arXiv:2305.00878v3 [math.FA] 5 Jul 2023

分数阶 Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间之间的连续嵌入

Azeddine BAALAL、Mohamed BERGHOUT 和 EL-Houcine OUALI

摘要。设 G 为一个 Orlicz 函数，并设 α、β、s 为正实数。在 Orlicz 函数 G 满足某些条件时，我们建立定义在度量测度空间 $W^{\alpha,\ s}{}^{G}(X,d,\mu)$ 上的分数阶 Orlicz-Sobolev 空间与分数阶 Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间 $M^{\beta,}{}^{G}(X,d,\mu)$ 之间的一些连续嵌入结果。

数学主题分类（2010年）：46E35，30L99。
关键词：Sobolev 空间、Orlicz-Sobolev 空间、Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间、分数阶空间、度量测度空间、Sobolev 嵌入。

1. 引言

度量测度空间（X,d,μ）是配备 Borel 测度μ的度量空间（X,d），满足 $0<\mu(B(x,r))<\infty$，对所有 $x\in X$ 以及所有 $r\in(0,\infty)$ 均成立。我们始终假设度量空间至少包含两个点。过去二十年来，度量测度空间上的 Sobolev 空间得到了广泛研究，参见例如 [5, 9, 11]。在[2, 13, 18, 19, 20]中，这一理论被推广到度量测度空间上的 Orlicz-Sobolev 空间。这些空间在所谓的强非线性位势理论领域中发挥着重要作用 [2]。连续嵌入和紧嵌入在 Sobolev 空间理论中占据核心地位。许多研究者探讨了这些问题，参见 [1, 12, 6, 23, 3, 9, 10, 14, 15, 8]。

本文旨在研究分数阶 Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间之间的连续嵌入。

设 $(X,\ d,\ \mu)$ 是一个度量测度空间，G 是一个 Orlicz 函数（精确定义见第 2 节）。我们定义 Orlicz空间 $L^{G}(X,\ \mu)$ 如下：

$$L^{G}(X,\mu):=\{u:X\to\mathbb{R}\ \textit{measurable;}\ \Phi_{G}(u)<+\infty\},$$

其中，模函数 Φ_G 定义如下

$$\Phi_{G}(u):=\int_{X}G(|u(x)|)d\mu(x).$$

Orlicz空间 $L^G(X,\mu)$ 是一个 Banach空间，其范数如下，称为 Luxemburg范数

$$\|u\|_{L^G(X,\mu)} := \inf\left\{\lambda > 0; \Phi_G\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

令 $\alpha, s > 0$，我们将分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $W^{\alpha,}{}_s{}^G(X,d,\mu)$ 定义如下。

$$W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu) := \left\{u \in L^G(X,\mu); \Phi_s^{\alpha,G}(u) < +\infty\right\},$$

其中模函数 $\Phi^{\alpha,}{}_s{}^G$定义为

$$\Phi_s^{\alpha,G}(u) := \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}.$$

空间 $W^{\alpha,}{}_s{}^G(X,d,\mu)$ 是一个 Banach空间，其范数定义如下

$$\|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} := \|u\|_{L^G(X,\mu)} + [u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}, \tag{1.1}$$

其中 $[.]_{W^{\alpha,}{}_s{}^G(X,\ d,\ \mu)}$ 是Gagliardo半范数，定义为

$$[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} := \inf\left\{\lambda > 0; \Phi_s^{\alpha,G}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}. \tag{1.2}$$

此外，我们称 $u \in \dot{W}^{\alpha,}{}_s{}^G(X,d,\mu)$，如果 u 几乎处处有限且$[u]_{W^{\alpha,}{}_s{}^G(X,\ d,\ \mu)} < \infty$。

设 $\beta > 0$，若存在一个非负函数$h \in L^G(X,\mu)$，称为 v 的广义 β-梯度，使得函数 $v \in L^G(X,\mu)$ 属于分数阶 Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间 $M^{\beta,}{}^G(X,d,\mu)$，则称

$$|v(x)-v(y)| \leq d^\beta(x,y)(h(x)+h(y)) \quad \text{for } \mu\text{-almost all } x,y \in X.$$

我们在空间 $M^{\beta,}{}^G(X,d,\mu)$ 上赋予范数

$$\|v\|_{M^{\beta,G}(X,d,\mu)} := \|v\|_{L^G(X,\mu)} + \inf\|h\|_{L^G(X,\mu)},$$

其中下确界取遍 v 的所有广义 β-梯度。当 $G(t) = t^p$ 且 $p > 1$ 时，这些空间由 Hajłasz 针对 $\alpha = 1$ 引入（见 [9]），并由 Yang 针对 $\alpha \neq 1$ 引入（见 [21]）。关于这些空间的更多细节，请参见 [3, 10, 11,9, 22, 17, 21]。

当 $sp < n$、$sp = n$ 或 $sp > n$ 时，$W^{s,}{}^p(\mathbb{R}^n)$ 的经典 Sobolev嵌入定理具有不同的特征，见 [6]。因此，在度量测度背景下，为了证明嵌入定理，我们需要一个可与空间维数相对应的条件。事实证明，测度增长的下界和上界提供了这样的条件。

我们称度量测度空间（X，d，μ）是下 Ahlfors s-正则的，如果存在某个 p正数 b 使得

$$\mu(B(z,r)) \geq \frac{1}{b}r^s \text{ for } r \in (0,1], z \in X. \tag{1.3}$$

另一方面，如果存在某个正数常量 b，使得 (X,d,μ) 是上 Ahlfors s-正则的，则称其为上 Ahlfors s-正则。

$$\mu(B(z,r)) \leq br^s \text{ for } r \in (0,1], z \in X. \tag{1.4}$$

例如，设 $\theta > 2$ 和

$$\Omega := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 \text{ and } |x| < y^{\theta-1}\right\}.$$

那么，度量测度空间 $(\Omega\, d_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$ 是下 θ-正则的，参见 [8]。这里我们将 Ω 视为带有欧氏度量 $d_{\mathbb{R}^2}$ 和勒贝格测度 λ_2 的度量测度空间。

本文的第一个主要结果是 Sobolev 函数的 Hölder 正则性，其中 $\alpha p_0 > s$，见定理3.1 和定理 3.2。本文的第二个主要结果是空间 $W^{\alpha,\ {}_s}{}^{G}(X,\ d,\ \mu)$与 $M^{\beta,\ G}(X,\ d,\ \mu)$之间的连续嵌入，见定理 3.3。

本文的组织如下。在第 2 节中，我们给出 Orlicz 函数的一些有用性质。主要结果的证明将在第 3 节中给出。

2. Orlicz 函数及一些预备结果

本节将证明 Orlicz 函数的若干有用性质，这些性质将在全文中使用。我们先回顾著名的 Orlicz 函数的定义。

定义 2.1. 若函数 $G:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 满足以下性质，则称其为 Orlicz 函数:

(H_1) G 连续、凸、递增，且 $G(0) = 0$。(H_2) G 满足 Δ_2 条件，即存在 $C > 2$，使得对所有 $x \in \mathbb{R}_+$，均有 $G(2x) \leq CG(x)$。(H_3) G 在零点超线性，即 $\lim_{x\to 0} {}^{G}(x)_{x} = 0$。

容易验证，Orlicz 函数满足以下基本性质。关于这些事实的证明，参见 [7] 。

(P_1)（正则性） G 是 Lipschitz 连续的。(P_2) G 可表示为 $G(x) = \hat{} \int_0^x g(s)ds$ 的形式，其中 g 是非递减右连续函数。(P_3)（次可加性）给定 a、$b \in \mathbb{R}_+$、G，有$a + b(\leq \frac{C}{2})\, G(a) + G(b)$，其中 $C > 0$是 Δ_2 条件中的常数。(P_4) 对任意 $0 < b < 1$ 和 $a > 0$，均有 $G(ab) \leq bG(a)$。

Orlicz 函数的一个典型例子是 $G(t) = t^p$ with $p > 1$，更多 Orlicz 函数的例子请参见 [16]。

在本文中，我们始终假设 国产成人

$$1 < p_0 := \inf_{s>0} \frac{sg(s)}{G(s)} \leq p^0 := \sup_{s>0} \frac{sg(s)}{G(s)} < +\infty. \tag{2.1}$$

引理 2.2. 设 G 是一个 Orlicz 函数，并假设 (2.1) 成立。则有以下不等式。

$$G(\gamma t) \geq \gamma^{p_0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and all } \gamma \geq 1, \tag{2.2}$$

$$G(\gamma t) \geq \gamma^{p^0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and all } \gamma \in (0,1], \tag{2.3}$$

$$G(\gamma t) \leq \gamma^{p^0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and all } \gamma \geq 1, \tag{2.4}$$

$$G(t) \leq \gamma^{p_0} G\left(\frac{t}{\gamma}\right) \text{ for all } t > 0 \text{ and all } \gamma \in (0,1]. \tag{2.5}$$

对于 $\gamma \neq 1$，引理的证明见 [4, 引理 2.2]。为方便读者，我们在此给出证明。

证明。若 $\gamma = 1$，则前面的不等式显然成立。假设 $\gamma \neq 1$，由于 $p_0 \leq \frac{tg(t)}{G(t)}$ 对~~所有~~ $t > 0$均成立，因此令 $\gamma > 1$，可得

$$\log\left(G(\gamma t)\right) - \log\left(G(t)\right) = \int_t^{\gamma t} \frac{g(\tau)}{G(\tau)} d\tau \geq \int_t^{\gamma t} \frac{p_0}{\tau} d\tau = \log\left(\gamma^{p_0}\right).$$

因此，我们推出

$$G(\gamma t) \geq \gamma^{p_0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and } \gamma > 1. \tag{2.6}$$

现在，我们证明对于所有 $t > 0$ 和 $\gamma > 1$，$G(\gamma t) \leq \gamma^{p^0} G(t)$。事实上，由于 $p^0 \geq \frac{tg(t)}{G(t)}$ 对所有 $t > 0$均成立，因此对于所有 $\gamma > 1$，有

$$\log(G(\gamma t)) - \log(G(t)) = \int_t^{\gamma t} \frac{g(\tau)}{G(\tau)} d\tau \leq \int_t^{\gamma t} \frac{p^0}{\tau} d\tau = \log\left(\gamma^{p^0}\right).$$

因此，我们推出

$$G(\gamma t) \leq \gamma^{p^0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and } \gamma > 1. \tag{2.7}$$

根据（2.6）和（2.7）的证明中相同的论证，我们有

$$G(\gamma t) \geq \gamma^{p^0} G(t) \text{ for all } t > 0 \text{ and } \gamma \in (0,1), \tag{2.8}$$

and

$$G(t) \leq \gamma^{p_0} G\left(\frac{t}{\gamma}\right) \text{ for all } t > 0 \text{ and } \gamma \in (0,1). \tag{2.9}$$

证明至此结束。 □

命题 2.3. 设 $s, \alpha > 0, G$ 是一个 Orlicz 函数，并假设 (X, d, μ) 是一个上 Ahlfors θ-正则空间，其中 $\alpha p^0 < \theta - s$。那么，$W^{\alpha,\ {}^G}{}_s(X, d, \mu) = L^G(X, \mu)$，且具有等价范数。

证明。 设 $u \in L^G(X,\ \mu)$ 以及 $\lambda > 0$, 则利用 Fubini 定理和不等式（2.4）可得

$$\begin{aligned}
\Phi_s^{\alpha,G}\left(\frac{u}{\lambda}\right) &= \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda d(x,y)^\alpha}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s} \\
&\le \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{2|u(x)|}{2\lambda d(x,y)^\alpha}+\frac{2|u(y)|}{2\lambda d(x,y)^\alpha}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s} \\
&\le 2^{p^0}\int_X\int_{B(x,1)\setminus\{x\}} G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda d(x,y)^\alpha}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s} \\
&+ 2^{p^0}\int_X\int_{B(y,1)\setminus\{y\}} G\left(\frac{|u(y)|}{\lambda d(x,y)^\alpha}\right)\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{d(x,y)^s} \\
&\le 2^{p^0+1}\int_X G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)\int_{B(x,1)\setminus\{x\}}\frac{1}{d(x,y)^{s+\alpha p^0}}d\mu(y)d\mu(x) \\
&\le 2^{s+\alpha p^0+p^0+1}\int_X G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu\left(B\left(x,2^{-k}\right)\right)2^{k(s+\alpha p^0)}\right)d\mu(x) \\
&\le b2^{s+\alpha p^0+p^0+1}\int_X G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)d\mu(x)\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(\alpha p^0+s-\theta)} \\
&= \frac{b2^{s+\alpha p^0+p^0+1}}{1-2^{\alpha p^0+s-\theta}}\int_X G\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)d\mu(x),
\end{aligned}$$

并且这意味着。

$$[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \le \beta\|u\|_{L^G(X,d,\mu)},\ \textit{with}\ \beta = \frac{b2^{s+\alpha p^0+p^0+1}}{1-2^{\alpha p^0+s-\theta}},$$

其中我们使用了分解 $B(x,1)\setminus\{x\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B\left(x,2^{-k}\right)\setminus B\left(x,2^{-(k+1)}\right)$.这就完成了证明。□

在下文中，设 (X,d,μ) 是一个下 Ahlfors s-正则空间，设 B 是以 $z \in X$ 为中心、半径为 $R>0$ 的球。

可测函数 u 在 B 上几乎处处有限，其中位数定义为

$$m_u(B) = \max\left\{t\in\mathbb{R} : \mu(\{x\in B : u(x) < t\}) \le \frac{\mu(B)}{2}\right\}.$$

由[8], 可得以下结果。

命题2.4. 设 u 是定义在 B上几乎处处有限的可测函数，则

（a）若 $c\in\mathbb{R}$，则 m_u（B）$-c = m_{u-c}$（B），

（b）若 $c>0$，则 cm_u（B）$= m_{cu}$（B）。

引理 2.5. 设 G 为一个 Orlicz 函数，且 u 为几乎处处有限的可测函数。那么，对于所有 $c\in\mathbb{R}$，我们有

$$|m_u(B)-c| \le G^{-1}\left(2\fint_B G\left(|u(x)-c|\right)d\mu(x)\right). \tag{2.10}$$

证明。我们首先证明以下不等式。

$$|m_u(B)| \leq m_{|u|}(B). \tag{2.11}$$

如果 $m_u(B) > 0$，则有

$$\{x \in B : |u(x)| < m_u(B)\} \subseteq \{x \in B : u(x) < m_u(B)\},$$

因此，不等式（2.11）成立。
如果 $m_u(B) \leq 0$，则有

$$\{x \in B : |u(x)| < |m_u(B)|\} \subseteq \{x \in B : u(x) > m_u(B)\}, \tag{2.12}$$

根据中位数的定义，有

$$\mu(\{x \in B : u(x) \leq m_u(B)\}) \geq \frac{\mu(B)}{2}. \tag{2.13}$$

因此，由包含关系（2.12）和不等式（2.13）可得（2.11）。现在，
让我们证明以下不等式

$$m_{|u-c|}(B) \leq G^{-1}\left(2 \fint_B G(|u(x)-c|)\, d\mu(x)\right). \tag{2.14}$$

设 $\eta > 2$ 和 $\delta = \text{ffl}_B G(|u(x) - c|)\, d\mu(x)$。由一般的切比雪夫不等式可得

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x \in B : |u(x)-c| \geq G^{-1}(\eta\delta)\}\right) &\leq \frac{1}{\eta\delta}\int_B G(|u(x)-c|)\, d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\eta}\mu(B) < \frac{1}{2}\mu(B).\end{aligned}$$

因此，

$$m_{|u-c|}(B) \leq G^{-1}\left(\eta \fint_B G(|u(x)-c|)\, d\mu(x)\right).$$

然后令其趋于极限 $\eta \to 2$，得到（2.14）。
He因此，由命题2.4 以及不等式（2.11）和（2.14可得所需结果 .
□

推论2.6. 设 G 为一个 Orlicz 函数，且 u 为几乎处处有限的可测函数。那么对于所有满足 $|u(t)| < \infty$ 的 t，有

$$G(|m_u(B(z,r)) - u(t)|) \leq 2br^{-s}\int_{B(z,r)} G(|u(t)-u(y)|)\, d\mu(y), \tag{2.15}$$

其中 $z \in X$ 和 $r \leq 1$。

现在我们来证明以下引理。

引理 2.7. 设 G 是一个 Orlicz 函数，并且对某个 $\alpha > 0$，有 $u \in \dot{W}^{\alpha,}{}_{s}{}^{G}(X,d,\mu)$。那么，存在一个零测集 H，使得对于所有 $x \in X\backslash H$，$\lim_{r\to 0} m_u(B(x,r)) = u(x)$。

证明。考虑以下集合

$$H=\left\{x\in X:\int_{B(x,1)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s}}=+\infty \text{ or } |u(x)|=+\infty\right\}.$$

由 Fubini 定理可得 $\mu(H)=0$。因此，对于所有 $x\in X\backslash H$ 和 $r\leq 1$，由 (2.15) 和 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}G\left(|u(x)-m_u(B(x,r))|\right)&\leq 2br^{-s}\int_{B(x,r)}G\left(|u(x)-u(y)|\right)d\mu(y)\\&\leq 2br^{-s}\int_{B(x,r)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)d(x,y)^{\alpha p_0+s}\frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s}}\\&\leq 2br^{\alpha p_0}\int_{B(x,1)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s}}.\end{aligned}$$

由于 $2br^{\alpha p_0}\geq 1$ 当 r 趋于 0 时也趋于 0，证明得证。 □

命题 2.8。设 G 为 Orlicz 函数，且设 $\alpha>0$。那么，对于所有 $z\in X$、$0<r_1\leq r_2<1-r_1$ 和 $u\in \dot{W}^{\alpha,G}_{s}(X,d,\mu)$，我们有

$$\begin{aligned}&G\left(|m_u\left(B\left(z,r_1\right)\right)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)|\right)\\&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0}[u]^{p_0}_{W^{\alpha,G}_{s}(X,d,\mu)}\left(r_1^{\alpha p_0-s}+\frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right)\end{aligned}\tag{2.16}$$

若 $[u]_{W^{\alpha,G}_{s}(X,d,\mu)}\leq 1$，且

$$\begin{aligned}&G\left(|m_u\left(B\left(z,r_1\right)\right)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)|\right)\\&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0}[u]^{p_0}_{W^{\alpha,G}_{s}(X,d,\mu)}\left(r_1^{\alpha p_0-s}+\frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right)\end{aligned}\tag{2.17}$$

若$[u]_{W^{\alpha,G}_{s}(X,d,\mu)}\geq 1$。

证明。 利用不等式（2.10）、（2.15）和（2.5），我们得到

$$\begin{aligned}&G\left(|m_u\left(B\left(z,r_1\right)\right)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)|\right)\\&\leq 2br_1^{-s}\int_{B(z,r_1)}G\left(|u(x)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)|\right)d\mu(x)\\&\leq 4b^2 r_1^{-s}r_2^{-s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(z,r_2)}G\left(|u(x)-u(y)|\right)d\mu(y)d\mu(x)\\&\leq 4b^2 r_1^{-s}r_2^{-s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(z,r_2)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)d(x,y)^{\alpha p_0}d(x,y)^{s}\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}}\\&\leq 4b^2 r_1^{-s}r_2^{-s}\int_{B(z,r_1)}\int_{B(z,r_2)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)(r_1+r_2)^{s+\alpha p_0}\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \left(r_1+r_2\right)^{s+\alpha p_0} \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}} \\
&= 4b^2 \frac{\left(r_1+r_2\right)^{s}}{r_2^{s}} \frac{\left(r_1+r_2\right)^{\alpha p_0}}{r_1^{s}} \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}} \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} \\
&\times \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right) \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

若 $[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G\ (X,\ d,\ \mu)}=0$，则不等式（2.16）显然成立。

设 $[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G(X,\ d,\ \mu)}\in(0,1],$，则由（2.18）和（2.5）可得

$$
\begin{aligned}
&G\left(\left|m_u\left(B\left(z,r_1\right)\right)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)\right|\right) \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right) \\
&\times [u]^{p_0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}} \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} [u]^{p_0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right).
\end{aligned}
$$

现在设 $[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G(X,\ d,\ \mu)}\geq 1$，则由（2.18）和（2.4）可得

$$
\begin{aligned}
&G\left(\left|m_u\left(B\left(z,r_1\right)\right)-m_u\left(B\left(z,r_2\right)\right)\right|\right) \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right) \\
&\times \iint_{0<d(x,y)<1} G\left([u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}} \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right) \\
&\times [u]^{p^0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \iint_{0<d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}} \\
&\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0} [u]^{p^0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \left(r_1^{\alpha p_0 - s} + \frac{r_2^{\alpha p_0}}{r_1^{s}}\right).
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

命题 2.9. 设 G 为一个 Orlicz 函数，使得当 $x\leq 1$ 时 $G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p_0}}G^{-1}(y)$，且当 $x\geq 1$ 时 $G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p^0}}G^{-1}(y)$，并令 $\alpha>0$。那么对所有 $z\in X$，

$R \in \left(0, \frac{2}{3}\right), i, j \in \mathbb{N}, 0 \leq i < j$和 $u \in \dot{W}^{\alpha}{}_{,s}{}^{G}(X, d, \mu)$ 我们有

$$\begin{aligned} &\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \\ &\leq A[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \sum_{l=i}^{j-1} G^{-1}\left(\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}}\right), \end{aligned} \tag{2.19}$$

where $A = \max\left\{\left(4^{s+1}b^2\right)^{\frac{1}{p_0}}\left(1+2^{\alpha p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}, \left(4^{s+1}b^2\right)^{\frac{1}{p^0}}\left(1+2^{\alpha p_0}\right)^{\frac{1}{p^0}}\right\}$.

证明。 取 $r_1 = \frac{R}{2^{l+1}}$和 $r_2 = \frac{R}{2^l}$，其中 $l \in \mathbb{N}$。于是，根据命题2.8，可得

$$\begin{aligned} &G\left(\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right)\right|\right) \\ &\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0}[u]^{p_0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\left(\frac{1}{2^{\alpha p_0 - s}}\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}} + 2^s \frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}}\right) \\ &= 4^{s+1}b^2(1+2^{\alpha p_0})[u]^{p_0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}} \end{aligned}$$

若$[u]_{W^{\alpha,\ s}\ {}^{G}(X,\ d,\ \mu)} \leq 1$，且

$$\begin{aligned} &G\left(\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right)\right|\right) \\ &\leq 4b^2 2^{s+\alpha p_0}[u]^{p^0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\left(\frac{1}{2^{\alpha p_0 - s}}\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}} + 2^s \frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}}\right) \\ &= 4^{s+1}b^2(1+2^{\alpha p_0})[u]^{p^0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}} \end{aligned}$$

如果$[u]_{W^{\alpha,\ s}\ {}^{G}(X,d,\mu)} \geq 1$。

那么在这两种情况下，我们都有

$$\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right)\right| \leq A[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} G^{-1}\left(\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}}\right)$$

其中 $A = \max\left\{\left(4^{s+1}b^2\right)^{1/p_0}\left(1+2^{\alpha p_0}\right)^{1/p_0}, \left(4^{s+1}b^2\right)^{1/p^0}\left(1+2^{\alpha p_0}\right)^{1/p^0}\right\}$。

因此，根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} &\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \\ &\leq \sum_{l=i}^{j-1}\left|m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right)\right| \\ &\leq A[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \sum_{l=i}^{j-1} G^{-1}\left(\frac{R^{\alpha p_0 - s}}{2^{l(\alpha p_0 - s)}}\right), \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

3. 连续嵌入

本节旨在证明定义在度量测度空间上的分数阶 Orlicz-Sobolev 空间$W^{\alpha,\ {}_s}{}^{G}(X,d,\mu)$与分数阶 Hajłasz-Orlicz-Sobolev 空间 $M^{\beta,\ G}(X,d,\mu)$之间的若干连续嵌入结果，其中 G 是一个 Orlicz 函数。

定理 3.1. 设 G 是一个 Orlicz 函数，使得当 $x\leq 1$ 时，$G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p_0}}G^{-1}(y)$，且当 $x\geq 1$ 时，$G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p^0}}G^{-1}(y)$；并设 s、$\alpha>0$ 满足 $\alpha p_0>s$。那么，存在一个常数 $C>0$，使得任意 $u\in \dot{W}^{\alpha,\ {}_s}{}^{G}(X,d,\mu)$ 几乎处处等于某个连续函数 $\widetilde{u}$，并且有以下不等式

$$\sup_{0<d(x,y)<\frac{1}{3}}\frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)|}{d(x,y)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}}\leq C[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}. \tag{3.1}$$

证明。设 $z\in X$ 和 $0\leq R<\frac{1}{3}$。由于 $\alpha p_0>s$，不等式 (2.19) 表明，对所有 i，$j\in\mathbb{N}$ 满足 $0\leq i<j$的情形，我们有

$$\left|m_u\left(B\left(z,\frac{R}{2^i}\right)\right)-m_u\left(B\left(z,\frac{R}{2^j}\right)\right)\right|\leq \widetilde{A}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{R^{\alpha-\frac{s}{p_0}}}{2^{i\left(\alpha-\frac{s}{p_0}\right)}}, \tag{3.2}$$

其中 $\tilde{A}=G^{-1}(1)A/\left(1-2^{\frac{s}{p_0}-\alpha}\right)>0$。因此，我们得到 $\left\{m_u\left(B\left(z,\frac{R}{2^k}\right)\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$是一个柯西序列，故收敛。根据引理 2.7，我们有 $m_u\left(B\left(x,\ \frac{R}{2^k}\right)\right)$收敛到 $u(x)$ 对每个 $x\in X\backslash H$，其中 $\mu(H)=0$。

取 $i=0$ 在（3.2）中并令其趋于极限 $j\to\infty$，则对所有 $z\in X\backslash H$

$$|m_u(B(z,R))-u(z)|\leq \widetilde{A}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}R^{\alpha-\frac{s}{p_0}}. \tag{3.3}$$

设 $z,\ w\in X\backslash H$ 满足 $0<d\left(z,\ w\right)<\frac{1}{3}$且设 $R=d\left(z,\ w\right)$。那么，由（3.3）可得

$$\begin{aligned}|u(z)-u(w)|&\leq |u(z)-m_u(B(z,R))|+|u(w)-m_u(B(w,R))|\\&\quad+|m_u(B(z,R))-m_u(B(w,R))|\\&\leq 2\widetilde{A}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}\\&\quad+|m_u(B(z,R))-m_u(B(w,R))|.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由不等式（2.10）和（2.15）可得

$$\begin{aligned}&|m_u(B(z,R))-m_u(B(w,R))|\\&\leq G^{-1}\left(2\fint_{B(z,R)}G\left|u(x)-m_u(B(w,R))|\right)d\mu(x)\right)\\&\leq G^{-1}\left(2\fint_{B(z,R)}2bR^{-s}\int_{B(w,R)}G(|u(x)-u(y)|)d\mu(y)d\mu(x)\right)\\&\leq G^{-1}\left(4b^2R^{-2s}\int_{B(z,R)}\int_{B(w,R)}G(|u(x)-u(y)|)d\mu(y)d\mu(x)\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

然后，利用不等式（3.5）和（2.5），结合 $\gamma = d(x,y)^{\alpha} \in (0,1]$ 以及估计 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,w) + d(w,y) \le 3R$，可得

$$
\begin{aligned}
&|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\
&\le G^{-1}\left(4b^2R^{-2s}\int_{B(z,R)}\int_{B(w,R)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) d(x,y)^{\alpha p_0+s}\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right) \\
&\le G^{-1}\left(4b^2 3^{s+\alpha p_0} R^{\alpha p_0 - s}\int_{B(z,R)}\int_{B(w,R)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right) \\
&\le Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}} G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

where $B = \max\left\{\left(4b^2 3^{s+\alpha p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}, \left(4b^2 3^{s+\alpha p_0}\right)^{\frac{1}{p^0}}\right\}$.

如果 $[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G}(X,\ d,\ \mu) = 0$，不等式（3.1）显然成立。

我们假设$[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G}(X,\ d,\ \mu) \in (0,1]$,那么由不等式（3.6）和（2.5）可得

$$
\begin{aligned}
&|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\
&\le Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}} \\
&\times G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right)[u]^{p_0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right) \\
&\le Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \\
&\times G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right) \\
&\le G^{-1}(1)Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}.
\end{aligned}
$$

现在我们假设 $[u]_{W^{\alpha,\ s}\ G}(X,\ d,\ \mu) \ge 1$，那么由不等式（3.6）和（2.4）可得

$$
\begin{aligned}
&|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\
&\le Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}} \\
&\times G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left([u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right) \\
&\le Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}} \\
&\times G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(x,y)^{\alpha}}\right)[u]^{p^0}_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^s}\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}$$
$$\times G^{-1}\left(\iint_{d(x,y)<1} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)d\mu(x)}{d(x,y)^{s}}\right)$$
$$\leq G^{-1}(1)Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}.$$

然后，在其他情况下，我们有

$$|m_u(B(z,R))-m_u(B(w,R))|\leq G^{-1}(1)Bd(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}.$$

于是，由（3.4）可得

$$|u(z)-u(w)|\leq C[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}$$

对所有满足 $d(z,w)<\frac{1}{3}$ 的 $z,w\in X\backslash H$，其中 $C=2\widetilde{A}+G^{-1}(1)B$。

现在，我们将 u 扩展为一个函数 $\widetilde{u}$，该函数在 X 上连续并满足（3.1）。由于对所有 $x\in X$ 及所有 $r\in(0,\infty)$，$0<\mu(B(x,r))<\infty$，因此集合 $X\backslash H$ 在 X 中稠密。因此，对于 $x\in H$，存在一个收敛到 x 的 $x_n\in X\backslash H$。于是，

$$|u(x_n)-u(x_m)|\leq C[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(x_n,x_m)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}.$$

因此，$\{u(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个柯西序列，故其收敛。令 $\widetilde{u}(x)$ 表示其极限（该极限与收敛到 x 的序列的选取无关）。对于 $x\in X\backslash H$，我们令 $\widetilde{u}(x)=u(x)$。固定 $x,y\in X$，使得 $d(x,y)<\frac{1}{3}$，并取 $x_n,y_n\in X\backslash H$，使得 $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$。于是，

$$u(x_n)\to\widetilde{u}(x)\quad and\quad u(y_n)\to\widetilde{u}(y).$$

因此，

$$\begin{aligned}|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)|&\leq|u(x_n)-\widetilde{u}(x)|+|u(y_n)-\widetilde{u}(y)|+|u(x_n)-u(y_n)|\\&\leq|u(x_n)-\widetilde{u}(x)|+|u(y_n)-\widetilde{u}(y)|\\&\quad+C[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(x_n,y_n)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}.\end{aligned}$$

然后，令 $n\to\infty$ 趋于极限，我们得到

$$|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)|\leq C[u]_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}d(x,y)^{\alpha-\frac{s}{p_0}},$$

这就完成了证明。 □

定理 3.2. 设 G 是一个 Orlicz 函数，满足当$x\leq 1$时 $G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p_0}}G^{-1}(y)$，且当 $x\geq 1$时 $G^{-1}(xy)\leq x^{\frac{1}{p_0}}G^{-1}(y)$；再设 $s,\alpha>0$ 满足 $\alpha p_0>s$。那么存在一个正数常量 $\widetilde{C}$，使得对所有 $u\in W^{\alpha,\ s}{}^{G}(X,d,\mu)$，我们都有

$$\|\widetilde{u}\|_{C^{0,\alpha-\frac{s}{p_0}}(X,d)}\leq\widetilde{C}\|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)},\tag{3.7}$$

其中 $\widetilde{u}$ 是 u 的连续代表元。

证明。设 $z\in X$，则存在 $w\in B(z,\frac{1}{3})$，使得

$$G(|\widetilde{u}(w)|)\leq\frac{1}{\mu(B(z,\frac{1}{3}))}\int_{B(z,\frac{1}{3})}G(|u(y)|)\,d\mu(y).\tag{3.8}$$

若 $\|u\|_{L^G(X,\ \mu)}=0$，不等式 (3.7) 显然成立。
我们假设 $\|u\|_{L^G(X,\mu)}\ \in(0,1],$，那么由 (3.8) 和 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}
|\widetilde{u}(w)| &\leq G^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(z,\frac{1}{3}))}\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(|u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&\leq G^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(z,\frac{1}{3}))}\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)\|u\|^{p_0}_{L^G(X,\mu)}d\mu(y)\right)\\
&\leq G^{-1}\left(b3^s\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)\|u\|^{p_0}_{L^G(X,\mu)}d\mu(y)\right)\\
&\leq C_1\|u\|_{L^G(X,\mu)}G^{-1}\left(\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)d\mu(y)\right)\\
&\leq C_1G^{-1}(1)\|u\|_{L^G(X,\mu)}
\end{aligned}$$

其中 $C_1=\max\left\{b^{\frac{1}{p_0}}3^{\frac{s}{p_0}},b^{\frac{1}{p^0}}3^{\frac{s}{p^0}}\right\}$.

现在我们假设 $\|u\|_{L^G(X,\mu)}\ \geq 1$，那么由 (3.8) 和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}
|\widetilde{u}(w)| &\leq G^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(z,\frac{1}{3}))}\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(|u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&= G^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(z,\frac{1}{3}))}\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\|u\|_{L^G(X,\mu)}\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)d\mu(y)\right)\\
&\leq G^{-1}\left(b3^s\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)\|u\|^{p^0}_{L^G(X,\mu)}d\mu(y)\right)\\
&\leq C_1\|u\|_{L^G(X,\mu)}G^{-1}\left(\int_{B(z,\frac{1}{3})}G\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_{L^G(X,\mu)}}\right)d\mu(y)\right)\\
&\leq C_1G^{-1}(1)\|u\|_{L^G(X,\mu)}.
\end{aligned}$$

那么在这两种情况下，我们都有

$$|\widetilde{u}(w)|\leq C_2\|u\|_{L^G(X,\mu)},\tag{3.9}$$

其中 $C_2=C_1G^{-1}(1)$。然后，由定理3.1 和不等式（3.9），可得 e

$$\begin{aligned}
|\widetilde{u}(z)| &\leq |\widetilde{u}(z)-\widetilde{u}(w)|+|\widetilde{u}(w)|\\
&\leq C[u]_{W^{\alpha,G}_s(X,d,\mu)}d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}+C_2\|u\|_{L^G(X,\mu)}\\
&\leq C_3\|u\|_{W^{\alpha,G}_s(X,d,\mu)},
\end{aligned}$$

其中 $C_3=\max\left\{C3^{\frac{s}{p_0}-\alpha},C_2\right\}$。因此，

$$\|\widetilde{u}\|_{C(X,d)}\leq C_3\|u\|_{W^{\alpha,G}_s(X,d,\mu)}.$$

利用定理 3.1，我们可以控制 $\widetilde{u}$ 对所有满足 z，w 且 $d(z,\ w)<\frac{1}{3}$ 的 Hölder 半范数。现在，让我们估计完整的 Hölder 半范数。

设 z、$w \in X$ 满足 $d(z,w) \geq \frac{1}{3}$，则

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(z) - \widetilde{u}(w)| &\leq 2\,\|\widetilde{u}\|_{C(X,d)} \\ &= 2.3^{\alpha-\frac{s}{p_0}}\,\|\widetilde{u}\|_{C(X,d)}\,\frac{1}{3^{\alpha-\frac{s}{p_0}}} \\ &\leq 2.3^{\alpha-\frac{s}{p_0}} C_3 \|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} d(z,w)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

由定理3.1 和（3.10），可得

$$\sup_{x\neq y\in X} \frac{|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|}{d(x,y)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}} \leq C_4 \|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)},$$

其中 $C_4 = \max\left\{C, 2.3^{\alpha-\frac{s}{p_0}} C_3\right\}$.

因此，我们有

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}\|_{C^{0,\alpha-\frac{s}{p_0}}(X,d)} &= \|\widetilde{u}\|_{C(X,d)} + \sup_{x\neq y\in X} \frac{|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)|}{d(x,y)^{\alpha-\frac{s}{p_0}}} \\ &\leq C_3 \|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} + C_4 \|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)} \\ &= \widetilde{C} \|u\|_{W_s^{\alpha,G}(X,d,\mu)}, \end{aligned}$$

~其中 $C = C_3 + C_4$。
证明完毕。 □

定理 3.3. 设 $\alpha > 0, G$ 是 Orlicz 函数，使得当 $x \leq 1$ 时，$G^{-1}(xy) \leq x^{\frac{1}{p_0}} G^{-1}(y)$，且当 $x \geq 1$ 时，$G^{-1}(xy) \leq x^{\frac{1}{p_0}} G^{-1}(y)$；并假设 (X,d,μ) 是下 Ahlfors θ-正则空间，其中 $\theta \geq 0$ 且 $\alpha p_0 > \theta - s$。那么，连续嵌入 $W^{\alpha}{}_{,s}{}^{G}(X,d,\mu) \hookrightarrow M^{\beta,}{}^{G}(X,d,\mu)$ 成立，其中 $\beta = \alpha + (s-\theta)/p_0$。

证明. 设 $u \in W^{\alpha}{}_{,s}{}^{G}(X,d,\mu)$，并考虑以下集合

$$H = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} G\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right) \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s}} = +\infty \text{ or } |u(x)| = +\infty \right\}.$$

显然，$\mu(H) = 0$。设 $\xi, \eta \in X \backslash H$。
如果 $d(\xi,\ \eta) < \frac{1}{2}$，那么根据不等式（2.10）和（2.5），我们有

$$
\begin{aligned}
&|u(\xi)-u(\eta)|\\
&\le |u(\xi)-m_u(B(\xi,d(\xi,\eta)))|+|m_u(B(\xi,d(\xi,\eta)))-u(\eta)|\\
&\le G^{-1}\left(2\fint_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(|u(\xi)-u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&+G^{-1}\left(2\fint_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(|u(\eta)-u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&=G^{-1}\left(\frac{2}{\mu(B(\xi,d(\xi,\eta)))}\int_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(|u(\xi)-u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&+G^{-1}\left(\frac{2}{\mu(B(\xi,d(\xi,\eta)))}\int_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(|u(\eta)-u(y)|\right)d\mu(y)\right)\\
&\le G^{-1}\left(2bd(\xi,\eta)^{-\theta}\int_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\xi)-u(y)|}{d(\xi,y)^{\alpha}}\right)d(\xi,\eta)^{s+\alpha p_0}\frac{d\mu(y)}{d(\xi,y)^{s}}\right)\\
&+G^{-1}\left(2bd(\xi,\eta)^{-\theta}\int_{B(\eta,2d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\eta)-u(y)|}{d(\eta,y)^{\alpha}}\right)(2d(\xi,\eta))^{s+\alpha p_0}\frac{d\mu(y)}{d(\eta,y)^{s}}\right)\\
&\le G^{-1}\left(2bd(\xi,\eta)^{-\theta+s+\alpha p_0}\int_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\xi)-u(y)|}{d(\xi,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(\xi,y)^{s}}\right)\\
&+G^{-1}\left(2b.2^{s+\alpha p_0}d(\xi,\eta)^{-\theta+s+\alpha p_0}\int_{B(\eta,2d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\eta)-u(y)|}{d(\eta,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(\eta,y)^{s}}\right)\\
&\le CG^{-1}\left(d(\xi,\eta)^{-\theta+s+\alpha p_0}\int_{B(\xi,d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\xi)-u(y)|}{d(\xi,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(\xi,y)^{s}}\right)\\
&+CG^{-1}\left(d(\xi,\eta)^{-\theta+s+\alpha p_0}\int_{B(\eta,2d(\xi,\eta))} G\left(\frac{|u(\eta)-u(y)|}{d(\eta,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(\eta,y)^{s}}\right)\\
&\le Cd(\xi,\eta)^{\beta}(f(\xi)+f(\eta)),
\end{aligned}
$$

其中

$$C=\max\left\{\left(b.2^{s+\alpha p_0+1}\right)^{\frac{1}{p_0}},\left(b.2^{s+\alpha p_0+1}\right)^{\frac{1}{p^0}}\right\},$$

$$\beta=\alpha+(s-\theta)/p_0$$

and

$$f(x)=G^{-1}\left(\int_{B(x,1)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\right)\frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{s}}\right)\in L^{G}(X,\mu).$$

若 $d(\xi,\eta)\ge\frac{1}{2}$，则有

$$|u(\xi)-u(\eta)|\le|u(\xi)|+|u(\eta)|\le 2^{\beta}d(\xi,\eta)^{\beta}\left(|u(\xi)|+|u(\eta)|\right).$$

因此，由 $h(x) = \max\left\{Cf(x)\ 2^{\beta}|u(x)|\right\}$ 定义的函数是 u 的广义β-梯度，由此可得空间 $W^{\alpha,\ _s\ G}(X,d,\mu)$ 连续嵌入空间 $M^{\beta,\ G}(X,d,\mu)$。证明完毕。□

参考文献

[1] D. R. Adams 和 L. I. Hedberg。《函数空间与位势理论》，第 314 卷。施普林格出版社，柏林，1996年。[2] N. Aïssaoui。度量空间上的 Orlicz-Sobolev 空间的另一种扩展。《抽象与应用分析》，(1):1–26，2004年。[3] R. Alvarado、P. Górka 和 P. Hajłasz。 $M^{1,\ p}$ 空间的 Sobolev 嵌入等价于测度的下界。《泛函分析杂志》，279(7):108628，39，2020年。[4]E. Azroul、A. Benkirane、M. Shimi 和 M. Srati（2020年）：新型分数阶 Musielak-Sobolev 空间中的一类非局部问题。《应用分析》。数字对象标识符：10.1080/00036811.2020.1789601。[5] A. Björn 和 J. Björn。度量空间上的非线性位势理论，《EMS 数学丛书》第 17 卷。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2011年。[6]E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间漫游指南。《数学科学通报》，136(5):521–573，2012年。[7] J. Fernández Bonder 和 A. M. Salort。分数阶 Orlicz-Sobolev 空间。《泛函分析杂志》，277(2):333–367，2019年。[8] P. Górka 和 A. Słabuszewski。度量测度空间上的分数阶 Sobolev 空间的嵌入。《非线性分析》，221：论文编号 112867，23，2022年。[9]P. Hajłasz。任意度量空间上的 Sobolev 空间。《位势分析》，5(4):403–415，1996年。[10] P. Hajłasz。度量测度空间上的 Sobolev 空间。载于《流形、图和度量空间上的热核与分析》（巴黎，2002年），第 338 卷，第 173–218 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年。[11] P. Hajłasz 和 P. Koskela。Sobolev 度量 Poincaré，第 145 卷。《美国数学会回忆录》，2000年。[12] E. Hebey。黎曼流形上的 Sobolev 空间，《数学讲义》第 1635 卷。施普林格出版社，柏林，1996年。[13] T. Heikkinen。利用广义 Orlicz-Poincaré 不等式刻画 Orlicz-Sobolev 空间。《函数空间及其应用》，第 426067 号文章，15，2012年。[14] N. Karak。Hajłasz-besov 和 Hajłasz-Triebel-Lizorkin 空间的测度密度与嵌入。《数学分析及其应用杂志》，475(1):966–984，2019年。[15] N. Karak。测度的下界与 Sobolev、Besov 及 Triebel-Lizorkin 空间的嵌入。《数学新闻》，293(1):120–128，2020年。[16] M. A. Krasnosel'skii 和 J. B. Rutickii。凸函数与 Orlicz 空间。P. Noordhoff 有限公司，格罗宁根，1961年。[17] J. Martín 和 W. A. Ortiz。重排不变空间框架下分数阶 Hajłasz-Sobolev 空间的 Sobolev 嵌入。《位势分析》，第 1–14 页，2022年。[18] M. Mocanu。通过 Banach 函数空间对度量测度空间上的 Orlicz–Sobolev 空间进行推广。《复变量与椭圆方程》，55(1-3):253–267，2010年。

[19] L. Pick、A. Kufner、O. John 和 S. Fucík。《函数空间》。第 1 卷，德格鲁伊特非线性分析与应用丛书第 14 卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2013年。[20] H. Tuominen。《度量测度空间上的 Orlicz-Sobolev 空间》。芬兰科学学会数学论文集，第 (135) 卷：86，2004年。[21] D. Yang。《度量空间上 Hajłasz-Sobolev 空间的新刻画》。《中国科学》A 辑，46(5)：675–689，2003年。[22] X. Zhang 和 Q. Sun。《变阶分数阶 Hajłasz-Sobolev 空间的刻画》。https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.11612，2022年。[23] Y. Zhou。《分数阶 Sobolev 延拓与嵌入》。《美国数学会会刊》，367(2)：959–979，2015年。

Azeddine BAALAL 哈桑二世大学，数学与计算机科学系，艾因肖克学院，卡萨布兰卡，摩洛哥，电子邮箱：abaalal@gmail.com

Mohamed BERGHOUT 偏微分方程、代数与谱几何实验室，高等教育与培训学院，伊本·图费尔大学，邮政信箱242-盖尼特拉14000，盖尼特拉，摩洛哥，电子邮箱：Mohamed.berghout@uit.ac.ma；moh.berghout@gmail.com

EL-Houcine OUALI 哈桑二世大学，数学与计算机科学系，艾因肖克学院，卡萨布兰卡，摩洛哥，电子邮箱：oualihoucine4@gmail.com