arXiv:2305.00896v1 [math.DS] 1 May 2023

幂零康托尔作用的素谱与动力学

STEVEN HURDER 和 OLGA LUKINA

Abstract. 离散群 Γ 在康托尔集 X 上通过同胚给出的极小等度连续作用，如果每个同胚都能从小开集唯一延拓到 X上直径一致的开集，则称为局部拟解析。若 Γ的作用以及 Γ 在 X的同胚群中的闭包的作用都局部拟解析，则称极小作用是稳定的。

当 Γ 几乎幂零时，我们称 $\Phi\colon \Gamma \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 为幂零康托作用。我们证明，具有有限素数谱的幂零康托作用必定稳定。我们还证明，海森堡群存在不可数多个彼此不同的康托作用，它们必然具有无限素数谱，且都不稳定。

1. Introduction

可数群 Γ 在康托空间 $\mathfrak{X}$ 上的极小等度连续作用 $\Phi\colon \Gamma \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 称为广义里程表 [9, 15]。当 $\Gamma = \mathbb{Z}$时，这只是整数的传统里程表作用的抽象形式。对于 $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ 且满足 $n \geq 2$的情形，会得到一类更为复杂的作用；随着 n 增加，这类作用的分类会愈发难以处理 [27], ，尽管由 $\mathbb{Z}^n$ 给出的极小等度连续康托作用的动力学性质表现良好。对于一般的 Γ ，我们简称其为康托作用，并始终假设它们是极小且等度连续的。

一个 $\mathbb{Z}$-里程表可由其施泰尼茨序分类，这是通过将该作用表示为有限循环群上各作用的逆极限来计算的。对于 $\mathbb{Z}^n$ 的康托作用，也可以为其关联施泰尼茨序，以及一组类型，称为其类型集；类型集由 $\mathbb{Z}^n$ 中各个元素的施泰尼茨序的等价类组成。正如 Thomas 在 [28, 第 4], 节中所述，类型集这一额外数据仍不足以将 $\mathbb{Z}^n$ 的康托作用分类问题归约为标准博雷尔等价关系。

在作者的工作 [20], 中，我们为任意可数群 Γ的康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 引入了类型和类型集不变量。类型 $\tau[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 是该作用表示为 Γ 在有限集上的作用之逆极限时，其施泰尼茨序 $\xi(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 的渐近等价类。

与类型 $\tau[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 相关联的是一个更基本的不变量——素数谱 $\pi[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$，它由在代表该类型 $\tau[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$的施泰尼茨序 $\xi(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 中出现的素数构成，参见第 2.14 节。素数谱可分解为两部分，

$$\pi[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] = \pi_\infty[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] \cup \pi_f[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi],$$

其中，无限素数谱 $\pi_\infty[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 由在 $\xi(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 中以无限重数出现的素数组成；有限素数谱 $\pi_f[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 则由以有限重数出现的素数组成。素数谱和有限素数谱仅在模去 $\pi_f[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 的有限子集后才定义良好。

定义 1.1. 若康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 的素数谱 $\pi[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$是有限集，则称其具有有限谱；否则称其具有无限谱。

一般而言， Γ 康托作用的分类难以处理，因此人们寻求康托作用的不变量，以至少区分特定类别的作用。作者的研究[16, 17, 18, 19] 探讨了能产生康托作用不变量的动力学性质。特别是，

版本日期：2023年5月1日。2020 *Mathematics Subject Classification*。主要分类：20E18、37B05、37B45；次要分类：57S10。关键词：里程表、康托作用、仿射群、施泰尼茨数、海森堡群。

最基本的不变量之一，是该作用具有稳定性还是野性。本文旨在阐明康托作用的素数谱与其野性之间的关系。

正如下面第2.5节将详细解释的，作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 稳定这一性质，是完备化 $\mathfrak{G}(\Phi) = \Phi(\Gamma) \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$ 的作用所具有的性质；该完备化是一个自然作用于 $\mathfrak{X}$ 的副有限群。作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 局部拟解析这一性质在定义2.10中给出；如果 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 在 $\mathfrak{X}$ 上的作用也局部拟解析，则 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是稳定的。如果 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是稳定的，那么 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 就是局部拟解析的。即使对于幂零群的作用，反过来也未必成立，稍后我们将看到这一点。

若 Γ 含有一个有限指数的有限生成幂零子群，则称康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是幂零的。这类群作用尤其有趣，因为相较于阿贝尔康托尔作用，它自然代表了更高一层的复杂性。我们给出关于幂零康托作用的以下三个结果。

定理 1.2。设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个幂零康托作用。如果素数谱 $\pi[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 是有限的，则该作用是稳定的。

定理 1.2 的逆命题并不成立。我们证明，任意有限或无限的素数集合，都可以实现为某个稳定幂零康托尔作用的素数谱。

定理 1.3。设 π_f 和 π_∞ 是两个不同的素数集，其中 π_f 是有限集，且 π_∞ 是非空有限集或无限集。则存在一个稳定幂零康托尔作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$，使得 $\pi_\infty[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] = \pi_\infty$ 和 $\pi_f[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] = \pi_f$。

设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个康托作用。若该作用有效，则它是自由的，而闭包 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的作用也自由，这意味着该作用是稳定的。有效的幂零康托作用未必是自由的，甚至可能存在一些元素在康托尔集 $\mathfrak{X}$ 的某个开闭子集上固定每个点。作者在其工作 [17] 中证明，幂零康托作用是局部拟解析的，这意味着此类不动点子集不可能任意小，因为其直径在整个康托尔集 $\mathfrak{X}$ 上都有一个统一的下界。令人惊讶的是，如果允许 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 具有无限素数谱，就可以构造出野幂零作用；如定理 1.4 所示，这些作用的闭包 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的作用并非局部拟解析。此外，定理 1.4 还是一个实现性结果，它表明每个无限素数集合都可以实现为某个野性幂零康托作用的素数谱。

定理 1.4. 给定任意两个不同的素数集合 π_f 和 π_∞，其中 π_f 是无限集，π_∞ 是任意集合（可以为空），则存在海森堡群的一个极小等度连续作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$，使得 $\pi_f[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] = \pi_f$和 $\pi_\infty[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi] = \pi_\infty$。

此外，存在不可数多个海森堡群的幂零康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$，其素数谱无限，并且满足：

(1) 每个 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 都是拓扑自由的；(2) 每个 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 都具有野性；(3) 这类作用的素数谱两两不同。

康托作用的回归等价概念及其与作用共轭的关系，将在第 2.4 节中阐述。下面的推论 1.5 是由如下结果推出的：该作用的素数谱是其回归等价类的不变量，参见定理 2.16。

推论 1.5. 存在不可数多个海森堡群 Γ 的幂零康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$，它们彼此不具有返回等价性，因此也不共轭。

定理 1.4 的结论用于 [21] 中，以计算以幂零流形为底空间的溶质流形的映射类群。

我们注意到，对于更一般的群 Γ，定理 1.2 的类似结论未必成立。例如，[4, 6, 7, 25], 研究的弱分支群作用在 d正则根树的边界上，因此具有有限素数谱 $\{d\}$，但其在康托边界上的作用的动力学却是野性的。

问题 1.6. 设 $(\mathfrak{X},\Gamma,\Phi)$ 是一个康托作用。对于哪些群类 Γ，作用的素数谱有限意味着该作用是稳定的?

本文安排如下。第 2.1 节回顾康托集上极小等度连续群作用的基本性质。特别地，我们在定义 2.14 中给出极小等度连续作用的素数谱的定义。我们在第 3 节证明定理 1.2，并在第 4 节给出幂零康托作用的基本例子。在第 5 节中，我们构造具有指定素数谱的海森堡群的稳定作用和野性作用，从而证明定理 1.3 和 1.4，并由此推导出推论 1.5。

2. 康托作用

我们回顾康托作用的一些基本性质，这些性质是证明定理 1.2 和 1.4 所需的。关于等度连续康托作用性质的更全面讨论，见 Auslander 的著作 [2], 、Cortez 和 Petite 的论文 [9], 、Cortez 和 Medynets 的论文 [10], ，以及作者的相关著作，特别是 [11, 12] 和 [18, 第 3] 节。

2.1. 基本概念。设（$\mathfrak{X},\Gamma,\Phi$）表示一个作用 $\Phi\colon \Gamma\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$。在适当情况下，我们将 $g\cdot x$ 写作 $\Phi(g)(x)$。$x\in\mathfrak{X}$ 的轨道是子集 $\mathcal{O}(x)=\{g\cdot x\mid g\in\Gamma\}$。若对所有 $x\in\mathfrak{X}$，其轨道 $\mathcal{O}(x)$ 在 $\mathfrak{X}$中稠密，则该作用是极小的。

若对所有 $\varepsilon>0$ 都存在$\delta>0$，使得对任意 x、$y\in\mathfrak{X}$ 和 $g\in\Gamma$，只要 $d_{\mathfrak{X}}(x,y)<\delta$，就有 $d_{\mathfrak{X}}(g\cdot x, g\cdot y)<\varepsilon$，则作用（$\mathfrak{X},\Gamma,\Phi$）关于 $\mathfrak{X}$上的度量 $d_{\mathfrak{X}}$ 是等度连续的。等度连续这一性质与 $\mathfrak{X}$ 上度量的选择无关，只要该度量与 $\mathfrak{X}$的拓扑相容即可。

现在假设 $\mathfrak{X}$ 是一个康托空间。令 $\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$ 表示 $\mathfrak{X}$的所有既开又闭（闭且开）子集构成的集合，它构成了 $\mathfrak{X}$拓扑的一个基。对于 $\phi\in\mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$ 和 $U\in\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$，像 $\phi(U)\in\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$。以下结果众所周知，证明见 [17, 命题 3.1]。

命题 2.1. 对于一个康托空间 $\mathfrak{X}$，极小作用 $\Phi\colon \Gamma\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ 是等度连续的，当且仅当在诱导作用 $\Phi_*\colon \Gamma\times\mathrm{CO}(\mathfrak{X})\to\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$ 下，每个 $U\in\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$ 的 Γ-轨道都是有限的。

定义 2.2. 若 U 是非空开闭子集，且对于任意 $g\in\Gamma$，若 $\Phi(g)(U)\cap U\neq\emptyset$，则 $\Phi(g)(U)=U$，我们称 $U\subset\mathfrak{X}$ 适配于作用 $(\mathfrak{X},\Gamma,\Phi)$。

命题 3.1] 的证明表明，给定 $x\in\mathfrak{X}$ 和开闭集 $x\in W$，存在一个适配的开闭集 U，使得 $x\in U\subset W$。

对于适配集 U，到 U 的“返回时刻”集合，

$$\Gamma_U=\{g\in\Gamma\mid g\cdot U\cap U\neq\emptyset\} \tag{1}$$

是 Γ 的一个子群，称为 U 的稳定子。于是，对于 $g,g'\in\Gamma$，若 $g\cdot U\cap g'\cdot U\neq\emptyset$，则有 $g^{-1}g'\cdot U=U$，因此 $g^{-1}g'\in\Gamma_U$。于是，平移集 $\{g\cdot U\mid g\in\Gamma\}$ 构成 $\mathfrak{X}$ 的一个有限闭开划分，并与商空间 $X_U=\Gamma/\Gamma_U$ 一一对应。接着 Γ 通过置换作用于有限集 X_U，因此稳定子群 $\Gamma_U\subset G$ 的指数有限。注意，这意味着若 $V\subset U$ 是适配集的真包含关系，则包含关系 $\Gamma_V\subset\Gamma_U$ 也是真包含关系。

定义 2.3. 设 $(\mathfrak{X},\Gamma,\Phi)$ 是一个康托作用。若既开又闭集的严格递降链$\mathcal{U}=\{U_\ell\subset\mathfrak{X}\mid\ell>0\}$ 满足对所有 $\ell>0$，$x\in U_{\ell+1}\subset U_\ell$ 都是真包含，且 $\cap_{\ell>0}U_\ell=\{x\}$，并且每个 U_ℓ 都适配于作用 Φ，则称其为作用 Φ 在 $x\in\mathfrak{X}$ 处的适配邻域基。

给定 $x\in\mathfrak{X}$ 和 $\varepsilon>0$，命题 2.1 意味着存在适配的既开又闭集 $U\in\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$，使得$x\in U$ 且 $\mathrm{diam}(U)<\varepsilon$。因此，可以在 $\mathrm{CO}(\mathfrak{X})$ 中选取一条由适配集构成的递降链 $\mathcal{U}$，其交集为 x，由此可得以下结果:

命题 2.4. 设 $(\mathfrak{X},\Gamma,\Phi)$ 是一个康托作用。给定 $x\in\mathfrak{X}$，存在一个适配邻域基 $\mathcal{U}$，其对应于 x，用于作用 Φ。

综合以上论述，我们得到：

推论 2.5. 设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个康托作用，且 $\mathcal{U}$ 是一个适配邻域基。令 $\Gamma_\ell = \Gamma_{U_\ell}$，其中 $\Gamma_0 = \Gamma$，则存在一个有限指数子群的嵌套链，$\mathcal{G}_\mathcal{U} = \{\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots\}$。

2.2. 副有限完备化。设 $\Phi(\Gamma) \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$ 表示作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 的像子群。当该作用是等度连续时，映射在一致拓扑下的闭包 $\Phi(\Gamma) \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$ 是一个可分副有限群。我们采用记号 $\mathfrak{G}(\Phi) \equiv \Phi(\Gamma)$。

设 $\Phi\colon \mathfrak{G}(\Phi) \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 表示 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 在 $\mathfrak{X}$ 上的诱导作用；由于作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是极小的，该作用是传递的。对于 $\widehat{g} \in \mathfrak{G}(\Phi)$，我们将其在 $\mathfrak{X}$ 上的作用记为 $\widehat{g}\, x = \Phi(\widehat{g})(x)$。给定 $x \in \mathfrak{X}$，引入各向同性群，

$$\mathfrak{D}(\Phi, x) = \{\widehat{g} \in \mathfrak{G}(\Phi) \mid \widehat{g}\, x = x\} \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X}) \ , \tag{2}$$

它是 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的一个闭子群，因此要么是有限群，要么是无限副有限群。由于作用 $\Phi\colon \mathfrak{G}(\Phi) \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 是传递的，$\mathfrak{D}(\Phi, x)$ 在 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 中的共轭类与 x 的选择无关。为方便起见，我们省略下标 x。群 $\mathfrak{D}(\Phi)$ 称为作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 的判别群 [12, 16, 18], ; 在 Bartholdi 和 Grigorchuk 的著作中，它被称为抛物子群（可数群的有限群拓扑完备化的闭子群） [5, 6]。

2.3. 代数康托作用。设 $\mathcal{G} = \{\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots\}$ 是有限指数子群的一个递降链。令 $X_\ell = \Gamma/\Gamma_\ell$，并注意到 Γ 在有限集 X_ℓ 上的左作用是传递的。包含关系 $\Gamma_{\ell+1} \subset \Gamma_\ell$ 诱导出一个自然的 Γ-不变商映射 $p_{\ell+1}\colon X_{\ell+1} \to X_\ell$。引入逆极限

$$\begin{aligned} X_\infty &\equiv \varprojlim \{p_{\ell+1}\colon X_{\ell+1} \to X_\ell \mid \ell \geq 0\} \\ &= \{(x_0, x_1, \ldots) \in X_\infty \mid p_{\ell+1}(x_{\ell+1}) = x_\ell \text{ for all } \ell \geq 0\ \} \subset \prod_{\ell \geq 0} X_\ell \ . \end{aligned} \tag{3}$$

于是，X_∞ 是一个带有提霍诺夫拓扑的康托空间，其中 Γ 在因子 X_ℓ 上的作用诱导出一个记作 $\Phi\colon \Gamma \times X_\infty \to X_\infty$ 的极小等度连续作用。存在一个自然的基点 $x_\infty \in X_\infty$，它由单位元 $e \in \Gamma$ 的陪集给出，因此 $x_\infty = (e\Gamma_\ell)$。$x_\infty$ 的一个适配邻域基由以下既开又闭集构成

$$U_\ell = \{x = (x_i) \in X_\infty \mid x_i = e\Gamma_i \in X_i \ , \ 0 \leq i \leq \ell\ \} \subset X_\infty \ . \tag{4}$$

存在一个显然的恒等式 $\Gamma_\ell = \Gamma_{U_\ell}$。

对于每个 $\ell \geq 0$，我们都有一个“分割编码映射” $\Theta_\ell\colon \mathfrak{X} \to X_\ell$，它是 Γ-等变的。映射 $\{\Theta_\ell\}$ 与式（3）中的商空间映射相容，因此它们诱导出一个极限映射 $\Theta_x\colon \mathfrak{X} \to X_\infty$。由于既开又闭集 $\{U_\ell\}$ 的直径趋于零，因此 Θ_x 是一个同胚。此外，$\Theta_x(x) = x_\infty \in X_\infty$，其中 $\{x\} = \cap_{\ell > 0} U_\ell$。以下是一个众所周知的结果：

定理 2.6。 [11, 附录 A] 映射 $\Theta_x\colon \mathfrak{X} \to X_\infty$ 诱导了康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 与 $(X_\infty, \Gamma, \Phi_x)$ 之间的同构。

作用 $(X_\infty, \Gamma, \Phi_x)$ 称为作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 以 x 为中心的里程表模型。关于模型对基点 $x \in \mathfrak{X}$ 和适配邻域基 $\mathcal{U}$ 的选择的依赖性，文献 [11, 13, 16, 18] 中有详细讨论。下文中我们再次滥用记号，省略下标“x”。

接下来，我们为剖分作用 Φ 构建代数模型：$\mathfrak{G}(\Phi) \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 完备化 $\mathfrak{G}(\Phi) \equiv \Phi(\Gamma) \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$。固定一个如上所述的群链 $\{\Gamma_\ell \mid \ell \geq 0\}$，它为作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 提供代数模型。

对每个 $\ell \geq 1$，令 $C_\ell \subset \Gamma_\ell$ 表示 Γ_ℓ 的核，即 Γ 中 Γ_ℓ 的最大正规子群。因此

$$C_\ell \ = \mathrm{Core}(\Gamma_\ell) \ = \bigcap_{g \in \Gamma} g\, \Gamma_\ell\, g^{-1} \ \subset \Gamma_\ell \ . \tag{5}$$

由于 Γ_ℓ 具有 在 Γ 中的有限指数情形下，C_ℓ 也同样成立。注意，对于所有 $\ell \geq 0$，我们有 $C_{\ell+1} \subset C_\ell$.

引入具有单位元 $e_\ell \in Q_\ell$ 的商群 $Q_\ell = \Gamma/C_\ell$。存在自然商映射 $q_{\ell+1}\colon\ Q_{\ell+1} \to Q_\ell$，我们可以构造逆极限群

$$\widehat{\Gamma}_\infty \equiv \varprojlim \{q_{\ell+1}\colon Q_{\ell+1} \to Q_\ell \mid \ell \geq 0\} \tag{6}$$

$$= \{(g_\ell) = (g_0, g_1, \ldots) \mid g_\ell \in Q_\ell\ ,\ q_{\ell+1}(g_{\ell+1}) = g_\ell \text{ for all } \ell \geq 0\ \} \subset \prod_{\ell\geq 0} \Gamma_\ell\ , \tag{7}$$

这是一个带有提霍诺夫拓扑的康托空间。Γ 在空间 $X_\ell = \Gamma/\Gamma_\ell$ 上的左作用，诱导出 Γ_∞ 在 X_∞上的极小等度连续作用，仍记为 $\Phi\colon\ \Gamma_\infty \times X_\infty \to X_\infty$。注意，$Q_\ell = \Gamma_\ell/C_\ell$ 在 $X_\ell = \Gamma/\Gamma_\ell$ 中单位陪集处的作用的各向同性群是子群 $D_\ell = \Gamma_\ell/C_\ell$。

将 Γ_∞ 中的点记为 $\widehat{g} = (g_\ell) \in \Gamma_\infty$，其中 $g_\ell \in Q_\ell$。自然基点 $\widehat{e}_\infty \in \Gamma_\infty$由单位元 $e \in \Gamma$的陪集给出，因此 $\widehat{e}_\infty = (e_\ell)$，其中 $e_\ell = eC_\ell \in Q_\ell$ 是 Q_ℓ中的单位元。

对于每个 $\ell \geq 0$，令 $\Pi_\ell\colon\ \Gamma_\infty \to Q_\ell$ 表示到式（6）中第 ℓ个因子的投影，因此在式（7）的坐标中，我们有 $\Pi_\ell(\widehat{g}) = g_\ell \in Q_\ell$。映射 Π_ℓ 在 Γ_∞上的原有限拓扑下连续，因此点 Q_ℓ 的原像是开闭集。特别地，$\Pi_\ell\colon\ \Gamma_\infty \to Q_\ell$在 e_ℓ 处的纤维是正规子群

$$\widehat{C}_\ell = \Pi_\ell^{-1}(e_\ell) = \{(g_i) \in \widehat{\Gamma}_\infty \mid g_i \in C_i\ ,\ 0 \leq i \leq \ell\}\ . \tag{8}$$

集合 $\{C_\ell \mid \ell \geq 1\}$ 构成 $\widehat{e}_\infty \in \Gamma_\infty$的既开又闭邻域基。也就是说，对于每个满足 $\widehat{e}_\infty \in U$的闭开集 $U \subset \Gamma_\infty$，都存在 $\ell_0 > 0$，使得对所有 $\ell \geq \ell_0$都有 $C_\ell \subset U$。

定理 2.7。 [11, 定理 4。4] 存在一个同构 $\widehat{\tau}\colon\ \mathfrak{G}(\Phi) \to \Gamma_\infty$，它将剖分作用 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}(\Phi)\ \Phi)$ 与剖分作用 $(X_\infty, \Gamma_\infty, \Phi)$ 共轭。特别地，$\widehat{\tau}$将各向同性群 $\mathfrak{D}(\Phi)$ 识别为逆极限子群

$$D_\infty = \varprojlim \{q_{\ell+1}\colon \Gamma_{\ell+1}/C_{\ell+1} \to \Gamma_\ell/C_\ell \mid \ell \geq 0\} \subset \widehat{\Gamma}_\infty\ . \tag{9}$$

公式（9）中的映射 $q_{\ell+1}$ 不一定是满射，因此逆极限 D_∞ 的计算可能涉及一些微妙之处。例如，对于 $\ell > 0$，每个群 Q_ℓ 都可能是非平凡群，但 D_∞ 却是平凡群。

2.4. 康托尔作用的等价性。接下来我们回顾康托尔作用的等价性概念。首先，也是最强的一种，是同构，它是拓扑作用的共轭这一概念的推广。对于 $\Gamma = \mathbb{Z}$，同构对应于 Boyle 和 Tomiyama 在其著作 [8] 中引入的“翻转共轭”概念。以下定义也见于论文 [10, 16, 24]。

定义 2.8. 若存在同胚 $h\colon\ \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ 和群同构 $\Theta\colon\ \Gamma_1 \to \Gamma_2$，使得

$$\Phi_1(g) = h^{-1} \circ \Phi_2(\Theta(g)) \circ h \in \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X}_1) \textit{ for all } g \in \Gamma_1\ . \tag{10}$$

康托尔作用的回归等价弱于同构；在考察康托尔系统的动力学性质时，这一概念很自然，因为这些性质应当与作用在一个既开又闭的截面上的限制无关。

对于极小等度连续康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 和适配的集合 $U \subset \mathfrak{X}$，稍微滥用一下记号，我们用 Φ_U 同时表示受限作用 $\Phi_U\colon\ \Gamma_U \times U \to U$ 和诱导的商作用 $\Phi_U\colon\ \mathcal{H}_U \times U \to U$，其中 $\mathcal{H}_U = \Phi(G_U) \subset \mathrm{Homeo}(U)$。此时，$(U, \mathcal{H}_U, \Phi_U)$ 称为 Φ 的全纯作用。

定义 2.9. 如果存在作用 Φ_1 的一个适配集合 $U_1 \subset \mathfrak{X}_1$，以及作用 Φ_2 的一个适配集合 $U_2 \subset \mathfrak{X}_2$，使得限制作用 $(U_1, \mathcal{H}_{1,U_1}, \Phi_{1,U_1})$ 和 $(U_2, \mathcal{H}_{2,U_2}, \Phi_{2,U_2})$ 同构，则称两个极小等度连续康托作用 $(\mathfrak{X}_1, \Gamma_1, \Phi_1)$ 和 $(\mathfrak{X}_2, \Gamma_2, \Phi_2)$ 是返回等价的。

如果作用 Φ_1 和 Φ_2 在定义 2.8 的意义下同构，那么它们与 $U_1 = \mathfrak{X}_1$ 和 $U_2 = \mathfrak{X}_2$ 回归等价。然而，即使在这种情况下，回归等价的概念也更弱，因为共轭发生在全纯群 $\mathcal{H}_{1,\mathfrak{X}_1}$ 和 $\mathcal{H}_{2,\mathfrak{X}_2}$ 之间，而不是群 Γ_1 和 Γ_2 之间。

2.5. 局部拟解析。康托作用的拟解析性质由´Alvarez L´opez 和 Candel 在 [1, 定义 9.4] 中引入，作为 Haefliger 所研究的拟解析作用概念的推广，后者研究的是实解析微分同胚伪群的作用。作者在 [12, 16]中引入了拟解析性质的局部形式:

定义2.10。 [16, 定义 2.1] 度量康托尔空间$\mathfrak{X}$上的拓扑作用（$\mathfrak{X}$、 Γ、 Φ），若存在 $\varepsilon > 0$ ，使得对于任意满足 diam(U) $< \varepsilon$的非空开集 $U \subset \mathfrak{X}$ 、任意非空开子集 $V \subset U$以及元素 g_1、 $g_2 \in \Gamma$,

$$\text{if the restrictions } \Phi(g_1)|V = \Phi(g_2)|V, \quad \text{then } \Phi(g_1)|U = \Phi(g_2)|U. \tag{11}$$

若对 $U = \mathfrak{X}$满足（11），则称该作用为拟解析作用。

换言之，$(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是局部拟解析的，当且仅当对于每个 $g \in \Gamma$，同胚 $\Phi(g)$ 在 $\mathfrak{X}$ 中直径为 $\varepsilon > 0$ 的集合上具有唯一延拓，且 ε 在 $\mathfrak{X}$上是一致的。我们注意到，对于可数群 Γ 的有效作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$，它是拓扑自由的，当且仅当它是拟解析的。

回忆一下，如果一个群 Γ 是诺特的 [3] ，那么每条递增的子群链都有一个极大元。等价地，一个群是诺特的，当且仅当 Γ 的每个子群都是有限生成的。

定理 2.11。 [17, 定理 1。6] 设 Γ 是诺特群。则极小等度连续康托作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是局部拟解析的。

有限生成幂零群是诺特群，因此作为推论，我们得到所有有限生成幂零群的康托作用都是局部拟解析的。

该概念 $\widehat{\ }$局部拟解析康托尔作用扩展到赋范群作用的情形 $\Phi\colon \mathfrak{G} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$.

$\widehat{\ }$定义 2.12. 设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个康托作用，且 $\Phi\colon \mathfrak{G} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ 为诱导的剖分$\widehat{\ }$作用。若诱导的剖分作用 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}(\Phi)\ \Phi)$ 是局部准解析的，则称该作用为稳定；否则称其为野性。

诺特群 Γ 的有限群拓扑完备化 $\mathfrak{G}$ 未必是诺特的，这一点可从$\widehat{\ }$..... $\Gamma = \mathbb{Z}$的例子以及 $\mathbb{Z}$的 Γ 完全有限群拓扑完备化看出。特别地，假设作用（$\mathfrak{X}$， Γ， Φ）是局部拟解析的，并不意味着该作用是稳定的。

2.6. 康托作用的类型和类型集。Steinitz 数 ξ 可以唯一地写成关于素数集合 Π 的形式乘积,

$$\xi = \prod_{p \in \Pi} p^{\chi_\xi(p)} \tag{12}$$

其中，特征函数 $\chi_\xi\colon \Pi \to \{0, 1, \ldots, \infty\}$ 统计素数p 在无限乘积 ξ中出现的重数。

定义 2.13. 若存在有限个整数 $m, m' \geq 1$ 使得 $m \cdot \xi = m' \cdot \xi'$，则称两个施泰尼茨数 ξ 和 ξ' 渐近等价，此时记作 $\xi \overset{a}{\sim} \xi'$。

类型是施泰尼茨数的一个渐近等价类。与施泰尼茨数 ξ 对应的类型记作 $\tau[\xi]$。

用它们的特征函数 χ_1, χ_2表示，我们有 $\xi \overset{a}{\sim} \xi'$ 当且仅当满足以下条件:

- $\chi_1(p) = \chi_2(p)$ 对除有限多个素数 $p \in \Pi$之外的所有素数均成立,
- $\chi_1(p) = \infty$ 当且仅当 $\chi_1(p) = \infty$ 对所有素数 $p \in \Pi$成立。

给定两种类型 τ和 τ'，我们记作 $\tau \le \tau'$，如果存在代表元 $\xi \in \tau$和 $\xi' \in \tau'$，使它们的特征函数满足 $\chi_\xi(p) \le \chi_{\xi'}(p)$ 对所有素数 $p \in \Pi$成立。

定义 2.14. 令 π 表示素数集合。给定 $\xi = \prod_{p\in\pi} p^{\chi_\xi(p)}$，定义：

$$\begin{aligned} \pi(\xi) &= \{p \in \pi \mid \chi_\xi(p) > 0\}\ ,\ \text{the prime spectrum of } \xi, \\ \pi_f(\xi) &= \{p \in \pi \mid 0 < \chi_\xi(p) < \infty\}\ ,\ \text{the finite prime spectrum of } \xi, \\ \pi_\infty(\xi) &= \{p \in \pi \mid \chi_\xi(p) = \infty\}\ ,\ \text{the infinite prime spectrum of } \xi\ . \end{aligned}$$

注意，若 $\xi \overset{a}{\sim} \xi'$，则 $\pi_\infty(\xi) = \pi_\infty(\xi')$。$\pi_f(\xi)$ 是无限集这一性质在施泰尼茨数的渐近等价下也保持不变。

我们定义由有限指数子群链 $\mathcal{G} = \{\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots\}$ 定义的康托作用 (X_∞, Γ, Φ) 的类型。令 $C_\ell \subset \Gamma_\ell$ 表示 Γ 中 Γ_ℓ 的正规核。

定义 2.15. 设 (X_∞, Γ, Φ) 是由群链 $\mathcal{G}$ 定义的极小等度连续康托作用。该作用的类型 $\tau[X_\infty, \Gamma, \Phi]$ 是施泰尼茨序的等价类

$$\xi(X_\infty, \Gamma, \Phi) = \operatorname{lcm}\{\#X_\ell = \#(\Gamma/\Gamma_\ell) \mid \ell > 0\}\ . \tag{13}$$

最后，我们注意到以下结果：

定理 2.16. [20, 定理 1.9] 设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 为一个康托作用。施泰尼茨序 $\xi(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 定义为该作用的一个代数模型 (X_∞, Γ, Φ) 的施泰尼茨序，且其不依赖于代数模型的选择。此外，类型 $\tau[\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi]$ 仅取决于该作用的回归等价类。

2.7. 副有限群的类型。副有限群 $\mathfrak{G}$ 的施泰尼茨序 $\Pi[\mathfrak{G}]$，由与将 $\mathfrak{G}$ 表示为有限群逆极限的一种表示相关联的超自然数定义（参见 [29,第 2] 章或 [26, 第 2.3] 章）。施泰尼茨序出现在与作用于有根树上的群相关联的副有限群解析表示的研究中，例如参见 [23]。

回忆一下，对于副有限群 $\mathfrak{G}$，开子群 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$ 的指数有限 [26, 引理 2.1.2]。

定义 2.17. 设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个极小等度连续康托作用，并选取基点 $x \in \mathfrak{X}$。该作用的施泰尼茨序定义如下：

(1) $\xi(\mathfrak{G}(\Phi)) = \operatorname{lcm}\{\#\ \mathfrak{G}(\Phi)/\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}(\Phi)$ 开正规子群$\}$, (2) $\xi(\mathfrak{D}(\Phi)) = \operatorname{lcm}\{\#\ \mathfrak{D}(\Phi)/(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(\Phi))\ \mid \mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}(\Phi)$ 开正规子群$\}$, (3) $\xi(\mathfrak{G}(\Phi) : \mathfrak{D}(\Phi)) = \operatorname{lcm}\{\#\ \mathfrak{G}(\Phi)/(\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{D}(\Phi))\ \mid \mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}(\Phi)$ 开正规子群$\}$。

施泰尼茨序满足拉格朗日恒等式，其中乘法是在超自然数的意义下进行的，

$$\xi(\mathfrak{G}(\Phi)) = \xi(\mathfrak{G}(\Phi) : \mathfrak{D}(\Phi)) \cdot \xi(\mathfrak{D}(\Phi))\ . \tag{14}$$

因此我们 始终有 $\tau[\mathfrak{D}(\Phi)] \le \tau[\mathfrak{G}(\Phi)]$。以下结论可直接由定义得出 s:

定理 2.18. 设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个康托作用。则施泰尼茨序相等：$\xi(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi) = \xi(\mathfrak{G}(\Phi) : \mathfrak{D}(\Phi))$.

3. 幂零作用

在本节中，我们将幂零康托作用的施泰尼茨序这一概念应用于对其动力学性质的研究。定理 1.2 的证明基于幂零群的有限群拓扑完备化的特殊性质，特别是其西洛 p-子群的唯一性，以及这一代数性质与该作用的动力学之间的关系。

3.1. 诺特群。若一个可数群 Γ 的每一条子群 $\{H_i \mid i \geq 1\}$ 递增链 $\{H_i \mid i \geq 1\}$ 都存在一个极大元 H_{i_0}，则称该群 Γ 为诺特群 [3] 。群 $\mathbb{Z}$ 是诺特群；诺特群的有限乘积仍是诺特群；诺特群的子群和商群也都是诺特群。因此，有限生成幂零群是诺特群。

诺特群的概念有一种推广，可用于研究副有限群的作用。

定义 3.1。 [29, 页 153] 若副有限群 $\mathfrak{G}$ 的每个递增闭子群链 $\{\mathfrak{H}_i \mid i \geq 1\}$ 都有一个极大元素 $\mathfrak{H}_{i_0}$，则称其为拓扑诺特。

我们用 $\mathbb{Z}$ 的两个典型有限群拓扑完备化来阐释这一概念。

例 3.2. 令 $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ 表示 p-进整数，其中 p 是一个素数。也就是说， $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ 是关于子群链 $\mathcal{G} = \{\Gamma_\ell = p^\ell\mathbb{Z} \mid \ell \geq 1\}$ 对 $\mathbb{Z}$ 的完备化。 $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ 的闭子群由某个固定的 $i > 0$ 的 $p^i \cdot \widehat{\mathbb{Z}}_p$ 给出，因此满足定义 3.1 中的升链条件。

例 3.3. 设 $\widehat{\pi} = \{p_i \mid i \geq 1\}$ 是一个由互不相同的素数构成的无限集合。定义 $\widehat{\ }$ 的一个递增子群链，其中 $\mathcal{G}_{\widehat{\pi}} = \{\Gamma_\ell = p_1 p_2 \cdots p_\ell\mathbb{Z} \mid \ell \geq 1\}$。令 $\mathbb{Z}_{\widehat{\pi}}$ 为关于链 $\mathcal{G}_{\widehat{\pi}}$ 的 $\mathbb{Z}$ 的完备化。那么我们有一个拓扑同构

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{\widehat{\pi}} \cong \prod_{i \geq 1} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \ . \tag{15}$$

令 $H_\ell = \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_\ell\mathbb{Z}$ 为前 ℓ 个因子的直和。那么 $\{H_\ell \mid \ell \geq 1\}$ 是 $\mathbb{Z}_{\widehat{\pi}}$ 的一个严格递增子群链，不会稳定，因此 $\mathbb{Z}_{\widehat{\pi}}$ 不是拓扑诺特的。

这两个例子阐明了以下结果证明背后的思路。

命题 3.4. 设 Γ 是有限生成幂零群，且 Γ 是 Γ 的副有限完备化。那么 Γ 是拓扑诺特的，当且仅当素数谱 $\pi(\xi(\Gamma))$ 是有限集。

证明。首先，回顾副有限群的一些基本事实。（例如参见 [29, 第 2] 章。）对于一个素数 p，如果有限群 H 的每个元素的阶都是 p 的幂，则称 H 为 p-群。若副有限群 $\mathfrak{H}$ 是有限 p 群的逆极限，则称 $\mathfrak{H}$ 为 pro-p-群。Sylow p 子群 $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ 是极大的 pro-p 子群 [29, 定义 2.2.1]。

副有限群 $\mathfrak{G}$ 若为有限幂零群的逆极限，则称其为原幂零的。例如，若 $\mathfrak{G}$ 是幂零群 Γ的有限群拓扑完备化，则 $\mathfrak{G}$ 是原幂零的。

群 $\mathfrak{G}$ 在包含一个稠密子群 $\Gamma \subset \mathfrak{G}$ 且 Γ 有限生成时，称为拓扑有限生成。与具有有限生成的 Γ 的康托作用（$\mathfrak{X}$， Γ， Φ）相关联的完备化 $\mathfrak{G}$（Φ）是拓扑有限生成的。

假设 $\mathfrak{G}$ 是幂零群，则对每个素数 p， $\mathfrak{G}$ 都有唯一的 Sylow p 子群，且该子群在 $\mathfrak{G}$ 中正规（参见 [29, 命题 2.4.3]）。将此群记为 $\mathfrak{G}_{(p)}$。此外， $\mathfrak{G}_{(p)}$ 非平凡当且仅当 $p \in \pi(\xi(\mathfrak{G}))$. 我们将使用以下关于幂零群的结果，它是 [29, 命题 2.4.3] 的推论。

命题 3.5. 设 $\mathfrak{G}$ 是有限生成幂零群 Γ 的有限群拓扑完备化。那么存在一个拓扑同构

$$\mathfrak{G} \cong \prod_{p \in \pi(\xi(\mathfrak{G}))} \mathfrak{G}_{(p)} \ . \tag{16}$$

由同构 (16) 可立即得出，如果素数谱 $\pi(\xi(\mathfrak{G}))$ 是无限的，那么 $\mathfrak{G}$ 不是拓扑诺特的。为此，列出 $\pi(\xi(\mathfrak{G})) = \{p_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$，于是我们得到一个无限的严格递增闭子群链，

$$\mathfrak{H}_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{G}_{(p_i)} \ .$$

如果素数谱 $\pi(\xi(\mathfrak{G}))$ 是有限的，那么同构 (16) 将证明 $\mathfrak{G}$ 是拓扑诺特的这一问题归结为如下情形：若 $\mathfrak{G}$ 是拓扑有限生成的，则其每个 Sylow p-子群都是诺特的。群 $\mathfrak{G}_{(p)}$ 是幂零且拓扑有限生成的，因此我们可以利用 $\mathfrak{G}_{(p)}$ 的下中心列并作归纳，将问题归结为 $\mathfrak{H}$ 是一个拓扑有限生成的阿贝尔 pro-p-群的情形。于是它同构于若干个 $\mathbb{Z}$ 的 p-完备化的有限乘积，而这些完备化都是拓扑诺特的。

注意，有限生成幂零群的有限群拓扑完备化 $\mathfrak{G}$ 是一个拓扑有限生成幂零群，因此我们应用上述论述。□

推论 3.6。设 Γ 是一个几乎幂零群；也就是说，存在一个有限生成幂零子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ，其具有有限指数。则， $\mathfrak{G}$ 的有限群拓扑完备化是拓扑诺特的，当且仅当其素数谱 $\pi(\xi(\mathfrak{G}))$是有限的。

证明。我们可以假设 Γ_0 是 Γ的正规子群，那么其闭包 $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$ 满足命题 3.4 的假设，并且施泰尼茨序满足 $\xi(\mathfrak{G}_0) \trianglelefteq \xi(\mathfrak{G})$。由于 $\mathfrak{G}_0$ 是拓扑诺特的当且仅当 $\mathfrak{G}$ 是拓扑诺特的，结论得证。□

3.2. 诺特群的动力学。我们将副有限群的拓扑诺特性质与该群的康托作用的动力学联系起来，从而证明定理 1.2。首先给出 [17, 定理 1.6] 的副有限类比。证明思路沿用 [17] 中的证明。

命题 3.7. 设 $\mathfrak{G}$是一个拓扑诺特群。那么在康托空间 $\mathfrak{X}$ 上的极小等度连续$\widehat{}$作用 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}, \Phi)$ 是局部拟解析的。

$\widehat{}$证明。闭包 $\mathfrak{G}(\Phi) \subset \mathrm{Homeo}(\mathfrak{X})$，因此 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的作用 Φ 是有效的。假设作用$\curlywedge\Phi$ 不是局部拟解析的，那么存在 $\mathfrak{X}$, $\{U_1 \supset U_2 \supset \cdots\}$ 的一个无限且严格递减的开闭子集链，它满足以下性质，对所有 $\ell \geq 1$:

- U_ℓ 适配于作用 Φ ，其各向同性子群为 $\mathfrak{G}_{U_\ell} \subset \mathfrak{G}$;
- 存在一个闭子群 $K_\ell \subset \mathfrak{G}_{U_{\ell+1}}$ ，其对 $U_{\ell+1}$ 的限制作用是平凡的，但 K_ℓ 对 U_ℓ 的限制作用是有效的。

由此可得闭子群 $\{K_1 \subset K_2 \subset \cdots\}$ 在 $\mathfrak{G}$中构成一条严格递增链，这与 $\mathfrak{G}$ 是拓扑诺特的假设矛盾。□

定理 1.2 的证明。设 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是一个幂零康托作用，并且已知素数谱 $\pi(\xi(\mathfrak{G}(\Phi)))$ 是有限的。于是存在一个有限指数的有限生成幂零子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma$，且不失一般性，可设 Γ_0 是正规子群。令 $\mathfrak{G}(\Phi)_0$ 为 Γ_0 在 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 中的闭包。群 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 具有有限素数谱，这意味着群 $\mathfrak{G}(\Phi)_0$ 具有有限素数谱，因而根据命题 3.4，群 $\mathfrak{G}(\Phi)_0$ 是拓扑诺特的。令 $x \in \mathfrak{X}$，于是只需证明 Γ_0 在轨道 $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{G}(\Phi)_0 \cdot x$ 上的作用是稳定的。这将证明归结为证明 Γ 为幂零群时的情形。此时，逆有限闭包 $\mathfrak{G}(\Phi)$也为$\widehat{}$幂零的，并且我们得到一个剖分作用 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}(\Phi)\ \Phi)$。

$\widehat{}$假设作用 Φ 不是局部拟解析的，那么存在一列递增的闭子群 $K_\ell \subset \mathfrak{D}(\Phi)$，其中 K_ℓ 在开闭子集 $U_\ell \subset \mathfrak{X}$上平凡作用。由于 $\mathfrak{D}(\Phi)$ 是 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的闭子群，递增链 $\{K_\ell \mid \ell > 0\}$ 由 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 的闭子群组成。$\widehat{}$这与 $\mathfrak{G}(\Phi)$ 是拓扑诺特的这一事实矛盾。因此，作用 Φ 必定是局部拟解析的。也就是说，作用 $(\mathfrak{X}, \Gamma, \Phi)$ 是稳定的。□

4. Basic examples

在本节中，我们构造两个幂零康托作用的基本例子。这些例子展示了第 5 节中后续更复杂构造的基本原理，而这些构造用于证明定理 1.3 和 1.4。

整数海森堡群是最简单的非阿贝尔幂零群，可以表示为 GL(3, $\mathbb{Z}$) 中的上三角矩阵。也就是说，

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{17}$$

我们用坐标 (a, b, c) 表示 Γ 中的 3×3 矩阵。

例 4.1。根据 [22]，中的定义，可由非阿贝尔群 Γ 到自身的一个真自嵌入所定义的群链，构造出一个可重整的康托作用。

对于素数 $p \geq 2$，定义自嵌入 $\varphi_p \colon \Gamma \to \Gamma$，令 $\varphi(a, b, c) = (pa, pb, p^2c)$。然后在 Γ 中定义群链，设

$$\Gamma_\ell = \varphi_p^\ell(\Gamma) = \{(p^\ell a, p^\ell b, p^{2\ell} c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad \bigcap_{\ell > 0} \Gamma_\ell = \{e\} \, .$$

对于 $\ell > 0$，Γ_ℓ 的正规核为 $C_\ell = \mathsf{core}(\Gamma_\ell) = \{(p^{2\ell} a, p^{2\ell} b, p^{2\ell} c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$，因此商群 $Q_\ell = \Gamma / C_\ell \cong \{(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mid \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/p^{2\ell}\mathbb{Z}\}$。副有限群 $\widehat{\Gamma}_\infty$ 是商群 Q_ℓ 的逆$\widehat{\ }$极限，因此我们有 $\Gamma_\infty = \{(\widehat{a}, b, \widehat{c}) \mid \widehat{a}, b, \widehat{c} \in \mathbb{Z}_{p^2}\}$。于是，$\xi(\Gamma) = \{p^\infty\}$。尽管商群 Γ_ℓ / C_ℓ 都非平凡，但对于此作用，逆极限 $\mathfrak{D}(\Phi)$ 是平凡群。这是因为存在包含关系

$$\Gamma_{2\ell} = \{(p^{2\ell} a, p^{2\ell} b, p^{4\ell} c) \mid a, b, c, \in \mathbb{Z}\} \subset C_\ell = \{(p^{2\ell} a, p^{2\ell} b, p^{2\ell} c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \, .$$

$\mathfrak{D}(\Phi)$ 的平凡性意味着，该作用 [11] 存在一个等价的群链，可以选择使链中的每个子群都是 Γ 的正规子群。

例 4.2. 对于不同的素数 $p, q \geq 2$，定义自嵌入 $\varphi_{p,q} \colon \Gamma \to \Gamma$，使得 $\varphi(a, b, c) = (pa, qb, pqc)$。然后，通过设定，在 Γ 中定义一个群链。

$$\Gamma_\ell = \varphi_{p,q}^\ell(\Gamma) = \{(p^\ell a, q^\ell b, (pq)^\ell c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad \bigcap_{\ell > 0} \Gamma_\ell = \{e\} \, .$$

对于 $\ell > 0$，Γ_ℓ的正规核由 $C_\ell = \mathsf{core}(\Gamma_\ell) = \{((pq)^\ell a, (pq)^\ell b, (pq)^\ell c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ 给出，因此商群 $Q_\ell = \Gamma / C_\ell \cong \{(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mid \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/(pq)^\ell\mathbb{Z}\}$。副有限群 $\widehat{\Gamma}_\infty$$\widehat{\ }$是商群 Q_ℓ的逆极限，因此我们有 $\Gamma_\infty = \{(\widehat{a}, b, \widehat{c}) \mid \widehat{a}, b, \widehat{c} \in \mathbb{Z}_{pq}\}$。因此，$\xi(\Gamma_\infty)$ $= \{p^\infty, q^\infty\}$，而 D_∞ 根据 (9) 是有限群 Γ_ℓ / C_ℓ 的逆极限，所以 $D_\infty \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$。

5. Nilpotent actions with prescribed spectrum

在本节中，我们构造具有指定素数谱的离散海森堡群的稳定作用，从而证明定理 1.3。随后，我们构造野幂零康托作用的例子，从而证明定理 1.4，并由此推导出推论 1.5。为简单起见，我们的例子都使用由 3×3 矩阵表示的海森堡群。当然，这些例子可以推广到任意维数的整数上三角矩阵，此时在构造中可作出的选择要自由得多。相应的计算会更加繁琐，但能得到类似的结果。合理地预期，类似的构造可以应用于任何有限生成的无挠幂零（非阿贝尔）群 Γ。也就是说，总存在某些群链 Γ，它们产生野幂零康托作用。

令 $\Gamma \subset \mathsf{GL}(3, \mathbb{Z})$ 表示离散海森堡群，其定义由公式 (17) 给出。以下构造以命题 3.5 中关于幂零群完备化的结构理论为基础，特别是公式 (16)。给定素数集 π_f 和 π_∞，我们将如例 5.1 中那样的有限$\widehat{\ }$作用的无限乘积嵌入到 Γ 的有限群拓扑完备化 Γ_∞ 中，从而在商空间 $X_\infty = \Gamma_\infty / D_\infty$ 上得到一个幂零坎托尔$\widehat{\ }$作用 (X_∞, Γ, Φ)。

5.1. 构造的基本组成部分。固定一个素数 $p \geq 2$。

对于 $n \geq 1$ 和 $0 \leq k < n$，我们有以下有限群：

$$G_{p,n} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \overline{a} & \overline{c} \\ 0 & 1 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right\}, \quad H_{p,n,k} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & p^k\overline{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \overline{a} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right\} \tag{18}$$

注意，$\#[G_{p,n}] = p^{3n}$ 和 $\#[H_{p,n,k}] = p^{n-k}$。

令 $\overline{x} = (1,0,0)$ $\overline{y} = (0,1,0)$ $\overline{z} = (0,0,1) \in G_{p,\ n}$，则 $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{x}^{-1} = \overline{yz}$ 和 $\overline{x} \cdot \overline{z} \cdot \overline{x}^{-1} = \overline{z}$。也就是说，$\overline{x}$ 在 $(\overline{y}, \overline{z})$ 坐标所确定的“平面”上的伴随作用，是沿 $\overline{z}$ 轴的“剪切”作用；而 $\overline{x}$ 在 $\overline{z}$ 轴上的伴随作用固定了 $\overline{z}$ 轴上的所有点。

令 $X_{p,n,k} = G_{p,n}/H_{p,n,k}$，则 $G_{p,n}$ 对 $X_{p,n,k}$ 的作用在单位元的陪集 $H_{p,n,k}$ 处的各向同性群为 $H_{p,n,k}$。核子群 $C_{p,n,k} \subset H_{p,n,k}$ 包含 $H_{p,n,k}$ 中逐点固定 $X_{p,n,k}$ 的元素。$\overline{x} \in H_{p,n,k}$ 对陪集空间 $X_{p,n,k}$ 的作用满足

$$\Phi(\overline{x})(\overline{y}\, H_{p,n,k}) = \overline{yz}\, H_{p,n,k},$$

因此，$G_{p,n}$ 中只有单位元会在 $X_{p,n,k}$的每个陪集上都平凡地作用，因此 $C_{p,n,k}$ 是平凡群。于是 $D_{p,n,k} = H_{p,n,k}/C_{p,n,k} = H_{p,n,k}$，并且对每个 $g \in H_{p,n,k}$，其作用固定 $\overline{z}$的倍数所对应的陪集。

5.2. 具有有限或无限素数谱的稳定幂零作用。我们现在通过构造一族具有指定素数谱的稳定例子来证明定理 1.3。

令π_f 和 π_∞ 是两个互不相交的素数集合，其中 π_f 是一个有限集，而 π_∞ 是一个非空的 se t.

枚举 $\pi_f = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$，然后为 $1 \leq i \leq m$ 选择整数 $1 \leq r_i \leq n_i$。

按如下约定枚举 $\pi_\infty = \{p_1, p_2, \ldots\}$（为方便记号，若 ℓ大于 π_∞ 中的素数个数，则令 $p_\ell = 1$）。对每个 $\ell \geq 1$，定义整数

$$M_\ell = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_m^{r_m} \cdot p_1^\ell p_2^\ell \cdots p_\ell^\ell, \tag{19}$$

$$N_\ell = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_m^{n_m} \cdot p_1^\ell p_2^\ell \cdots p_\ell^\ell. \tag{20}$$

对于所有 $\ell \geq 1$，注意到 M_ℓ 整除 N_ℓ。

在上述坐标中，定义海森堡群 Γ的一个子群，

$$\Gamma_\ell = \{(aM_\ell, bN_\ell, cN_\ell) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

其核子群由 $C_\ell = \{(aN_\ell, bN_\ell, cN_\ell) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ 给出。注意到

$$\mathbb{Z}/N_\ell\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/q_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_m^{n_m}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_1^\ell\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_\ell^\ell\mathbb{Z}.$$

根据命题 3.5，并采用例 5.1中的记号，对于 $k_i = n_i - r_i$，我们有

$$\widehat{\Gamma}_\infty = \varprojlim \{\Gamma/C_\ell \to \Gamma/C_{\ell-1} \mid \ell \geq 1\} \cong \prod_{i=1}^{m} G_{q_i,n_i} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)}, \tag{21}$$

$$D_\infty = \varprojlim \{\Gamma_\ell/C_\ell \to \Gamma_{\ell-1}/C_{\ell-1} \mid \ell \geq 1\} \cong \prod_{i=1}^{m} H_{q_i,n_i,k_i}. \tag{22}$$

Then $\widehat{\ }$与群链 $\{\Gamma_\ell \mid \ell \geq 1\}$ 相关联的康托空间 $X_\infty = \Gamma_\infty/D_\infty$ 由 b 给出 y

$$X_\infty \cong \prod_{i=1}^{m} X_{q_i,n_i,k_i} \times \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)}. \tag{23}$$

特别地，由于 (23) 中的第一个因子是有限集的有限乘积，第二个因子定义了一个开邻域

$$U = \prod_{i=1}^{m} \{x_i\} \times \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)}$$

其中 $x_i \in X_{q_i,\ n_i,\ k_i}$ 是由单位元的陪集给出的基点。也就是说， U 是 X_∞ 中基点的一个闭开邻域。 U 的各向同性群由下式给出

$$\widehat{\Gamma}_\infty|U \ = \ \prod_{i=1}^{m} H_{q_i,n_i,k_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \ . \tag{24}$$

$\widehat{\ }\Gamma_\infty|U$ 在 U 上的限制同构于子群

$$K|U \ = \ \prod_{i=1}^{m} \{\overline{e}_i\} \ \times \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \ \subset \ \mathrm{Homeo}(U) \ , \tag{25}$$

其中 $\overline{e}_i \in G_{q_i,\ n_i}$ 是单位元。群 $K|U$ 在 U上自由作用，因此，$\backsim\Gamma_\infty$ 在 X_∞ 上的作用是局部拟解析的。此外， Γ 在 X_∞ 上的作用的素数谱是$\widehat{\ }$并集 $\widehat{\pi} = \pi_f \cup \pi_\infty = \pi(\xi(\Gamma_\infty))$。若 π_∞ 是无限的，则该作用的素数谱也是无限的。$\widehat{\ }$注意，群 Γ 嵌入到 Γ_∞中，因为整数 M_ℓ 和 N_ℓ 随 ℓ趋于无穷。这就完成了定理 1.3 的证明。

5.3. 具有无限素数谱的野幂零作用。现在我们证明定理 1.4。我们必须证明，每个无限素数集合都可以实现为海森堡群 Γ的一个野作用的素数谱，如式 (17) 所定义。设 π_f 和 π_∞ 是互不相交的素数集合，其中π_f 是无限集，而 π_∞ 任意，也可以为空。

枚举 $\pi_f = \{q_1, q_2, \ldots\}$ 并选取整数 $1 \leq r_i < n_i$用于 $1 \leq i < \infty$。

枚举 $\pi_\infty = \{p_1, p_2, \ldots\}$，同样约定：若 ℓ大于 π_∞ 中的素数个数，则令 $p_\ell = 1$。

与第 5.2 节一样，对每个 $\ell \geq 1$，定义整数

$$\begin{aligned} M_\ell &= q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_\ell^{r_\ell} \cdot p_1^\ell p_2^\ell \cdots p_\ell^\ell \ , \\ N_\ell &= q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_\ell^{n_\ell} \cdot p_1^\ell p_2^\ell \cdots p_\ell^\ell \ . \end{aligned}$$

对于 $\ell \geq 1$，在上述坐标下定义海森堡群 Γ 的一个子群，

$$\Gamma_\ell = \{(aM_\ell, bN_\ell, cN_\ell) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\} \ , \tag{26}$$

其核 子群由 $C_\ell = \{(aN_\ell, bN_\ell, cN_\ell) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ 给出。对于 $k_i = n_i - r_i$，我们于是有 e

$$\widehat{\Gamma}_\infty \ \cong \ \prod_{i=1}^{\infty} G_{q_i,n_i} \ \cdot \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \quad , \quad D_\infty \ \cong \ \prod_{i=1}^{\infty} H_{q_i,n_i,k_i} \ . \tag{27}$$

$\widehat{\ }$与群链 $\{\Gamma_\ell \mid \ell \geq 1\}$ 相关联的康托空间 $X_\infty = \Gamma_\infty / D_\infty$ 定义为

$$X_\infty \ \cong \ \prod_{i=1}^{\infty} X_{q_i,n_i,k_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \ . \tag{28}$$

(23) 中的第一个因子是有限集的无限乘积，因此，固定该乘积中的前 ℓ 个坐标，就确定了 X_∞ 的一个开闭子集。令 $x_i \in X_{q_i,n_i,k_i}$ 表示单位元的陪集，它是 X_{q_i,n_i,k_i}中的基点。于是，对每个 $\ell \geq 1$，我们在 X_∞ 中定义一个开闭集

$$U_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \{x_i\} \ \times \ \prod_{i=\ell+1}^{\infty} X_{q_i,n_i,k_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \ . \tag{29}$$

回顾例 5.1 中的计算，子群 H_{q_i,n_i,k_i} 是基点$\widehat{\ }$处 $x_i \in X_{q_i,n_i,k_i}$的各向同性群。因此， U_ℓ 在 Γ_∞-作用下的各向同性子群由以下积给出

$$\widehat{\Gamma}_\infty|_{U_\ell} \ = \ \prod_{i=1}^{\ell} H_{q_i,n_i,k_i} \ \times \ \prod_{i=\ell+1}^{\infty} G_{q_i,n_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \ . \tag{30}$$

对于 $j \neq i$，子群H_{q_i,n_i,k_i} 在 (28) 中对因子 X_{q_j,n_j,k_j} 的作用是恒等作用。因此，$\widehat{\ }$在 Homeo(U_ℓ) 中的像与子群 $\Gamma_\infty|_{U_\ell}$ 同构。

$$Z_\ell \;=\; \widehat{\Gamma}_\infty|U_\ell \;=\; \prod_{i=1}^{\ell} \{\overline{e}_i\} \;\times\; \prod_{i=\ell+1}^{\infty} G_{q_i,n_i} \;\times\; \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)} \;\subset\; \mathrm{Homeo}(U_\ell)\;, \tag{31}$$

其中 $\overline{e}_i \in G_{q_i,\ n_i}$ 是单位元。

接下来我们证明该作用并非稳定；也就是说，对于任意 $\ell > 0$，都存在一个开闭子集 $V \subset U_\ell\widehat{\ }$ 和非平凡的 $\widehat{g} \in Z_\ell$，使得 Γ_∞ 在 V 上的作用限制为恒等映射。

不失一般性，我们可以假设对于某个 $\ell' > \ell$，$V = U_{\ell'}$。考虑 Z_ℓ 的各向同性子群到 $U_{\ell'}$ 的限制映射，其定义如下：

$$\rho_{\ell,\ell'} \colon Z_\ell|_{U_{\ell'}} \to Z_{\ell'} \subset \mathrm{Homeo}(U_{\ell'})\;.$$

我们必须证明存在 $\ell' > \ell$，使得该映射有非平凡核。用上述积表示来计算该映射，

$$Z_\ell|_{U_{\ell'}} \;=\; \prod_{i=1}^{\ell} \{\overline{e}_i\} \;\times\; \prod_{i=\ell+1}^{\ell'} H_{q_i,n_i,k_i} \;\times\; \prod_{i=\ell'+1}^{\infty} G_{q_i,n_i} \;\times\; \prod_{j=1}^{\infty} \widehat{\Gamma}_{(p_j)}\;. \tag{32}$$

对于 $\ell < i \leq \ell'$，群 $H_{q_i,\ n_i,\ k_i}$ 固定点 $\prod_{i=1}^{\ell'} \{x_i\}$，并在 $\prod_{i=\ell'+1}^{\infty} X_{q_i,\ n_i,\ k_i}$ 上平凡作用。因此，限制映射的核包含（32）中的第二个因子，

$$\prod_{i=\ell+1}^{\ell'} H_{q_i,n_i,k_i} \;\subset\; \ker\left\{\rho_{\ell,\ell'} \colon Z_\ell|_{U_{\ell'}} \to \mathrm{Homeo}(U_{\ell'})\right\}\;. \tag{33}$$

$\widehat{\ }$由于对于所有 $\ell' > \ell$，这个群都是非平凡的，因此 Γ_∞ 在 X_∞ 上的作用不是局部拟解析的，故 Γ 在 X_∞ 上的作用是野性的。此外，Γ 在 X_∞ 上的作用的素数谱等于并集 $\widehat{\pi} = \pi_f \cup \pi_\infty$。

现在我们证明定理 1.4 的第二部分，说明可以对上述构造中的选择作出安排，使得 Γ 在一个康托尔集上的作用在拓扑意义下是自由的，而$\curlywedge\Gamma_\infty$ 是野性的，并且素数谱是预先指定的。

取一个由互不相同的素数组成的无限集 $\pi_f = \{q_1, q_2, \ldots\}$，并令 π_∞为空集。

按照第 5.1 节中的方式选取常数，使得对于所有 $i \geq 1$，$n_i = 2$ 和 $k_i = 1$。

由（28）定义康托空间 X_∞，其中第二个因子是平凡的；也就是说，它是一个点。根据公式（30）至（33）中的计算，Γ_∞ 的作用$\widehat{\ }$是野性的。

我们断言，Γ 在 X_∞ 上的作用是拓扑自由的。反设不然，则存在一个开集 $U \subset X_\infty$ 和 $g \in \Gamma$，使得 $\Phi(g)$的作用在 X_∞ 上非平凡，但保持集合 U不变，并且在 U上限制为恒等作用。Γ 在 X_∞ 上的作用是极小的，因此存在 $h \in \Gamma$ 使得 $h \cdot x_\infty \in U$。于是 $\Phi(h^{-1}gh)(x_\infty) = x_\infty$，且作用 $\Phi(h^{-1}gh)$固定了 x_∞的一个开邻域。将 g 替换为 $h^{-1}gh$ 后，我们可以假设 $\Phi(g)(x_\infty) = x_\infty \in U$。由定义（29），这些既开又闭集

$$U_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \{x_i\} \;\times\; \prod_{i=\ell+1}^{\infty} X_{q_i,2,1} \tag{34}$$

构成了 x_∞处的一个邻域基，因此存在 $\ell > 0$ 使得 $U_\ell \subset U$。

$\widehat{\ }$群 Γ 沿着乘积（16）中的对角线嵌入到 Γ_∞ 中。也就是说，我们可以写成 $g = \infty(g, g, \ldots, g) \in \prod G_{q_i,\ 2}$。$\Phi(g)$ 的作用是逐因子的，而 $\Phi(g)(x_\infty) = x_\infty$意味着 $g \in i=1\infty D_\infty \cong \prod H_{q_i,\ n_i,\ k_i}$。$\Phi(g)$ 固定 U 中各点这一假设意味着，它平凡地作用$i=1$

于每个因子 $X_{q_i,\ 2,\ 1}$ 上，对于 $i > \ell$。由于每个因子 $H_{q_i,\ 2,\ 1}$ 都在 $X_{q_i,\ 2,\ 1}$ 上有效地作用，这意味着将 g 投影到第 i 个因子群 $H_{q_i,\ 2,\ 1}$ 所得的投影对于 $i > \ell$ 是恒等变换。这意味着，在（17）中 g 的矩阵表示里，对角线以上的每个元素都能被无穷多个互不相同的素数 $\{q_i \mid i \geq \ell\}$ 整除，因此根据素因数分解定理，矩阵 g 是恒等矩阵。

ℓ或者，注意到我们有 $g \in \prod_{i=1} H_{q_i,\ 2,\ 1}$。这是有限多个有限群的有限乘积，这意味着 $g \in \Gamma$ 是一个挠元。然而，海森堡群 Γ 是无挠的，因此 g必为单位元。由此，Γ 在 X_∞ 上的作用必是拓扑自由的。

最后，上述构造允许选择任意一个由互不相同的素数组成的无限子集 π_f，而这样的不同选择有不可数多个。因此，根据 [20]中的定理 1.9，存在不可数多个拓扑自由、野性的幂零康托作用，它们的素数谱彼此不同。定理 1.4 的证明至此完成。

5.4. 推论 1.5 的证明。考虑第 5.3 节末尾构造的海森堡群 Γ 上的一族野性拓扑自由作用，它们具有无限且互不相同的素数谱。我们证明，在这族作用中，可以选取不可数多个无限的 π_f，使这些作用的类型两两不相交。

根据定义 2.13，对于两个施泰尼茨数 ξ 和 ξ'，它们的类型相等，$\tau(\xi) = \tau(\xi')$，当且仅当存在整数 m、m' 使得 $m \cdot \xi = m' \cdot \xi'$。因此，两个素数谱分别为 π_f 和 π'_f 的作用类型不同，当且仅当 π_f 和 π'_f 有无限多个项不同。例如，当 π_f 和 π'_f 是几乎不相交的无限集时，就会出现这种情况；也就是说，它们是交集有限的无限集。

素数集是可数的，因此，素数集的几乎不相交无限子集族不可数，当且仅当自然数集的几乎不相交无限子集族不可数。根据 [14,推论 2.3]，自然数集的几乎不相交子集族不可数。由于自然数集的有限子集集是可数的，因此自然数集的几乎不相交无限子集集不可数。

由此可知，可以选择定理 1.4 中海森堡群的不可数族作用的素数谱，使它们构成一个两两几乎不相交的无限集族。于是，它们的类型两两不同；根据定理 2.16，这些海森堡群的作用两两不回归等价。因此，它们两两不共轭。

References

[1] J. ´Alvarez L´opez 和 A. Candel，*Equicontinuous foliated spaces*，《数学杂志》，263:725–774，2009 年。[2] J. Auslander，《极小流及其扩张》，北荷兰数学研究丛书，第 153 卷，North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹，1988 年。[3] R. Baer，*Noethersche Gruppen*，《数学杂志》，66:269–288，1956 年。[4] L. Bartholdi，*Endomorphic presentations of branch groups*，《代数杂志》，268:419–443，2003 年。[5] L. Bartholdi 和 R.I. Grigorchuk，*On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups*，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，231:5–45，2000 年。[6] L. Bartholdi 和 R.I. Grigorchuk，*On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups*，《Serdica 数学杂志》，28:47–90，2002 年。[7] L. Bartholdi、R. Grigorchuk 和 Z. ˇSuni´k，*Branch groups*，《代数学手册》，第 3 卷，Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，2012 年，第 989–1112 页。[8] M. Boyle 和 J. Tomiyama，*Bounded topological orbit equivalence and C^*-algebras*，《日本数学会杂志》，50:317–329，1998 年。[9] M.-I. Cortez 和 S. Petite，*G-odometers and their almost one-to-one extensions*，《伦敦数学会杂志》，78(2):1–20，2008 年。[10] M.I. Cortez 和 K. Medynets，*Orbit equivalence rigidity of equicontinuous systems*，《伦敦数学会杂志》（第二辑），94:545–556，2016 年。[11] J. Dyer、S. Hurder 和 O. Lukina，*The discriminant invariant of Cantor group actions*，《拓扑应用》，208:64–92，2016 年。[12] J. Dyer、S. Hurder 和 O. Lukina，*Molino theory for matchbox manifolds*，《太平洋数学杂志》，289:91-151，2017 年。

[13] R. Fokkink 和 L. Oversteegen,
Homogeneous weak solenoids 354 9 3743 3755, , 《美国数
2002
学会汇刊》, ( ) : –。[14] S. Geschke, *Almost disjoint and independent families*, RIMS Kˆokyˆuroku（京都大学研究信息库）, 1790: 1-9, 2012。[15] T. Giordano、I. Putman 和 C. Skau, $\mathbb{Z}^d$*-odometers and cohomology*, 《群、几何与动力学》, 13: 909–938, 2019。[16] S. Hurder 和 O. Lukina, *Wild solenoids*, 《美国数学会汇刊》, 371: 4493-4533, 2019; arXiv:1702.03032。[17] S. Hurder 和 O. Lukina, *Orbit equivalence and classification of weak solenoids*, 《印第安纳大学数学杂志》, 第69卷: 2339–2363, 2020; arXiv:1803.02098。[18] S. Hurder 和 O. Lukina,
Limit group invariants for non-free Cantor actions, 《遍历理论与动力系统》, 第41卷: 1751–1794, 2021; arXiv:1904.11072。[19]S. Hurder 和 O. Lukina, *Nilpotent Cantor actions*, 《美国数学会会议录》, 第150卷: 289–304, 2022; arXiv:1905.07740。[20] S. Hurder 和 O. Lukina, *Type invariants for solenoidal manifolds*, 预印本, 2023。[21] S. Hurder 和 O. Lukina, *Mapping Class Groups of solenoidal manifolds*, 预印本, 2023。[22] S. Hurder、O. Lukina 和 W. van Limbeek, *Cantor dynamics of renormalizable groups*, 《群、几何与动力学》, 15: 1449–1487, 2021; arXiv:2002.01565。[23] S. Kionke,
Groups acting on rooted trees and their representations on the boundary 528 260 284, , 《代数杂
2019
志》, : –。[24] X. Li, *Continuous orbit equivalence rigidity*, 《遍历理论与动力系统》, 38: 1543–1563, 2018。[25] V. Nekrashevych, 《自相似群》, 《数学调查与专著》, 第117卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2005。[26] L. Ribes 和 P. Zalesskii, 《副有限群》, 施普林格出版社, 柏林, 2000。[27] S. Thomas,
The classification problem for torsion-free abelian groups of finite rank, 《美国数学会杂志》, 16: 233–258, 2003。[28] S. Thomas, *The classification problem for finite rank Butler groups*, 载于《模型、模与阿贝尔群》, Walter de Gruyter, 柏林, 2008, 329–338。[29] J.S. Wilson, 《副有限群》, 《伦敦数学会专著·新系列》, 第19卷, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 1998。

Steven Hurder, Department of Mathematics, University of Illinois at Chicago, 322 SEO (m/c 249), 851 S. Morgan Street, Chicago, IL 60607-7045

Email address: hurder@uic.edu

Olga Lukina, Mathematical Institute, Leiden University, PO Box 9512, 2300 RA Leiden, The Netherlands
Email address: o.lukina@math.leidenuniv.nl