arXiv:2305.00898v2 [math.FA] 3 May 2023

关于 Banach 空间算子的严格等距与严格对称可交换 d元组

B.P. Duggal

摘要

给定可交换的 Banach 空间算子 d元组 $\mathbb{S}_i$ 和 $\mathbb{T}_i$, $1 \leq i \leq 2$，若张量积对 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格 m等距的（分别地，$\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ 可逆，且 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格 m对称的），则存在整数 $m_i > 0$和非零标量 c，使得 $m = m_1 + m_2 - 1$，$(\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1)$ 是严格 m_1等距的，且 $(\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2)$ 是严格 m_2等距的（分别地，存在整数 $m_i > 0$和非零标量 c，使得 $m = m_1 + m_2 - 1$，$(\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1)$ 是严格 m_1对称的，且 $(\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2)$ 是严格 m_2对称的）。然而，对于 $1 \leq i \leq 2$，$(\mathbb{S}_i, \mathbb{T}_i)$ 是严格 m_i等距的（分别地，是严格 m_i对称的）仅能推出 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是 m等距的（分别地，$(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是 m对称的）。

1. 引言

令 $B(\mathcal{X})$（分别地，$B(\mathcal{H})$）表示代数，即无限维复 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 到自身（分别地，无限维复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 到自身）的有界线性变换；$\mathbb{C}$ 表示复平面；$B(\mathcal{X})^d$（分别地，$B(\mathcal{H})^d$ 和 $\mathbb{C}^d$）表示若干个 $B(\mathcal{X})$（分别地，$B(\mathcal{H})$和 $\mathbb{C}$）的乘积，其中 d 为某个整数；$\overline{z}$ 表示 $z \in \mathbb{C}$ 的共轭，且 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_d) \in \mathbb{C}^d$。若 d 元组 $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_d) \in B(\mathcal{X})^d$是一个交换$d$元组，则对所有 $1 \leq i, j \leq d$，都有 $[A_i, A_j] = A_iA_j - A_jA_i = 0$。若 P 是$\mathbb{C}^d$ 中的多项式，且 $\mathbb{A}$是 $B(\mathcal{H})^d$中由交换算子构成的一个 d元组，则当 $\mathrm{P}(\mathbb{A}) = 0$时，称 $\mathbb{A}$ 是 P 的一个遗传根。近期备受关注的两类遗传根算子是 m-等距算子和 m-对称算子（亦称 m-自伴算子）；其中，若 $A \in B(\mathcal{H})$ 满足 $\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} A^{*j}A^j = 0$，则称其为 m-等距算子，其中 m 为某个正整数；若 $A \in B(\mathcal{H})$满足$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} A^{*(m-j)}A^j = 0.$，则称其为 m-对称算子。显然，m-等距算子是方程 $P(z) = (\overline{z}z - 1)^m = 0$ 的解，而 m-对称算子是方程$P(z) = (\overline{z} - z)^m = 0$的解。$m$-等距算子类由 Agler 引入[1]，$m$-对称算子类则由 Helton 引入 [12]（尽管当时并非作为多项式方程（$\overline{z} - z$）的算子解）。此后，许多作者研究了这些算子类及其变体（左 m-可逆算子以及 m-对称 Banach 空间对 (A, B) 类型 [6]），其中包括 Agler 和 Stankus [2],、Bayart [3],、Bermudez 等人 [4],、Duggal 和 Kim [7, 6],、Gu [10],、Gu 和 Stankus [11] 以及 Paul 和 Gu [13]。

AMS（MOS）学科分类（2010）。主要分类：47A05，47A55；次要分类：47A11，47B47。关键词：巴拿赫空间，交换的 d-元组，左/右乘算子，m-左可逆，m-等距和 m-自伴算子，算子的乘积，张量积。

将算子的 m-等距性质 $A \in B(\mathcal{H})$推广到交换d元组 $\mathbb{A} \in B(\mathcal{H})^d$，Gleeson 和 Richter [9] 称当

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \sum_{|\beta|=j} \frac{j!}{\beta!}\mathbb{A}^{*\beta}\mathbb{A}^{\beta} = 0, \tag{1}$$

其中

$$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_d),\ |\beta| = \sum_{i=1}^{d}\beta_i,\ \beta! = \Pi_{i=1}^{d}\beta_i!, \mathbb{A}^{\beta} = \Pi_{i=1}^{d}A_i^{\beta_i}, \mathbb{A}^{*\beta} = \Pi_{i=1}^{d}A_i^{*\beta_i};$$

$\mathbb{A}$ 若为 m-对称，则称为 国产成人

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (A_1^* + \cdots + A_d^*)^{m-j}(A_1 + \cdots + A_d)^j = 0. \tag{2}$$

这些推广及其若干变体，尤其是左 m-可逆的巴拿赫空间算子对 (A, B):

$$\triangle_{A,B}^{m}(I) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) A^j B^j = 0$$

以及 m-对称对 (A, B):

$$\delta_{A,B}^{m}(I) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) A^{m-j} B^j = 0,$$

近年来，这一直是许多研究关注的主题，更多参考文献请参见 [5, 6, 8, 10, 13, 14]。

回顾一下，Banach 空间算子对 (A, B) 若满足 $\triangle_{A,B}^{m}(I) = 0$ 且 $\triangle_{A\,B}^{m-1}(I) \neq 0$, 则称其为严格 m-左可逆；类似地，算子对 (A, B) 若满足 $\delta_{A,B}^{m}(I) = 0$ 且 $\delta_{A\,B}^{m-1}(I) \neq 0$，则称其为严格 m- 对称。若 (A_i, B_i) 是 m_i- 等距且类似地 m_i 对称的算子对，$1 \leq i \leq 2$，并且 A_1 与 A_2可交换， B_1与 B_2可交换，则其乘积 (A_1A_2, B_1B_2) 分别是 (m_1+m_2-1)-等距和 (m_1+m_2-1)-对称[4, 8, 6, 10]。反之则不成立，即使对于严格 m-等距（以及严格 m-对称）的算子对 (A_1A_2, B_1B_2) 也是如此。一个肯定答案的情形是张量积算子对 $(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$：(i) $(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$ 是 m-等距，当且仅当存在整数 $m_i > 0$和非零标量 c，使得 $m = m_1 + m_2 - 1$，$(A_1, \frac{1}{c}B_1)$ 是 m_1-等距，且 (A_2, cB_2) 是 m_2-等距 [13,定理 1.1]；(ii) 若 A_i 左可逆且 B_i 右可逆，$1 \leq i \leq 2$，则 $(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$ 是 m-对称，当且仅当存在整数 $m_i > 0$和非零标量 c，使得 $m = m_1 + m_2 - 1$，$(A_1, \frac{1}{c}B_1)$ 是 m_1-对称，且 (A_2, cB_2) 是 m_2-对称 [13, 定理 5.2]。

本文首先通过左乘和右乘初等算子（参见 [7], ，其中针对单个线性算子给出了这一定义），（等价地）定义 Banach 空间算子的交换 d-元组的 m-等距对和 m-对称对 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$,

同时引入其他相关记号和术语，这部分内容见第 2 节。第 3 节探讨 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 的 m-等距性质（类似地，$(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 的 m-对称性质）、$1 \leq i \leq 2$ 与其乘积 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 之间的关系。本文证明了乘积对 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 为严格 m-等距（类似地，为严格 m-对称）的充要条件，并说明了其与 m-等距对 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 的严格性之间的关系。倒数第二节，即第 4 节，证明了 Paul 和 Gu [13] 的结果可推广至交换 d-元组的张量积。与定义 (1)（相应地，定义 (2)）相比，采用左乘/右乘算子来定义 m-等距对（类似地，m-对称对）$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 的优势在于，它为我们提供了一种途径，可以利用熟悉的论证来证明这些结果在 1-元组（即单个线性算子）情形下的版本。这里可以看到，S_i, $1 \leq i \leq 2$ 的可逆性是一个充分条件；该条件可由 S_i 的左可逆性和 T_i $(1 \leq i \leq 2)$ 的右可逆性保证，见 [13, 定理 5.2]。

2. 定义与引论性质

对于 $A, B \in B(\mathcal{X})$，令 L_A 和 $R_B \in B(B(\mathcal{X}))$ 分别表示算子

$$L_A(X) = AX \text{ and } R_B(X) = XB$$

左乘法 A 和右乘法 B。给定交换的 d-元组 $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_d)$ 和 $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_d) \in B(\mathcal{X})^d$，令 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{\alpha}$ 和 $\mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{\alpha}$,

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i,\ \alpha_i \geq 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq d,$$

定义为

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{\alpha} = \Pi_{i=1}^{d} L_{A_i}^{\alpha_i},\ \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{\alpha} = \Pi_{i=1}^{d} R_{B_i}^{\alpha_i}.$$

对于算子 $X \in B(\mathcal{X})$，令卷积“*”和乘法“$\times$”分别表示这些运算。

$$(\mathbb{L}_{\mathbb{A}} * \mathbb{R}_{\mathbb{B}})^j(X) = \left(\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{\alpha} \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{\alpha} \right)(X) = \left(\sum_{i=1}^{d} L_{A_i} R_{B_i} \right)^j (X)$$

(all integers j ≥ 0, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_{\mathrm{d}}!$) and

$$(\mathbb{L}_{\mathbb{A}} \times \mathbb{R}_{\mathbb{B}})(X) = \left(\sum_{i=1}^{d} L_{A_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{d} R_{B_i} \right)(X).$$

定义算子 $\lfloor \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i \rfloor^n$ 为

$$\lfloor \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i \rfloor^n = \sum_{i=1}^{d} A_i \lfloor \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i \rfloor^{n-1} B_i \text{ for all positive integers } n.$$

（因此，$\lfloor A \rfloor^n = A \lfloor A \rfloor^{n-1} I = I \lfloor A \rfloor^{n-1} A = \cdots = A^n$ $\lfloor AB \rfloor^n = A \lfloor AB \rfloor^{n-1} B = \cdots =$，且 $\lfloor \sum_{i=1}^{d} A_i^n B_i^n \rfloor^n = \sum_{i=1}^{d} A_i \lfloor \sum_{i=1}^{d} A_i B_i \rfloor^{n-1} B_i$。）

我们称 d 元组 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 可交换，$[\mathbb{A},\mathbb{B}]=0$，如果

$$[A_i,B_j]=A_iB_j-B_jA_i=0 \text{ for all } 1\leq i,j\leq d.$$

显然，

$$[\mathbb{L}_{\mathbb{A}},\mathbb{R}_{\mathbb{B}}]=0$$

且若 $[\mathbb{A},\mathbb{B}]=0$，则

$$[\mathbb{L}_{\mathbb{A}},\mathbb{L}_{\mathbb{B}}]=[\mathbb{R}_{\mathbb{A}},\mathbb{R}_{\mathbb{B}}]=0.$$

一对可交换的 d-元组 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ （$\mathbb{A},\mathbb{B}$）称为 m-等距的，$(\mathbb{A},\mathbb{B})$ 称为 $\in m$-等距的，其中 m 为某个正整数，当且仅当

$$\begin{aligned}
\triangle^m_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(I) &= (I-\mathbb{L}_{\mathbb{A}}*\mathbb{R}_{\mathbb{B}})^m(I)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m\\ j\end{pmatrix}(\mathbb{L}_{\mathbb{A}}*\mathbb{R}_{\mathbb{B}})^j(I)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m\\ j\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{d}L_{A_i}R_{B_i}\right)^j(I)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m\\ j\end{pmatrix}\lfloor\sum_{i=1}^{d}A_iB_i\rfloor^j\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m\\ j\end{pmatrix}\left(\sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}\mathbb{A}^\alpha\mathbb{B}^\alpha\right)\\
&= 0;
\end{aligned}$$

若 n 为某个正整数，则称 $(\mathbb{A},\mathbb{B})$ 为 n-对称的，当且仅当

$$\begin{aligned}
\delta^n_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(X) &= (\mathbb{L}_{\mathbb{A}}-\mathbb{R}_{\mathbb{B}})^n(I)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{pmatrix} n\\ j\end{pmatrix}\mathbb{L}^{n-j}_{\mathbb{A}}\times\mathbb{R}^j_{\mathbb{B}}\right)(I)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{pmatrix} n\\ j\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{d}L_{A_i}\right)^{n-j}\left(\sum_{i=1}^{d}R_{B_i}\right)^j\right)(I)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\begin{pmatrix} n\\ j\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{d}A_i\right)^{n-j}\left(\sum_{i=1}^{d}B_i\right)^j\\
&= 0.
\end{aligned}$$

由 m-等距算子组成的交换元组，以及类似地由 n-对称算子组成的交换元组，与相应的单个算子具有许多相同的性质：例如，$\triangle^m_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}(I)=0$ 蕴含 $\triangle^t_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}(I)=0$；类似地，$\delta^m_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}(I)=0$ 蕴含 $\delta^t_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}(I)=0$，其中整数 $t\geq m$。然而，有些性质对单个算子成立，对 d-元组却不成立：例如，尽管

$$\triangle^m_{A,B}(I)=0\Longrightarrow\triangle^m_{A^t,B^t}(I) \text{ for all integers } t\geq 1$$

and

$$\triangle^m_{A,B}(I)=0\Longleftrightarrow\triangle^m_{A^{-1},B^{-1}}(I)=0 \text{ for all invertible } A \text{ and } B$$

（类似地，对于 m-对称（A, B）），这些性质对 d-元组并不成立（见 [7]）.

若 $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in (X, m)$-等距，则

$$\begin{aligned} & \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m}(X) = 0 \Longleftrightarrow (I - \mathbb{L}_{\mathbb{A}} * R_{\mathbb{B}}) \left(\triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(X) \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (\mathbb{L}_{\mathbb{A}} * \mathbb{R}_{\mathbb{B}}) \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(X) = \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(X) \\ \Longrightarrow \quad & \cdots \Longrightarrow (\mathbb{L}_{\mathbb{A}} * \mathbb{R}_{\mathbb{B}})^{t} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(X) = \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(X) \end{aligned}$$

且若 $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in (X, n)$-对称，则

$$\begin{aligned} & \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n}(X) = 0 \Longleftrightarrow (\mathbb{L}_{\mathbb{A}} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}})(\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \mathbb{L}_{\mathbb{A}} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X) = \mathbb{R}_{\mathbb{B}}(\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X)) \\ \Longrightarrow \quad & \cdots \Longrightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{t} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X) = \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{t} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X). \end{aligned}$$

对所有整数 $t \geq 0$。这里

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\mathbb{A}}(\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X)) &= \mathbb{L}_{\mathbb{A}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{n-1-j} \times \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{j} \right) (X) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{n-j} \times \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{j} \right) (X) \end{aligned}$$

and

$$\mathbb{R}_{\mathbb{B}}(\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{n-1}(X)) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{n-1-j} \times \mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{j+1} \right) (X).$$

3. 结果：乘积的严格性

设 $\mathbb{A}.\mathbb{B} \in B(\mathcal{X})^{d}$ 是相互交换的 d-元组，并令 $\mathcal{E}_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}$ 表示算子

$$\mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(X) = (\mathbb{L}_{\mathbb{A}} * \mathbb{R}_{\mathbb{B}})(X),\ X \in B(\mathcal{X}).$$

根据定义，$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 是严格的 m-等距的，当且仅当 $\triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m}(I) = 0$ 且 $\triangle_{\mathbb{A}\,\mathbb{B}}^{m-1},(I) \neq 0$；类似地，$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 是严格的 m-对称的，当且仅当 $\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m}(I) = 0$ 且 $\delta_{\mathbb{A}\,\mathbb{B}}^{m-1},(I) \neq 0$。下文将给出乘积对 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 的一个充要条件，其中 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{B}_i$ 是可交换的 d-元组，使其成为严格的 m-等距的（分别为严格的 m-对称的），并探讨这一性质与 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 的严格 m-等距性质（分别为 m_i-对称性质）之间的关系； $i = 1, 2$. 我们从一个技术性引理开始。

引理 3.1 (i). 若 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 是严格的 m-等距的，则对所有 $t \geq m-1$，序列 $\{\mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm r} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}($ $I)\}_{r=0}^{m-1}$ 线性无关。

(ii). 如果 $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 是严格的 m-对称且 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{m-1} \delta_{\mathbb{A}\,\mathbb{B}}^{m-1}$，$(I) \neq 0$，那么序列$\{\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)$ $\}_{r=0}^{m-1}$和 $\{\mathbb{R}_{\mathbb{B}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\}_{r=0}^{m-1}$线性无关。

证明。两种情况下的证明都采用反证法。

(i). 假设存在标量 a_i、 $0 \leq i \leq m-1$，且它们不全为零，使得$\sum_{r=0}^{m-1} a_r \mathcal{E}_{\mathbb{A}}^{t\pm r}$，$_{\mathbb{B}} \triangle_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}^{r}(I) = 0$。那么，由于 $\triangle_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}^{m}(I) = 0$ 且 $\mathcal{E}_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}$ 与 $\triangle_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}$可交换，

$$\begin{aligned} & \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}\left(\sum_{r=0}^{m-1} a_r \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm r} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 = 0, \end{aligned}$$

由于

$$\triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m}(I) = 0 \Longleftrightarrow \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I)$$

推出

$$\mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t} \triangle_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^{m-1}(I) = \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) \neq 0.$$

再次,

$$\begin{aligned} & \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-2}\left(\sum_{r=1}^{m-1} a_r \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm r} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_1 \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm 1} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_1 = 0, \end{aligned}$$

因此重复上述论证

$$\begin{aligned} & \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}\left(\sum_{r=m-2}^{m-1} A_r \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm r} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_{m-2} \mathcal{E}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{t\pm(m-2)} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_{m-2} = 0 \Longrightarrow a_{m-1} \triangle_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \Longleftrightarrow a_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

(ii). 我们证明序列 $\{\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(\mathbb{I})\}_{r=0}^{m-1}$ 的线性无关性；因为

$$\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m}(I) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{A}} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = \mathbb{R}_{\mathbb{B}} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I),$$

第二个序列的线性无关性的证明可由第一个序列的证明推出。假设存在不全为零的标量 a_i，使得 $\sum_{r=0}^{m-1} a_r \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I) = 0$。那么，由于 $\delta_{\mathbb{A}\ ,\mathbb{B}}^{m}(I) = 0$, $\mathbb{L}_{\mathbb{A}}$ 与 $\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}$ 以及 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{m-1} \delta_{\mathbb{A}\ \mathbb{B}\ ,}^{m-1}(I) \neq 0$可交换，

$$\begin{aligned} & \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}\left(\sum_{r=0}^{m-1} a_r \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_0 \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0, \\ & \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-2}\left(\sum_{r=1}^{m-1} a_r \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & a_1 \mathbb{L}_{\mathbb{A}} \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I) = 0 \Longleftrightarrow a_1 = 0, \end{aligned}$$

因此重复上述论证

$$\begin{aligned} & \delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}\left(\sum_{r=m-2}^{m-1} a_r \mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{r}\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{r}(I)\right)=0 \\ \Longrightarrow\quad & a_{m-2}\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{m-2}\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I)=0 \Longleftrightarrow a_{m-2}=0 \\ \Longrightarrow\quad & a_{m-1}\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{m-1}\delta_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{m-1}(I)=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & a_{m-1}=0. \end{aligned}$$

这就矛盾了。 □

注 3.2 由于 $\delta_{\mathbb{A}\,\mathbb{B}}^{m-1}$，$(I)\neq 0$ 对于严格的 m-对称交换 d-元组 $(\mathbb{A},\mathbb{B})$，$\mathbb{A}$的左可逆性（从而 $\mathbb{L}_A$的左可逆性）是 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}}^{m-1}\delta_{\mathbb{A}\,\mathbb{B}}^{m-1}$，$(I)\neq 0$ 的充分条件。

设 $\mathcal{X}\overline{\otimes}\mathcal{X}$ 表示赋予适当交叉范数后，$\mathcal{X}$ 与自身的代数张量积的完备化。设 $S\otimes T$ 表示$S\in B(\mathcal{X})$与 $T\in B(\mathcal{X})$的张量积。 d-元组 $\mathbb{A}=(A_1,\cdots,A_d)$ 和 $\mathbb{B}=(B_1,\cdots,B_d)$ 的张量积为 d^2-元组

$$\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}=(A_1\otimes B_1,\cdots,A_1\otimes B_d,A_2\otimes B_1,\cdots,A_2\otimes B_d,\cdots,A_d\otimes B_1,\cdots,A_d\otimes B_d).$$

设 $\mathbb{I}=I\otimes I$。（回忆一下，算子 $\mathcal{E}_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}$定义为 $\mathcal{E}_{\mathbb{A},\ \mathbb{B}}(X)=(\mathbb{L}_{\mathbb{A}}*\mathbb{R}_{\mathbb{B}})(X)$。）

定理 3.3 给定可交换的 d-元组 $\mathbb{A}_i,\mathbb{B}_i\in B(\mathcal{X})^d$，以下任意两个条件都蕴含第三个条件。

(i) $(\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\otimes\mathbb{B}_2)$ 是 m-等距的；$m=m_1+m_2-1$。
(ii) $(\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1)$ 是 m_1-等距的。(iii) $(\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2)$ 是 m_2-等距的。

证明。众所周知，见 [7], ，(ii) 和 (iii) 蕴含 (i)。我们证明 (i) 和 (ii) 蕴含 (iii)；(i) 和 (iii) 蕴含 (ii) 的证明类似。

首先注意，若令

$$\mathbb{S}_1=\mathbb{A}_1\otimes I,\mathbb{S}_2=I\otimes\mathbb{A}_2,\mathbb{T}_1=\mathbb{B}_1\otimes I \text{ and } \mathbb{T}_2=I\otimes\mathbb{B}_2,$$

then

$$\begin{aligned} &[\mathbb{S}_1,\mathbb{S}_2]=[\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2]=0=[\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_2]=[\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1] \\ &(\mathbb{A}_i,\mathbb{B}_i)\in m_i-\text{isometric}\Longleftrightarrow(\mathbb{S}_i,\mathbb{T}_i)\in m_i-\text{isometric},i=1,2, \\ &(\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\otimes\mathbb{B}_2)\in m-\text{isometric}\Longleftrightarrow(\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\mathbb{T}_2)\in m-\text{isometric} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &(i)\wedge(ii)\Longrightarrow(iii)\text{ if and only if }(\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\mathbb{T}_2)\in m-\text{isometric} \\ &\text{and }(\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1)\in m_1-\text{isometric imply }(\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_2)\in m_2-\text{isometric}. \end{aligned}$$

设 $t\leq m_1$ 为使得 $(\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1)\in t$-等距的最小正整数。（因此，$(\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1)$ 是严格 t-等距的。）那么

$$\begin{aligned} & \triangle_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\mathbb{T}_2}^{m}(\mathbb{I})=(I-\mathcal{E}_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\mathbb{T}_2})^m(\mathbb{I}) \\ =\ & \left(\mathcal{E}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}\triangle_{\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_2}+\triangle_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}\right)^m)(\mathbb{I}) \\ =\ & \sum_{j=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)\mathcal{E}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}^{m-j}\triangle_{\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_2}^{m-j}\triangle_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}^{j}(\mathbb{I})=0. \end{aligned}$$

由于算子 $\mathcal{E}_{\mathbb{S}_1、\ \mathbb{T}_1}$ 和$\triangle_{\mathbb{S}_2、\ \mathbb{T}_2}$ 彼此可交换，算子 $\triangle_{\mathbb{S}_1、\ \mathbb{T}_1}$ 和$\triangle_{\mathbb{S}_2、\ \mathbb{T}_2}$ 也彼此可交换，

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}^{m-j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}(\triangle^{j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1})(\mathbb{I}) = (-1)^j \mathcal{E}^{m-j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}(\mathcal{E}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1} - I)^j(\mathbb{I}) \\
= & \left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right)\mathcal{E}^{m-k}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}\right)(\mathbb{I}) \\
= & \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right)\lfloor\sum_{i=1}^{d} L_{A_{1i}\otimes I}R_{B_{1i}\otimes I}\rfloor^{m-k}(\mathbb{I}) \\
= & \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right)\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{1i}B_{1i}\otimes I\rfloor^{m-k} \\
& (\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{1i}B_{1i}\otimes I\rfloor^{n} = \sum_{i=1}^{d}(A_{1i}\otimes I)\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{1i}B_{1i}\otimes I\rfloor^{n-1}(B_{1i}\otimes I), \\
& \text{all positive integers } n) \\
= & \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right)\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{1i}B_{1i}\rfloor^{m-k}\otimes I \\
= & X_j\otimes I \text{ (say)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \triangle^{m-j}_{\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_2}\left(\mathcal{E}^{m-j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}(\triangle^{j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}(\mathbb{I})\right) = (-1)^{m-j}(\mathcal{E}_{\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_2} - I)^{m-j}\left(\mathcal{E}^{m-j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}\triangle^{j}_{\mathbb{S}_1,\mathbb{T}_1}(\mathbb{I})\right) \\
= & \sum_{p=0}^{m-j}(-1)^{m-j+p}\left(\begin{array}{c} m-j \\ p \end{array}\right)\left(I\otimes\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{2i}B_{2i}\rfloor\right)^{m-j-p}(X_j\otimes I) \\
= & \sum_{p=0}^{m-j}(-1)^{m-j+p}\left(\begin{array}{c} m-j \\ p \end{array}\right)\left(X_j\otimes\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{2i}B_{2i}\rfloor^{m-j-p}\right) \\
= & X_j\otimes Y_j \text{ say},
\end{aligned}$$

and

$$\triangle^{m}_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) = \sum_{j=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)(X_j\otimes Y_j).$$

由于序列 $\{X_j\}_{j=0}^{t-1}$ 线性无关，我们必有 $Y_j = 0$ 对所有 $0 \le j \le t-1$ 均成立。由于 $j \le t-1$ 蕴含 $m-j = m_1+m_2-1-t+1 \ge m_2$，我们有

$$\begin{aligned}
& I\otimes\sum_{p=0}^{m_2}(-1)^{m_2+p}\left(\begin{array}{c} m_2 \\ p \end{array}\right)\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{2i}B_{2i}\rfloor^{m_2-p} = 0 \\
\iff & \sum_{p=0}^{m_2}(-1)^{m_2+p}\left(\begin{array}{c} m_2 \\ p \end{array}\right)\lfloor\sum_{i=1}^{d} A_{2i}B_{2i}\rfloor^{m_2-p} = \triangle^{m_2}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}(I) = 0.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 3.3 的类似结论也适用于 m-对称算子的乘积。

定理 3.4 设交换的 d-元组 $\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i \in B(\mathcal{X})^d$ 满足： $\mathbb{A}_i$ 对于 $1 \leq i \leq 2$ 是左可逆的, 则以下条件中任意两个都蕴含第三个。

(i). $(\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2)$ 是 m-对称的； $m = m_1 + m_2 - 1$。
(ii). $(\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)$ 是 m_1-对称的。**(iii).** $(\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2)$ 是 m_2-对称的。

证明。众所周知，(ii) 和 (iii) 蕴含 (i)，且无需对 $\mathbb{A}_1$ 和 $\mathbb{A}_2$ 的左可逆性作任何假设 [7]。我们证明 (i) 和 (ii) 蕴含 (iii)；(i) 和 (iii) 蕴含 (ii) 的证明类似，留给读者。

假设 $t \leq m_1$ 是满足 $\delta^{t-1}_{\mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}(I) \neq 0$ 的最小正整数。（因此，$\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1$ 是严格 t-对称的。）那么

$$\begin{aligned}
\delta^m_{\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\otimes\mathbb{B}_2}(\mathbb{I}) &= (\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1\otimes\mathbb{B}_2})^m(\mathbb{I}) \\
&= \left(\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1} \otimes \mathbb{L}_{\mathbb{A}_2} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1} \otimes \mathbb{R}_{\mathbb{B}_2}\right)^m(\mathbb{I}) \\
&= \left((\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1} \otimes \mathbb{L}_{\mathbb{A}_2} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1} \otimes \mathbb{L}_{\mathbb{A}_2}) + (\mathbb{R}_{\mathbb{B}_1} \otimes \mathbb{L}_{\mathbb{A}_2} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1} \otimes \mathbb{R}_{\mathbb{B}_2})\right)^m(\mathbb{I}) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \left(\delta^{m-j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1} \otimes \mathbb{L}^{m-j}_{\mathbb{A}_2}\right) \times \left(\mathbb{R}^j_{\mathbb{B}_1} \otimes \delta^j_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\right)\right)(\mathbb{I}) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \left(\mathbb{R}^j_{\mathbb{B}_1}\delta^{m-j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right) \otimes \left(\mathbb{L}^{m-j}_{\mathbb{A}_2}\delta^j_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}(I)\right).
\end{aligned}$$

由于 $(\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)$ 是严格 t-对称的，且 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1}\delta^{t-1}_{\mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}(I) = \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1}\delta^{t-1}_{\mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}(I) \neq 0$，引理 3.1 证明中的论证表明，序列$\{\mathbb{R}^j_{\mathbb{B}_1}\delta^{m-j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\}^{t-1}_{m-j=0}$ 线性无关。因此，对所有 $m - j \leq t - 1$, $\mathbb{L}^{m-j}_{\mathbb{A}_2}\delta^j_{\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_2}(I) = 0$，等价地，$j \geq m - t + 1 \geq m_1 + m_2 - 1 - m_1 + 1 = m_2$。但是，由于 $\mathbb{L}_{\mathbb{A}_2}$ 是左可逆的，对所有 $j \geq m_2$, $\delta^j_{\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_2}(I) = 0$。□

定理 3.3 的条件 (i) –(iii) 中的严格性要求更高：因此，虽然 $(\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2)$ 是严格 m 等距的，这意味着对于 $i = 1$ 和 $i = 2$, $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 都是严格 m_i-等距的；但对于 $i = 1$ 和 $i = 2$, $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 都是严格 m_i-等距的，一般并不意味着 $(\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2)$ 是严格 m 等距的。

定理 3.5 设有交换的 d-元组 $\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i \in B(\mathcal{X})^d$, $1 \leq i \leq 2$, 满足$[\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2] = [\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2] = 0$, 若 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 是 m_i-等距的，且 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 m 等距的，$m = m_1 + m_2 - 1$，则：

(i) $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m 等距的，当且仅当

$$\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\left(\triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}(I)\right) = \triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right) \neq 0; \tag{3}$$

(ii) $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 严格 m 等距意味着，对于$1 \leq i \leq 2$, $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 严格等距；

(iii) $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 对于 $1 \leq i \leq 2$ 严格等距，并不意味着$(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 严格m 等距

证明。假设 $[\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2] = [\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2] = 0$ 意味着

$$[\triangle_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}, \triangle_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}] = 0 = [\mathcal{E}^{m_2-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}, \triangle_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}].$$

由于

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}^{m_2-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\left(\triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}(I)\right) \\ = & \triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\mathcal{E}^{m_2-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right) \\ = & \triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right), \end{aligned}$$

每当 $\triangle^{m_1}_{\mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}(I)=0$（等价地，$\mathcal{E}_{\mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1\ \mathbb{B}_1,\ }(I)=\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1\ \mathbb{B}_1,\ }(I)$），若 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 m-等距的，且 $(\mathbb{A}_i,\mathbb{B}_i)$、$1\leq i\leq 2$ 中至少一组不是严格 m_i-等距的，则 (3) 矛盾。因此 (i) 蕴含 (ii)。

为证明 (i)，假设 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m-等距的。然后 $\triangle^{m}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I)=0$且 $\triangle^{m-1}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I)\neq 0$。我们有

$$\begin{aligned} 0 \neq & \triangle^{m-1}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I) \\ = & \sum_{j=0}^{m-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix}\triangle^{m-1-j}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\mathcal{E}^{m-1-j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\triangle^{j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right) \\ & \text{(see the proof ofTheorem 3.3)} \\ = & \sum_{j=0}^{m-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix}\triangle^{m-1-j}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\mathcal{E}^{m-1-j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}\triangle^{j}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right) \\ & \text{(since } \triangle^{m_1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)=0 \text{ for } j\geq m_1) \\ = & \begin{pmatrix} m-1 \\ m_1-1 \end{pmatrix}\triangle^{m_2-1}_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}\left(\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right), \end{aligned}$$

因为对所有 $m-1-j\geq m_2$，$\triangle^{m-1-j}_{\mathbb{A}_2\ \mathbb{B}_2\ }(I)=0$，等价地，$m_1-2\geq j$，并且 $\mathcal{E}^{m-1-(m_1-1)\ \mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1}\left(\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I)\right)=\triangle^{m_1-1}_{\mathbb{A}_1\ \mathbb{B}_1\ }(I)$。

为了完成证明，我们给出一个证明 (iii) 的例子。设 $I_2=I\oplus I$，并设$A,B\in B(\mathcal{X})$ 满足 (A,B) 是严格 m-等距的。定义算子 $\mathbb{A}_i,\mathbb{B}_i\in B(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X})^d$, $1\leq i\leq 2$，使得

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1=(A_{11},\cdots,A_{1d})&=\frac{1}{\sqrt{d}}(A\oplus I,\cdots,A\oplus I),\\ \mathbb{A}_2=(A_{21},\cdots,A_{2d})&=\frac{1}{\sqrt{d}}(I\oplus A,\cdots,I\oplus A),\\ \mathbb{B}_1=(B_{11},\cdots,B_{1d})&=\frac{1}{\sqrt{d}}(B\oplus I,\cdots,B\oplus I),\\ \mathbb{B}_2=(B_{21},\cdots,B_{2d})&=\frac{1}{\sqrt{d}}(I\oplus B,\cdots,I\oplus B). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \triangle^{m}_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I_2) &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\left(\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1}*\mathbb{R}_{\mathbb{B}_1}\right)^{m-j}(I_2) \\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\lfloor\sum_{i=1}^{d}\frac{1}{d}(AB\oplus I)\rfloor^{m-j} \end{aligned}$$

$$\left(\lfloor\sum_{i=1}^{d}(AB\oplus I)\rfloor^t=\sum_{i=1}^{d}(A\oplus I)\lfloor\sum_{i=1}^{d}(AB\oplus I)\rfloor^{t-1}(B\oplus I)\text{ for integers }t\geq 1\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\lfloor(AB\oplus I)\rfloor^{m-j}\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}(A^{m-j}B^{m-j}\oplus I)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

and

$$\triangle_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{m-1}(I_2)\neq 0.$$

同样，$\triangle_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m}(I_2)=0$ 和 $\triangle_{\mathbb{A}_2\,\mathbb{B}_2,}^{m-1}(I_2)\neq 0$。

现在考虑 $\triangle_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}^{m}(I_2)$。由于 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{B}_i$ 是满足$[\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2]=[\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2]=0$的交换 d-元组，因此 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 $(2m-1)$-等距的。同样，由于

$$\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2=\frac{1}{d}(A\oplus A,\cdots,A\oplus A)\in B(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X})^{d^2}$$

and

$$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2=\frac{1}{d}(B\oplus B,\cdots,B\oplus B)\in B(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X})^{d^2},$$

$$\begin{aligned}
&\triangle_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}^{m}(I_2)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}(\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}*\mathbb{R}_{\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2})^{m-j}(I_2)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\lfloor\sum_{i=1}^{d^2}\frac{1}{d^2}(AB\oplus AB)\rfloor^{m-j}\\
&\quad(\lfloor\sum_{i=1}^{d^2}(AB\oplus AB)\rfloor^t=\sum_{i=1}^{d^2}(A\oplus A)\lfloor\sum_{i=1}^{d^2}(AB\oplus AB)\rfloor^{t-1}(B\oplus B)\\
&\quad\text{for all integers }t\geq 1)\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\lfloor(AB\oplus AB)\rfloor^{m-j}\\
&= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}(A^{m-j}B^{m-j}\oplus A^{m-j}B^{m-j})\\
&= 0,
\end{aligned}$$

即，$(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 m-等距的。因此，对于所有 $m\geq 2$，$(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 都不是严格的 $(2m-1)$-等距的。□

注 3.6 取 A、$B\in B(\mathcal{X})$ 和 $\mathbb{A}_i$、$\mathbb{B}_i\in B(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X})^d$ 为证明第 (iii) 部分的例子中的算子，定义算子 $\mathbb{S}_i$ 和 $\mathbb{T}_i\in B((\mathcal{X}\oplus\mathcal{X})\overline{\otimes}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X}))^d$，使得 $\mathbb{S}_i=\mathbb{A}_i\otimes I_2$ 和 $\mathbb{T}_i=\mathbb{B}_i\otimes I_2$；$1\leq i\leq 2$ 和 $I_2=I\oplus I$。则 $(\mathbb{S}_i,\mathbb{T}_i)$ 和 $(\mathbb{S}_1\otimes\mathbb{S}_2,\mathbb{T}_1\otimes\mathbb{T}_2)$，$1\leq i\leq 2$，都是严格 m-等距的。

与 m-等距算子一样， m-对称算子的严格性还需要满足更多条件。

定理 3.7 设 d-元组 $\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i \in B(\mathcal{X})^d$ 彼此可交换，且 $[\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2] = [\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2] = 0$，并且 $\mathbb{A}_i$ 对于 $1 \leq i \leq 2$ 左可逆。若 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 是 m_i-对称的，$1 \leq i \leq 2$，且 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 m-对称的， $m = m_1 + m_2 - 1$，则：

(i) $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m-对称的，当且仅当

$$\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1}^{m_2-1} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m_2-1}\left(\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{m_1-1} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{m_1-1}(I)\right) \tag{4}$$

$$= \mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{m_1-1} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{m_1-1}\left(\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m_2-1}(I)\right) \neq 0; \tag{5}$$

(ii) $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m-对称的，这意味着对于 $1 \leq i \leq 2$，$(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 是严格 m_i-对称的；
(iii) $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 对于 $1 \leq i \leq 2$ 是严格 m_i-对称的，并不意味着 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m-对称的。

证明。(i) 和 (ii)。显然，如果 $(\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i)$ 中任一个不是严格 m_i-对称的，那么 (4) 和 (5) 等于 0，且 (i) 不成立。因此 (i) 蕴含 (ii)。我们证明 (i)，然后修改定理 3.5 的证明中的例子，以证明 (iii)。

$(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是严格 m-对称的，当且仅当 $\delta^m_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I) = 0$ 且

$$\begin{aligned} 0 &\neq \delta^{m-1}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I) = (\mathbb{L}_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2} - \mathbb{R}_{\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2})^{m-1}(I) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix} \left(L_{\mathbb{A}_1}^{m-1-j} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m-1-j}\right)\left(\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{j} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{j}\right)(I) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix} \left(\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{j} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{j}\right)\left(L_{\mathbb{A}_1}^{m-1-j} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m-1-j}\right)(I) \end{aligned}$$

根据关于 $\mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i$ 的交换性假设以及左乘和右乘算子的交换性。由于

$$\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{j} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{j}(I) = (\sum_{i=1}^{d} R_{A_{2i}})^j(\delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{j}(I)) = 0$$

对所有 $j \geq m_1$,

$$0 \neq \sum_{j=0}^{m_1-1} \begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix} \left(\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{j} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{j}\right)\left(L_{\mathbb{A}_1}^{m-1-j} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m-1-j}\right)(I).$$

但此时，由于 $\delta^{m-1-j}_{\mathbb{A}_2\,\mathbb{B}_2}$, $(I) = 0$ 对于 $m - 1 - j = m_1 + m_2 - 2 - j \geq m_2$,

$$0 \neq \begin{pmatrix} m-1 \\ m_1-1 \end{pmatrix} \left(\mathbb{R}_{\mathbb{A}_2}^{m_1-1} \times \delta_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}^{m_1-1}\right)\left(L_{\mathbb{A}_1}^{m_2-1} \times \delta_{\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2}^{m_2-1}\right)(I).$$

(iii)。按照定理 3.5(iii) 的证明定义算子 $\mathbb{A}_i$ 和 $\mathbb{B}_i$, $1 \leq i \leq 2$。这次选择算子 A, B , 使得 A 左可逆且 (A, B)

是严格 m-对称的。和之前一样，令 $I_2 = I \oplus I$。于是，由于

$$\begin{aligned}\delta^m_{\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1}(I_2) &= \left(\sum_{j=0}^{m_1-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^{d} L_{A_{1i}}\right)^{m-j}\left(\sum_{i=1}^{d} R_{B_{1i}}\right)^{j}\right)(I_2)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{m_1-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\left(L^{m-j}_{A\oplus I} R^{j}_{B\oplus I}\right)\right)(I_2)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{m_1-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\left(L^{m-j}_{A} R^{j}_{B}\oplus I\right)\right)(I_2)\\ &= \delta^m_{A,B}(I)\oplus 0 = 0,\end{aligned}$$

即，$(\mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1)$ 是 m-对称的。类似地，$(\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2)$ 是 m-对称的。鉴于 $[\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2] = [\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2] = 0$，这意味着 $(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 是 $(2m-1)$-对称的。然而，

$$\begin{aligned}\delta^m_{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2}(I_2) &= \left(\sum_{j=0}^{m-1}\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\left(\frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d^2} L_{A\oplus A}\right)^{m-j}\left(\frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{d^2} R_{\mathbb{B}\oplus\mathbb{B}}\right)^{j}\right)(I_2)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\left(L^{m-j}_{A} R^{j}_{B}\oplus L^{m-j}_{A} R^{j}_{B}\right)\right)(I_2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $m>1$，$(\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2,\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2)$ 都不是严格的 $(2m-1)$-对称。□

4. 结果：逆问题

根据定义，$(S_1\otimes S_2, T_1\otimes T_2)$ 是 m-等距的，当且仅当

$$\begin{aligned}\triangle^m_{S_1\otimes S_2,T_1\otimes T_2}(I\otimes I) &= \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j\end{pmatrix}(L_{S_1\otimes S_2}R_{T_1\otimes T_2})^j\right)(I\otimes I)\\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j\end{pmatrix}\lfloor S_1T_1\rfloor^j\otimes\lfloor S_2T_2\rfloor^j\\ &= 0\end{aligned}$$

当且仅当它是 m-等距的，并且

$$\triangle^{m-1}_{S_1\otimes S_2,T_1\otimes T_2}(I\otimes I) = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\begin{pmatrix} m-1 \\ j\end{pmatrix}\lfloor S_1T_1\rfloor^j\otimes\lfloor S_2T_2\rfloor^j\neq 0.$$

（回顾一下，给定算子 S_i、$T_i\in B(\mathcal{X})$、$1\le i\le d$、$\lfloor\sum_{i=1}^d S_iT_i\rfloor^t = S_1\lfloor\sum_{i=1}^d S_iT_i\rfloor^{t-1}T_1+\cdots+S_d\lfloor\sum_{i=1}^d S_iT_i\rfloor^{t-1}T_d$.) Paul 和 Gu [13, 定理 1.1] 证明：“如果 $(S_1\otimes S_2, T_1\otimes T_2)$ 是 m-等距的，那么存在整数 $m_i>0$ 和非零标量 c，使得 $m=m_1+m_2-1$，$(S_1,\frac{1}{c}T_1)$ 是 m_1-等距的，且 (S_2,cT_2) 是 m_2-等距的。”将其转化为上述术语，可得以下结论。

命题 **4.1** 给定算子 $S_i, T_i \in B(\mathcal{X})$, $1 \leq i \leq 2$, 若

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \lfloor S_1T_1 \rfloor^j \otimes \lfloor S_2T_2 \rfloor^j = 0$$

那么存在整数 $m_i > 0$ 和一个非零标量 c, 使得 $m = m_1 + m_2 - 1$,

$$\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m_1 \\ j \end{array} \right) \lfloor S_1(\frac{1}{c}T_1) \rfloor^j = 0 = \sum_{j=0}^{m_2}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m_2 \\ j \end{array} \right) \lfloor S_2(cT_2) \rfloor^j.$$

以下定理是关于交换的算子 d-元组的 [13, 定理 **1.1**] 的一个类似结果。我们的证明依赖于对命题 **4.1** 的应用，通过将问题归约为单个线性算子的情形来完成。

定理 **4.2** 若 $\mathbb{S}_i, \mathbb{T}_i \in B(\mathcal{X})^d$, $1 \leq i \leq 2$ 是交换的 d-元组，且 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格的 m-等距，则存在整数 $m_i > 0$ 和一个非零标量 c, 使得 $m = m_1 + m_2 - 1$, $(\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1)$ 是严格的 m_1-等距，且 $(\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2)$ 是严格的 m_2-等距。

证明。如果 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格的 m-等距的，那么，由于

$$\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2 = (S_{11} \otimes S_{21}, \cdots, S_{11} \otimes S_{2d}, S_{12} \otimes S_{21}, \cdots, S_{12} \otimes S_{2d}, \cdots, S_{1d} \otimes S_{21}, \cdots, S_{1d} \otimes S_{2d})$$

and

$$\mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2 = (T_{11} \otimes T_{21}, \cdots, T_{11} \otimes T_{2d}, T_{12} \otimes T_{21}, \cdots, T_{12} \otimes T_{2d}, \cdots, T_{1d} \otimes T_{21}, \cdots, T_{1d} \otimes T_{2d}),$$

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle^m_{\mathbb{S}_\otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_\otimes \mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (\mathbb{L}_{\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2} * \mathbb{R}_{\mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2})^j \right) (\mathbb{I} \\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \lfloor \sum_{i,k=1}^{d} (S_{1i} \otimes S_{2k})(T_{1i} \otimes T_{2k}) \rfloor^j. \end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned} &\lfloor \sum_{i,k=1}^{d} (S_{1i} \otimes S_{2k})(T_{1i} \otimes T_{2k}) \rfloor = \lfloor \sum_{i,k=1}^{d} S_{1i}T_{1i} \otimes S_{2i}T_{2k} \rfloor \\ = \; &\lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{1i}T_{1i} \rfloor \otimes \lfloor \sum_{k=1}^{d} S_{2k}T_{2k} \rfloor, \end{aligned}$$

蕴含

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle^m_{\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) \\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{1i}T_{1i} \rfloor^j \otimes \lfloor \sum_{k=1}^{d} S_{2k}T_{2k} \rfloor^j \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 0 \neq \quad & \triangle^{m-1}_{\mathbb{S}_1\otimes\mathbb{S},\mathbb{T}_1\otimes\mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) \\ = \quad & \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j \begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix} \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{1i}T_{1i} \rfloor^j \otimes \lfloor \sum_{k=1}^{d} S_{2k}T_{2k} \rfloor^j. \end{aligned}$$

应用命题 **4.1**，我们可知存在一个非零标量 c 和正整数 m_i、$m = m_1 + m_2 - 1$，使得

$$\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^j \begin{pmatrix} m_1 \\ j \end{pmatrix} \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{1i}(\frac{1}{c}T_{1i}) \rfloor^j = 0 = \sum_{j=0}^{m_2}(-1)^j \begin{pmatrix} m_2 \\ j \end{pmatrix} \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{2i}(cT_{1i}) \rfloor^j.$$

张量积对（$S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2$）的 m-等距性质的严格性意味着

$$\sum_{j=0}^{m_1-1}(-1)^j \begin{pmatrix} m_1-1 \\ j \end{pmatrix} \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{1i}(\frac{1}{c}T_{1i}) \rfloor^j \neq 0 \neq \sum_{j=0}^{m_2-1}(-1)^j \begin{pmatrix} m_2-1 \\ j \end{pmatrix} \lfloor \sum_{i=1}^{d} S_{2i}(cT_{2i}) \rfloor^j,$$

即，$(\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1)$ 是严格 m_1-等距的，且 $(\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2)$ 是严格 m_2-等距的。 □

从上述证明可见， m-等距算子对（$\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2$）的严格性并不影响标量 c 或正整数 m_i 的确定，使得（$\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1$）是 m_1- 等距的，且（$\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2$）是 m_2- 等距的：严格性仅在确定（$\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1$）的 m_1-等距性质的严格性，以及（$\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2$）的 m_2-等距性质的严格性时才起作用。

如果算子 $T \in B(\mathcal{H})$ 是 m-对称的，那么 $\sigma_a(T)$（ T 的近似点谱）是 $\mathbb{R}$ 的子集。因此，当且仅当 T 可逆时，它才是左可逆的。考虑算子 S_i、$T_i \in B(\mathcal{X})$、$1 \leq i \leq 2$，使得 S_i 可逆且 $\delta^m_{S_1\otimes S_2,\ T_1\otimes T_2}(I \otimes I) = 0$。则

$$\begin{aligned} & \delta^m_{S_1\otimes S_2, T_1\otimes T_2}(I \otimes I) = \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} L^{m-j}_{S_1\otimes S_2} R^j_{T_1\otimes T_2} \right)(I \otimes I) = 0 \\ \iff & \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} L^{-j}_{S_1\otimes S_2} R^j_{T_1\otimes T_2} \right)(I \otimes I) = 0 \\ \iff & \triangle^m_{S_1^{-1}\otimes S_2^{-1}, T_1\otimes T_2}(I \otimes I) = 0. \end{aligned}$$

进一步假设 $(S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2)$ 是严格 m-对称的，则可得

$$(S_1\otimes S_2, T_1\otimes T_2) \text{ is strict } m-\text{symmetric} \iff (S_1^{-1}\otimes S_2^{-1}, T_1\otimes T_2) \text{ is strict } m-\text{isometric}.$$

因此，存在一个非零标量 c 和正整数 m_i、$m = m_1 + m_2 - 1$，使得

$$(S_1^{-1}, \frac{1}{c}T_1) \text{ is strict } m_1 - \text{isometric and } (S_2^{-1}, cT_2) \text{ is strict } m_2 - \text{isometric}.$$

由于

$$\begin{aligned}\triangle^m_{S_i^{-1},\alpha T_i}(I)=0 &\iff \left(\sum_{j=0}^{m_i}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_i \\ j \end{array}\right)L_{S_i}^{-j}(\alpha R_{T_i})^j\right)(I)=0\\ &\iff \left(\sum_{j=0}^{m_i}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_i \\ j \end{array}\right)L_{S_i}^{m-j}(\alpha R_{T_i})^j\right)(I)=0\\ &\iff \delta^{m_i}_{S_i,\alpha T_i}(I)=0\end{aligned}$$

并且，类似地,

$$\triangle^{m_i-1}_{S_i^{-1},\alpha T_i}(I)\neq 0 \Longleftrightarrow \delta^{m_i-1}_{S_i,\alpha T_i}(I)\neq 0,$$

我们有以下 Banach 空间中与 [13,定理 1.2]对应的结论。

命题 4.3 若 $S_1, S_2 \in B(\mathcal{X})$可逆，且$(S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2)$是 m-对称的，其中 T_1, $T_2 \in B(\mathcal{X})$是某些算子，则存在非零标量 c以及正整数 m_i, $m = m_1 + m_2 - 1$，使得$(S_1, \frac{1}{c}T_1)$是 m_1-对称的，且(S_2, cT_2)是 m_2-对称的。

将$\delta^m_{S_1\otimes S_2,\ T_1\otimes T_2}(I \otimes I)$视为和

$$\begin{aligned}\delta^m_{S_1\otimes S_2,T_1\otimes T_2}(I\otimes I) &= \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)L^{m-j}_{S_1\otimes S_2}R^j_{T_1\otimes T_2}\right)(I\otimes I)\\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)S_1^{m-j}T_1^j\otimes S_2^{m-j}T_2^j\\ &= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_1\rfloor^{m_i-j}\times\lfloor T_1\rfloor^j\right)\otimes\left(\lfloor S_2\rfloor^{m-j}\times\lfloor T_2\rfloor^j\right),\end{aligned}$$

命题 4.3 如下所述。

命题 4.4 若 S_1、$S_2 \in B(\mathcal{X})$是可逆算子，且满足

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_1\rfloor^{m-j}\times\lfloor T_1\rfloor^j\right)\otimes\left(\lfloor S_2\rfloor^{m-j}\times\lfloor T_2\rfloor^j\right)=0,$$

and

$$\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m-1 \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_1\rfloor^{m-1-j}\times\lfloor T_1\rfloor^j\right)\otimes\left(\lfloor S_2\rfloor^{m-1-j}\times\lfloor T_2\rfloor^j\right)\neq 0,$$

那么存在一个非零标量 c 和正整数 m_i、$m = m_1 + m_2 - 1$，使得

$$\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_1 \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_1\rfloor^{m_1-j}\times\lfloor\frac{1}{c}T_1\rfloor^j\right)=0=\sum_{j=0}^{m_2}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_2 \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_2\rfloor^{m-j}\times\lfloor cT_2\rfloor^j\right)$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m_1-1}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_1-1 \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_1\rfloor^{m_1-1-j}\times\lfloor\frac{1}{c}T_1\rfloor^j\right)\neq 0\\ \neq &\sum_{j=0}^{m_2-1}(-1)^j\left(\begin{array}{c} m_2-1 \\ j \end{array}\right)\left(\lfloor S_2\rfloor^{m_2-1-j}\times\lfloor cT_2\rfloor^j\right).\end{aligned}$$

与定理 4.2 相对应，对于满足严格 m-对称性质的交换 d-元组的张量积，我们有如下结果。

定理 4.5 若 $\mathbb{S}_i, \mathbb{T}_i \in B(\mathcal{X})^d$, $1 \leq i \leq 2$ 是可交换的 d 元组， $\mathbb{S}_1$ 和 $\mathbb{S}_2$ 可逆，且 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格 m 对称的，则存在一个非零标量 c 和正整数 m_i, $m = m_1 + m_2 - 1$, 使得 $(\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1)$ 是严格m_1-对称的，且 $(\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2)$ 是严格 m_2-对称的。

证明。若 $(\mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1 \otimes \mathbb{T}_2)$ 是严格 m-对称的，则

$$\begin{aligned}
& \delta^m_{\mathbb{S}_1\otimes\mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1\otimes\mathbb{T}_2}(I \otimes I) \\
= & \left(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \mathbb{L}^{m-j}_{\mathbb{S}_1\otimes\mathbb{S}_2} \times \mathbb{R}^j_{\mathbb{T}_1\otimes\mathbb{T}_2}\right)(I \otimes I) \\
= & \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \left(\sum_{i,k=1}^{d} S_{1i} \otimes S_{2k}\right)^{m-j} \left(\sum_{i,k=1}^{d} T_{1i} \otimes T_{2k}\right)^{j} \\
= & \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{1i}\rfloor^{m-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} T_{1i}\rfloor^{j}\right) \otimes \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{2i}\rfloor^{m-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} T_{2i}\rfloor^{j}\right) \\
= & 0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \delta^{m-1}_{\mathbb{S}_1\otimes\mathbb{S}_2, \mathbb{T}_1\otimes\mathbb{T}_2}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \\
= & \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j \begin{pmatrix} m-1 \\ j \end{pmatrix} \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{1i}\rfloor^{m-1-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} T_{1i}\rfloor^{j}\right) \otimes \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{2i}\rfloor^{m-1-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} T_{2i}\rfloor^{j}\right) \\
\neq & 0.
\end{aligned}$$

由于算子 $\mathbb{S}_1$ 和 $\mathbb{S}_2$ 可逆， $\sum_{i=1}^{d} S_{1i}$ 和 $\sum_{i=1}^{d} S_{2i}$ 也可逆，因此可应用命题 4.4, 并得出存在一个非零标量 c 和正整数 m_i, $m = m_1 + m_2 - 1$，使得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m_1}(-1)^j \begin{pmatrix} m_1 \\ j \end{pmatrix} \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{1i}\rfloor^{m_1-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{c}T_{1i}\rfloor^{j}\right) &= \delta^{m_1}_{\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1}(\mathbb{I}) = 0, \\
\sum_{j=0}^{m_2}(-1)^j \begin{pmatrix} m_2 \\ j \end{pmatrix} \left(\lfloor\sum_{i=1}^{d} S_{2i}\rfloor^{m-j} \lfloor\sum_{i=1}^{d} cT_{2i}\rfloor^{j}\right) &= \delta^{m_2}_{\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) = 0
\end{aligned}$$

and

$$\delta^{m_1-1}_{\mathbb{S}_1, \frac{1}{c}\mathbb{T}_1}(\mathbb{I}) \neq 0, \ \delta^{m_2-1}_{\mathbb{S}_2, c\mathbb{T}_2}(\mathbb{I}) \neq 0.$$

证明至此完成。 □

注 4.6 Paul 和 Gu [13, 定理 5.2] 指出：“如果算子 S_i 左可逆，且算子 T_i 右可逆, $1 \leq i \leq 2$, 那么 $(S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2)$ 是 m-对称的，当且仅当存在非零标量 c 以及正整数m_i、 $m = m_1 + m_2 - 1$, 使得 $(S_1, \frac{1}{c}T_1)$ 是严格 m_1-对称的，且 (S_2, cT_2) 是严格 m_2-对称的”。假设 S_i 左可逆且 T_i 可逆，是

有些过度了，正如下文所示。如定理 4.5 的证明所示， S_1 和 S_2 的可逆性——这是由 S_i 的左可逆性和 T_i 的右可逆性保证的——已经足够。如果 S_i, $1 \leq i \leq 2$, 是左可逆的，那么存在算子 E_i ，使得 $(E_1 \otimes E_2)(S_1 \otimes S_2) = (I \otimes I) (= \mathbb{I})$ 并且

$$\begin{aligned} & 0 = \delta^m_{S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2}(\mathbb{I}) \\ = & \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (S_1 \otimes S_2)^{m-j} (T_1 \otimes T_2)^j \\ = & \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (E_1 \otimes E_2)^j (T_1 \otimes T_2)^j \\ = & \triangle^m_{E_1 \otimes E_2, T_1 \otimes T_2}(\mathbb{I}). \end{aligned}$$

为方便起见，令 $E_1 \otimes E_2 = A$ 和 $T_1 \otimes T_2 = B$。则 $\triangle^m_{A,B}(\mathbb{I}) = 0$。容易通过归纳法得出，$(a-1)^m = a^m - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (a-1)^j$；因此

$$(L_A R_B - \mathbb{I})^m = (L_A R_B)^m - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (L_A R_B - \mathbb{I})^j$$

并令 $(L_A R_B - \mathbb{I}) = \nabla_{A,B}$ ，可得

$$\begin{aligned} & \nabla^m_{A,B}(\mathbb{I}) = 0 \Longleftrightarrow (L_A R_B)^m(\mathbb{I}) - \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) = 0 \\ \Longrightarrow & (L_A R_B)^{m+1}(\mathbb{I}) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) (L_A R_B) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) \\ = & \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \nabla^{j+1}_{A,B}(\mathbb{I}) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) \\ = & \left(\begin{array}{c} m \\ m-1 \end{array} \right) \nabla^m_{A,B}(\mathbb{I}) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) \\ = & \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}). \end{aligned}$$

现在通过归纳法可证

$$\begin{aligned} & (L_A R_B)^n(\mathbb{I}) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) \\ = & \left(\begin{array}{c} n \\ m-1 \end{array} \right) \nabla^{m-1}_{A,B}(\mathbb{I}) + \sum_{j=0}^{m-2} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \nabla^j_{A,B}(\mathbb{I}) \end{aligned}$$

对所有整数 $n \geq m$。注意，$\triangle^m_{A,\ B}(\mathbb{I}) = 0$ 意味着 A 是右可逆的，且B是左可逆的；由于 $B = T_1 \otimes T_2$ 已经是右可逆的，因此 B 是可逆的，并且

then

$$\begin{aligned}\delta^m_{A,B}(\mathbb{I})=0 &\iff \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}L_A^{m-j}R_B^j(\mathbb{I})=0\\ &\iff \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}L_A^{m-j}R_B^{-m+j}(\mathbb{I})=0\\ &\iff \triangle^m_{A,B^{-1}}(\mathbb{I})=0\Longrightarrow A \text{ is right invertible}\Longrightarrow A \text{ is invertible.}\end{aligned}$$

A 和 B 的可逆性意味着 L_AR_B的可逆性。我们有

$$\frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ m-1 \end{pmatrix}}\left(\mathbb{I}-\sum_{j=0}^{m-2}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(L_AR_B)^{-n}\nabla^j_{A,B}(\mathbb{I})\right)=\nabla^{m-1}_{A,B}(\mathbb{I}).$$

由于 $\begin{pmatrix} n \\ m-1 \end{pmatrix}$ 的阶为 n^{m-1}，且 $\begin{pmatrix} n \\ m-2 \end{pmatrix}$ 的阶为 n^{m-2}，令 $n\longrightarrow\infty$，可得

$$\nabla^{m-1}_{A,B}(\mathbb{I})=0\Longleftrightarrow\triangle^{m-1}_{A,B}(\mathbb{I})=0.$$

重复上述论证，最终可得

$$\triangle_{A,B}(\mathbb{I})=0\Longleftrightarrow(S_1^{-1}\otimes S_2^{-1})(T_1\otimes T_2)=\mathbb{I}\Longleftrightarrow S_1\otimes S_2=T_1\otimes T_2;$$

因此，存在一个标量 c，使得 $S_1=cT_1$ 且 $S_2=\frac{1}{c}T_2$。特别地，若 S_i、T_i 是满足 $S_i=T_i^*$ 的希尔伯特空间算子，则 $T_1\otimes T_2$ 是自伴的。

参考文献

[1] J. Agler，《模型理论的抽象方法》。载于《算子理论近期成果综述》：J.B. Conway 和 B.B. Morrel 编，Pitman，美国新泽西州，第二卷（1988），1-24。[2] J. Agler 和 M. Stankus，Hilbert 空间的 m-等距变换 I，《积分方程与算子理论》21（1995），383-420。[3] F. Bayart，Banach 空间上的 m-等距算子，《数学消息》284（2011），2141-2147。[4] T. Berm´udez、A. Martin´on 和 J.N. Noda，m-等距算子的乘积，《线性代数及其应用》408（2013），80-86。[5] M. Cho 和 O.A.M. Sid ahmed，Hilbert 空间上算子的 (A,m)-对称交换元组，《数学不等式与应用》22(3)（2019），931-947。[6] B.P. Duggal 和 I.H. Kim，定义 m-左可逆、m-自伴及相关算子类的初等算子结构，《数学分析与应用杂志》495（2020），124718。[7] B.P. Duggal 和 I.H. Kim，Banach 空间算子的等距、对称及等对称交换 d-元组，《数学研究成果》（2023）78:85，25页。（DOI:10.1007/s00025-023-01855-0）[8] B.P. Duggal 和 V. M¨uller，左 n-可逆算子的张量积，《数学研究》215(2)（2013），113-125。[9] J. Gleeson 和 S. Richter，Hilbert 空间上算子的 m-等距交换元组，《积分方程与算子理论》56(2)（2006），181–96。

[10] C. Gu，左 n-可逆算子的结构及其应用，《数学研究》226（2015），189-211。[11] C. Gu 和 M. Stankus， m-等距算子与 n-对称算子：与幂零算子的乘积和和，《线性代数及其应用》469（2015），49-64。[12] J.W. Helton，无限维 Jordan 算子与 Sturm-Liouville 共轭点理论，《美国数学会汇刊》170（1972），305-331。[13] S. Paul 和 C. Gu，算子的 n-逆对的张量分解性质，《数学研究》238（2017），17-36[14] O.A.M. Sid Ahmed、M. Cho 和 J.E. Lee，Hilbert 空间上算子的 (m, C)-等距交换元组，《数学研究成果》（2018）73:51。（Doi:10.1007/s00025- 018-0810-0）

B.P. Duggal，尼什大学数学与科学学院，邮政信箱 224，塞尔维亚尼什 18000。
电子邮件：bpduggal@yahoo.co.uk