arXiv:2305.00881v1 [math.AP] 1 May 2023

角动量通道中带 Hardy 势的分数阶拉普拉斯算子的基态表示

KRZYSZTOF BOGDAN 和 KONSTANTIN MERZ

Abstract. 受相对论原子研究的启发，我们考虑作用于以下形式函数的 Hardy 算子 $(-\Delta)^{\alpha/2} - \kappa|x|^{-\alpha}$ $u\,(|x|)\,|x|^{\ell}Y_{\ell,\,m}\,(x/|x|)$，其中函数定义在$L^2\,(\mathbb{R}^d)$上，且满足 $\kappa \geq 0$ 和 $\alpha \in (0,\ 2] \cap (0,\ d+2\ell)$。我们给出了相应半直线上的型的基态表示（定理 1.5）。证明中我们使用从属贝塞尔热核。

Contents

1. 引言与主要结果 1 2. 从属贝塞尔核 13 3. $\mathcal{E}_\zeta$ 17的基态变换 4. 型 $\mathcal{E}_\zeta$ 与 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ 20之间的联系 5. 定理 1.5 的证明 21 附录 A. 平面波展开 22 附录 B. $\alpha/2$-稳定从属关系稠密性 24 附录 C. 辅助计算 25 索引 29 参考文献 30

1. Introduction and main result

1.1. 经典 Hardy–Kato–Herbst 不等式与基态表示。令 $d \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$。对于 $\alpha \in (0, 2)$，我们考虑二次型

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(y)|^2 \nu(x, y)\, dy\, dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.1}$$

日期：2023年5月1日。2020年数学主题分类。主要分类：47D08、60J35。关键词和短语：Hardy 不等式、基态表示、分数阶拉普拉斯算子、角动量通道。第一作者获波兰国家科学中心资助项目 2017/27/B/ST1/01339资助。第二作者通过德国学术交流服务中心（DAAD）的 PRIME 计划获得资助，资金来自德国联邦教育与研究部（BMBF）。我们感谢 Volker Bach 和 Haruya Mizutani 提供的宝贵讨论。

其中

$$\nu(x,y) := \nu(x-y), \quad x,y \in \mathbb{R}^d,$$

with

$$\nu(z) := \mathcal{A}_{d,-\alpha}|z|^{-d-\alpha} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_{d,-\alpha} := \frac{2^\alpha \Gamma\big((d+\alpha)/2\big)}{\pi^{d/2}|\Gamma(-\alpha/2)|}. \tag{1.2}$$

还可以用算子半群表示 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$。其中

$$P^{(\alpha)}(t,x,y) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} d\xi\, \mathrm{e}^{-i\xi\cdot(x-y)-t|\xi|^\alpha}, \quad x,y\in\mathbb{R}^d,\ t>0, \tag{1.3}$$

我们有

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\langle f, (1-P^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot))f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

这里 $\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\underline{g(x)}\,dx$，并且，按照惯例，

$$(P^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} P^{(\alpha)}(t,x,y)f(y)\,dy, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

此外，利用傅里叶变换

$$\hat f(\xi) := (\mathcal{F}f)(\xi) := (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx,$$

初始的定义于 $L^1(\mathbb{R}^d)$上，并扩张为 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的酉算子，我们得 et

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat f(\xi)|^2|\xi|^\alpha\,d\xi \quad \text{for all } f\in H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d), \tag{1.5}$$

采用索ობ列夫空间的通常定义

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\hat f(\xi)|^2\,d\xi<\infty\right\}, \quad s\ge 0. \tag{1.6}$$

我们还考虑相应的齐次索ობ列夫空间 $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$，其中 $s\ge 0$，其定义为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$在 $\||\xi|^s\,\hat f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$下的完备化。当 $\alpha=2$时，我们记

$$\mathcal{E}^{(2)}[f] := \langle \nabla f, \nabla f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f\in \dot H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.7}$$

由于 $D := -i\nabla$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$中的每个分量都是定义域为 $H^1(\mathbb{R}^d)$的自伴算子，且它们彼此对易，谱定理保证 $|D|^\alpha = (-\Delta)^{\alpha/2}$ 的定义域为$H^\alpha(\mathbb{R}^d)$，也为自伴算子。此外，$|D|^\alpha$ 与二次型 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$对应的弗里德里希斯扩张一致，该二次型最初定义在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$上。特别地，(1.3)中的核就是$\mathrm{e}^{-t|D|^\alpha}$的积分核。

在此处及下文中，我们始终假设 $\alpha\in(0,2]$。如果 $\alpha<d$（这仅对 $d=1$ 和 2 是一项额外限制），那么 $\mathbb{R}^d$ 中的经典 Hardy–Kato–Herbst 不等式（简称 Hardy 不等式）断言，下界

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] \ge \kappa\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|^2}{|x|^\alpha}\,dx \tag{1.8}$$

对所有 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 都成立，当且仅当耦合常数 κ 满足 $\kappa \le \kappa_{\mathrm{c}}^{(\alpha)}$，其中临界耦合常数为

$$\kappa_{\mathrm{c}}^{(\alpha)} := \frac{2^\alpha \Gamma\left((d+\alpha)/4\right)^2}{\Gamma\left((d-\alpha)/4\right)^2}. \tag{1.9}$$

特别地，$\kappa_{\mathrm{c}}^{(2)} = (d-2)^2/4$。由于当 $s \in (0, d/2)$ 时，$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 中稠密（例如参见 [2, 定理 1.70]），Hardy不等式 (1.8) 对所有 $\kappa \le \kappa_{\mathrm{c}}^{(\alpha)}$和$f \in \dot{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ 均成立。事实上，若 $0 < \alpha < \min\{2, d\}$，则 (1.8) 对 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 成立。参考文献例如见 [29, 30, 39, 32, 40, 58, 20, 25, 5]。

证明 (1.8) 的诸多方法之一，采用了通常所称的基态表示，即这一分解

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{(\alpha)}[|x|^{-\sigma}\cdot f] = {} & \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{d-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-\alpha-\sigma}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{||x|^{-\sigma}\cdot f(x)|^2}{|x|^\alpha}\,dx \\ & + \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)-f(y)|^2\,\nu(x-y)(|x||y|)^{-\sigma}\,dx\,dy\end{aligned} \tag{1.10a}$$

if $\alpha < \min\{2, d\}$ and

$$\mathcal{E}^{(2)}[|x|^{-\sigma}\cdot f] = \sigma(d-\sigma-2)\int_{\mathbb{R}^d} \frac{||x|^{-\sigma}\cdot f(x)|^2}{|x|^2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2\cdot|x|^{-2\sigma}\,dx \tag{1.10b}$$

若 $\alpha = 2 < d$。此处 $\sigma \in [0, d-\alpha]$ 和 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$。事实上，对于 $\alpha < d$，由 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 在 $\dot{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性（例如参见 [2, 定理 1.70]），公式 (1.10a)–(1.10b) 对所有 $f \in \dot{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ 均成立；例如参见 [25, 定理 1.2] 或 [14, 引理 4.4]。对于$\alpha = 2$，表示式 (1.10b) 早已为人所知；例如参见 [53, 第 169] 页，其中给出了关于 $d = 3$ 的教材式论述。对于 $d = 3$ 和 $\alpha = 1$，Michael Loss 曾推导出该结果（未发表的笔记，参见 [20, 第 935] 页）；而一般情形由 Frank、Lieb 和 Seiringer 证明，见 [20, 命题 4.1]；Bogdan、Dyda 和 Kim 也用不同方法证明了这一点，见 [5, 命题 5],，他们还证明了 (1.10a) 对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 均成立。

注意，(1.10a)–(1.10b) 右侧第一项的前置因子，视为 $\sigma \in [0, d-\alpha]$ 的函数时，关于 $\sigma = (d-\alpha)/2$ 对称；当 $\sigma \in [0,(d-\alpha)/2]$ 时严格递增，在 $\sigma = (d-\alpha)/2$ 处达到最大值 $\kappa_c^{(\alpha)}$，并在 $\sigma = 0$ 处为零。由于当 $f = |x|^{-\sigma}$ 时，(1.10a)–(1.10b) 右侧的第二项为零，我们称径向函数 $|x|^{-\sigma}$ 是 $|D|^\alpha - \Phi(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 的广义基态，尽管这种说法偏离了标准术语，因为 $|x|^{-\sigma} \notin L^2(\mathbb{R}^d)$。

正如我们提到的，(1.10a)–(1.10b) 给出了 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 的 Hardy 不等式 (1.8) 的证明。它们还表明，(1.8) 中的常数 $\kappa = \kappa_{\mathrm{c}}$ 是最优的；参见 [20, 注 4.2] 或 [8]。此外，(1.10a)–(1.10b) 揭示，对于两边均有限的非零函数，(1.8) 中的等号不可能成立，参见例如 [58,第 3] 节。

注 1.1. 基态表示 (1.10a)–(1.10b) 将 $|D|^\alpha - \Phi(\sigma)/|x|^\alpha$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的二次型表示为带权 L^2中 $|D|^\alpha$ 的二次型

空间，其权重为 $|x|^{-\sigma}$。因此，敏锐的读者或许可以在 (1.10a)–(1.10b) 中辨认出对 $|D|^{\alpha}$ 的 Doob 条件化和 Schr¨odinger 扰动；参见 [18, 5]。

1.2. 角动量分解。我们的目标是分析以下形式

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] - \kappa \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{\alpha}}\, dx, \tag{1.11}$$

通过考虑算子 $|D|^{\alpha}$ 和 $|x|^{-\alpha}$的球对称性，即它们与旋转生成元（有时称为角动量算子）对易，因而也与其平方——作用于 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$上的Laplace–Beltrami算子——对易这一事实。后者是一个非负算子，具有纯离散谱，其标准正交特征基由球谐函数构成。球对称性使我们能够将 $|D|^{\alpha}$ 和 $|x|^{-\alpha}$ 分解为算子的直和，其中每个算子都作用于径向函数与一个球谐函数的乘积。

本文的主要结果是下文定理 1.5 中给出的基态表示，它针对固定角动量通道中的函数 f，表示二次型 (1.11)。为陈述该定理，我们先明确相关概念。对于 $d \in \mathbb{N}$, 我们考虑 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$中、位于（$d-1$）维单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$上的（超）球谐函数标准正交基。对于 $d = 1$, $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$, $L^2(\mathbb{S}^0)$配备计数测度，而球谐函数就是 $Y_0(\omega) = 2^{-1/2}$ 和 $Y_1(\omega) = 2^{-1/2}\omega$,$\omega \in \{-1, +1\}$。当 $d = 2$时，它们由满足 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 且 ω 属于区间 $[0, 2\pi)$的 $\mathrm{e}^{\pm i\ell\omega}/\sqrt{2\pi}$ 构成，我们将其与 $\mathbb{S}^1$等同。若 $d \geq 3$，则球谐函数为$\{Y_{\ell,m}\}_{\ell\in L_d, m\in M_d,\ell}$，其中 $L_d := \mathbb{N}_0$ 且$M_{3,\ell} := \{-\ell, -\ell + 1, ..., \ell - 1, \ell\}$, $M_{d,\ell} := \{(m_1, ..., m_{d-2}) \in \mathbb{Z}^{d-2} : |m_{d-2}| \leq \cdots \leq m_2 \leq m_1 \leq \ell\}$，其中 $d \geq 4$；例如参见 [1, 第 34] 页。我们将记号扩展至 $d = 2$，令 $L_2 = \mathbb{N}_0$, $M_{2,0} = \{0\}$, $M_{2,\ell} = \{-1, +1\}$（对于 $\ell \in \mathbb{N}$），并令$Y_{\ell,m}(\omega) := \mathrm{e}^{im\ell\omega}/\sqrt{2\pi}$，其中 $\omega \in [0, 2\pi)$、$\ell \in L_2$和$m \in M_{2,\ell}$。最后，我们令 $L_1 = \{0, 1\}$ 和$M_{1,0} = M_{1,1} = \{0\}$，仅用于枚举 $Y_0 =: Y_{0,0}$ 和 $Y_1 =: Y_{1,0}$（对于 $d = 1$）。下文中，若不会引起混淆，我们用 M_ℓ 代替$M_{d,\ell}$。

对于 $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ 上几乎处处（$a.e.$）定义的博雷尔函数 $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$，其中 $\ell \in L_d$, $m \in M_\ell$，我们令

$$[u]_{\ell,m}(x) := u(|x|)|x|^{\ell} Y_{\ell,m}(\omega_x), \quad \text{for } a.e.\ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.12}$$

其中 $\omega_x = x/|x|$ 对于 $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$。下文中，我们通常省略副词 $a.e.$，因为我们主要关注几乎处处相等的函数等价类 $a.e.$，特别是 $\mathbb{R}^d$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的平方可积“函数”。这里，按照惯例，若未具体说明参考测度，我们指勒贝格测度。注意，$[1]_{\ell, m}(x)$ 是（正则）实球谐函数$|x|^{\ell} Y_{\ell,\ m}(\omega_x)$——它们确实是调和函数，$\Delta[1]_{\ell,\ m} = 0$。使用极坐标可观察到

$$\|[u]_{\ell,m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell}dr)}, \tag{1.13}$$

其中，$r^{d-1+2\ell}dr$ 表示 L^2 空间在 $\mathbb{R}_+$上的参考测度。令

$$V_{\ell,m} := \{[u]_{\ell,m} : u \in L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell}dr)\}, \quad \ell \in L_d,\ m \in M_\ell, \tag{1.14}$$

and

$$V_\ell := \operatorname{span}\{[u]_{\ell,m} : u \in L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell}dr),\ m \in M_\ell\}, \quad \ell \in L_d. \tag{1.15}$$

显然，$V_{\ell,\ m} \subset V_\ell \subset L^2(\mathbb{R}^d)$。我们称 V_ℓ 为角动量通道，并称 V_ℓ 中的函数具有角动量 ℓ。例如，对于 $d = 1$，V_0 是偶函数，而 V_1 是 $L^2(\mathbb{R}^1)$中的奇函数。我们不会为$V_{\ell,\ m}$引入专门术语，因为 $m \in M_\ell$ 的作用相当有限：$\mathcal{E}^{(\alpha)}[[u]_{\ell,m}]$ 和$\int_{\mathbb{R}^d} |[u]_{\ell,\ m}(x)|^2|x|^{-\alpha}\,dx$ 的取值与 $m \in M_\ell$无关，见下文注释1.6。

由于球谐函数构成 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 的标准正交基，我们得到

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{\ell\in L_d} V_\ell \qquad \text{and} \qquad V_\ell = \bigoplus_{m\in M_\ell} V_{\ell,m}. \tag{1.16}$$

因此，对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，存在唯一的坐标函数或系数$f_{\ell,\ m} \in V_{\ell,\ m}$, $\ell \in L_d$, $m \in M_\ell$，使得

$$f = \sum_{\ell\in L_d}\sum_{m\in M_\ell} f_{\ell,m}, \qquad \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\ell\in L_d}\sum_{m\in M_\ell} \|f_{\ell,m}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.17}$$

根据 (1.12) 和 (1.13)，我们有

$$f_{\ell,m} = [u_{\ell,m}]_{\ell,m}, \tag{1.18}$$

其中

$$u_{\ell,m}(r) = r^{-\ell}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega\,\overline{Y_{\ell,m}(\omega)}\, f_{\ell,m}(r\omega). \tag{1.19}$$

此外，$\|f_{\ell,\ m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_{\ell,\ m}\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\ r^{d-1+2\ell}dr)} < \infty$。读者可以利用 (1.18) 对 (1.17) 重新表述。下面的引理给出了 $\mathcal{E}^{(\alpha)}[f]$ 和与球对称乘法算子（例如 $|x|^{-\alpha}$）相对应的二次型的角动量分解。它表明，这些二次型可以分解为与不同空间 $V_{\ell,\ m}$ 相对应的二次型。

引理 1.2. 设 $d\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,2]$,和 $f\in H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$ 具有展开式 (1.17)。那么，

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[f] = \sum_{\ell\in L_d}\sum_{m\in M_\ell} \mathcal{E}^{(\alpha)}[f_{\ell,m}] \quad and \tag{1.20a}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^\alpha}\,dx = \sum_{\ell\in L_d}\sum_{m\in M_\ell}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f_{\ell,m}(x)|^2}{|x|^\alpha}\,dx. \tag{1.20b}$$

该结论可由 $\{Y_{\ell,m}\}_{\ell\in L_d, m\in M_\ell}$ 在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 中的正交归一性轻易推出，另见下文引理 4.1。

众所周知，当 $d = 1$ 或 $d = 2$ 时，拉普拉斯算子不存在（非平凡的）Hardy 不等式。然而，角动量的存在使得能够为 $\alpha < d + 2\ell$ 证明非平凡的 Hardy 不等式。因此，我们将讨论

(i) 当 $d = 1$ 和 $\ell = 0$时，$\alpha \in (0, 1)$；(ii) 当 $d = 2$ 和 $\ell = 0$时，$\alpha \in (0,2)$；(iii) 当 $d = \ell = 1$时，$\alpha \in (0, 2]$，或当 $d = 2$ 和 $\ell \geq 1$时，或当 $d \geq 3$ 和 $\ell \geq 0$时。

以下定义提出了一种便于使用的耦合常数参数化方式 κ，适用于处理角动量通道 V_ℓ中的广义基态。

D定义 1.3. 令 $d \in \mathbb{N}$和 $\ell \in L_d$。对于 $\alpha \in (0, \min\{2, d+2\ell\})$，我们定义ne

$$\Phi^{(\alpha)}_{d,\ell}(\sigma) := \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\ell+\sigma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+\ell-\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+\ell-\sigma-\alpha}{2}\right)}, \quad \sigma \in (-\ell-\alpha, d+\ell), \tag{1.21}$$

并考虑中点 $\sigma = (d-\alpha)/2$，令

$$\kappa^{(\alpha)}_{\mathrm{c}}(\ell) := \Phi^{(\alpha)}_{d,\ell}\left(\frac{d-\alpha}{2}\right) = \frac{2^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{4}(d+2\ell+\alpha)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}(d+2\ell-\alpha)\right)^2}. \tag{1.22}$$

我们还定义，对于 $\alpha = 2 < d+2\ell$，

$$\Phi^{(2)}_{d,\ell}(\sigma) := (\ell+\sigma)(d+\ell-\sigma-2), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1.23}$$

并令 $\kappa^{(2)}_{\mathrm{c}}(\ell) := (d-2+2\ell)^2/4$。

以下给出映射 $\sigma \mapsto \Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma)$ 的一些性质，同时考虑情形 $\alpha = 2$ 和 $\alpha < 2$ 之间的定性差异。

命题 1.4。 设 $d \in \mathbb{N}, \ell \in L_d, \alpha \in (0,2] \cap (0, d+2\ell)$，$S = \alpha$若 $\alpha < 2$，且 $S = \infty$若 $\alpha = 2$。设 $\sigma \in (-\ell - S, d-\alpha+\ell+S)$。则 $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma) = \Phi^{(\alpha)}_{d+2\ell,0}(\sigma+\ell)$。函数$\sigma \mapsto \Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma)$ 关于 $\sigma = (d-\alpha)/2$ 对称，在 $\sigma \le (d-\alpha)/2$ 上严格递增，并满足 $\lim_{\sigma \searrow -\ell - S} \Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma) = -\infty$, $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(-\ell) = 0$, $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,((d-\alpha)/2) = \kappa^{(\alpha)}_{\mathrm{c}}(\ell)$。此外，对于 $\ell, \ell' \in L_d$，满足 $\ell > \ell'$ 和 $\sigma \in (-\ell' - S,\ (d-\alpha)/2]$，

$$\Phi^{(\alpha)}_{d,\ell}(\sigma) > \Phi^{(\alpha)}_{d,\ell'}(\sigma). \tag{1.24}$$

注意，$\kappa^{(\alpha)}_{\mathrm{c}} = \kappa^{(\alpha)}_{\mathrm{c}}(0)$ 和 $\Phi^{(\alpha)}_{d\,0}\,,(\sigma)$ 是 (1.10a)–(1.10b) 右端第一项中的前因子。

证明。由于 $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma) = \Phi^{(\alpha)}_{d+2\ell,\,0}(\sigma+\ell)$，且右端已得到充分研究，例如见[20, 引理 3.2], [5, 第 237] 页和 [37, 第 1004—1005],页，因此我们只证明 (1.24) 中当 $\alpha < 2$ 时的单调性结论。为此，我们利用 $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}\,,(\sigma) = \Phi^{(\alpha)}_{d+2\ell,\,0}(\sigma+\ell)$，以及函数 $\sigma \mapsto \Phi^{(\alpha)}_{d\,0}\,,(\sigma)$ 和 $d \mapsto \Phi^{(\alpha)}_{d\,0}\,,(\sigma)$ 对所有 $-\alpha < \sigma \le (d-\alpha)/2$ 的单调性。如上所述，前一个单调性性质是众所周知的。要证明后一个性质，只需证明对于任意 $a > 0$，函数 $(a,\infty) \ni x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)}$ 是递增的。但这可由以下结论推出

$$\frac{d}{dx}\left(\log\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)}\right) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x-a)}{\Gamma(x-a)} = \sum_{k\ge 0}\left(\frac{1}{x-a+k} - \frac{1}{x+k}\right) > 0,$$

其中我们使用了 [15, (5.7.6)]。至此，命题 1.4 的证明完成。 □

由于我们将 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0, 2] \cap (0, d + 2\ell)$ 视为已知，因此在不会引起混淆时，分别用 $\mathcal{E}, P(t, x, y)$, $\Phi_\ell(\sigma)$, $\kappa_c(\ell)$ 和 κ_c 代替 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$, $P_{(\alpha)}(t, x, y)$, $\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}(\sigma)$, $\kappa_c^{(\alpha)}(\ell)$ 和 $\kappa_c^{(\alpha)}$。当 $\ell = 0$ 时，我们进一步简写 $\Phi(\sigma) := \Phi_0(\sigma)$。

1.3. 主要结果。命题 1.4 特别说明，对于每个 $\kappa \le \kappa_c(\ell)$，都存在唯一的数 $\sigma \le (d - \alpha)/2$，使得 $\kappa = \Phi_\ell(\sigma)$。因此，从现在起，我们主要考虑以下情形，而不再考虑 (1.11)：

$$\mathcal{E}[f] - \Phi_\ell(\sigma) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^\alpha}\, dx, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \tag{1.25}$$

其中 $\ell \in L_d$, $\alpha \in (0, 2] \cap (0, d + 2\ell)$，且 $\sigma \le (d - \alpha)/2$。事实上，尽管 $\sigma < -\ell$（对应于 $\Phi_\ell(\sigma) < 0$）的情形也很有趣（例如参见 [37, 12]），但我们将只讨论吸引型耦合常数，即正的（或者更准确地说，非排斥型的，即非负的）耦合常数；更确切地说，从现在起我们假设 $\sigma \in [-\ell, (d - \alpha)/2]$，也就是说，$\Phi_\ell(\sigma) \in [0, \kappa_c(\ell)]$。

我们的主要结果是以下针对 $V_{\ell,m}$ 中二次型 (1.25) 的基态表示，或称 Hardy恒等式。

定理 1.5。令 $d \in \mathbb{N}$, $\ell \in L_d$, $m \in M_\ell$, $\alpha \in (0, 2] \cap (0, d+2\ell)$、$\sigma \in [-\ell, (d-\alpha)/2]$、$h(r) := r^{-\ell-\sigma}$，以及 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$。对于 $\alpha < 2$，我们令 $\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s) > 0$ 如下面命题2.4中所定义。于是

$$\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s) = (rs)^{-\ell} \iint_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)} Y_{\ell,m}(\omega_y) \nu(r\omega_x, s\omega_y)\, d\omega_x\, d\omega_y \tag{1.26}$$

并且我们令

$$\mathcal{I}_{\ell,\sigma}[u] := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} |u(r) - u(s)|^2\, \nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s)\, h(r)h(s)\, (rs)^{d-1+2\ell}\, dr\, ds. \tag{1.27a}$$

对于 $\alpha = 2$，我们令

$$\mathcal{I}_{\ell,\sigma}[u] := \int_{\mathbb{R}_+} |u'(r)|^2 h(r)^2 r^{d-1+2\ell} dr. \tag{1.27b}$$

然后，

$$\mathcal{E}[[h \cdot u]_{\ell,m}] = \mathcal{I}_{\ell,\sigma}[u] + \Phi_\ell(\sigma) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|h(r) \cdot u(r)|^2}{r^\alpha}\, r^{d-1+2\ell}\, dr. \tag{1.28}$$

注释1.6. (1) 由于当 u 为常数时，(1.31) 右端的积分为零，结合 (1.28)，我们将该函数

$$H(x) := [h]_{\ell,m}(x) = |x|^{-\sigma} Y_{\ell,m}(\omega_x) \tag{1.29}$$

$|D|^\alpha - \Phi_\ell(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 限制在 V_ℓ 上的一个广义基态，参见 (1.10) 后关于广义基态的讨论。

(2) (1.28) 的右侧是定义在 $\mathbb{R}_+$上的两个型之和，但同构$[\cdot]_{\ell,\ m}$ 将 (1.28) 转化为关于定义在$V_{\ell,\ m}$上的型的陈述。事实上，由 (1.12) 可得，

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|h(r)\cdot u(r)|^2}{r^\alpha}\, r^{d-1+2\ell}\, dr = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|[h\cdot u]_{\ell,m}(x)|^2}{|x|^\alpha}\, dx. \tag{1.30}$$

此外，由 (1.26)，对于 $\alpha<2$，我们有

$$\mathcal{I}_{\ell,\sigma}[u] = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \nu(x,y)\cdot |u(|x|)-u(|y|)|^2\ \overline{H(x)}\, H(y)\, dx\, dy, \tag{1.31}$$

并且该积分绝对收敛，因为 $2\sigma<d$ 和 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$。若 $\alpha=2$，则

$$\mathcal{I}_{\ell,\sigma}[u] = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(|x|)|^2\cdot |H(x)|^2\ dx. \tag{1.32}$$

(3) 命题2.4 给出了$\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s)$ 的显式公式和精确界。有趣的是，由 [15, (15.4.7)、(15.4.9)],

$$\nu_0(r,s) = \mathcal{A}_{1,-\alpha}\left(|r-s|^{-1-\alpha}+(r+s)^{-1-\alpha}\right) \quad \text{and} \tag{1.33a}$$

$$\nu_1(r,s) = \mathcal{A}_{3,-\alpha}\cdot\frac{2\pi}{1+\alpha}\cdot\frac{|r-s|^{-1-\alpha}-(r+s)^{-1-\alpha}}{rs}. \tag{1.33b}$$

注意，$(d-1)/2+\ell=0$ 对应于具有 $\ell=0$ 的 $d=1$ （作用于对称函数的从属布朗运动），而 $(d-1)/2+\ell=1$ 对应于具有 $\ell=1$ 的 $d=1$（作用于反对称函数的从属布朗运动），并对应于具有 $\ell=0$ 的 $d=3$ （作用于径向函数的三维从属布朗运动）。

(4) 当 $\sigma=-\ell$ 时，我们有 $\mathcal{E}[[u]_{\ell,m}]=\mathcal{I}_{\ell,\ -\ell}[u]$；参见 (2.23) 和命题 4.3。
(5) 通过稠密性论证，(1.27) 和 (1.28) 可推广到所有满足 $[h\cdot u]_{\ell,m}\in\dot{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ 的 u 上的函数 $\mathbb{R}_+$，前提是 $\alpha<d$。若 $r^{\frac{d-1}{2}-\sigma}u(r)\in L^2(\mathbb{R}_+,dr)$，则这等价于 $\int_0^\infty k^\alpha\left|\mathcal{F}_\ell\left(r^{\frac{d-1}{2}-\sigma}u\right)\right|^2 dk<\infty$，其中傅里叶–贝塞尔变换 $\mathcal{F}_\ell$ 在 (4.1) 中引入。另见 (1.10) 后的段落以及下文的引理 4.1。
(6) 从定理 1.5 的证明可知，对于 $\alpha<2$，(1.28) 对 $u\in L^2(\mathbb{R}_+,r^{d-1+2\ell}dr)$ 也成立，见定理 3.2 和 [5, 命题 5]。
(7) Jakubowski 和 Maciocha [36] 最近证明了在 $\mathbb{R}_+$ 上、带 Hardy 势且满足 $(\mathbb{R}_+)^c$ 上的狄利克雷边界条件的分数阶拉普拉斯算子的基态表示。与我们的分析一样，他们使用了 [5], 的抽象结果；但与我们的方法不同，他们无法依赖从属关系，因为狄利克雷分数阶拉普拉斯算子在形式意义上仅被分数阶狄利克雷拉普拉斯算子从上方控制，参见例如 [19,引理 6.4]。特别是，[36] 的结果与我们的结果并不等价，这一点通过比较 [36, (1.8)]中的耦合常数参数化方式与我们在 (1.21) 中的参数化方式即可看出。

定理 1.5 的证明见第 5 节。根据引理 1.2，定理 1.5 得出以下推论，即一个角动量合成。

推论 1.7. 设 $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,2]$, 和 $\mathcal{I}$ 如 (1.27) 中所述。设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 具有 (1.17) 中的 L^2-展开，其系数为 $f_{\ell,\ m} = [h_{\ell,m} \cdot u_{\ell,m}]_{\ell,\ m}$，其中 $\ell \in L_d$,$m \in M_\ell$, $\alpha \in (0, d+2\ell)$，$\sigma_{\ell,\ m} \in [-\ell, (d-\alpha)/2]$，且 $h_{\ell,\ m}(r) := r^{-\ell-\sigma_{\ell,\ m}}$。那么

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[f] &= \sum_{\ell\in L_d, m\in M_\ell} \mathcal{E}[f_{\ell,m}] \\ &= \sum_{\ell\in L_d, m\in M_\ell} \left(\mathcal{I}_{\ell,\sigma_{\ell,m}}[u_{\ell,m}] + \Phi_\ell(\sigma_{\ell,m}) \int_{\mathbb{R}^d} dx\, \frac{|f_{\ell,m}(x)|^2}{|x|^\alpha} \right).\end{aligned} \tag{1.34}$$

备注 1.8. 推论 1.7 对所有 $f \in \dot{H}^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$ 在 $\alpha < d$ 时仍然成立。若 $\alpha < 2$，则它对所有 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 也成立。请参见注释1.6(4)和(5)。

本引言其余部分安排如下。接下来的三个小节将阐述定理 1.5 的动机。因此，在第 1.4 节中，我们强调，如果另外满足 $f \in \bigoplus_{\ell' \geq \ell} V_{\ell'}$，则 (1.8) 对 κ 在更大的区间 $(-\infty, \kappa_{\mathrm{c}}(\ell)]$, 内也成立。在第 1.5 节中，我们将定理 1.5 中的基态表示与 (1.10a)–(1.10b) 中的表示进行比较。在第 1.6 节中，我们指出定理 1.5 的潜在应用。在第 1.7 节中，我们概述定理 1.5 的证明。引言最后是第 1.8 节，我们将在其中概述本文其余部分，并汇总常用符号。

1.4. 具有角向振荡的改进 Hardy 不等式函数。鉴于前面的讨论，自然会考虑 $V_{\ell,m}$ 中的函数所满足的 (1.8)。对于 $\ell = 0$，这类函数是径向函数，但当 $\ell > 0$ 时具有角向振荡行为，从而使 (1.8) 得到改进。当 $\alpha = 2$ 时，这一点很容易看出。回顾一下，$\{Y_{\ell,m}\}_{\ell,m}$ 是 Laplace–Beltrami算子 $-\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 的特征函数，对应的特征值为 $\ell(\ell + d - 2)$。利用球坐标下拉普拉斯算子的表示形式以及 Hardy 的原始不等式，即 $\int_0^\infty |v'(r)|^2\, dr \geq 4^{-1} \int_0^\infty |v(r)|^2 r^{-2}\, dr$，可得

$$\begin{aligned}&\langle [u]_{\ell,m}, (-\Delta)[u]_{\ell,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad = \left\langle Uu, \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(d-1)(d-3) + 4\ell(\ell+d-2)}{4r^2} \right) Uu \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dr)} \\ &\quad \geq \kappa_{\mathrm{c}}(\ell) \int_0^\infty \frac{|(Uu)(r)|^2}{r^2}\, dr = \kappa_{\mathrm{c}}(\ell) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|[u]_{\ell,m}(x)|^2}{|x|^2}\, dx.\end{aligned} \tag{1.35}$$

这里 $U\colon\ L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell} dr) \to L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ 是酉算子

$$L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell} dr) \ni u \mapsto (Uu)(r) = r^{(d-1+2\ell)/2} u(r) \in L^2(\mathbb{R}_+, dr). \tag{1.36}$$

更一般地，对于 $\ell \in L_d$ 和 $\alpha \in (0, d)$，改进的 Hardy 不等式

$$\mathcal{E}[[u]_{\ell,m}] \geq \kappa \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|[u]_{\ell,m}(x)|^2}{|x|^\alpha}\, dx \tag{1.37}$$

当且仅当 $\kappa \leq \kappa_{\mathrm{c}}(\ell)$ 时，对所有 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 都成立。尽管 (1.35) 和 (1.37) 对于 $\ell = 0$ 仅仅是确认 $\kappa \leq \kappa_c$ 和径向函数情形下的 (1.8)，但它们的结论更强

当 $\kappa_c(\ell) > \kappa_c$ 时，因为 $\ell > 0$ （见命题 1.4）。对于 $d = 3$ 和 $\alpha = 1$，Le Yaouanc、Oliver 和 Raynal 首先证明了不等式 (1.37) [43, 第 VI 节], 而一般情形则由 Yafaev 证明 [58, (2.4)、(2.26)]。我们注意到，他的证明适用于所有 $\alpha \in (0, d)$。由于定理 1.5 的证明基于 $e^{t\Delta}$ 的从属关系，我们将讨论范围限定为 $\alpha \in (0, 2]$, 实际上限定为 $\alpha \in (0, 2] \cap (0, d + 2\ell)$。顺便提及，对于 $d \in \{1, 2\}$ 和 $\ell = 1$，此区间包含 $\alpha \in (0, d)$。

1.5. 基态表示的比较。我们来比较 (1.10a)–(1.10b) 中的基态表示与定理 1.5 和推论 1.7 中的表示。为简洁起见，我们只考虑 $\alpha \in (0, 2)$。

(1) 对于 $\ell = 0$，两种表示一致。事实上，设 $\sigma \in [0,(d - \alpha)/2]$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，且 $f(x) = |\mathbb{S}^{d-1}|^{-1/2} u(|x|)|x|^{-\sigma}$。由定理 1.5,

$$\mathcal{E}[f] = \Phi_0(\sigma) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^2}{|x|^\alpha}\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} dr\, ds\, (rs)^{d-1-\sigma} \nu_{\frac{d-1}{2}}(r, s) |u(r) - u(s)|^2,$$

事实上，由 (1.26) 可知，最右侧的积分等于 (1.10a) 中最右侧的积分。因此，我们主要关注对 $\ell > 0$ 的分析。

(2) 设 $f = \sum_{\ell,m} f_{\ell,m}$，如 (1.17) 所示。于是，推论 1.7 中的基态表示以及由引理 1.2 得到的 (1.10) 中的基态表示，都会分解为对应于不同空间 $V_{\ell,m}$ 的基态表示。为了更详细地比较由 (1.10a) 或 (1.28) 以及 (1.34) 得到的$\mathcal{E}[f]$表示，我们记录如下:

$$(rs)^{-\ell} \int_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_x\, d\omega_y\, \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)} Y_{\ell',m'}(\omega_y) \nu(r\omega_x - s\omega_y) = \nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

根据定理 1.5 中 $\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}$的表达式及球对称性， ℓ、 $\ell' \in L_d$、 $m \in M_\ell$和 $m' \in M_{\ell'}$ 成立；参见推论 A.2。这里，$\delta_{\ell,\ell'}$ 表示克罗内克 delta。因此，若$f_{\ell,m}(x) = u_{\ell,m}(|x|)|x|^{-\sigma} Y_{\ell,m}(\omega_x)$，则基态表示 (1.10a) 等价于

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}[f] - \Phi(\sigma) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, |x|^{-\alpha}\, dx \qquad (1.38)\\
&= \sum_{\ell,m;\ell',m'} \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} dr\, ds\, (rs)^{d-1-\sigma} \int_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_x\, d\omega_y\, \nu(r\omega_x - s\omega_y)\\
&\quad \times \Big[\overline{u_{\ell,m}(r)} u_{\ell',m'}(r) \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)}\, Y_{\ell',m'}(\omega_x) - \mathrm{Re}\left(\overline{u_{\ell,m}(r)} u_{\ell',m'}(s) \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)}\, Y_{\ell',m'}(\omega_y) \right) \Big]\\
&= \sum_{\ell,m} \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} dr\, ds\, (rs)^{d-1-\sigma} \left[|u_{\ell,m}(r)|^2 \nu_{\frac{d-1}{2}}(r, s) - \mathrm{Re}\Big(\overline{u_{\ell,m}(r)}\, u_{\ell,m}(s) \Big) \nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s) \right].
\end{aligned}$$

对于任意固定的 $\ell > 0$，我们可以看出 (1.10a) 与 (1.28) 之间存在以下两点差异:

(a) 在 (1.10a) 中，Hardy 势的前置系数为 $\Phi(\sigma)$，而在 (1.28) 中，其前置系数为 $\Phi_\ell(\sigma)$，后者大于 $\Phi(\sigma)$（见命题 1.4）。特别地，对于具有固定 $\ell \in L_d$ 的函数 $f \in C_c^\infty \cap V_\ell$ ，定理 1.5 给出了具有更大且最优常数 $\kappa_c(\ell)$ 的 Hardy 不等式 (1.8)。

(b) 如 (1.38) 的最后一行所示，基态表示式 (1.10a) 中的被积函数为

$$(rs)^{d-1-\sigma}\left[|u_{\ell,m}(r)|^2\nu_{\frac{d-1}{2}}(r,s)-\operatorname{Re}\left(\overline{u_{\ell,m}(r)}\,u_{\ell,m}(s)\right)\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s)\right]. \tag{1.39}$$

特别地，项 $|u_{\ell,\ m}(r)|^2$ 乘以 $\nu_{\frac{d-1}{2}}(r,s)$；而涉及 $u_{\ell,\ m}(r)\,u_{\ell,\ m}(s)$ 的项则乘以 $\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s)$，两者不同，因此无法配方。另一方面，将平方展开后，基态表示式 (1.28) 中的被积函数是

$$(rs)^{d-1-\sigma}\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s)\left[|u_{\ell,m}(r)|^2-\operatorname{Re}\left(\overline{u_{\ell,m}(r)}\,u_{\ell,m}(s)\right)\right]h(r)h(s). \tag{1.40}$$

因此，与式 (1.39) 中的表达式不同，项 $|u_{\ell,\ m}(r)|^2$ 也乘以 $\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s)$，而不是乘以 $\nu_{\frac{d-1}{2}}(r,s)$，所以我们可以配方成完全平方。

总之，定理 1.5 和推论 1.7 可视为基态表示 (1.10a)–(1.10b) 的精细化结果，因为它们考虑了角向振荡。

1.6. 定理 1.5 的影响。我们来谈谈定理 1.5 对 $\alpha<2$ 的更广泛影响。Bogdan、Grzywny、Jakubowski 和 Pilarczyk [6] 证明，对于$h(r)=r^{-\sigma}$，有 $\exp(-t(|D|^\alpha-\Phi_0(\sigma)/|x|^\alpha))[h]_0$,$0(x)=[h]_0$,$0(x)$，这进一步促使人们将 $[h]_0$,0 称为基态。这种不变性对于证明 $\exp(-t(|D|^\alpha-\Phi_0(\sigma)/|x|^\alpha))$ 的点态估计至关重要。反过来，这些估计对于分析由 $|D|^\alpha-\Phi_0(\sigma)/|x|^\alpha$ 的幂生成的 L^p-索博列夫空间十分关键，见 [21, 45, 10, 11],；它们也用于证明相对论原子的强斯科特猜想 [24, 22, 23]。后者的研究关注大原子的电子密度分析，该原子由 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中 Chandrasekhar 算子的多粒子类比 $\sqrt{-\Delta+1}-1-\kappa/|x|$ 描述。在这些研究中，[6] 的热核估计也用于给出 Chandrasekhar 算子特征函数平方和的上界。另一方面，Jakubowski、Kaleta 和 Szczypkowski [35] 使用热核估计研究 Chandrasekhar 算子的单个特征函数，尤其证明了基态的下界。与这些研究一样，本文的结果为进一步分析 $\exp(-t(|D|^\alpha-\Phi_\ell(\sigma)/|x|^\alpha))$、$|D|^\alpha-\Phi_\ell(\sigma)/|x|^\alpha$ 的幂，以及投影到 $V_{\ell,m}$ 上的 Chandrasekhar 算子的特征函数及其和提供了起点。

1.7. 定理 1.5 的证明思路。我们将利用 Bogdan、Dyda 和 Kim [5, 第 2–3] 节的结果，研究 $|D|^\alpha-\Phi_\ell(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 在 $V_{\ell,m}$中的情形。在那篇论文中，作者考虑某个 σ- 有限测度空间 $(X,\mathcal{M},m)$ 上的对称次概率转移密度 $p_t(x,y)$，以及二次型 $\mathfrak{E}[u]=\lim_{t\searrow 0}t^{-1}\langle u,(1-p_t)u\rangle$,$u\in L^2(X,m)$。他们通过对空间和时间中的适当函数积分，构造正的超中位函数 h，并利用 h 推导 Hardy 不等式以及 $\mathfrak{E}$的基态表示。从形式上看，$|D|^\alpha-\Phi_\ell(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 的基态$|x|^{-\sigma}Y_{\ell,m}(\omega_x)$是 h的类似物，但它是一个振荡函数。然而，由于$V_{\ell,m}=L^2(\mathbb{R}_+,r^{d-1+2\ell}dr)\otimes$ 张成$\{Y_{\ell,m}\}$，我们看到正函数 $r^{-\ell-\sigma}$ 是

$|D|^\alpha - \Phi_\ell(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 在 $V_{\ell,m}$上的限制的基态的径向部分。因此，我们利用 [5] 来求得 $|D|^\alpha - \Phi_\ell(\sigma)|x|^{-\alpha}$ 限制在 $V_{\ell,m}$上的径向部分的基态及其基态表示。

具体而言，我们证明定理 1.5 的方法如下。首先，利用半群表示 (1.4)，对单位球面进行积分，得到恒等式

$$\langle [u]_{\ell,m}, P^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)[u]_{\ell,m}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle u, p^{(\alpha)}_{(d-1+2\ell)/2}(t,\cdot,\cdot)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell}dr)}, \tag{1.41}$$

参见命题 4.3。此处，$p^{(2)}_\zeta(t,r,s)$ 是阶数为 $\zeta - 1/2$ 的贝塞尔热核，适用于任意 $\zeta \in (-1/2,\infty)$；当 $\alpha \in$ 属于 (0, 2) 时，核 $p^{(\alpha)}_\zeta(t,r,s)$ 由 $p^{(2)}_\zeta(t,r,s)$ 经通常的 $\alpha/2$ 阶稳定次级化定义，参见定义 2.1–2.2。我们证明 $p^{(\alpha)}_\zeta(t,r,s)$ 是概率转移密度（第 2.1 节），并计算相应的 L´evy 核 $\nu_\zeta(r,s)$: $= \lim_{t\searrow 0} t^{-1}p^{(\alpha)}_\zeta(t,r,s)$（第 2.2 节）。利用热核和 L´evy 核，我们在 $\mathbb{R}_+$ 上定义相应的二次型，记为 $\mathcal{E}_\zeta$（第 2.3 节）。我们将抽象结果 [5] 应用于这些二次型，并证明一个基态表示（定理 3.2）。最后，利用 (1.41)，我们证明 $\mathcal{E}[[u]_{\ell,m}] = \mathcal{E}_\zeta[u]$（命题 4.3）。由此即可完成定理 1.5 的证明。

还应指出，另有一些理念相近的方法可用于构造基态（或超解）以及 Hardy 不等式，例如 Devyver、Fraas 和 Pinchover 的方法 [13]。他们的技术适用于二阶椭圆算子。一个有趣的问题是，他们的方法能否推广到其他算子，例如本文讨论的那些算子。我们注意到，Dyda [16,p. 550]提出了一种利用带符号（反对称）函数研究 Hardy 不等式的方法，这与我们的研究思路颇为相近，至少对 $\ell = 1$而言是如此。关于相关的差分过程概念，也可参见 Kulczycki 和 Ryznar [41] 。此外，我们还受到算子交织理论的启发，例如 Patie 和 Savov [49], 的研究；这一理论促使我们在研究半群 $P_{(\alpha)}$及其在 $V_{\ell,m}$ 上的形式 $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ 时，尝试摆脱非负性这一限制。

1.8. 文章结构与记号。本文结构如下。第 2 节中，我们定义并分析贝塞尔热核及其 $\alpha/2$ 从属核。此外，我们研究相应的 L´évy 核，并用它们定义 $\mathbb{R}_+$ 上相应的二次型。第 3 节中，我们证明第 2 节所定义二次型的基态表示（定理 3.2）。第 4 节中，我们研究限制到 $V_{\ell,m}$ 时的 $|D|^\alpha$ 和 $\mathrm{e}^{-t|D|^\alpha}$，并建立其与第 2 节定义的二次型和半群之间的联系。利用这一联系，我们在第 5 节应用定理 3.2 来证明定理 1.5。附录包含辅助结果。

下文中，我们用 $c \in (0,\infty)$ 表示一般的（实正）常数。常数的取值可能因处而异。若 c 依赖于某个参数 τ，我们用 c_τ 标记这种依赖关系。对于函数 A、$B \geq 0$，我们写作 $A \lesssim B$，表示存在一个常数 c，使得 $A \leq cB$。若 c 依赖于 τ，我们可以写作 $A \lesssim_\tau B$，但在记号中通常忽略对 d 和 α 的依赖。记号 $A \sim B$ 表示

即 $A \lesssim B \lesssim A$，然后我们称 A 与 B 是可比的，或等价的。我们将 $A \wedge B$ 简写为: $=\min\{A, B\}$，并将 $A \vee B$ 简写为: $=\max\{A, B\}$。对于 $x \in \mathbb{R}$，高斯括号 $\lfloor x \rfloor$ 表示 $x \in \mathbb{R}$ 的整数部分。函数空间，例如 $L^2(\mathbb{R}^d)$，均为复数空间。对于 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$，我们分别用 $J_\nu(z)$ 和 $I_\nu(z)$ 表示第一类、阶数为 $\nu \in \mathbb{C}$ 的普通贝塞尔函数和修正贝塞尔函数 [15, (10.2.2)、(10.25.2)]。我们~写作 ${}_2F_1(a, b;\ c;\ z) = {}_2F_1(a, b;\ c;\ z)/\Gamma(c)$，其中 a、b、$c \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \{w \in \mathbb{C} :\ |w| < 1\}$，表示正则化超几何函数 [15, (15.2.1)]；而 ${}_2F_1(a, b;\ c;\ z)$ 表示（通常的）超几何函数 [15, (15.2.2)]，当 $c \notin \{0, -1, -2, ...\}$ 时。此外，${}_{\sim}{}_1F_1(a;\ b;\ z) = {}_1F_1(a;\ b;\ z)/\Gamma(b)$，其中 a、b、$z \in \mathbb{C}$ 表示正则化合流超几何函数；其中 ${}_1F_1(a; b; z)$ 表示库默尔合流超几何函数 [15, (13.2.2)],，其定义域为 $b \notin \{0, -1, -2, ...\}$。随着行文推进，我们还将引入其他记号。本文末尾的索引汇总了这些记号。

2. Subordinated Bessel kernels

2.1. 热核的性质。我们的目标是研究高斯热核

$$\mathrm{e}^{t\Delta}(x, y) = P^{(2)}(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right), \quad t > 0,\ x, y \in \mathbb{R}^d \tag{2.1}$$

及其 $\frac{\alpha}{2}$ 从属半群 $\mathsf{e}^{-t|D|^\alpha}$，限制于 $V_{\ell,\ m}$ 对每个 $\ell \in L_d, m \in M_\ell$。根据下文的命题 4.3，这将导出定义在 $\mathbb{R}_+$上的核，它们依赖于 $\alpha \in (0, 2]$和 $(d-1)/2+\ell$，其中 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\ell \in L_d$，但不依赖于 $m \in M_\ell$。为了便于今后引用，我们考虑由 $\alpha \in (0, 2]$ 索引的一般核，以及一个任意参数 $\zeta \in (-1/2, \infty)$。在定理 1.5 的背景下，我们可以认为 ζ 等于 $(d-1)/2+\ell$。我们首先针对 $\alpha = 2$定义并分析这些核。随后，我们利用从属关系研究 $\alpha < 2$ 的情形。

定义 2.1。令 $\zeta \in (-1/2, \infty)$。我们考虑 $\mathbb{R}_+$ 上的参考（速度）测度 $r^{2\zeta}dr$，并对 r, $s, t > 0$，定义

$$p_\zeta^{(2)}(t, r, s) := \frac{(rs)^{1/2-\zeta}}{2t} \exp\left(-\frac{r^2+s^2}{4t}\right) I_{\zeta-1/2}\left(\frac{rs}{2t}\right), \tag{2.2}$$

其中 $I_{\zeta-1/2}$ 是第一类修正贝塞尔函数。

核 $p_\zeta^{(2)}$ 是与阶数为 $\zeta - 1/2$的贝塞尔算子相关联的热核，即与 $-\frac{d^2}{dx^2} - 2\zeta x^{-1}\frac{d}{dx}$在 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{2\zeta}dr)$中的算子相关联的热核。文献中贝塞尔核的记法不尽相同。我们的记法与 [44, 第 2 节中的记法较为接近，其中的 ν 和 t 分别对应本文中的 $\zeta - 1/2$ 和 $2t$ 。

对我们而言，至关重要的是，$p_\zeta^{(2)}(t, r, s)$ 是一种概率转移密度。也就是说，对于所有 $\zeta \in (-1/2, \infty)$、$t, t', r, s > 0$,

(1) $p_\zeta^{(2)}(t, r, s) > 0$,
(2) $\int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(t, r, s)\, s^{2\zeta} ds = 1$, and
(3) $\int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(t, r, z) p_\zeta^{(2)}(t', z, s) z^{2\zeta}\, dz = p_\zeta^{(2)}(t + t', r, s)$.

由修正贝塞尔函数的正性可立即得出正性，参见 [15,(10.25.2)]。为方便起见，我们在附录 C.1 和 C.2 中给出计算，以证明另外两项性质（归一化和 Chapman–Kolmogorov 方程）。我们还注意到缩放

$$p_\zeta^{(2)}(t,r,s) = t^{-\frac{2\zeta+1}{2}} p_\zeta^{(2)}\left(1, \frac{r}{t^{1/2}}, \frac{s}{t^{1/2}}\right), \tag{2.3}$$

这可直接由 (2.2) 得出。关于 $p_\zeta^{(2)}$ 的更详细分析，可参见教材 [9, 第一部分，第 IV.6 节，或附录 1。21] 或第 XI 章]。

现在我们对 $p_\zeta^{(2)}$ 进行次级化。回顾一下，对于 $\alpha \in (0,2)$ 和 $t>0$，根据伯恩斯坦定理，完全单调函数 $[0,\infty) \ni \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-t\lambda^{\alpha/2}}$ 是概率稠密函数 $\mathbb{R}_+ \ni \tau \mapsto \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 的拉普拉斯变换。也就是说，

$$\mathrm{e}^{-t\lambda^{\alpha/2}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau\lambda}\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau, \quad t>0,\, \lambda \geq 0, \tag{2.4}$$

参见例如 [55, 第 5]章。我们在附录 B 中记录了 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 的一些有用性质。现在我们引入 $\frac{\alpha}{2}$-从属贝塞尔核。

定义 2.2. 设 $\zeta \in (-1/2,\infty)$ 且 $\alpha \in (0,2)$。我们在 $\mathbb{R}_+$ 上考虑参考测度 $r^{2\zeta}dr$，并对 r、s、$t>0$，定义

$$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) := \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(\tau,r,s)\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau. \tag{2.5}$$

注意，核为 $p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)$、$\alpha \in (0,2]$, $t>0$ 的积分算子是相对于测度 $r^{2\zeta}dr$ 作用的，即，

$$(p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)u)(r) = \int_0^\infty p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)u(s)s^{2\zeta}\, ds.$$

由于 $\sigma_t^{(\alpha/2)}$ 是由概率转移密度函数组成的卷积半群[55, 第 48–49] 页（另见附录 B 中的 (B.2) 和 (B.6)），上述对 $\alpha=2$ 的分析表明，对于所有 $\zeta \in (-1/2,\infty)$ 和 $\alpha \in (0,2]$，$p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)$ 都是概率转移密度。我们将其总结为以下命题。

命题 2.3。设 $\zeta \in (-1/2,\infty)$，$\alpha \in (0,2]$, 和 $t,t',r,s>0$。则我们有$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) > 0$ 和

$$\int_0^\infty p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)s^{2\zeta}\, ds = 1, \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,z)p_\zeta^{(\alpha)}(t',z,s)z^{2\zeta}\, dz = p_\zeta^{(\alpha)}(t+t',r,s), \tag{2.7}$$

$$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) = t^{-\frac{2\zeta+1}{\alpha}} p_\zeta^{(\alpha)}\left(1, \frac{r}{t^{1/\alpha}}, \frac{s}{t^{1/\alpha}}\right). \tag{2.8}$$

证明。我们已经针对 $\alpha = 2$ 讨论过这些结论，因此令 $\alpha \in (0, 2)$。当 $\alpha \in (0, 2)$ 时，$p_\zeta^{(\alpha)}(t, r, s)$ 的正性由从属关系 (2.5) 以及$p_\zeta^{(2)}(t, r, s)$ 和 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 的正性得到。当 $\alpha \in (0, 2)$ 时，归一化条件 (2.6) 由从属关系 (2.5)、$\alpha = 2$ 时的归一化条件、Tonelli 定理，以及 $\sigma_t^{(\alpha/2)}$ 是概率密度这一事实得到。当 $\alpha \in (0, 2)$ 时，Chapman–Kolmogorov 方程 (2.7) 由从属关系 (2.5) 以及 $\alpha = 2$ 的相应方程得到，因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty p_\zeta^{(\alpha)}(t, r, z) p_\zeta^{(\alpha)}(t', z, s) z^{2\zeta}\, dz \\
&\quad = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau'\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, \sigma_{t'}^{(\alpha/2)}(\tau') \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(\tau, r, z) p_\zeta^{(2)}(\tau', z, s) z^{2\zeta}\, dz \qquad (2.9)\\
&\quad = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau'\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, \sigma_{t'}^{(\alpha/2)}(\tau')\, p_\zeta^{(2)}(\tau + \tau', r, s) = p_\zeta^{(\alpha)}(t + t', r, s).
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们利用了 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 是一个卷积半群这一事实。最后，$\alpha \in (0, 2)$ 的缩放关系 (2.8) 可由 $\alpha = 2$ 的相应关系 (2.3) 以及 $\sigma_t^{(\alpha/2)}$ 的缩放性质推出（见 (B.5)）。事实上，

$$\begin{aligned}
p_\zeta^{(\alpha)}(t, r, s) &= \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(\tau, r, s)\, \sigma_t^{(\frac{\alpha}{2})}(\tau)\, d\tau = t^{-\frac{2\zeta+1}{\alpha}} \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}\left(\frac{\tau}{t^{2/\alpha}}, \frac{r}{t^{1/\alpha}}, \frac{s}{t^{1/\alpha}}\right) \sigma_t^{(\frac{\alpha}{2})}(\tau)\, d\tau \\
&= t^{-\frac{2\zeta+1}{\alpha}} \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}\left(\tau, \frac{r}{t^{1/\alpha}}, \frac{s}{t^{1/\alpha}}\right) \sigma_1^{(\frac{\alpha}{2})}(\tau)\, d\tau = t^{-\frac{2\zeta+1}{\alpha}} p_\zeta^{(\alpha)}\left(1, t^{-1/\alpha} r, t^{-1/\alpha} s\right).
\end{aligned}$$

□

2.2. $\mathcal{I}_{\ell,\sigma}$ 的积分核分析。在下文中，我们将显式计算 (1.27a) 中泛函 $\mathcal{I}_{\ell,\sigma}$ 的积分核 $\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r, s)$，并为其给出精确界。为此，我们回顾并使用逐点极限 (B.4)，即

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)}{t} = \frac{\Gamma(\alpha/2 + 1)\, \sin(\pi\alpha/2)}{\pi\, \tau^{1+\alpha/2}}, \quad \tau > 0, \qquad (2.10)$$

以及一致界 (B.10)，即

$$t^{-1} \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau) \lesssim_\alpha \tau^{-1-\alpha/2}, \quad t, \tau > 0. \qquad (2.11)$$

命题2.4. 设 $\zeta \in (-1/2, \infty)$，$\alpha \in (0, 2)$，且 $r, s > 0$ 满足 $r \neq s$。那么，

$$\begin{aligned}
\nu_\zeta(r, s) &:= \lim_{t\searrow 0} \frac{p_\zeta^{(\alpha)}(t, r, s)}{t} = \lim_{t\searrow 0} \int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(\tau, r, s) \frac{\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)}{t}\, d\tau \qquad (2.12)\\
&= 2^{1+\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi} \Gamma\left(\zeta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right) (r^2 + s^2)^{-(\zeta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})} \\
&\quad \times {}_2\tilde{F}_1\left(\frac{\zeta + \alpha/2 + 1/2}{2}, \frac{\zeta + \alpha/2 + 3/2}{2}; \zeta + \frac{1}{2}; \frac{4(rs)^2}{(r^2 + s^2)^2}\right) \qquad (2.13)\\
&\sim_{\zeta,\alpha} \frac{1}{(r + s)^{2\zeta} \cdot |r - s|^{1+\alpha}}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

此外,

$$\frac{p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)}{t} \lesssim_{\zeta,\alpha} \nu_\zeta(r,s), \quad t>0, \tag{2.15}$$

并且，对于 $\zeta \geq \zeta' > -1/2$,

$$\nu_\zeta(r,s) \lesssim_{\zeta,\zeta',\alpha} \nu_{\zeta'}(r,s). \tag{2.16}$$

证明。公式 (2.13) 由控制收敛定理结合 (2.2)、(2.10) 和 (2.11) 得出。计算过程见 C.3 节。特别地，(2.15) 得证。

N现在我们证明 (2.14)。不失一般性，设 $r>s$。首先，我们引用

$${}_2\tilde{F}_1\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};a-b+1;\frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^a\, {}_2\tilde{F}_1\left(a,b;a-b+1;z\right), \quad |z|<1, \tag{2.17}$$

其中 $a=\zeta+(\alpha+1)/2$, $b=(\alpha+2)/2$，且 $z=(s/r)^2\in(0,1)$；参见 [15, (15.8.15)]。因此，令 $c_{\zeta,\,\alpha} := 2^{1+\alpha}\pi^{-1}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\zeta+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)$，我们得到

$$\nu_\zeta(r,s) = c_{\zeta,\alpha}\,(rs)^{-\zeta}\left(\frac{r\wedge s}{r\vee s}\right)^{\zeta}\frac{1}{(r\vee s)^{\alpha+1}}\,{}_2\tilde{F}_1\left(\zeta+\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+2}{2};\zeta+\frac{1}{2};\frac{s^2}{r^2}\right). \tag{2.18}$$

通过区分 $s/r\in(0,1/2]$ 和 $s/r\in[1/2,1)$，我们得到

$${}_2\tilde{F}_1\left(\zeta+\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+2}{2};\zeta+\frac{1}{2};\frac{s^2}{r^2}\right) \sim_{\zeta,\alpha} |1-s^2/r^2|^{-1-\alpha}. \tag{2.19}$$

˜事实上，对于 $s/r\leq 1/2$，这由 ${}_2F_1$ 的定义得出；对于 $s/r\in[1/2,1)$，我们使用 [15, (15.10.21)]„ 即

$$\begin{aligned}{}_2\tilde{F}_1\left(a,b;c,z\right) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\cdot\,{}_2\tilde{F}_1\left(a,b;a+b-c+1,1-z\right)\\ &+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\,{}_2\tilde{F}_1\left(c-a,c-b;c-a-b+1,1-z\right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

对于所有满足 $|\arg(z)|<\pi$和 $|\arg(1-z)|<\pi$的 $z\in\mathbb{C}$，再次根据定义 [15, (15.2.2)]。将 (2.18) 和 (2.19) 与

$$(rs)^{-\zeta}\left(\frac{r\wedge s}{r\vee s}\right)^{\zeta} = \frac{1}{(r\vee s)^{2\zeta}} \sim \frac{1}{(r+s)^{2\zeta}}$$

以及估计

$$(r\vee s)^{-1-\alpha}|1-s^2/r^2|^{-1-\alpha} = r^{1+\alpha}|r^2-s^2|^{-1-\alpha} \sim |r-s|^{-1-\alpha} \quad \text{for } 0<s<r, \tag{2.21}$$

由此得到 (2.14)。单调性 (2.16) 由 (2.14) 得出。 □

2.3. $\mathbb{R}_+$ 上二次型的定义。根据一般理论， [26, 第 1 节。3], 与 $p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)$ 相关的二次型,

$$\mathcal{E}_\zeta[u] := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\langle u, u - p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,r^{2\zeta}dr)}, \quad u\in L^2(\mathbb{R}_+,r^{2\zeta}dr), \tag{2.22}$$

有良好定义。此外,

$$\mathcal{E}_\zeta[u] = \int_0^\infty dr\, r^{2\zeta}\int_0^\infty ds\, s^{2\zeta}|u(r)-u(s)|^2\,\nu_\zeta(r,s) \quad \text{for } \alpha<2, \tag{2.23}$$

由 (2.15) 和控制收敛定理可知，若右端有限，则结论成立；否则，由 Fatou 引理可得。

3. Ground state transformation for $\mathcal{E}_\zeta$

主要结果定理 1.5 的证明关键依赖于针对 $\mathcal{E}_\zeta$ 的基态变换（将在下文定理 3.2 中陈述），以及以下计算。

命题3.1. 设 $\zeta\in(-1/2,\infty)$, $\alpha\in(0,2]$, $\gamma\in(-1,\infty)$, 且 $\beta\in(0,(2\zeta-\gamma)/\alpha)$. 那么,

$$h_{\beta,\gamma}(r) := \int_0^\infty \frac{dt}{t}\,t^\beta\int_0^\infty ds\, s^\gamma p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) = C^{(\alpha)}(\beta,\gamma,\zeta)\,r^{\alpha\beta+\gamma-2\zeta}, \quad r>0, \tag{3.1}$$

其中

$$C^{(\alpha)}(\beta,\gamma,\zeta) := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\alpha\beta}{2})}C\left(\frac{\alpha\beta}{2},\gamma,\zeta\right), \quad with \tag{3.2}$$

$$C(\beta,\gamma,\zeta) := \frac{2^{-2\beta}\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac12(\gamma+1)\right)\Gamma\left(\frac12(2\zeta-2\beta-\gamma)\right)}{\Gamma\left(\frac12(2\zeta-\gamma)\right)\Gamma\left(\frac12(2\beta+\gamma+1)\right)}. \tag{3.3}$$

如果我们甚至有 $\beta\in(1,(2\zeta-\gamma)/\alpha)$，那么

$$\begin{aligned} q_{\beta,\gamma}(r) &:= \frac{(\beta-1)h_{\beta-1,\gamma}(r)}{h_{\beta,\gamma}(r)} \\ &= \frac{2^\alpha\Gamma\left(\frac12(2\zeta+\alpha-\alpha\beta-\gamma)\right)\Gamma\left(\frac12(\alpha\beta+\gamma+1)\right)}{\Gamma\left(\frac12(2\zeta-\alpha\beta-\gamma)\right)\Gamma\left(\frac12(\alpha\beta+\gamma+1-\alpha)\right)}r^{-\alpha}, \quad r>0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

定理 3.2。设 $\zeta\in(-1/2,\infty)$、 $\alpha\in(0,2]\cap(0,2\zeta+1)$, 以及 $\eta\in[0,\frac{2\zeta+1-\alpha}{2}]$。此外，设

$$\Psi_\zeta(\eta) := \frac{2^\alpha\Gamma\left(\frac{2\zeta+1-\eta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\zeta+1-\eta-\alpha}{2}\right)}. \tag{3.5}$$

对于 $\gamma\in(-1,\infty)$ 和 $\beta\in(1,(2\zeta-\gamma)/\alpha)$, 设 $h_{\beta,\gamma}(r)$ 和 $q_{\beta,\gamma}(r)$ 分别如 (3.1) 和 (3.4) 中所定义。则以下结论成立。

(1) 如果

$$\beta = \frac{1}{\alpha}(2\zeta-\gamma-\eta), \tag{3.6}$$

那么，对所有 $r>0$,

$$h_{\beta,\gamma}(r)=C^{(\alpha)}(\beta,\gamma,\zeta)\,r^{-\eta}\quad and\quad q_{\beta,\gamma}(r)=\Psi_\zeta(\eta)r^{-\alpha}. \tag{3.7}$$

(2) 设 $h(r):=r^{-\eta}$。那么，对于每个 $u\in L^2(\mathbb{R}_+,r^{2\zeta}\,dr)$，我们有基态表示

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\zeta[h\cdot u]&=\Psi_\zeta(\eta)\int_0^\infty dr\,r^{2\zeta}\frac{|h(r)\cdot u(r)|^2}{r^\alpha}\\&\quad+\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\int_0^\infty dr\,r^{2\zeta}\int_0^\infty ds\,s^{2\zeta}\frac{p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)}{t}|u(r)-u(s)|^2h(r)h(s).\end{aligned} \tag{3.8}$$

若 $\alpha<2$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\zeta[h\cdot u]&=\Psi_\zeta(\eta)\int_0^\infty dr\,r^{2\zeta}\frac{|h(r)\cdot u(r)|^2}{r^\alpha}\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^\infty dr\,r^{2\zeta}\int_0^\infty ds\,s^{2\zeta}\,\nu_\zeta(r,s)|u(r)-u(s)|^2h(r)h(s).\end{aligned} \tag{3.9}$$

在证明命题3.1和定理 3.2之前，先作几点说明。

备注 3.3。(1) 计算式 (3.1) 和 (3.4) 需要 $\gamma>-1$。那么，当然，$\mu(dr)=r^\gamma\,dr$ 是一个 σ-有限测度。
(2) 设 $\zeta=(d-1+2\ell)/2$ 和 $\eta=\ell+\sigma$，其中 $d\in\mathbb{N}$ 且 $\ell>-1/2$。由于 $\beta\in(1,\frac{2\zeta-\gamma}{\alpha})$ 且 $\gamma>-1$，选择 (3.6) 意味着限制条件 $\sigma\in(-\ell,d+\ell-\alpha)$。这应与 $\alpha<2$ 和 $\sigma\le(d-2)/2$ 在 $\alpha=2$下的可容许范围 $\sigma\in(-\ell-\alpha,(d-\alpha)/2]$ (或 $\sigma\in[(d-\alpha)/2,d+\ell-\alpha)$，由对称性可得) 进行比较，见命题 1.4。因此，我们要求 $\sigma\in(-\ell,(d-\alpha)/2]$，即一个吸引型 Hardy 势。

(3) 如 [5, 第 237], 页所示，可以证明，选择 (3.6) 可使 (3.4) 右端的前因子达到最大值（该前因子对 β 和 γ 的依赖仅通过 $\alpha\beta+\gamma$）。
(4) 在定理 1.5 的背景下，我们有 $\zeta=(d-1+2\ell)/2$ 和 $\eta=\ell+\sigma$，因此 $\Psi_\zeta(\eta)=\Phi_\ell(\sigma)$。特别地，根据 (1.24)，$\eta\mapsto\Psi_\zeta(\eta)$ 对于$\eta\le(2\zeta+1-\alpha)/2$递增。

（5）对于 $\zeta=(d-1+2\ell)/2$ 以及满足 $d=1$ 和 $\ell=0$的 $\eta=\ell+\sigma$，将 γ 替换为$-\gamma$，并将 σ 替换为 $\beta_{\mathrm{JM}}-\alpha/2$ 后，选择 (3.6) 与 [36, 第 1 节3] 中所作的选择完全一致，其中 β_{JM} 表示 [36] 中使用的变量 β。

为准备 $\alpha\in(0,2)$时命题3.1的证明，我们注意到，对于 $\beta>0$ 和$\tau>0$，次级过程密度函数 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$满足

$$\int_0^\infty t^\beta\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\,\frac{dt}{t}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha\beta/2)\tau^{1-\alpha\beta/2}},\quad\tau>0. \tag{3.10}$$

推导出（3.10）的计算可见 [5, 命题 5]的证明。注意，其中的假设 $\beta<d/\alpha$ 与（3.10）无关，另见 [37, 第 1003]页。

命题3.1的证明。我们先证明（3.1）。首先考虑 $\alpha = 2$并注意到 $C^{(2)}(\beta,\ \gamma,\ \zeta) = C(\beta,\ \gamma,\ \zeta)$。通过缩放 $s \mapsto sr$和 $t \mapsto r^2 t$，我们得到

$$h_{\beta,\gamma}(r) = r^{2\beta+\gamma-2\zeta} \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^\beta \int_0^\infty ds\, s^\gamma p_\zeta^{(2)}(t,1,s) = C(\beta,\gamma,\zeta) r^{2\beta+\gamma-2\zeta}, \tag{3.11}$$

with

$$C(\beta,\gamma,\zeta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^\beta \int_0^\infty ds\, s^{\gamma-\zeta} \cdot \frac{s^{1/2}}{2t} \mathrm{e}^{-\frac{s^2+1}{4t}} I_{\zeta-1/2}\left(\frac{s}{2t}\right). \tag{3.12}$$

为计 算 $C(\beta,\gamma,\zeta)$，我们先对 s 积分（见附录C.4），并得到 in

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty ds\, s^{\gamma-\zeta} \cdot \frac{s^{1/2}}{2t} \mathrm{e}^{-\frac{s^2+1}{4t}} I_{\zeta-1/2}\left(\frac{s}{2t}\right) \\ &\quad = 2^{\gamma-2\zeta}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) t^{\frac{\gamma-2\zeta}{2}}\, {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{2\zeta-\gamma}{2}; \zeta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4t}\right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

只要 $\gamma > -1$。将其代入 (3.12)，即可得到 (3.3)，即

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^\beta \cdot 2^{\gamma-2\zeta}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) t^{\frac{\gamma-2\zeta}{2}}\, {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{2\zeta-\gamma}{2}; \zeta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4t}\right) = C(\beta,\gamma,\zeta), \tag{3.14}$$

只要 $\beta \in (0, (2\zeta-\gamma)/2)$（见附录C.5）。这就完成了关于 $\alpha = 2$ 的证明。对于 $\alpha < 2$，我们利用从属关系，得到

$$\begin{aligned} h_{\beta,\gamma}(r) &= \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^\beta \int_0^\infty ds\, s^\gamma p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) \\ &= \int_0^\infty ds\, s^\gamma \int_0^\infty d\tau\, p_\zeta^{(2)}(\tau,r,s) \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^\beta \frac{\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)}{d\tau} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\alpha\beta}{2})} \int_0^\infty ds\, s^\gamma \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\, p_\zeta^{(2)}(\tau,r,s) \tau^{\frac{\alpha\beta}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\alpha\beta}{2})} \cdot C\left(\frac{\alpha\beta}{2}, \gamma, \zeta\right) r^{\alpha\beta+\gamma-2\zeta}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

这里我们先用了 (2.4)，接着用了 (3.10)，然后用了 (3.11)。由此得到约束 $\gamma > -1$ 和 $\beta \in (0, \frac{2\zeta-\gamma}{\alpha})$。(3.1) 的证明至此完成。

公式 (3.4) 由项目 (1) 中的计算得出。 □

定理 3.2 的证明。项目 (1)。这是显然的。

条目（2）。根据条目（1），公式（3.8）可由 [5, 定理 2] 结合 $X = \mathbb{R}_+, m(dr) = r^{2\zeta}\, dr$, $\mu(dr) = r^\gamma\, dr$ 结合 $\gamma \in (-1, \frac{2\zeta-1-\alpha}{2})$，以及 $f(t) = t_+^{\beta-1}$ 结合 $\beta = (2\zeta-\gamma-\eta)/\alpha > 1$（如（3.6）中所示）得到。通过利用控制收敛定理，并结合定义 $\lim_{t\searrow 0} t^{-1} p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) = \nu_\zeta(r,s)$ 以及事实 $t^{-1} p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) \lesssim \nu_\zeta(r,s)$（参见命题2.4），若公式（3.8）右端有限，则对（3.8）中的 $t \searrow 0$ 取极限即可得到公式（3.9）；反之，则利用Fatou引理。□

4. Connection between the forms $\mathcal{E}_\zeta$ and $\mathcal{E}^{(\alpha)}$

在本节中，我们建立 $\mathcal{E}_\zeta[u]$ 与 $\mathcal{E}_{(\alpha)}[[u]_{\ell,m}]$ 之间的联系，以便通过定理 3.2 证明定理 1.5。为此，对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\ell \in L_d$，我们使用傅里叶–贝塞尔变换 $\mathcal{F}_\ell$，

$$v \mapsto (\mathcal{F}_\ell v)(k) := i^{-\ell} \int_0^\infty dr\, \sqrt{kr}\, J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(kr) v(r), \quad k \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

最初为函数 $v \in L^1(\mathbb{R}_+, dr)$ 定义。注意，该变换同时依赖于 d 和 ℓ，但由于我们将维数 d 视为固定值，因此在记号中省略它。还需注意，对于所有满足 $(d-1)/2+\ell > -1/2$ 的 d 和 ℓ，该变换都有定义。将傅里叶变换从 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 扩展到 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 时所用的相同论证，也允许将傅里叶 – 贝塞尔变换扩展为 $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ 上的酉算子。依照记号滥用的惯例，我们也用 $\mathcal{F}_\ell$ 表示这一扩展，并注意到其对称性 $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}_\ell^*$，这可从定义（4.1）中直接看出。由（1.36）定义的酉算子 $U: L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell} dr) \to L^2(\mathbb{R}_+, dr)$、平面波展开（A.3）以及 $\{Y_{\ell,m}\}_{\ell,m}$ 的正交归一性，得到交织关系

$$([u]_{\ell,m})^\wedge(\xi) = (U^*[\mathcal{F}_\ell U u]_{\ell,m})(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ u \in L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell} dr). \tag{4.2}$$

以下引理表明，当限制在固定的 V_ℓ 或 $V_{\ell,\,m}$ 时，傅里叶–贝塞尔变换将 $F(|D|)$ 对角化。在下文中，我们将 $F(|D|)^{1/2}$ 作为 $|F(|D|)|^{1/2}\,\mathrm{sgn}(F(|D|))$ 的简写。

引理 4.1。设 $d \in \mathbb{N}$、ℓ、$\ell' \in L_d$、$m \in M_\ell$ 和 $m' \in M_{\ell'}$。令 $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ 和 $Q(F(|D|)) := \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |F(|\xi|)|\hat{g}(\xi)|^2\, d\xi < \infty\}$。那么，对于 $[u]_{\ell,\,m}, [v]_{\ell',\,m'} \in Q(F(|D|))$，

$$\begin{aligned} &\langle |F(|D|)|^{1/2}[v]_{\ell',m'}, F(|D|)^{1/2}[u]_{\ell,m}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}\langle \mathcal{F}_\ell U v, F \cdot \mathcal{F}_\ell U u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dr)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

with 定义于 (1.36) 中的酉算子 $U: L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell} dr) \to L^2(\mathbb{R}_+, dr)$).

证明。由 $\{Y_{\ell,m}\}_{\ell \in L_d,\ m \in M_\ell}$ 的正交归一性，只需考虑 $\ell = \ell'$ 和 $m = m'$。于是该结论由普朗歇雷定理即可得出，即，

$$\langle |F(|D|)|^{1/2}[v]_{\ell',m'}, F(|D|)^{1/2}[u]_{\ell,m}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle ([v]_{\ell',m'})^\wedge, F \cdot ([u]_{\ell,m})^\wedge\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.4}$$

以及交织关系 (4.2)。 □

为简便起见，在下文中我们偶尔将 L^2 中的算子与其积分核等同起来。例如，根据舒尔检验和 (2.6)，映射 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{2\zeta} dr) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,s) f(s)\ s^{2\zeta} ds$ 和 $L^2(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} P_{(\alpha)}(t,\cdot,y) f(y)\ dy$ 分别在 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{2\zeta} dr)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上定义对称压缩算子。关于这一点，另请参见下文的推论 A.2。

下面的命题说明，当 $\ell = \zeta - (d-1)/2$ 时，核 $p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)$ 可由 e^{-tk^α} 的傅里叶–贝塞尔变换得到。

命题 n 4.2. 设 $\alpha \in (0,2]$ 和 $\zeta \in (-1/2, \infty)$。那么对所有 $r, s, t > 0$，有

$$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) = (rs)^{-\zeta} \int_0^\infty dk\, \mathrm{e}^{-tk^\alpha} \sqrt{kr}\sqrt{ks} J_{\zeta-\frac{1}{2}}(kr) J_{\zeta-\frac{1}{2}}(ks). \tag{4.5}$$

证明。对于 $\alpha = 2$，该积分已有表列结果，例如见 [52, 公式 (2.12.39.3)]。对于 $\alpha < 2$，结论可由从属关系 (2.4) 得出。□

现在我们可以将定义在 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{2\zeta}dr)$ 上的二次型 $\mathcal{E}_\zeta$ 与定义在 $V_{\ell,m}$ 上的型 $\mathcal{E}_{(\alpha)}$ 联系起来。此外，我们证明了在 (2.12) 中定义的 ν_ζ，等于 ν 在 $\ell = \zeta - (d-1)/2 \in L_d$ 下向 V_ℓ 投影的径向部分；见 (1.26)。

命题 4.3。设 $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,2]$, $\ell \in L_d$, $m \in M_\ell$，且 $\zeta = (d-1)/2 + \ell$。则以下陈述成立。

(1) 对所有 $u \in L^2(\mathbb{R}_+, r^{d-1+2\ell}dr)$，都有

$$\langle [u]_{\ell,m}, P^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)[u]_{\ell,m}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle u, p_\zeta^{(\alpha)}(t,\cdot,\cdot)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{2\zeta}dr)}, \quad t > 0 \tag{4.6}$$

and

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}[[u]_{\ell,m}] = \mathcal{E}_\zeta[u]. \tag{4.7}$$

(2) 对所有 $r, s, t > 0$，都有

$$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s) = (rs)^{-\ell} \iint\limits_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)} Y_{\ell,m}(\omega_y) P^{(\alpha)}(t, r\omega_x, s\omega_y)\, d\omega_x\, d\omega_y. \tag{4.8}$$

(3) 进一步，设 $\alpha \in (0,2)$ 和 $\nu_\zeta(r,s)$ 如 (2.12) 中所定义。则对所有满足 $r \neq s$ 的 r, $s > 0$，都有

$$\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}(r,s) = (rs)^{-\ell} \iint\limits_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)} Y_{\ell,m}(\omega_y) \nu(r\omega_x, s\omega_y)\, d\omega_x\, d\omega_y. \tag{4.9}$$

证明。(1) 公式 (4.6) 由引理 4.1 和命题 4.2 得出。回忆一下，通过半群 $P_{(\alpha)}$ 和 $p_\zeta^{(\alpha)}$ 对 $\mathcal{E}^{(\alpha)}[[u]_{\ell,m}]$ 和 $\mathcal{E}_\zeta[u]$ 的定义 (1.4) 和 (2.22)，公式 (4.7) 由 (4.6) 得出。

(2) 公式 (4.8) 由 $P^{(\alpha)}(t,x,y)$ 的傅里叶表示、$\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}$ 的平面波展开（推论 A.2）以及观察结果 (4.5) 得出。

(3) 公式 (4.9) 由逐点极限 $\lim_{t\searrow 0} t^{-1}P^{(\alpha)}(t,x,y) = \nu(x,y)$、(4.8)，以及控制收敛定理推出，后者用于将极限 $t \to 0$ 移入对 $\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}$ 的积分中。控制收敛定理的应用是合理的，因为 $t^{-1}P^{(\alpha)}(t,x,y) \lesssim \nu(x,y) < \infty$ (见 [7])，且 (4.9) 中的积分是在有界集上进行的。□

5. Proof of Theorem 1.5

对于 $\alpha \in (0,2)$，定理 1.5 由命题 4.3 中的 (4.7) 和定理 3.2 中的 (3.9) 推出，其中 $\zeta = (d-1+2\ell)/2$ 以及 $\eta = \ell + \sigma$。公式 (1.26) 是命题 4.3(3) 的内容。

接下来考虑 $\alpha = 2$。由 $h(r) = r^{-\ell-\sigma}$，可得

$$\begin{aligned}|(\nabla[h\cdot u]_{\ell,m})(x)|^2 = \big||x|^{-\sigma}u'(|x|) - \sigma|x|^{-\sigma-1}u(|x|)\big|^2\,|Y_{\ell,m}(\omega_x)|^2 \\ + |x|^{-2\sigma-2}|u(|x|)|^2\,|x|^2|\nabla Y_{\ell,m}(\omega_x)|^2.\end{aligned} \tag{5.1}$$

由于 $-\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 的特征值为 $\ell(d+\ell-2)$，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |x|^2|\nabla Y_{\ell,m}(\omega_x)|^2\,d\omega_x = \ell(d+\ell-2). \tag{5.2}$$

因此，回想起 $\Phi_\ell(\sigma) = \ell(d+\ell-2) + \sigma(d-\sigma-2)$，只需证明

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dr\,r^{d-1}\left[\sigma^2 r^{-2\sigma-2}|u(r)|^2 - 2\sigma\,\mathrm{Re}\left(r^{-2\sigma-1}\overline{u(r)}u'(r)\right)\right] \\ &\quad = \sigma(d-\sigma-2)\int_0^\infty dr\,r^{d-1-2\sigma}\,\frac{|u(r)|^2}{r^2}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

事实上，通过分部积分可得

$$\begin{aligned}&-\int_0^\infty dr\,r^{d-1-2\sigma-1}\overline{u(r)}u'(r) \\ &\quad = \int_0^\infty dr\,r^{d-2-2\sigma}\overline{u'(r)}u(r) + (d-2-2\sigma)\int_0^\infty dr\,r^{d-3-2\sigma}|u(r)|^2\end{aligned} \tag{5.4}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dr\,r^{d-1}\left[\sigma^2 r^{-2\sigma-2}|u(r)|^2 - 2\sigma\,\mathrm{Re}\left(r^{-2\sigma-1}\overline{u(r)}u'(r)\right)\right] \\ &\quad = \int_0^\infty dr\,r^{d-3-2\sigma}|u(r)|^2\cdot\left[\sigma^2+\sigma(d-2-2\sigma)\right] \\ &\quad = \sigma(d-\sigma-2)\int_0^\infty dr\,r^{d-1-2\sigma}\,\frac{|u(r)|^2}{r^2},\end{aligned} \tag{5.5}$$

如所声称的。至此，定理 1.5 对于 $\alpha = 2$ 的证明完成。 □

Appendix A. Plane wave expansion

我们首先给出 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上充分光滑函数的展开结果。关于这一结果及相关结果的详细综述，请参见 Kalf [38]。

命题 A.1. 设 d、$n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in C^n(\mathbb{S}^{d-1})$。那么，拉普拉斯级数表示

$$f(\omega) = \sum_{\ell\in L_d}\sum_{m\in M_\ell} \langle Y_{\ell,m}, f\rangle_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}\,Y_{\ell,m}(\omega) \tag{A.1}$$

（1）当 $n = \lfloor (d-1)/2\rfloor \vee 1$ 时，关于 $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ 一致收敛；以及（2）当 $n = 2\lfloor (d+3)/4\rfloor$ 时，关于 $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ 绝对一致收敛 .

In 下文中，令 $d \in \mathbb{N}$、$\ell \in L_d$ 和 $m \in M_\ell$。对于 x、$\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，我们有 e

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_x \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)}\, \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} = i^\ell \frac{J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(|x||\xi|)}{(|x||\xi|)^{(d-2)/2}} \cdot \overline{Y_{\ell,m}(\omega_\xi)}. \tag{A.2}$$

例如，Lapidus [42] for $d = 2$、Messiah [46, (B.105)]for $d = 3$以及 Avery 和 Avery [1, (2.17)、(3.1)、(3.25)、(3.50)、(3.68)、(4.24)-(4.25)]for $d \geq 4$中均包含了这一结果。因此，根据命题 A.1，对于任意固定的 $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，我们有 $\mathrm{e}^{i\xi\cdot x}$ 的拉普拉斯级数表示，通常称为平面波展开，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{ia\xi\cdot x}}{(2\pi)^{d/2}} &= \sum_{\ell\in L_d} i^\ell \frac{J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(|a||x||\xi|)}{(|a||x||\xi|)^{(d-2)/2}} \sum_{m\in M_\ell} \overline{Y_{\ell,m}(\mathrm{sgn}(a)\omega_\xi)} Y_{\ell,m}(\omega_x) \\ &\qquad \text{for all } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

它关于 $\omega_\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ 绝对且一致收敛。

公式 (A.3) 对球对称傅里叶符号 $\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{K}(|\xi|)$ 有以下有用推论。为简单起见，以下假设 $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^d)$，但这一思路很容易推广到满足适当条件的更一般的 $\mathcal{K}$ 。

推论 A.2. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 具有球对称性。设 $K(-i\nabla) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{K}\mathcal{F}$ 是对应于 $\mathcal{K}$ 的傅里叶乘子。那么， $K(-i\nabla)$ 的积分核 $K(x-y)$ 具有一致且绝对收敛的展开式

$$K(x-y) = \sum_{\ell\in L_d} \sum_{m\in M_\ell} K_\ell(|x|,|y|) Y_{\ell,m}(\omega_x)\, \overline{Y_{\ell,m}(\omega_y)} \tag{A.4}$$

对所有满足 $x \neq y$ 的 x、$y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，其系数为

$$K_\ell(r,s) := (rs)^{-(d-2)/2} \int_0^\infty k\, \mathcal{K}(k) J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(kr) J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(ks)\, dk \tag{A.5}$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_x\, d\omega_y\, \overline{Y_{\ell,m}(\omega_x)}\, Y_{\ell,m}(\omega_y) K(r\omega_x - s\omega_y), \quad m \in M_\ell. \tag{A.6}$$

证明. 公式 (A.4) 由命题 A.1 得出，因为

$$\begin{aligned} K(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\xi\cdot(x-y)} \mathcal{K}(\xi)\, d\xi \\ &= \sum_{\ell,\ell';m,m'} Y_{\ell,m}(\omega_x)\, \overline{Y_{\ell',m'}(\omega_y)} \int_0^\infty k^{d-1}\, \mathcal{K}(k) \frac{J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(k|x|)}{(k|x|)^{(d-2)/2}} \frac{J_{\frac{d-2}{2}+\ell'}(k|y|)}{(k|y|)^{(d-2)/2}}\, dk \\ &\quad \times i^{\ell-\ell'} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_\xi\, \overline{Y_{\ell,m}(\omega_\xi)}\, Y_{\ell',m'}(\omega_\xi) \\ &= \sum_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\omega_x)\, \overline{Y_{\ell,m}(\omega_y)} (|x||y|)^{-(d-2)/2} \int_0^\infty k\, \mathcal{K}(k) J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(kr) J_{\frac{d-2}{2}+\ell}(ks)\, dk. \end{aligned} \tag{A.7}$$

公式（A.6）由此以及 $\{Y_{\ell,m}\}_{\ell,\ m}$ 的正交归一性得出。 □

Appendix B. Properties of the $\alpha/2$-stable subordination density

对于 $\alpha \in (0,2)$ 且 $t>0$，函数 $[0,\infty) \ni \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda^{\alpha/2}}$ 完全单调，因此是拉普拉斯变换

$$\mathrm{e}^{-t\lambda^{\alpha/2}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau\lambda}\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau \tag{B.1}$$

某个非负密度 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau$ 的拉普拉斯变换，该密度称为 $\frac{\alpha}{2}$-稳定次级化转移密度。现在我们整理分析所需的 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 的一些性质。参考文献可见，例如 [51, 3, 34, 55]。

(1) 测度 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau$ 是归一化的，即

$$\int_0^\infty \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\, d\tau = 1, \quad t>0. \tag{B.2}$$

(2) 根据 [51, (4)–(5)]（另见 [3, (2)]），我们有收敛展开式

$$\begin{aligned}\sigma_t^{(\frac{\alpha}{2})}(\tau) &= \frac{t^{-\frac{2}{\alpha}}}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{t^{2/\alpha}}u} \exp\left(-u^{\alpha/2}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(u^{\alpha/2}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) du \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\alpha/2+1)}{k!}\cdot\frac{t^k}{\tau^{1+k\alpha/2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}\right) \geq 0, \quad t,\tau>0.\end{aligned} \tag{B.3}$$

特别地，

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{\sigma_t^{(\frac{\alpha}{2})}(\tau)}{t} = \frac{\Gamma(\alpha/2+1)\,\sin(\pi\alpha/2)}{\pi\,\tau^{1+\alpha/2}}, \quad \tau>0. \tag{B.4}$$

(B.3) 中的第二行最初由 Humbert [33] 形式推导，随后由 Pollard [51, 证明（4）], 另见 Bergstr¨om [3] 和 [56, 57, 27, 47, 48]中的经典论述，以及教材参考文献 [4, （5.18）–（5.19）]和 [50, （A.15）–（A.19）]（及其中的参考文献）。

(3) 由 (B.3) 可直接读出缩放关系

$$t^{2/\alpha}\sigma_t^{(\alpha/2)}(t^{2/\alpha}\tau) = \sigma_1^{(\alpha/2)}(\tau). \tag{B.5}$$

(4) 密度函数 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 是一个卷积半群 [55, , 见第 48 页–49], 即,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau'\, \sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)\,\sigma_{t'}^{(\alpha/2)}(\tau')\, f(\tau+\tau') &= \int_0^\infty d\tau\, (\sigma_t^{(\alpha/2)} * \sigma_{t'}^{(\alpha/2)})(\tau) f(\tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau\, \sigma_{t+t'}^{(\alpha/2)}(\tau) f(\tau), \quad f\in L^1.\end{aligned} \tag{B.6}$$

（5）最后，我们回顾 $\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)$ 的紧确估计。由（B.3）可得,

$$\sigma_1^{(\alpha/2)}(\tau) \sim \tau^{-1-\alpha/2}, \quad \tau \gtrsim 1. \tag{B.7}$$

另一方面,

$$\sigma_1^{(\alpha/2)}(\tau) \sim \sqrt{\frac{(\alpha/2)^{1/(1-\alpha/2)}}{2\pi(1-\alpha/2)}} \cdot \frac{\exp\left(-(1-\frac{\alpha}{2})\left(\frac{\alpha}{2\tau}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}\right)}{\tau^{(2-\alpha/2)/(2-\alpha)}}, \quad \tau \lesssim 1. \tag{B.8}$$

这一结果最早见于 Ibragimov 和 Linnik [34, 定理 2.4.6]（另见他们的公式 (2.4.1)，即 (B.3) 中的第二行）以及 Hawkes [31, 引理 1]，，最近则由 Ercolani、Jansen 和 Ueltschi [17, (4.6)–(4.8)、定理 4.4] 以及 Grzywny、Lezaj 和 Trojan [28, 定理 A 和 4.17] 在更一般的情形下重新推导。特别地，$\sigma_1^{(\alpha/2)}(\tau)$ 在 $\tau = 0$处比 τ 的任意次幂都衰减得更快，这也可以由 (B.3) 的第一行和一次非平稳相位计算推导出来。我们将公式 (B.7)–(B.8) 总结如下。

命题 B.1. 设 $\alpha \in (0, 2)$ 且 $D(\alpha) := (1-\frac{\alpha}{2})\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}$. 则,

$$\sigma_1^{(\alpha/2)}(\tau) \sim_\alpha \frac{\exp\left(-D(\alpha)\cdot\tau^{-\alpha/(2-\alpha)}\right)}{\tau^{(2-\alpha/2)/(2-\alpha)}}\mathbf{1}_{\tau<1} + \tau^{-1-\alpha/2}\mathbf{1}_{\tau>1}, \quad \tau > 0 \tag{B.9}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_t^{(\alpha/2)}(\tau)}{t} &\sim_\alpha \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}\ \exp\left(-D(\alpha)\left(\frac{t^{2/\alpha}}{\tau}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}\right)}{\tau^{(2-\alpha/2)/(2-\alpha)}}\mathbf{1}_{\tau<t^{2/\alpha}} + \tau^{-1-\frac{\alpha}{2}}\mathbf{1}_{\tau>t^{2/\alpha}} \\ &\lesssim_\alpha \tau^{-1-\frac{\alpha}{2}}, \quad t,\tau>0.\end{aligned} \tag{B.10}$$

Appendix C. Auxiliary computations

C.1. $\alpha = 2$ 的 (2.6) 式的证明。令 $\beta := r/(2t)^{1/2}$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ds\, s^{2\zeta} p_\zeta^{(2)}(t,r,s) &= (2t)^{-\frac{1}{2}} r^{-\zeta}\int_0^\infty ds\, s^\zeta \cdot \sqrt{\frac{rs}{2t}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2+s^2}{4t}}\cdot I_{\zeta-1/2}\left(\frac{rs}{2t}\right) \\ &= \beta^{-2\zeta-1}\int_0^\infty ds\, s^{\zeta+1/2}\exp\left(-\frac{\beta^2+s^2/\beta^2}{2}\right)\cdot I_{\zeta-1/2}(s) = 1\end{aligned} \tag{C.1}$$

通过缩放 $s \mapsto s\cdot 2t/r$。最后一个等式由 [15, (10.43.23)], 得出，即,

$$\int_0^\infty t^{\nu+1}\exp(-p^2t^2)\cdot I_\nu(bt)\,dt = \frac{b^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{b^2}{4p^2}\right) \tag{C.2}$$

for $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ 且 $\mathrm{Re}(p^2)\ b > 0$。这里 $b = 1$、$\nu = \zeta - 1/2$ 和 $p^2 = 1/(2\beta^2)$。

C.2. 对 $\alpha = 2$ 的（2.7）式的证明。回顾 [15, (10.43.28)], ，即,

$$\int_0^\infty z\,\mathrm{e}^{-p^2z^2} I_\rho(az) I_\rho(bz)\,dz = \frac{1}{2p^2}\exp\left(\frac{a^2+b^2}{4p^2}\right) I_\rho\left(\frac{ab}{2p^2}\right), \quad \rho > -1, \quad \mathrm{Re}(p^2) > 0.$$

将此公式与 $\rho=\zeta-1/2$、 $p=\sqrt{\frac{t+t'}{4tt'}}$、 $a=\frac{r}{2t}$ 和 $b=\frac{s}{2t'}$ 一起使用，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty p_\zeta^{(2)}(t,r,z)p_\zeta^{(2)}(t',z,s)z^{2\zeta}\,dz\\&=\frac{(rs)^{1/2-\zeta}}{4tt'}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}-\frac{s^2}{4t'}\right)\int_0^\infty z\,\exp\left(-z^2\cdot\frac{t+t'}{4tt'}\right)I_{\zeta-1/2}\left(\frac{rz}{2t}\right)I_{\zeta-1/2}\left(\frac{sz}{2t'}\right)\,dz\\&=\frac{(rs)^{1/2-\zeta}}{2(t+t')}\exp\left(-\frac{r^2+s^2}{4(t+t')}\right)\cdot I_{\zeta-1/2}\left(\frac{rs}{2(t+t')}\right)=p_\zeta^{(2)}(t+t',r,s),\end{aligned}$$

如所需。

C.3. (2.13) 的证明。对于 r、 $s>0$，且满足 $r\neq s$，我们将验证

$$I_\zeta^{(\alpha)}(r,s):=\int_0^\infty\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi\,\tau^{1+\alpha/2}}\cdot\frac{(rs)^{\frac12-\zeta}}{2\tau}\exp\left(-\frac{r^2+s^2}{4\tau}\right)I_{\zeta-\frac12}\left(\frac{rs}{2\tau}\right)\,d\tau\tag{C.3}$$

等于 (2.13) 的右端。通过对 $\tau\mapsto1/\tau$ 进行反射，只需计算

$$\int_0^\infty\frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(-\tau\,\frac{r^2+s^2}{4}\right)I_{\zeta-\frac12}\left(\tau\cdot\frac{rs}{2}\right)\,d\tau.\tag{C.4}$$

为此，我们使用 [52,(2.15.3.2)], ，即

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{\tilde\alpha}\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,I_\nu(c\tau)\\&\quad=p^{-\tilde\alpha-\nu}\,\left(\frac{c}{2}\right)^\nu\,\frac{\Gamma(\nu+\tilde\alpha)}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\tilde\alpha+\nu}{2},\frac{\tilde\alpha+\nu+1}{2};\nu+1;\frac{c^2}{p^2}\right)\end{aligned}\tag{C.5}$$

其中 $\mathrm{Re}(\tilde\alpha+\nu)>0$， $|\mathrm{Re}(c)|<\mathrm{Re}(p)$。在我们的情形下， $p=(r^2+s^2)/4$、 $c=rs/2$、 $\tilde\alpha=1+\alpha/2$，且 $\nu=\zeta-1/2>-1$。因此， [52, (2.15.3.2)] 的条件均满足，我们得到

$$\begin{aligned}I_\zeta^{(\alpha)}(r,s)=2^{1+\alpha}&\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\,\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi}\,\frac{\Gamma(\zeta+\frac{\alpha}{2}+\frac12)}{\Gamma(\zeta+\frac12)}\,(r^2+s^2)^{-(\zeta+\frac{\alpha}{2}+\frac12)}\\&\times\,{}_2F_1\left(\frac{\zeta+\alpha/2+1/2}{2},\frac{\zeta+\alpha/2+3/2}{2};\zeta+\frac12;\frac{4(rs)^2}{(r^2+s^2)^2}\right),\end{aligned}\tag{C.6}$$

如所期望的那
样。

C.4. (3.13) 的证明。为证明 (3.13)，我们对 $s\mapsto2ts$ 进行缩放，得到

$$\int_0^\infty ds\,s^{\gamma-\zeta}\cdot\frac{s^{\frac12}}{2t}\mathrm{e}^{-\frac{s^2+1}{4t}}I_{\zeta-\frac12}\left(\frac{s}{2t}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}(2t)^{\frac12+\gamma-\zeta}\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{-ts^2}s^{\gamma-\zeta+\frac12}I_{\zeta-\frac12}(s).\tag{C.7}$$

现在我们使用 [15, (10.25.2)]，即，

$$I_{\zeta-1/2}(\tau)=\left(\frac{\tau}{2}\right)^{\zeta-1/2}\sum_{k=0}^\infty\frac{(\tau^2/4)^k}{k!\Gamma(\zeta+1/2+k)},\quad\tau\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\tag{C.8}$$

并得到，对于 $\gamma > -1$,

$$\int_0^\infty ds\, \mathrm{e}^{-ts^2} s^{\gamma-\zeta+\frac{1}{2}} I_{\zeta-1/2}(s) = 2^{-(\zeta+1/2)} t^{-(\gamma+1)/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{-2k}\Gamma\left(\frac{\gamma+1+2k}{2}\right) t^{-k}}{k!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}+k\right)}. \tag{C.9}$$

因此，(C.7) 的左端为

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}(2t)^{\frac{1}{2}+\gamma-\zeta} \cdot 2^{-(\zeta+\frac{1}{2})} t^{-(\gamma+1)/2} \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{-2k}\Gamma\left(\frac{\gamma+1+2k}{2}\right) t^{-k}}{k!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}+k\right)} \\ &= 2^{\gamma-2\zeta} t^{\frac{1}{2}(\gamma-2\zeta)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1+2k}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{1}{4t}\right)^k. \end{aligned} \tag{C.10}$$

因此，只需证明

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1+2k}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{1}{4t}\right)^k = \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{2\zeta-\gamma}{2}; \zeta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4t}\right). \tag{C.11}$$

~ ~利用 [15, (13.2.4), (13.2.39)], 即 ${}_1F_1(a;b;z) = {}_1F_1(b-a;b;-z)$ e^z 对所有 $z \in \mathbb{C}$，我们得到右端等于

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right) \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}(\gamma+1); \zeta+\frac{1}{2}; \frac{1}{4t}\right) \mathrm{e}^{-1/(4t)}. \tag{C.12}$$

结合 (C.11)，可知只需证明

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1+2k}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{1}{4t}\right)^k = \Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right) \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}(\gamma+1); \zeta+\frac{1}{2}; \frac{1}{4t}\right). \tag{C.13}$$

为此，我们回顾 [15, (13.2.2)]

$${}_1\tilde{F}_1(a;b;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)}{k!\Gamma(b+k)} z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{C.14}$$

因此，(C.13) 的右端为

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1+2k}{2})}{k!\Gamma(\zeta+\frac{1}{2}+k)} \left(\frac{1}{4t}\right)^k, \tag{C.15}$$

这确实等于 (C.13) 的左端。

C.5. (3.14) 的证明。要证明 (3.14)，只需证明其中最后一行

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^\beta \cdot 2^{\gamma-2\zeta} t^{\frac{1}{2}(\gamma-2\zeta)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right) \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}(2\zeta-\gamma); \zeta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4t}\right) \\ &= 2^{\gamma-2\zeta}\Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right) \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\beta-\zeta+\frac{\gamma}{2}} \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}(2\zeta-\gamma); \zeta+\frac{1}{2}; -\frac{1}{4t}\right) \\ &= 2^{-2\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right) \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\zeta-\beta-\frac{\gamma}{2}} \cdot {}_1\tilde{F}_1\left(\frac{1}{2}(2\zeta-\gamma); \zeta+\frac{1}{2}; -t\right) \\ &= \frac{2^{-2(\beta+1)}\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(2\zeta-2\beta-\gamma)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(2\zeta-\gamma)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+1)\right)}. \end{aligned} \tag{C.16}$$

这里我们代入 $t \mapsto t^{-1}$，然后代入 $t \mapsto 4t$，从而由第二行推出第三行。要证明最后一行，我们使用 [15, (13.10.10)]，即，

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^\delta \, {}_1\tilde{F}_1(a;b;-t)\, dt = \frac{\Gamma(a-\delta)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a)\Gamma(b-\delta)}, \quad 0 < \mathrm{Re}(\delta) < \mathrm{Re}(a), \tag{C.17}$$

并设 $\delta = \frac{1}{2}(2\zeta - 2\beta - \gamma)$、$a = \frac{1}{2}(2\zeta - \gamma)$ 和 $b = \zeta + \frac{1}{2}$。因此，我们的参数必须满足 $0 < 2\zeta - 2\beta - \gamma < \zeta - \gamma$，即 $\beta \in (0, (2\zeta - \gamma)/2)$。证明到此结束。

Index

$H^s(\mathbb{R}^d)$, 2I_ν, 13
J_ν, 13L_d, 4M_ℓ,
4$P(t,x,y)$, 7$P^{(\alpha)}$
(t,x,y), 2V_ℓ, 5V_ℓ,
$_m$, 5$[u]_{\ell,m}$, 4$\mathcal{F}$,
2$\mathcal{F}_\ell$, 20$\Phi(\sigma)$, 7Φ_ℓ
(σ), 7$\Phi^{(\alpha)}_{d\,\ell}$, (σ),
6$\mathcal{A}_{d,-\alpha}$, 2$\mathcal{E}$, 7
$\mathcal{E}^{(2)}$, 2$\mathcal{E}^{(\alpha)}$, 2$\mathcal{E}_\zeta$,
17$\mathcal{I}_{\ell,\sigma}$, 7$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$,
2$\lfloor x \rfloor$, 13 $\hat{}f$, 2
$\kappa_{\mathrm{c}}^{(\alpha)}(\ell)$, 6$\kappa_{\mathrm{c}}$, 7$\kappa_{\mathrm{c}}$
(ℓ), 7$\kappa_{\mathrm{c}}^{(\alpha)}$, 3 .,
13$\nu(x,y)$, 2$\nu_\zeta(r,s)$,
16$^{\nu_{\frac{d-1}{2}+\ell}}(r,s)$,
7ω_x, 4$\sim$, 13$\vee$,
13$\wedge$, 13$_1F_1(a;b;z)$,
13$_{\sim 1}F_1(a;b;z)$,
13$_2F_1(a,b;\ c;\ z)$,
13$_{\sim 2}F_1(a,b;\ c;\ z)$,
13$p_\zeta^{(\alpha)}(t,r,s)$,
14

References

[1] J. E. Avery 和 J. S. Avery。《超球谐函数及其物理应用》。世界科技出版公司，2018年。[2] H. Bahouri、J.-Y. Chemin 和 R. Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，数学科学基础丛书第343卷。施普林格，海德堡，2011年。[3] H. Bergstr¨om。关于稳定分布函数的若干展开。《数学档案》，2：375–378，1952年。[4] K. Bogdan、T. Byczkowski、T. Kulczycki、M. Ryznar、R. Song 和 Z. Vondraˇcek。《稳定过程的势分析及其扩展》，数学讲义第1980卷。施普林格出版社，柏林，2009年。Piotr Graczyk 和 Andrzej Stos 编。[5] K. Bogdan、B. Dyda 和 P. Kim。半群的 Hardy 不等式与非爆炸性结果。《势分析》，44(2)：229–247，2016年。[6] K. Bogdan、T. Grzywny、T. Jakubowski 和 D. Pilarczyk。带Hardy势的分数阶拉普拉斯算子。《偏微分方程通讯》，44(1)：20–50，2019年。[7] K. Bogdan、T. Grzywny 和 M. Ryznar。单峰卷积半群的稠密性与尾部。《泛函分析杂志》，266(6)：3543–3571，2014年。[8] K. Bogdan、T. Jakubowski、J. Lenczewska 和 K. Pietruska-Pa luba。 L^p上的分数阶拉普拉斯算子的最优Hardy不等式。《泛函分析杂志》，282(8)：论文编号109395，31页，2022年。[9] A. N. Borodin 和 P. Salminen。《布朗运动手册——事实与公式》。概率及其应用。Birkh¨auser出版社，巴塞尔，第二版，2002年。[10] T. A. Bui 和 P. D'Ancona。广义Hardy算子。《非线性》，36(1)：171–198，2023年。[11] T. A. Bui 和 G. Nader。与广义Hardy算子相关的Hardy空间及其应用。《NoDEA非线性微分方程及其应用》，29(4)：论文编号40，共40页，2022年。[12] S. Cho、P. Kim、R. Song 和 Z. Vondraˇcek。非局部算子的Dirichlet热核的因子分解与估计，含临界杀死项。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑），143：208–256，2020年。[13] B. Devyver、M. Fraas 和 Y. Pinchover。二阶椭圆算子的最优 Hardy 权：对 Agmon 问题的解答。《泛函分析杂志》，266(7)：4422–4489，2014年。[14] S. Dipierro、L. Montoro、I. Peral 和 B. Sciunzi。涉及Hardy-Leray势的非局部临界问题正解的定性性质。《变分法与偏微分方程》，55(4)：第99号文章，29页，2016年。[15] 美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2018年12月15日发布的1.0.21版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller 和 B. V. Saunders 编。[16] B. Dyda。幂函数的分数阶微积分与分数阶拉普拉斯算子的特征值。《分数阶微积分与应用分析》，15(4)：536–555，2012年。[17] N. M. Ercolani、S. Jansen 和 D. Ueltschi。重尾随机变量的奇点分析。《理论概率》，32(1)：1–46，2019年。[18] P. J. Fitzsimmons。Dirichlet型的Hardy不等式。《数学分析及其应用杂志》，250(2)：548–560，2000年。[19] R. L. Frank 和 L. Geisinger。拉普拉斯算子分数幂的精细半经典渐近。《纯粹与应用数学杂志》，712：1–37，2016年。[20]R. L. Frank、E. H. Lieb 和 R. Seiringer。分数阶薛定谔算子的Hardy-Lieb-Thirring不等式。《美国数学会杂志》，21(4)：925–950，2008年。[21] R. L. Frank、K. Merz 和 H. Siedentop。涉及广义Hardy算子的Sobolev范数等价性。《国际数学研究通知》，2021(3)：2284–2303，2021年2月。[22] R. L. Frank、K. Merz 和 H. Siedentop。相对论强Scott猜想：一个简短证明。载于 B.-G. Englert、H. Siedentop 和 M.-I. Trappe 编，《多粒子密度泛函：数学理论与物理应用》，新加坡国立大学数学科学研究所讲义系列第41卷，第69–79页。世界科技出版公司，2023年4月。

R. L. Frank、K. Merz 和 H. Siedentop。《大库仑体系的Scott猜想：综述》。《数学物理快报》，113(1)：论文编号11，2023年。[24] R. L. Frank、K. Merz、H. Siedentop 和 B. Simon。Chandrasekhar原子的强Scott猜想证明。《纯粹与应用泛函分析》，5(6)：1319–1356，2020年12月。[25] R. L. Frank 和 R. Seiringer。非线性基态表示与尖锐Hardy不等式。《泛函分析杂志》，255(12)：3407–3430，2008年。[26] M. Fukushima、Y. Oshima 和 M. Takeda。《Dirichlet型与对称马尔可夫过程》，数学研究丛书第19卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，增订版，2011年。[27] W. Gawronski。单侧稳定律导数的渐近形式。《概率年刊》，16(3)：1348–1364，1988年。[28] T. Grzywny、L. Le˙zaj 和 B. Trojan。正阶从属过程的转移密度。《Jussieu数学研究所杂志》，22(3)：1119–1179，2023年。[29] G. H. Hardy。积分学若干问题札记 LI：关于Hilbert双级数定理，以及有关无穷级数与积分收敛性的若干相关定理。《数学信使》，48：107–112，1919年。[30] G. H. Hardy。关于Hilbert定理的一则注记。《数学杂志》，6(3–4)：314–317，1920年。[31] J. Hawkes。关于稳定从属过程的一个下Lipschitz条件。《概率论与应用领域》，17：23–32，1971年。[32] I. W. Herbst。算子$(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$的谱理论。《数学物理通讯》，53：285–294，1977年。[33] P. Humbert。新的符号对应。《数学科学通报》（第2辑），69：121–129，1945年。[34] I. A. Ibragimov 和 Y. V. Linnik。《独立平稳随机变量序列》。Wolters-Noordhoff Publishing，格罗宁根，1971年。附 I. A. Ibragimov 和 V. V. Petrov 所撰补充章节；俄文译本由 J. F. C. Kingman 编辑。[35] T. Jakubowski、K. Kaleta 和 K. Szczypkowski。带奇异势的分数阶型薛定谔算子的束缚态与热核。arXiv电子预印本，页面编号arXiv:2208.00683，2022年8月。[36] T. Jakubowski 和 P. Maciocha。半直线上分数阶拉普拉斯算子的基态表示。arXiv电子预印本，页面编号arXiv:2206.05157，2022年6月。[37] T. Jakubowski 和 J. Wang。带负Hardy势的分数阶薛定谔算子的热核估计。《势分析》，53(3)：997–1024，2020年。[38] H. Kalf。任意维数下函数按球谐函数展开。《比利时数学学会 Simon Stevin 通报》，2(4)：361–380，1995年。[39] T. Kato。《线性算子扰动理论》，数学科学基础丛书第132卷。施普林格出版社，柏林，第1版，1966年。[40] V. F. Kovalenko、M. A. Perelmuter 和 Y. A. Semenov。带 $L_w^{l/2}(\mathbb{R}^l)$势的薛定谔算子。《数学物理杂志》，22：1033–1044，1981年。[41] T. Kulczycki 和 M. Ryznar。L´evy过程的调和函数与转移密度的梯度估计。《美国数学会汇刊》，368(1)：281–318，2016年。[42] I. R. Lapidus。二维量子力学散射。《美国物理学杂志》，50(1)：45–47，1982年。[43] A. Le Yaouanc、L. Oliver 和 J.-C. Raynal。临界值 $\alpha_c=2/\pi$附近的Hamilton量$(p^2+m^2)^{1/2}-\alpha/r$。《数学物理杂志》，38(8)：3997–4012，1997年。

[44] J. Ma lecki、G. Serafin 和 T. Zorawik。傅里叶–贝塞尔热核估计。《数学分析及其应用杂志》，439(1):91–102，2016。[45] K. Merz。与广义Hardy算子相关的索ոբ列夫空间尺度。《数学杂志》，299(1):101–121，2021。[46] A. Messiah。《量子力学》，第1卷。Dunod，巴黎，第2版，1969。[47] E. W. Montroll 和 J. T. Bendler。关于介电弛豫的 L´évy（或稳定）分布及 Williams-Watts 模型。《统计物理杂志》，34(1-2):129–162，1984。[48] E. W. Montroll 和 B. J. West。第2章——关于随机过程的丰富集合。载于 E. Montroll 和 J. Lebowitz 编，《涨落现象》，第61–175页。Elsevier，1979。[49] P. Patie 和 M. Savov。非自伴广义拉盖尔半群的谱展开。《美国数学会回忆录》，272(1336):vii+182，2021。[50] W. Paul 和 J. Baschnagel。《随机过程》。施普林格，海德堡，第2版，2013。从物理学到金融学。[51] H. Pollard。e^{-x^λ} 作为拉普拉斯积分的表示。《美国数学会通报》，52:908–910，1946。[52] A. P. Prudnikov、Y. A. Brychkov 和 O. I. Marichev。《积分与级数》第2卷。Gordon & Breach Science Publishers，纽约，第2版，1988。特殊函数，N. M. Queen 俄译英。[53] M. Reed 和 B. Simon。《现代数学物理方法》第二卷：傅里叶分析与自伴性。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 纽约，1975。[54]D. Revuz 和 M. Yor。《连续鞅与布朗运动》，《数学科学基础丛书》第293卷 [数学科学基本原理]。施普林格出版社，柏林，第3版，1999。[55] R. L. Schilling、R. Song 和 Z. Vondraˇcek。《伯恩斯坦函数》，De Gruyter 数学研究丛书第37卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，第2版，2012。理论与应用。[56] A. V. Skorohod。稳定分布律的渐近公式。《苏联科学院院刊（新辑）》，98:731–734，1954。[57]A. V. Skorohod。稳定分布律的渐近公式。载于《数学统计与概率论精选译文》第1卷，第157–161页。数学统计研究所和美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961。[58]D. Yafaev。哈代–雷利赫不等式中的尖锐常数。《泛函分析杂志》，168(1):212–144，1999年10月。

(KrzysztofBogdan) Department of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, Hoene-Wrońskiego 13C, 50-376 Wrocław, Poland电子邮箱地址：krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

(Konstantin Merz) Institut für Analysis und Algebra,
Technische Universität Braun-schweig, Universitätsplatz 2, 38106 Braunschweig, Germany, and Department ofMathematics, Graduate School of Science,
Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan电子邮箱地址：k.merz@tu-bs.de