应的 k_j 放入其中一组，我们能够缩小 M 在（5.3）中的取值范围。

Lemma 5.1. 若我们有实数 $0 < \mathfrak{a} < 1, 0 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c} < 1$ 满足

$$\mathfrak{b} < \frac{2}{3}, \qquad 1 - \mathfrak{c} < \mathfrak{c} - \mathfrak{b}, \qquad 1 - \mathfrak{a} < \frac{\mathfrak{c}}{2},$$

那么（5.1）在用以下条件替换（5.3）后仍然成立

$$M \leqslant X^{\mathfrak{a}} \qquad \textit{for Type I sums},$$

and

$$X^{\mathfrak{b}} \leqslant M \leqslant X^{\mathfrak{c}} \qquad \textit{for Type II sums}.$$

证明。参见 Balog 和 Friedlander 的命题1[2]。 □

为了证明（2.2），我们需要分别在引理 3.2 和引理 4.1中选取适当的指数对（κ， ℓ）。容易看出，对于 $n \geqslant 1$，有

$$A^n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n+2}-2}, 1 - \frac{n+1}{2^{n+2}-2}\right).$$

在引理 3.2中，我们取（κ， ℓ） $= A^3$（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）$=$（$\frac{13}{30}$，$\frac{13}{15}$）。于是条件（3.6）和（3.7）使得 e

$$\gamma > \frac{1}{5} + \xi + \eta \tag{5.4}$$

and

$$\gamma > \frac{61}{65} + \frac{1}{13}\xi + \eta. \tag{5.5}$$

因此， $\Sigma_{II} \ll X^{1-\eta}$ 只要满足条件即可。

$$X^{\frac{61(1-\gamma)+5\xi}{4}+\eta} \ll M \ll X^{\gamma-\eta}.$$

在引理 4.1 中，我们取

$$(\kappa, \ell) = A^{36}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{38}-2}, 1 - \frac{37}{2^{38}-2}\right).$$

则 $\Sigma_I \ll X^{1-\eta}$ 前提是

$$M \ll X^{\frac{2^{37}-1}{19}\gamma - \frac{2^{38}-39}{38} - \xi - \eta}.$$

由引理 5.1，我们取

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \frac{2^{37}-1}{19}\gamma - \frac{2^{38}-39}{38} - \xi - \eta,\\ \mathfrak{b} &= \frac{61(1-\gamma)+5\xi}{4} + \eta,\\ \mathfrak{c} &= \gamma - \eta.\end{aligned}$$

那么很容易验证，条件（2.8）、（5.4）和（5.5），以及引理 5.1中的不等式均成立。因此，我们证明（2.11）成立，这足以完成（2.2）的证明。

对于（2.3），我们可以沿用从（2.4）到（2.8）的推导过程。于是只需证明

$$S^* := \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{0<h\leqslant H} \frac{1}{h} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a) \times \left| \sum_{an\sim X} \Lambda(n)\Big(e\big(-h(an)^\gamma\big) - e\big(-h(an+1)^\gamma\big)\Big)\right| \ll x^\gamma L^{-A}. \tag{5.6}$$

随后，对于（5.6）右端的最内层求和，可以按照（2.10）所示的常规过程看出

$$\begin{aligned} S^* &\ll X^{\gamma-1} \times \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{0<h\leqslant H} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a) \left| \sum_{an\sim X} \Lambda(n) e(-h(an)^\gamma)\right|\\ &= X^{\gamma-1} \times \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{0<h\leqslant H} \sum_{\substack{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)\\(a,d)=1}} \tau_r^s(a)\cdot c^*(d,h,a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) e(-h(an)^\gamma)\\ &\ll X^{\gamma-1} \times \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) \sum_{0<h\leqslant H} e(-h(an)^\gamma) \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{c^*(d,h,a)}{\varphi(d)}\\ &= X^{\gamma-1} \times \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) G_a^*(n), \end{aligned}$$

其中

$$G_a^*(n) = \sum_{0<h\leqslant H} \Xi_{h,a}^*(n) e(-h(an)^\gamma)$$

and

$$\Xi_{h,a}^*(n) = \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,l)=1}} \frac{c^*(d,h,a)}{\varphi(d)}, \qquad |c^*(d,h,a)| = 1.$$

因此，为了证明 (2.3)，我们只需证明

$$\left| \sum_{A_1(x)\leqslant a<A_2(x)} \tau_r^s(a) \sum_{an\sim X} \Lambda(n) G_a^*(n)\right| \ll XL^{-A},$$

这与处理（2.2）时的论证几乎完全相同。因此，此处省略细节。定理 1.1的证明至此完成。

6. Proof of Theorem 1.3

在本节中，我们将根据定理 1.3 的结果、定理 1.1、推论1.2、（1.13）、Chen 构造的“加权筛法”和“转换原理” [8]。首先，我们列出证明定理 1.3所需的一些引理。

6.1. 一些预备引理。令 $\mathscr{A}$ 表示一个有限的整数集合，$\mathscr{P}$ 表示一个无限的素数集合，$\overline{\mathscr{P}}$ 表示不属于 $\mathscr{P}$ 的素数集合。对于给定的 $z \geqslant 2$，我们设

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}}} p.$$

定义筛函数为

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \big|\{a \in \mathscr{A} : (a, P(z)) = 1\}\big|.$$

对于 $d|P(z)$，定义 $\mathscr{A}_d = \{a \in \mathscr{A}:\ a \equiv 0 \pmod{d}\}$。此外，我们假设 $|\mathscr{A}_d|$ 可以写成如下形式

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + r_d, \qquad \mu(d) \neq 0, \qquad (d, \overline{\mathscr{P}}) = 1, \tag{6.1}$$

其中，$\omega(d)$ 是一个积性函数，满足 $0 \leqslant \omega(p) < p$，$X$ 是一个与 d无关的正数，而 r_d 是一个误差项，需要使其在平均意义下足够小，从而使 X 近似于 $\mathscr{A}$ 的基数。此外，我们假设函数 $\omega(p)$ 在 $\mathscr{P}$中的 p 上平均为常数，这意味着

$$\sum_{\substack{z_1\leqslant p<z_2 \\ p\in\mathscr{P}}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leqslant \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + \frac{\mathcal{K}}{\log z_1}\right) \tag{6.2}$$

对所有 $z_2 > z_1 \geqslant 2$均成立，其中 $\mathcal{K}$ 是满足 $\mathcal{K} \geqslant 1$的常数。关于（6.1）和（6.2）的详细内容，可参见 Halberstam 和 Richert [11], 第 28 页中的论证（4.12）–（4.15），以及 Iwaniec [18]第 205 页中的论证。

LEMMA 6.1. 假设条件（*6.1*）和（*6.2*）成立，则有

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \geqslant XV(z)\big(f(s) + O\big(\log^{-1/3} D\big)\big) - R_D, \tag{6.3}$$

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \leqslant XV(z)\big(F(s) + O\big(\log^{-1/3} D\big)\big) + R_D, \tag{6.4}$$

其中

$$R_D = \sum_{\substack{d<D \\ d|P(z)}} |r_d|, \qquad s = \frac{\log D}{\log z},$$

$$V(z) = \mathcal{C}(\omega)\frac{e^{-C_0}}{\log z}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right), \tag{6.5}$$

$$\mathcal{C}(\omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \tag{6.6}$$

其中 C_0 表示欧拉常数，$f(s)$ 和 $F(s)$ 表示线性筛法理论中的经典函数，它们由下列微分差分方程确定

$$\begin{cases} F(s) = \dfrac{2e^{C_0}}{s}, \quad f(s) = 0, \quad 0 < s \leqslant 2, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(sF(s)) = f(s-1), \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(sf(s)) = F(s-1), \quad s \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.7}$$

证明。对于（6.3）和（6.4），可参见 Iwaniec [18], 第 209 页上的（6）、（7）、（8）；而（6.7）可视为 $\varkappa = 1$、$\beta = 2$ Iwaniec [18]中（9）的一个特例。此外，对于（6.5）和（6.6），可参见 Halberstam 和 Richert [11]第 5 章中的（2.4）和（2.5）。□

LEMMA 6.2. 设 $F(s)$ 和 $f(s)$ 定义如（*6.7*）所示。则有

$$F(s) = \frac{2e^{C_0}}{s}, \qquad 0 < s \leqslant 3;$$

$$F(s) = \frac{2e^{C_0}}{s}\left(1 + \int_2^{s-1} \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\right), \qquad 3 \leqslant s \leqslant 5;$$

$$f(s)=\frac{2e^{C_0}\log(s-1)}{s},\qquad 2\leqslant s\leqslant 4;$$
$$f(s)=\frac{2e^{C_0}}{s}\bigg(\log(s-1)+\int_3^{s-1}\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\int_2^{t_1-1}\frac{\log(t_2-1)}{t_2}\mathrm{d}t_2\bigg),\qquad 4\leqslant s\leqslant 6;$$

其中， C_0 表示欧拉常数。

证明。参见 Pan 和 Pan《第七章》第 127 页上的 (7.51)–(7.54)[38]。 □

6.2. 加权筛法。令 x 为一个充分大的数，并定义

$$\mathscr{A}=\big\{a:a\leqslant x,\,a=p+2,\,a=[k^{1/\gamma}]\big\},\qquad \mathscr{P}=\big\{p:p>2\big\}.$$

用 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(n)$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的示性函数，即

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(n)=\begin{cases}1, & \text{if } n\in\mathcal{A},\\ 0, & \text{if } n\notin\mathcal{A}.\end{cases}$$

于是有

$$\big|\big\{a:a\in\mathscr{A},\ a=\mathcal{P}_2\big\}\big|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1}}\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a).$$

显然，我们有

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\ \mu(a)=0}}\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)\ll\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p\leqslant x^{1/2}}\frac{x}{p^2}\ll x^{1-\frac{1}{10.92}}.$$

因此可得

$$\big|\big\{a:a\in\mathscr{A},\ a=\mathcal{P}_2\big\}\big|\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}}\mu^2(a)\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)+O(x^{1-\frac{1}{10.92}}).\tag{6.8}$$

现在，我们声称，对于给定的整数 a，满足 $a\leqslant x$ 且服从 $(a,P(x^{1/10.92}))=1$、$(a,2)=1$ 以及 $\mu(a)\neq 0$，有

$$\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)\geqslant 1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a),\tag{6.9}$$

其中

$$\varrho_1(a)=\sum_{\substack{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}\\ p\mid a}}1;$$
$$\varrho_2(a)=\begin{cases}1, & \text{if } a=p_1p_2p_3,\ x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<p_3,\ (a,2)=1,\\ 0, & \text{otherwise;}\end{cases}$$
$$\varrho_3(a)=\begin{cases}1, & \text{if } a=p_1p_2p_3,\ x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<p_3,\ (a,2)=1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

实际上，注意到 $\varrho_1(a)\geqslant 0,\varrho_2(a)\geqslant 0$ 和 $\varrho_3(a)\geqslant 0$这一事实，若 $\Omega(a)$ 6 2，则显然有 $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)=1\geqslant 1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)$。现在，我们总是假设 $\Omega(a)\geqslant 3$，于是 $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)=0$。若 $\varrho_1(a)\geqslant 2$，则 $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)=0\geqslant 1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)\geqslant 1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)$。若 $\varrho_1(a)=1$ a $a=p_1p_2p_3p_4$ $x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<p_3<p_4$ $a=p_1p_2p_3p_4\geqslant x^{1/10.92+3/3.29}>x$，则不能表示为 的形式。否则，可推出，这与假设矛盾。因此，a必须写成 $a=p_1p_2p_3$，其中 $x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<p_3$，使得 $\varrho_2(a)=1$且 $\varrho_3(a)=0$。此时，有 $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)=0=1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)$。若 $\varrho_1(a)=0$，则 $\varrho_2(a)=0$，因此 a的每个素因子都不小于 $x^{1/3.29}$；结合 $\Omega(a)\geqslant 3$，可得 $a=p_1p_2p_3$与 $x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<p_3$，即 $\varrho_3(a)=1$。此时

时，我们还有 $\mathbb{1}_{\mathcal{P}_2}(a)=0=1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)$。总之，(6.9在上述条件下成立。

另一方面，有如下结论。

$$\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\ \mu(a)=0\\(a,2)=1}}\Big(1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)\Big)\ll\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p\leqslant x^{1/2}}\frac{x}{p^2}\ll x^{1-\frac{1}{10.92}},$$

将（6.8）与（6.9）结合可得

$$\begin{aligned}\big|\{a:a\in\mathscr{A},\ a=\mathcal{P}_2\}\big|&\geqslant\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}}\Big(1-\frac{1}{2}\varrho_1(a)-\frac{1}{2}\varrho_2(a)-\varrho_3(a)\Big)+O\big(x^{\frac{9.92}{10.92}}\big)\\&=S-\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2}S_2-S_3+O\big(x^{\frac{9.92}{10.92}}\big),\end{aligned}\tag{6.10}$$

其中

$$S=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}}1;\qquad S_i=\sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}}\varrho_i(a),\qquad i=1,2,3.$$

现在，我们给出 S 的下界估计，以及 S_i（i =1、2、3）的上界估计。

6.2.1. 下界 的界估计。 我们利用（6.3）给出 S 的下界。因此我们取 e

$$X=\pi_\gamma(x),\qquad D=x^\xi,\qquad \omega(d)=\begin{cases}\dfrac{d}{\varphi(d)}, & \text{if } (d,2)=1 \text{ and } \mu(d)\neq 0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是我们有

$$\mathcal{C}(\omega)=\prod_p\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1}=2\prod_{p>2}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)=:2\mathfrak{S},$$

也就是说。由（1.13）结合（1.10）可得

$$\begin{aligned}R_D&=\sum_{\substack{d<x^\xi\\ d|P(x^{1/10.92})}}\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant x-2\\ p\equiv -2\,(\mathrm{mod}\ d)\\ p+2=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p\leqslant x-2\\ p+2=[k^{1/\gamma}]}}1\Bigg|\\&\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant x^\xi\\(d,2)=1}}\Bigg|\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv -2\,(\mathrm{mod}\ d)\\ p+2=[k^{1/\gamma}]}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p+2=[k^{1/\gamma}]}}1\Bigg|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.\end{aligned}$$

于是（6.3）得到

$$\begin{aligned}S&\geqslant\pi_\gamma(x)V\big(x^{1/10.92}\big)\big(f(10.92\xi)+O\big(\log^{-1/3}x\big)\big)-R_D\\&\geqslant\frac{4\mathfrak{S}}{\xi}\Big(\log(10.92\xi-1)+\int_3^{10.92\xi-1}\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\int_2^{t_1-1}\frac{\log(t_2-1)}{t_2}\mathrm{d}t_2\Big)\frac{x^\gamma}{\log^2 x}(1+o(1)).\end{aligned}\tag{6.11}$$

6.2.2. S_1 的上界估计。根据 S_1 的定义，我们有

$$S_1 = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}} \sum_{\substack{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}\\p\mid a}} 1 = \sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}} \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\p\mid a,\ (a,2)=1}} 1$$
$$\leqslant \sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}} \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\p\mid a}} 1 =: \sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}} S(\mathscr{A}_p,\mathscr{P},x^{1/10.92}), \tag{6.12}$$

。首先，我们使用 ($x^{1/3.29}$ 6 4 S $\mathscr{A}_p$ $\mathscr{P}$ $x^{1/10.92}$ $x^{1/10.92}\leqslant p<$。) 给出 (,,) 的上界。因此，对于，有

$$S(\mathscr{A}_p,\mathscr{P},x^{1/10.92}) \leqslant \frac{1}{\varphi(p)}\pi_\gamma(x)V\big(x^{1/10.92}\big)\left(F\left(\frac{\log(x^\xi/p)}{\log x^{1/10.92}}\right)+O\big(\log^{-1/3}x\big)\right)+R_D(p)$$
$$\leqslant 21.84\mathfrak{S}e^{-C_0}\cdot\frac{1}{p-1}\cdot F\left(10.92\xi-\frac{10.92\log p}{\log x}\right)\frac{x^\gamma}{\log^2 x}(1+o(1))+R_D(p), \tag{6.13}$$

其中 C_0 是欧拉常数，并且

$$R_D(p)=\sum_{\substack{d<x^\xi/p\\d\mid P(x^{1/10.92})}}\big|r_{dp}\big|.$$

由 (1.13) 和 (1.10) 可得

$$\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}} R_D(p) = \sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}} \sum_{\substack{d<x^\xi/p\\d\mid P(x^{1/10.92})}} \left|\sum_{\substack{q\leqslant x-2\\q\equiv -2\,(\mathrm{mod}\ dp)\\q+2=[k^{1/\gamma}]}} 1-\frac{1}{\varphi(dp)}\sum_{\substack{q\leqslant x-2\\q+2=[k^{1/\gamma}]}}1\right|$$
$$\leqslant \sum_{\substack{d'\leqslant x^\xi\\(d',2)=1}}\left|\sum_{\substack{q\leqslant x-2\\q\equiv -2\,(\mathrm{mod}\ d')\\q+2=[k^{1/\gamma}]}} 1-\frac{1}{\varphi(d')}\sum_{\substack{q\leqslant x-2\\q+2=[k^{1/\gamma}]}}1\right| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}. \tag{6.14}$$

由 (6.12)–(6.14)、素数定理和分部求和可得

$$S_1 \leqslant 21.84\mathfrak{S}e^{-C_0}\frac{x^\gamma}{\log^2 x}(1+o(1))\times\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p<x^{1/3.29}}\frac{1}{p}\cdot F\left(10.92\xi-\frac{10.92\log p}{\log x}\right)$$
$$= 4\mathfrak{S}(1+o(1))\frac{x^\gamma}{\log^2 x}\times\left(\int_{\xi-\frac{3}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha(\xi-\alpha)}\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{10.92}}^{\xi-\frac{3}{10.92}}\frac{1}{\alpha(\xi-\alpha)}\left(1+\int_2^{10.92(\xi-\alpha)-1}\frac{\log(\beta-1)}{\beta}\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\alpha\right). \tag{6.15}$$

6.2.3. S_2的上界估计。根据 $\varrho_2(a)$的定义，我们有

$$S_2 = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}} \sum_{\substack{a=p_1p_2p_3\\x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<p_3}} 1$$
$$= \sum_{x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}} \sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_2<(x/p_1)^{1/2}} \sum_{\substack{p=p_1p_2p_3-2\\p_2<p_3\leqslant x/(p_1p_2)\\p_1p_2p_3=[k^{1/\gamma}]}} 1.$$

定义

$$\mathscr{E} = \Big\{e:\ e = p_1p_2,\ x^{1/10.92} \leqslant p_1 < x^{1/3.29} \leqslant p_2 < (x/p_1)^{1/2}\Big\},$$
$$\mathscr{L} = \Big\{\ell:\ \ell = ep - 2,\ e \in \mathscr{E},\ ep \leqslant x\Big\},$$
$$\mathscr{B} = \Big\{\ell : \ell \in \mathscr{L},\ \ell + 2 = [k^{1/\gamma}] \text{ for some } k \in \mathbb{N}^+\Big\}.$$

显然，有以下结论。

$$\big|\mathscr{E}\big| \leqslant \sum_{x^{1/10.92} \leqslant p_1 < x^{1/3.29}} \left(\frac{x}{p_1}\right)^{1/2} \ll \frac{x^{1/2+1/6.58}}{\log x} < x^{0.652}.$$

此外，对于 $e \in \mathscr{E}$，有】【。

$$\begin{cases} e = p_1p_2 \geqslant x^{1/3.29+1/10.92} \geqslant x^{0.3955}, \\ e = p_1p_2 < p_1(x/p_1)^{1/2} = x^{1/2}p_1^{1/2} < x^{1/2+1/6.58} < x^{0.652}. \end{cases}$$

我们断言， $\mathscr{L}$ 中不超过 $x^{0.3955}$ 的元素个数小于 $x^{0.652}$。事实上，对于满足 $\ell \leqslant x^{0.3955}$ 的此类 $\ell \in \mathscr{L}$，存在 $e \in \mathscr{E}$ 和素数 p，使得

$$0 < ep - 2 = \ell \leqslant x^{0.3955}. \tag{6.16}$$

如果我们固定元素 $e \in \mathscr{E}$，则满足不等式（6.16）的素数 p 必须是唯一的。否则，若存在两个素数 p 和 p'，且 $p \neq p'$ 使得

$$0 < ep - 2 \leqslant x^{0.3955} \qquad \text{and} \qquad 0 < ep' - 2 \leqslant x^{0.3955},$$

然后我们推得，

$$x^{0.3955} > \big|(ep - 2) - (ep' - 2)\big| = e|p - p'| \geqslant 2e \geqslant 2x^{0.3955},$$

这与假设矛盾。因此，我们得到

$$\begin{aligned} S_2 &\leqslant S(\mathscr{B}, \mathscr{P}, x^{0.3955}) + O(x^{0.652}) \\ &\leqslant S(\mathscr{B}, \mathscr{P}, z) + O(x^{0.652}) \end{aligned} \tag{6.17}$$

对 $z \leqslant x^{0.3955}$ 成立。令 $\mathscr{B}_d = \big\{\ell:\ \ell \in \mathscr{B}, \ell \equiv 0 \pmod d\big\}$。于是显然

$$\big|\mathscr{B}_d\big| = \frac{1}{\varphi(d)}\mathcal{X} + \mathscr{R}_d^{(1)} + \mathscr{R}_d^{(2)},$$

其中

$$\mathcal{X} = \sum_{\ell \in \mathscr{L}} \big((\ell+3)^\gamma - (\ell+2)^\gamma\big),$$

$$\mathscr{R}_d^{(1)} = \sum_{\substack{\ell \in \mathscr{L} \\ \ell \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d)}} \big((\ell+3)^\gamma - (\ell+2)^\gamma\big) - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\ell \in \mathscr{L}} \big((\ell+3)^\gamma - (\ell+2)^\gamma\big), \tag{6.18}$$

$$\mathscr{R}_d^{(2)} = \sum_{\substack{\ell \in \mathscr{L} \\ \ell \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d)}} \Big(\psi\big(-(\ell+3)^\gamma\big) - \psi\big(-(\ell+2)^\gamma\big)\Big). \tag{6.19}$$

为了 应用（6.4）来给出 S（$\mathscr{B}$， $\mathscr{P}$， z）的上界估计，我们需要证明 tha t

$$\sum_{\substack{d \leqslant x^\xi \\ (d,2)=1}} \Big|\mathscr{R}_d^{(i)}\Big| \ll \frac{x^\gamma}{(\log x)^A}, \qquad i = 1, 2. \tag{6.20}$$

我们将通过以下两个引理证明（6.20）。为方便起见，令 $D = x^\xi$。

LEMMA 6.3. 设 $\mathscr{R}_d^{(1)}$ 如（6.18）中所定义。则有

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\mathscr{R}_d^{(1)}\right|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.$$

证明。根据集合 $\mathscr{L}$ 的定义，我们只需证明的是。

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{e\in\mathscr{E}}\left(\sum_{\substack{p<x/e\\ep\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big((ep+1)^\gamma-(ep)^\gamma\big)-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{p<x/e}\big((ep+1)^\gamma-(ep)^\gamma\big)\right)\right|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.\tag{6.21}$$

在（6.21）左侧，对于关于 $e\in\mathscr{E}$ 的求和，我们根据（e，d）$=1$ 或（e，d）>1将求和分解为两部分。如果（e，d）>1，注意到（d，2）$=1$ 这一事实可知，对所有 $ep\not\equiv 2$（模 d）均成立。因此，在这种情况下，（6.21）左侧方括号中的第一个内层求和为零。于是，（6.21）的左侧为 $\leqslant\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2$，其中

$$\mathcal{R}_1=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{e\in\mathscr{E}\\(e,d)=1}}\left(\sum_{\substack{p<x/e\\ep\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big((ep+1)^\gamma-(ep)^\gamma\big)-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{p<x/e}\big((ep+1)^\gamma-(ep)^\gamma\big)\right)\right|,$$

and

$$\mathcal{R}_2=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\frac{1}{\varphi(d)}\left|\sum_{\substack{e\in\mathscr{E}\\(e,d)>1}}\sum_{p<x/e}\big((ep+1)^\gamma-(ep)^\gamma\big)\right|.$$

鉴于 $x^{0.3955}\leqslant e<x^{0\,652}$ 对 $e\in\mathscr{E}$，令 $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}(a)$ 为 $\mathscr{E}$ 的示性函数，即，

$$\mathbb{1}_{\mathscr{E}}(a)=\begin{cases}1, & \text{if } a\in\mathscr{E},\\ 0, & \text{if } a\notin\mathscr{E}.\end{cases}$$

我们可以写成

$$\mathcal{R}_1=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)=1}}\mathbb{1}_{\mathscr{E}}(a)\left(\sum_{\substack{p<x/a\\ap\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big((ap+1)^\gamma-(ap)^\gamma\big)-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{p<x/a}\big((ap+1)^\gamma-(ap)^\gamma\big)\right)\right|,$$

and

$$\mathcal{R}_2=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)\geqslant x^{1/10.92}}}\mathbb{1}_{\mathscr{E}}(a)\sum_{p<x/a}\big((ap+1)^\gamma-(ap)^\gamma\big).$$

为了证明 $\mathcal{R}_1\ll x^\gamma(\log x)^{-A}$ 的结果，通过分部求和，我们可以将问题归结为考虑素数变量 p 上没有权重的情形，并且只需证明

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)=1}}\mathbb{1}_{\mathscr{E}}(a)\left(\sum_{\substack{p<x/a\\ap\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ d)}}1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{p<x/a}1\right)\right|\ll\frac{x}{(\log x)^A},$$

由 Pan 和 Ding 定理，即（1.5），上述估计立即成立。对于 $\mathcal{R}_2$ 的上界估计，有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2&\ll\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)\geqslant x^{1/10.92}}}\sum_{p<x/a}\gamma(ap)^{\gamma-1}\ll\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)\geqslant x^{1/10.92}}}a^{\gamma-1}\int_2^{\frac{x}{a}}\frac{\gamma t^{\gamma-1}}{\log t}\mathrm{d}t\\&\ll\frac{x^\gamma}{\log x}\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{x^{0.3955}\leqslant a<x^{0.652}\\(a,d)\geqslant x^{1/10.92}}}\frac{1}{a}\ll\frac{x^\gamma}{\log x}\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{m\mid d\\m\geqslant x^{1/10.92}}}\frac{1}{m}\sum_{a_1\leqslant x^{0.652}/m}\frac{1}{a_1}\end{aligned}$$

$$\ll \frac{x^\gamma}{\log x}\sum_{x^{1/10.92}\leqslant m\leqslant D}\frac{1}{m\varphi(m)}\sum_{d_1\leqslant D/m}\frac{1}{\varphi(d_1)}\sum_{a_1\leqslant x^{0.652}/m}\frac{1}{a_1}\ll x^{\gamma-1/10.92}\log^2 x.$$

引理 6.3 的证明至此完成。 □

LEMMA 6.4. 设 $\mathscr{R}_d^{(2)}$ 定义如（6.19）所示。则有

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\mathscr{R}_d^{(2)}\right|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.$$

证明。根据 $\mathscr{R}_d^{(2)}$ 的定义，只需证明对于 $X\leqslant x$，有

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell\sim X}}\Big(\psi\big(-(\ell+3)^\gamma\big)-\psi\big(-(\ell+2)^\gamma\big)\Big)\right|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}. \tag{6.22}$$

若 $X\leqslant x^{1-\eta}$，则（6.22）左端为

$$\begin{aligned}&\ll\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{\ell\sim X\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma\big)\right|+\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{\ell\sim X\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big(\big[-(\ell+2)^\gamma\big]-\big[-(\ell+3)^\gamma\big]\big)\right|\\&\ll\sum_{\ell\sim X}(\ell+3)^{\gamma-1}\tau(\ell)+\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{\substack{\ell\sim X\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell+2=[k^{1/\gamma}]}}1\ll X^{\gamma+\eta/2}\ll x^\gamma(\log x)^{-A}.\end{aligned}$$

现在，假设 $x^{1-\eta}<X\leqslant x$。由（2.5），（2.5）中的误差项对（6.22）左端的贡献为

$$\ll\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{\substack{\ell\sim X\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big(E((\ell+2)^\gamma,H)+E((\ell+3)^\gamma,H)\big)=E_1^*+E_2^*, \tag{6.23}$$

记作。对 E_1^* 和 E_2^* 的处理与利用引理（2.7）处理2.1 时完全相同，使用指数对（ $_{12,12}$），前提是（2.8）成立。因此这里省略证明过程。

(2.5) 中主项对 (6.22) 左端的贡献为

$$\begin{aligned}&=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\left|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell\sim X}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{e(-h(\ell+2)^\gamma)-e(-h(\ell+3)^\gamma)}{2\pi ih}\right|\\&\ll\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{1}{h}\left|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell\sim X}}\big(e(-h(\ell+2)^\gamma)-e(-h(\ell+3)^\gamma)\big)\right|=:\Upsilon,\end{aligned}$$

令

$$\mathfrak{f}_h(\ell)=1-e\big(h((\ell+2)^\gamma-(\ell+3)^\gamma)\big).$$

由分部求和可得

$$\begin{aligned}\Upsilon&=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{1}{h}\left|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell\sim X}}e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\mathfrak{f}_h(\ell)\right|\\&=\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{1}{h}\left|\int_X^{2X}\mathfrak{f}_h(u)\mathrm{d}\left(\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ X<\ell\leqslant u}}e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\right)\right|\end{aligned}$$

$$\ll \sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\frac{1}{h}\Bigg(\Big|\mathfrak{f}_h(2X)\Big|\Bigg|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ \ell\sim X}} e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\Bigg| + \int_X^{2X}\Bigg|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ X<\ell\leqslant u}} e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\Bigg|\Big|\frac{\partial\mathfrak{f}_h(u)}{\partial u}\Big|\mathrm{d}u\Bigg)$$

$$\ll X^{\gamma-1}\times\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\max_{X<u\leqslant 2X}\Bigg|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ X<\ell\leqslant u}} e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\Bigg|,$$

其中我们使用估计

$$\big|\mathfrak{f}_h(u)\big|\ll hu^{\gamma-1}\qquad\text{and}\qquad\Big|\frac{\partial\mathfrak{f}_h(u)}{\partial u}\Big|\ll hu^{\gamma-2}.$$

因此，我们得到

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\Big|\mathscr{R}_d^{(2)}\Big|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}+\max_{\substack{x^{1-\eta}<X\leqslant x\\ X<u\leqslant 2X}}X^{\gamma-1}\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\sum_{0<h\leqslant H}\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\ X<\ell\leqslant u}}\delta(d,h)e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)$$

$$\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}+\max_{\substack{x^{1-\eta}<X\leqslant x\\ X<u\leqslant 2X}}X^{\gamma-1}\Bigg|\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}\\ X<\ell\leqslant u}}\sum_{0<h\leqslant H}\Theta_h(\ell)e\big(-h(\ell+2)^\gamma\big)\Bigg|,\tag{6.24}$$

其中

$$\Theta_h(\ell)=\sum_{\substack{d\leqslant D\\ \ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)\\(d,2)=1}}\delta(d,h),\qquad\text{and}\qquad\big|\delta(d,h)\big|=1.$$

对于 $\ell\in\mathscr{L}$和 $\ell\sim X>x^{1-\eta}$，我们有 $\ell+2=p_1p_2p_3\in[x^{1-\eta},x]$，其中 p_1 和 p_2 满足

$$x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<\left(\frac{x}{p_1}\right)^{1/2},$$

并且我们断言，$p_1p_2p_3$必定存在一个子乘积落在区间 $[X^{\frac{45}{76}+\eta},X^{\gamma_0-\eta}]$内，其中

$$\gamma_0=1-\frac{18}{2^{38}+17}.$$

事实上，由于 $p_1\geqslant x^{1/10.92}$、$p_2\geqslant x^{1/3.29}$ 和 $p_1p_2p_3\in[x^{1-\eta},x]$，我们有 $p_i\leqslant X^{\gamma_0-\eta}$。若存在某个 $p_i\in[X^{\frac{45}{76}+\eta},X^{\gamma_0-\eta}]$，则结论成立。若不存在这种情况，我们考察乘积 p_1p_2。显然，有 $p_1p_2<p_2^2<x/p_1\leqslant x^{1-\frac{1}{10.92}}\leqslant x^{\gamma_0-\eta}$。若 $p_1p_2\in[X^{\frac{45}{76}+\eta},X^{\gamma_0-\eta}]$，则结论成立。否则，若 $p_1p_2<X^{\frac{45}{76}+\eta}$，则 $p_3=(\ell+2)(p_1p_2)^{-1}>X(X^{\frac{45}{76}+\eta})^{-1}=X^{\frac{31}{76}-\eta}>x^{\frac{15}{38}}$，因此 $p_2p_3>x^{\frac{1}{3.29}+\frac{15}{38}}>X^{\frac{45}{76}+\eta}$。此外，$p_2p_3=(\ell+2)p_1^{-1}\leqslant x^{1-\frac{1}{10.92}}\leqslant X^{\gamma_0-\eta}$。综上，必定存在 $p_1p_2p_3$的某个子乘积落在区间 $[X^{\frac{45}{76}+\eta},X^{\gamma_0-\eta}]$内。

对于 $\gamma_0<\gamma<1$ 以及 ξ 的定义，容易看出

$$X^{\frac{61(1-\gamma)+5\xi}{4}+\eta}\leqslant X^{\frac{45}{76}+\eta}<X^{\gamma_0-\eta}\leqslant X^{\gamma-\eta},$$

将其与 (6.24) 以及引理 3.2结合，并取指数对 $(\kappa,\ell)=A^3(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(\frac{1}{30},\frac{13}{15})$，可得

$$\sum_{\substack{d\leqslant D\\(d,2)=1}}\Big|\mathscr{R}_d^{(2)}\Big|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A}.$$

这就完成了引理 6.4的证明。 □

T考虑 $z=x^{\xi/3}$ 在（6.17）中，可由（6.4）、引理 6.3 和引理 6.4 得到

$$S(\mathscr{B},\mathscr{P},x^{\xi/3})\leqslant \mathcal{X}V(x^{\xi/3})F(3)(1+o(1)). \tag{6.25}$$

接下来，我们计算量 $\mathcal{X}$ definitely。我们写作

$$\mathcal{X}=\sum_{\ell\in\mathscr{L}}\gamma\ell^{\gamma-1}+\sum_{\ell\in\mathscr{L}}\Big((\ell+3)^{\gamma}-(\ell+2)^{\gamma}-\gamma\ell^{\gamma-1}\Big). \tag{6.26}$$

对于（6.26）中的第二项，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in\mathscr{L}}\Big((\ell+3)^{\gamma}-(\ell+2)^{\gamma}-\gamma\ell^{\gamma-1}\Big)\ll\sum_{\ell\in\mathscr{L}}\ell^{\gamma-2}\\
&\ll\sum_{\substack{x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<(x/p_1)^{1/2}\\ p_3<x/(p_1p_2)}}(p_1p_2p_3-2)^{\gamma-2}\\
&\ll\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}\leqslant p_2<(x/p_1)^{1/2}}(p_1p_2)^{\gamma-2}\sum_{p_3<x/(p_1p_2)}p_3^{\gamma-2}\\
&\ll\Big(\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p\leqslant x}p^{\gamma-2}\Big)^2\ll\Big(\sum_{x^{1/10.92}\leqslant m\leqslant x}m^{\gamma-2}\Big)^2\ll x^{2(\gamma-1)/10.92}=o(1).
\end{aligned} \tag{6.27}$$

对于（6.26）中的第一项，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in\mathscr{L}}\gamma\ell^{\gamma-1}=\gamma\sum_{e\in\mathscr{E}}\sum_{p_3<x/e}(ep_3-2)^{\gamma-1}\\
&=\gamma\sum_{x^{1/10.92}\leqslant p_1<x^{1/3.29}}\ \sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_2<(x/p_1)^{1/2}}\ \sum_{2<p_3<x/(p_1p_2)}(p_1p_2p_3-2)^{\gamma-1}\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{x^{1/10.92}}^{x^{1/3.29}}\int_{x^{1/3.29}}^{(\frac{x}{t_1})^{1/2}}\int_{2}^{\frac{x}{t_1t_2}}\frac{(t_1t_2t_3-2)^{\gamma-1}}{(\log t_1)(\log t_2)(\log t_3)}\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{\frac{1}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{(x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-2)^{\gamma-1}}{\alpha_3}\cdot x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{\frac{1}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{x^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\gamma}}{\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

对于（6.28）中的最内层积分，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{x^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\gamma}}{\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3&=\frac{1}{\gamma\log x}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{1}{\alpha_3}\mathrm{d}x^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\gamma}\\
&=\frac{1}{\gamma\log x}\left(\frac{x^{\gamma}}{1-\alpha_1-\alpha_2}+O\left(\frac{x^{\gamma}}{\log x}\right)\right)\\
&=\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\cdot\frac{x^{\gamma}}{\gamma\log x}(1+o(1)).
\end{aligned} \tag{6.29}$$

由（6.26）、（6.27）、（6.28）和（6.29），可得

$$\mathcal{X}=\frac{x^{\gamma}(1+o(1))}{\log x}\int_{\frac{1}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}. \tag{6.30}$$

结合式（6.17）、（6.25）、（6.30），可得

$$S_2\leqslant\frac{4\mathfrak{S}}{\xi}\left(\int_{\frac{1}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)\cdot\frac{x^{\gamma}}{\log^2 x}(1+o(1)). \tag{6.31}$$

6.2.4. S_3的上界估计。根据 $\varrho_3(a)$的定义，我们有

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{\substack{a\in\mathscr{A}\\(a,P(x^{1/10.92}))=1\\(a,2)=1}} \sum_{\substack{a=p_1p_2p_3\\x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<p_3}} 1 \\ &= \sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_1<x^{1/3}} \sum_{p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}} \sum_{\substack{p=p_1p_2p_3-2\\p_2<p_3\leqslant x/(p_1p_2)\\p_1p_2p_3=[k^{1/\gamma}]}} 1. \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^* &= \Big\{e:\ e=p_1p_2,\ x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}\Big\},\\ \mathscr{L}^* &= \Big\{\ell:\ \ell=ep-2,\ e\in\mathscr{E}^*,\ ep\leqslant x\Big\},\\ \mathscr{B}^* &= \Big\{\ell:\ell\in\mathscr{L}^*,\ \ell+2=[k^{1/\gamma}]\text{ for some }k\in\mathbb{N}^+\Big\}. \end{aligned}$$

显然，我们有

$$\big|\mathscr{E}^*\big|\leqslant \sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_1<x^{1/3}}\left(\frac{x}{p_1}\right)^{1/2}\ll\frac{x^{2/3}}{\log x}<x^{2/3}.$$

此外，对于 $e\in\mathscr{E}^*$，有

$$\begin{cases} e=p_1p_2>p_1^2\geqslant x^{0.607},\\ e=p_1p_2<p_1(x/p_1)^{1/2}=x^{1/2}p_1^{1/2}<x^{2/3}. \end{cases}$$

与（6.16）中的说明类似，很容易看出，$\mathscr{L}^*$中不超过 $x^{0.607}$的元素个数小于 $x^{2/3}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} S_3&\leqslant S(\mathscr{B}^*,\mathscr{P},x^{0.607})+O(x^{2/3})\\ &\leqslant S(\mathscr{B}^*,\mathscr{P},z)+O(x^{2/3}) \end{aligned}\tag{6.32}$$

对 $z\leqslant x^{0.607}$ 成立。令 $\mathscr{B}_d^*=\big\{\ell:\ \ell\in\mathscr{B}^*,\ell\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)\big\}$。那么很容易看出

$$\big|\mathscr{B}_d^*\big|=\frac{1}{\varphi(d)}\mathscr{X}^*+\mathscr{R}_d^{*(1)}+\mathscr{R}_d^{*(2)},$$

其中

$$\mathscr{X}^*=\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma\big),$$

$$\mathscr{R}_d^{*(1)}=\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}^*\\\ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}}\big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma\big)-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma\big),\tag{6.33}$$

$$\mathscr{R}_d^{*(2)}=\sum_{\substack{\ell\in\mathscr{L}^*\\\ell\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d)}}\Big(\psi\big(-(\ell+3)^\gamma\big)-\psi\big(-(\ell+2)^\gamma\big)\Big).\tag{6.34}$$

此外，可以按照引理6.3 和引理6.4 的相同步骤来证明

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^\xi\\(d,2)=1}}\big|\mathscr{R}_d^{*(i)}\big|\ll\frac{x^\gamma}{(\log x)^A},\qquad i=1,2.\tag{6.35}$$

现在，我们描述具有显式系数和确定大小的量 $\mathscr{X}^*$。记

$$\mathscr{X}^*=\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\gamma\ell^{\gamma-1}+\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\Big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma-\gamma\ell^{\gamma-1}\Big).\tag{6.36}$$

对于（6.36）中的第二项，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\Big((\ell+3)^\gamma-(\ell+2)^\gamma-\gamma\ell^{\gamma-1}\Big)\ll\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\ell^{\gamma-2}\\
&\ll\sum_{\substack{x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}\\ p_3<x/(p_1p_2)}}(p_1p_2p_3-2)^{\gamma-2}\ll\sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}}(p_1p_2)^{\gamma-2}\sum_{p_3<x/(p_1p_2)}p_3^{\gamma-2}\\
&\ll\Big(\sum_{x^{1/3.29}\leqslant p\leqslant x}p^{\gamma-2}\Big)^2\ll\Big(\sum_{x^{1/3.29}\leqslant m\leqslant x}m^{\gamma-2}\Big)^2\ll x^{2(\gamma-1)/3.29}=o(1).
\end{aligned}\tag{6.37}$$

对于（6.36）中的第一项，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell\in\mathscr{L}^*}\gamma\ell^{\gamma-1}=\gamma\sum_{e\in\mathscr{E}^*}\sum_{p_3<x/e}(ep_3-2)^{\gamma-1}\\
&=\gamma\sum_{x^{1/3.29}\leqslant p_1<x^{1/3}}\sum_{p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}}\sum_{2<p_3<x/(p_1p_2)}(p_1p_2p_3-2)^{\gamma-1}\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{x^{1/3.29}}^{x^{1/3}}\int_{t_1}^{(\frac{x}{t_1})^{1/2}}\int_2^{\frac{x}{t_1t_2}}\frac{(t_1t_2t_3-2)^{\gamma-1}}{(\log t_1)(\log t_2)(\log t_3)}\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{(x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-2)^{\gamma-1}}{\alpha_3}\cdot x^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3\\
&=\gamma\big(1+o(1)\big)\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\frac{x^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\gamma}}{\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3\\
&=\frac{x^\gamma(1+o(1))}{\log x}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)},
\end{aligned}\tag{6.38}$$

结合（6.37），得到

$$\mathscr{X}^*=\frac{x^\gamma(1+o(1))}{\log x}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}.\tag{6.39}$$

在（$z=x^{\xi/3}$ 6.32）中取值，由（6.4）、（6.35）和（6.39）可得

$$\begin{aligned}
S_3&\leqslant S(\mathscr{B}^*,\mathscr{P},x^{\xi/3})+O(x^{2/3})\leqslant\mathscr{X}^*V(x^{\xi/3})F(3)(1+o(1))\\
&\leqslant\frac{4\mathfrak{S}}{\xi}\left(\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)\cdot\frac{x^\gamma}{\log^2x}(1+o(1)).
\end{aligned}\tag{6.40}$$

6.2.5. *Pr*定理*1.3*。由（6.10）、（6.11）、（6.15）、（6.31）和（6.40）可知 t

$$\begin{aligned}
&\big|\{a:a\in\mathscr{A},\ a=\mathcal{P}_2\}\big|\\
&\geqslant\frac{\mathfrak{S}x^\gamma(1+o(1))}{\log^2x}\Bigg\{\frac4\xi\left(\log(10.92\xi-1)+\int_3^{10.92\xi-1}\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\int_2^{t_1-1}\frac{\log(t_2-1)}{t_2}\mathrm{d}t_2\right)\\
&-2\left(\int_{\xi-\frac{3}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha(\xi-\alpha)}+\int_{\frac{1}{10.92}}^{\xi-\frac{3}{10.92}}\frac{1}{\alpha(\xi-\alpha)}\left(1+\int_2^{10.92(\xi-\alpha)-1}\frac{\log(\beta-1)}{\beta}\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\alpha\right)\\
&-\frac2\xi\left(\int_{\frac{1}{10.92}}^{\frac{1}{3.29}}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)-\frac4\xi\left(\int_{\frac{1}{3.29}}^{\frac13}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\frac{1-\alpha_1}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

通过简单的数值计算，容易看出，对于

$$1-\frac{0.03208}{2^{38}+17}<\gamma<1,$$

成立 $\xi\geqslant 0.47284$且上述括号中的数 $\{\cdot\}$ 为 $\geqslant 0.000109508$，由此完成了定理 1.3的证明。

Acknowledgement

作者感谢审稿人在审阅本文过程中付出的耐心。本工作得到国家自然科学基金（项目编号：11901566、12001047、11971476、12071238）和中央高校基本科研业务费（项目编号：2022YQLX05）的资助。

References

[1] R. C. Baker, G. Harman, J. Rivat，形如 $[n^c]$ 的素数，《数论杂志》50 (1995)，第 2 期，261–277 页。[2] A. Balog, J. Friedlander，维诺格拉多夫定理与 Piatetski–Shapiro 定理的混合，《太平洋数学杂志》156 (1992)，第 1 期，45–62 页。[3] M. B. Barban，Ju. V. Linnik“大筛法”的新应用，乌兹别克苏维埃社会主义共和国科学院数学研究所论文集，22 (1961)，1–20 页。[4] M. B. Barban，狄利克雷 L–级数零点的“密度”以及素数和“近素数”之和问题，《数学文集》（新辑）61 (1963)，418–425 页。[5] E. Bombieri，论大筛法，《Mathematika》12 (1965)，201–225 页。[6] A. A. Buchstab，哥德巴赫–欧拉问题与孪生素数问题的新结果，《苏联科学院通报》162 (1965)，第 4 期，735–738 页。[7] J. R. Chen，论将较大的偶数表示为一个素数与至多两个素数的乘积之和，《科学通报》17 (1966)，385–386 页。[8] J. R. Chen，论将更大的偶数表示为一个素数与至多两个素数的乘积之和，《中国科学》16 (1973)，157–176 页。[9] Z. Cui，沙皮罗素数集中的素数的华罗庚定理，《匈牙利数学学报》104 (2004)，第 4 期，323–329 页。[10] P. X. Gallagher，Bombieri 均值定理，《Mathematika》15 (1968)，1–6 页。[11] H. Halberstam, H. E. Richert，《筛法》，Academic Press，伦敦，1974 年。[12] D. R. Heath–Brown，短区间中的素数与广义 Vaughan 恒等式，《加拿大数学杂志》34 (1982)，第 6 期，1365–1377 页。[13] D. R. Heath–Brown，皮亚特茨基-ı–沙皮罗素数定理，《数论杂志》16 (1983)，第 2 期，242–266 页。[14] H. A. Helfgott，哥德巴赫问题的主弧，预印本 (2013)，arXiv: 1305.2897。[15] H. A. Helfgott，三元哥德巴赫问题，《伊比利亚美洲数学评论》130 (2015)，第 2 期，45–59 页。[16] H. A. Helfgott，三元哥德巴赫猜想，《西班牙皇家数学会公报》16 (2013)，第 4 期，709–726 页。[17] H. A. Helfgott，三元哥德巴赫猜想，《数学公报》140 (2014)，5–18 页。[18] H. Iwaniec，Rosser 筛法、余项的双线性型及其若干应用，载于：《解析数论近期进展》第 1 卷，Academic Press，伦敦，1981 年，第 203–230 页。[19] C.-H. Jia，论皮亚特茨基–沙皮罗素数定理 (II)，《中国科学》A辑36 (1993)，913–926 页。[20] C.-H. Jia，论皮亚特茨基–沙皮罗素数定理，《中国数学年刊》15 (1994)，第 1 期，9–22 页。[21] C.-H. Jia，论皮亚特茨基–沙皮罗–维诺格拉多夫定理，《算术学报》73 (1995)，第 1 期，1–28 页。[22] G. Kolesnik，形如 $[n^c]$ 的数列中的素数分布，《数学札记》2 (1972)，第 2 期，117–128 页。[23] G. Kolesnik，形如 $[n^c]$ 的素数，《太平洋数学杂志》118 (1985)，第 2 期，437–447 页。[24] A. Kumchev，论皮亚特茨基–沙皮罗–维诺格拉多夫定理，《波尔多数论杂志》9 (1997)，第 1 期，11–23 页。[25] A. Kumchev，论形如 $[n^c]$ 的素数分布，《格拉斯哥数学杂志》41 (1999)，第 1 期，85–102 页。[26] D. Leitmann，形如 $[f(n)]$，的数列中的素数分布，《伦敦数学会会刊》(3) 35 (1977)，第 3 期，448–462 页。[27] D. Leitmann，三角和的估计，《纯粹与应用数学杂志》317 (1980)，209–219 页。[28] J. Li, M. Zhang, Piatetski–Shapiro 素数集中的素数的华罗庚定理，《国际数论杂志》14 (2018)，第 1 期，193–220 页。[29] J. Li, M. Zhang, F. Xue，关于 Piatetski–Shapiro 素数与几乎素数的一个加法问题，《拉马努金杂志》57 (2022)，第 4 期，1307–1333 页。

[30] H. Q. Liu, J. Rivat，论皮亚特茨基˘ı–˘沙皮罗素数定理，《伦敦数学会通报》24 (1992)，第 2 期，143–147 页。[31] Y. M. Lu，关于皮亚特茨基–沙皮罗素数的一个加法问题，《数学学报》（英文版）34 (2018)，第 2 期，255–264 页。[32] C. D. Pan，论将一个偶数表示为一个素数与一个殆素数之和，《中国数学学报》 3 (1963)，101–112 页。[33] C. D. Pan，论将大偶数表示为一个素数与至多四个素数的乘积之和，《中国科学》 12 (1963)，455–473 页。[34] C. D. Pan，Yu. V. Linnik 大筛法的新应用，《数学学报》14 (1964)，597–606 页。[35] C. D. Pan, X. X. Ding，一个均值定理，《数学学报》18 (1975)，第 4 期，254–262 页。[36] C. D. Pan, X. X. Ding，“一个均值定理”（《数学学报》18 (1975)，第 4 期，254–262 页）一文的勘误，《数学学报》19 (1976)，第 3 期，217–218 页。[37] C. D. Pan, X. X. Ding，一个新均值定理，《中国科学》数学专辑 II (1979)，149–161 页。[38] C. D. Pan, C. B. Pan，《哥德巴赫猜想》，科学出版社，北京，1992 年。[39] T. P. Peneva，关于皮亚特茨基–沙皮罗素数与几乎素数的一个加法问题，《数学月刊》140 (2003)，第 2 期，119–133 页。[40] I. I. Pyatecki˘ı–˘Sapiro，论形如 $[f(n)]$，的数列中的素数分布，《数学文集》新辑33(75) (1953)，559–566 页。[41] A. A. R´enyi，论将一个偶数表示为单个素数与单个几乎素数之和，《苏联科学院通报》（新辑）56 (1947)，455–458 页。[42] J. Rivat，关于 Pjateci˘ı–˘Sapiro 定理：数列 $[n^c]$ 中的素数，博士论文，巴黎南大学，1992 年。[43] J. Rivat, P. Sargos，形如 $\lfloor n^c \rfloor$ 的素数，《加拿大数学杂志》53 (2001)，第 2 期，414–433 页。[44] J. Rivat, J. Wu，形如 $[n^c]$ 的素数，《格拉斯哥数学杂志》 43 (2001)，第 2 期，237–254 页。[45] A. I. Vinogradov，狄利克雷 L–级数的密度假设，《苏联科学院消息：数学辑》29 (1965)，903–934 页。[46] I. M. Vinogradov，将奇数表示为三个素数之和，《苏联科学院通报》15 (1937)，169–172 页。[47] X. Wang, Y. C. Cai，涉及皮亚特茨基–沙皮罗素数的一个加法问题，《国际数论杂志》7 (2011)，第 5 期，1359–1378 页。DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY, BEIJING 100083,PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA电子邮箱：jinjiang.li.math@gmail.comDEPARTMENT OF MATHEMATICS,
CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY, BEIJING 100083,PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA电子邮箱：fei.xue.math@gmail.com(CORRESPONDING AUTHOR) SCHOOL OF APPLIED SCIENCE,
BEIJING INFORMATION SCIENCE AND TECH-NOLOGY UNIVERSITY, BEIJING 100192,
PEOPLE'S REPUBLIC OF CHINA电子邮箱：min.zhang.math@gmail.com