arXiv:2305.00922v1 [math.QA] 1 May 2023

相对 Rota-Baxter 群与斜左括号

NISHANT RATHEE 和 MAHENDER SINGH

ABSTRACT. 相对 Rota-Baxter 群是 Rota-Baxter 群的推广，最近在李群的背景下被引入。本文探讨相对 Rota-Baxter 群与斜左 brace 之间的联系；众所周知，斜左 brace 可给出 Yang-Baxter 方程的非退化集合论解。我们证明，每个相对 Rota-Baxter 群都导出一个斜左 brace；反过来，每个斜左 brace 也都源自某个相对 Rota-Baxter 群。在一些较弱的限制条件下，这两个范畴之间存在同构。我们提出一种高效的 GAP 算法，用于计算有限群上的相对 Rota-Baxter 算子。最后，我们引入相对 Rota-Baxter 群的同伦概念，并证明这些对象的同伦会诱导相应斜左 brace 的同伦。

1. INTRODUCTION

量子 Yang-Baxter 方程是数理物理中出现的一个基本方程，也是量子群理论的基础。在 [14, 节中， 9], Drinfeld 提出研究量子 Yang-Baxter 方程的集合论解。集合论解定义为一个集合 X 以及一个映射 $R\colon\ X \times X \to X \times X$，满足该方程。

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12},$$

其中，每个 $R^{ij}\colon X \times X \times X \to X \times X \times X$ 都是一个映射，它在第 i 个和第 j 个分量上作用为 R，在其余分量上作用为恒等映射。令 $R(x, y) = (f_x(y)\ g_y(x))$，如果对于所有 $x \in X$，映射 R、 f_x 和 g_x 都是双射，那么称该解为非退化的。如果 $R^2 = \mathrm{Id}_{X\times X}$，则称该解为对合的。量子 Yang-Baxter 方程的集合论解的完整分类是一个悬而未决的重要问题，并且在过去十年中引起了广泛关注。

Rump [22] 引入了左 brace，作为 Jacobson 根环的推广，并证明它们能够产生 Yang-Baxter 方程的对合的集合论解。Guarnieri 和 Vendramin [15] 后来将这一概念推广为斜左 brace，由此得到的 Yang-Baxter 方程非退化集合论解不一定是对合的。斜左 brace 的代数性质已被用于通过匹配积、半直积和非对称积构造新的解

2010 年数学主题分类：17B38，16T25。关键词与短语：同伦；相对 Rota-Baxter 群，Rota-Baxter 群；斜左 brace；Yang-Baxter 方程。

。人们还建立了（斜）左 brace 的扩张理论，并发现其与这些对象的第二上同调存在预期的联系 [1, 12, 19, 21]。

最近，在 [16], Guo、Lang 和 Sheng 在与李代数上广泛研究的 Rota-Baxter 算子相关的背景下，引入了李群上的 Rota-Baxter 算子。Bardakov 和 Gubarev 在 [4, 5], 中进一步研究了（抽象）群上的 Rota-Baxter 算子，并证明每个群上的 Rota-Baxter 算子都会在该群上导出一个斜左 brace 结构。文献 [13]研究了 Clifford 半群上的 Rota-Baxter 算子。Jiang、Sheng 和 Zhu [18] 进一步将 Rota-Baxter 群的思想扩展到了相对 Rota-Baxter 群，这正是本文所研究的对象。

本文探讨了相对 Rota-Baxter 群与斜左 brace 之间的联系。我们证明，每个相对 Rota-Baxter 群都会导出一个斜左 brace（命题 3.5），且每个斜左 brace 都源自一个相对 Rota-Baxter 群（命题 3.8）。事实证明，相对 Rota-Baxter 群中双射对象构成的范畴与斜左 brace 范畴之间存在同构（定理 4.6）。利用 [18, 命题 3.4], 的结果，我们提出了一种高效的 GAP 算法，可用于计算有限群上的相对 Rota-Baxter 算子。我们在相对 Rota-Baxter 群范畴中引入了适当的子对象和商对象，并用它们定义这些对象的同伦概念，从而推广群的同伦概念。最后，我们证明，这些对象之间的同伦会导出相应斜左 brace 之间的同伦（定理 6.11）。

2. Preliminaries on relative Rota-Baxter groups

本节将回顾一些我们所需的关于相对 Rota-Baxter 群的基本概念；更多细节请参阅 [18, 4] 。

定义 2.1. 相对 Rota-Baxter 群是一个四元组（H， G， ϕ， R），其中 H 和 G 是群， ϕ : $G \to$ Aut(H) 是一个群同态（其中 $\phi(g)$ 记作 ϕ_g），且 R : $H \to G$ 是一个满足以下条件的映射

$$R(h_1)R(h_2) = R(h_1\phi_{R(h_1)}(h_2))$$

对任意 h_1， $h_2 \in H$。
映射 R 被称为 H 上的相对 Rota-Baxter 算子。

如果 ϕ: $G \to$ Aut(H) 是平凡同态，我们就称相对 Rota-Baxter 群（H， G， ϕ， R）是平凡的。

例 2.2. 设 G 为一个群，其子群为 H 和 L，满足 $G = HL$ 和 $H \cap L = \{1\}$。则 (G, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，其中 R: $G \to G$ 表示所给定的映射。

由 $R(hl) = l^{-1}$ 和 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ 是伴随作用，即 $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ 对于g, $h \in G$.

例 2.3. 设 $\mathbb{Z}_{2n} = \langle a \rangle$ 和 $\mathbb{Z}_{2m} = \langle b \rangle$ 分别为阶为 $2n$ 和 $2m$ 的循环群。设 $R : \mathbb{Z}_{2m} \to \mathbb{Z}_{2n}$ 是由下式定义的映射

$$R(b^k) = \begin{cases} a^n & \text{if } k \text{ is an odd natural number,} \\ 1 & \text{if } k \text{ is an even natural number.} \end{cases}$$

那么，对于所有同态 ϕ: $\mathbb{Z}_{2n} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2m})$，$(\mathbb{Z}_{2m}, \mathbb{Z}_{2n}, \phi, R)$ 都是相对 Rota-Baxter 群。

例 2.4. 取 $H = \mathbb{R}$ 和 $G = UP(2; \mathbb{R})$，即由可逆上三角矩阵构成的群。设 ϕ: $UP(2; \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ 由下式给出

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} (r) = ar$$

对于 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UP(2; \mathbb{R})$ 和 $r \in \mathbb{R}$。进一步，设 R: $\mathbb{R} \to UP(2; \mathbb{R})$ 由下式给出

$$R(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么，$(\mathbb{R}, UP(2; \mathbb{R}) \ \phi, R)$ 是一个相对 Rota-Baxter 群。

现在，我们定义关于相同作用 $[18,$ Definition3.$6]$ 的两个相对 Rota-Baxter 群之间的态射。

定义 2.5. 设 (H, G, ϕ, R) 和 (H, G, ϕ, S) 是两个相对 Rota-Baxter 群。从 (H, G, ϕ, R) 到 (H, G, ϕ, S) 的态射是一个对 (ψ, η)，其中 ψ: $H \to H$ 和 η: $G \to G$ 是满足以下条件的同态

$$\eta \, R = S \, \psi \quad \text{and} \quad \psi \, \phi_g = \phi_{\eta(g)} \, \psi$$

对所有 $g \in G$.

定义 2.6. Rota-Baxter 群是一个群 G，并配有一个映射 $R : G \to G$，使得

$$R(x)R(y) = R(xR(x)yR(x)^{-1})$$

对所有 $x, y \in G$。映射 R 称为 G 上的 Rota-Baxter 算子 .

令 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ 为伴随作用，即 $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ 对 $g, h \in G$成立。那么，相对 Rota-Baxter 群 (G, G, ϕ, R) 就是一个 Rota-Baxter 群。

命题 2.7. [18, 命题 3.5] 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。那么运算

$$h_1 \circ_R h_2 := h_1 \phi_{R(h_1)}(h_2) \tag{2.1}$$

在 H 上定义群运算。此外，映射 $R: H^{(\circ_R)} \to G$ 是群同态。群 $H^{(\circ_R)}$ 称为 B 的后继群。

备注 2.2. 若 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，则 H 在 R 下的像 $R(H)$ 是 G 的子群。

定理 2.8. [18, 命题 3.4] 设 H 和 G 为群，且 $\phi: G \to$Aut(H) 是 G 对 H 的一个作用。那么，映射 $R: H \to G$ 是相对 Rota-Baxter 算子，当且仅当集合

$$Gr(R) = \{(R(h), h) \mid h \in H\} \tag{2.3}$$

是半直积 $G \ltimes_\phi H$ 的子群。

备注 2.4. 根据命题 2.7，$R: H^{(\circ_R)} \to G$ 是群同态。因此可知，$H^{(\circ_R)} \cong Gr(R)$ 作为群与 $h \mapsto (R(h)\ h)$ 同构。

3. Relative Rota-Baxter groups and skew left braces

本节探讨相对 Rota-Baxter 群与斜左 brace 之间的关系。

定义 3.1. 斜左 brace 是一个三元组 $(H, \cdot, \circ)$，其中 $(H, \cdot)$ 和 $(H, \circ)$ 是群，并且满足

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c)$$

对所有 $a, b, c \in H$，上述关系均成立，其中 a^{-1} 表示 a 在 $(H, \cdot)$ 中的逆映射。群 $(H, \cdot)$ 和 $(H, \circ)$ 分别称为斜左 brace $(H, \cdot, \circ)$ 的加法群和乘法群，有时分别记作 $H^{(\cdot)}$ 和 $H^{(\circ)}$。

众所周知，斜左 brace 可以导出 Yang-Baxter 方程的非退化解 [15, 命题 1.9]。

命题 3.2. 设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace。由 $\lambda_a(b) = a^{-1} \cdot (a \circ b)$ 对 $a, b \in H$ 定义的映射 $\lambda: H^{(\circ)} \to$Aut$(H^{(\cdot)})$ 是一个群同态。此外，

$$r_H : H \times H \to H \times H$$

由.....给出

$$r_H(a, b) = \left(\lambda_a(b), \lambda^{-1}_{\lambda_a(b)}((a \circ b)^{-1} a (a \circ b))\right)$$

是 Yang-Baxter 方程的非退化解。

将上文定义的映射 λ 称为斜左 brace $(H,\cdot,\circ)$ 的关联 λ-映射。下面定义几种特殊类型的斜左 brace。

定义 3.3. 设 $(H,\cdot,\circ)$ 是一个斜左 brace。则

(1) 若对于所有 $a,b\in H$，都有 $a\cdot b=a\circ b$，则称 $(H,\cdot,\circ)$ 是一个平凡斜左胚。(2) 如果 $(H,\circ,\cdot)$ 也是一个斜左 brace，则称 $(H,\cdot,\circ)$ 是一个双斜左括号。

定义 3.4. 设 $(H,\cdot_H,\circ_H)$ 和 $(K,\cdot_K,\circ_K)$ 是斜左 brace。若映射 $\psi\colon H\to K$ 对所有 h_1, $h_2\in H$ 都满足

$$\psi(h_1\cdot_H h_2)=\psi(h_1)\cdot_K\psi(h_2)\quad and\quad \psi(h_1\circ_H h_2)=\psi(h_1)\circ_K\psi(h_2).$$

备注 3.1. 设 λ^H 和 λ^K 是分别与斜左 brace $(H,\cdot_H,\circ_H)$ 和 $(K,\cdot_K,\circ_K)$ 相关联的 λ-映射。群同态 $\psi\colon H^{(\cdot_H)}\to K^{(\cdot_K)}$ 是相应斜左 brace 的同态，当且仅当对于所有 $h\in H$，它满足关系

$$\psi\ \lambda^H_h=\lambda^K_{\psi(h)}\ \psi.$$

命题 3.5. 设 (H,G,ϕ,R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。若 $\cdot$ 表示 H 的群运算，则三元组 $(H,\cdot,\circ_R)$ 是一个斜左 brace。

证明. 对于 $h_1,h_2,h_3\in H$，我们有

$$\begin{aligned}(h_1\circ_R h_2)\cdot h_1^{-1}\cdot(h_1\circ_R h_3)=&h_1\cdot\phi_{R(h_1)}(h_2)\cdot(h_1^{-1}\cdot h_1)\cdot\phi_{R(h_1)}(h_3)\\=&h_1\cdot(\phi_{R(h_1)}(h_2\cdot h_3))\\=&h_1\circ_R(h_2\cdot h_3),\end{aligned}$$

这说明 $(H,\cdot,\circ_R)$ 是一个斜左 brace。 □

若 (H,G,ϕ,R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，则称 $(H,\cdot,\circ_R)$ 为由 R 诱导的斜左 brace，简记为 H_R。

注 3.2. 设 (H,G,ϕ,R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。根据命题 2.7，我们得出 $H^{(\circ_R)}$ 与 $Gr(R)$ 之间存在一个同构，该同构由映射 $h\mapsto(R(h)\ h)$ 给出。换言之，相对 Rota-Baxter 算子的图与由其诱导的斜左 brace 的乘法群同构。

注 3.3. 值得注意的是，若 (H,G,ϕ,R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，且 H_R是其诱导的斜左 brace，那么 H_R 中 $[15,$ 定理 3.1$]$定义的 Yang-Baxter 方程的集合论解，与 $[7,$ 推论 3.14$]$所述由相对 Rota-Baxter 群 (H,G,ϕ,R) 定义的集合论解相同。

命题 3.6. 设 (H,G,ϕ,R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。当且仅当 Im$(R)\subseteq$Ker(ϕ) 时，H_R 是一个平凡斜左胚。

证明。T 斜左 brace H_R 是平凡的，当且仅当对所有 $h_1, h_2 \in H_R$，都有

$$h_1 h_2 = h_1 \circ_R h_2 = h_1 \phi_{R(h_1)}(h_2) \iff \phi_{R(h_1)}(h_2) = h_2.$$

这意味着，对于所有 $h \in H$， $R(h) \in$ 核(ϕ)。 □

注 3.4. 由前述命题可知，若 ϕ 是单射且 R 非平凡，则 H_R 不可能是平凡的。此外，若 R 是双射，则 H_R 是平凡斜左胚。由于任意相对 Rota-Baxter 算子都会诱导出一个斜左 brace，因此下面的问题顺理成章。

问题 3.7. 每个斜左 brace 都是由某个相对 Rota-Baxter 算子诱导的吗?

设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace。由命题 3.2 可知，相应的 λ-映射$\lambda: H^{(\circ)} \to \text{Aut}(H^{(\cdot)})$ 是一个群同态。因此，对于任意斜左 brace $(H, \cdot, \circ)$，群 $H^{(\circ)}$ 通过映射 λ 作用于 $H^{(\cdot)}$ 。

命题 3.8. 设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace， $\lambda: H^{(\circ)} \to \text{Aut}(H^{(\cdot)})$ 是其相应的 λ-映射。那么，四元组 $(H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda, \text{Id}_H)$ 是一个相对 Rota-Baxter 群。此外，由相对 Rota-Baxter 算子 Id_H 所诱导的斜左 brace 结构与 $(H, \cdot, \circ)$ 相同。

证明。由 λ 的定义可得证。 □

设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace， $\lambda: H^{(\circ)} \to \text{Aut}(H^{(\cdot)})$ 是其相应的 λ-映射。那么，四元组 $(H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda, \text{Id}_H)$ 称为由斜左 brace $(H, \cdot, \circ)$ 诱导的相对 Rota-Baxter 群。现在我们以一种适用于计算的方式重新表述定理 2.8。

在进一步讨论之前，我们先约定一些记号。设 H 和 G 为群，且 $\phi: G \to \text{Aut}(H)$ 为一个同态。

(1) 令 RB(H, G, ϕ) 表示所有映射 R 的集合，其中 $H \to G$ 使得 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。(2) 令 S(H, G, ϕ) 表示 K 的所有子群的集合，其中 $G \ltimes_\phi H$ 的阶等于 H 的阶，且从 K 到 H 的自然投影是满射。

命题 3.9。 RB(H, G, ϕ) 与 S(H, G, ϕ) 之间存在一一对应关系。 .

证明。定义 ψ: RB$(H, G, \phi) \to$ S(H, G, ϕ) 为

$$\psi(R) = Gr(R)$$

对于 $R \in$ RB(H, G, ϕ)。映射 ψ 由定理 2.8 定义良好。接下来，我们定义 ψ 的逆映射。如果 $M \in$ S(H, G, ϕ)，那么根据 S(H, G, ϕ) 的定义，对于每个 $h \in H$，

存在唯一的 $g_h \in G$，使得 $(g_h, h) \in M$。定义 R_M: $H \to G$，令 $R_M(h) := g_h$。对于h_1, $h_2 \in H$，我们有

$$(g_{h_1}, h_1)(g_{h_2}, h_2) = (g_{h_1} g_{h_2}, h_1 \phi_{g_{h_1}}(h_2)).$$

由于 M是一个群，因此 $(g_{h_1}, h_1)(g_{h_2}, h_2) \in M$，这意味着 $g_{h_1 \phi_{g_{h_1}}(h_2)} = g_{h_1} g_{h_2}$。因此，我们得出结论：$(H, G, \phi, R_M)$ 是一个相对 Rota-Baxter 群。现在，我们定义映射η: S(H, G, ϕ) $\to$ RB(H, G, ϕ)，定义为

$$\eta(M) = R_M$$

对于 $M \in$ S(H, G, ϕ)。不难看出，ψ和 η互为逆映射，这证明了该命题。

□

假设 H 是一个有限群，G 是一个与 H 阶相同的群。斜左 brace 理论中的一个基本问题是：是否存在 H 上的斜左 brace 结构，使得其乘法群与 G 同构。作为命题 3.9 的推论，我们根据 G 被 H 的半直积的子群，给出了斜左 brace 结构存在的一个充要条件。

推论 3.10. 设 H 是一个有限群，G 是一个与 H 阶数相同的群。当且仅当存在某个作用 ϕ: $G \to$ Aut(H)，使得 M 与 G 同构时，H 上存在一种斜左 brace 结构，其乘法群与 G 同构。

证明. 假设存在某个作用 ϕ: $G \to$ Aut(H)，使得 M 与 G 同构的 $M \in$ S(H, G, ϕ)。由注 3.2 可知，M 与由 R_M 诱导的斜左 brace 的乘法群同构。由于 M 与 G 同构，因此由 R_M 诱导的斜左 brace 的乘法群与 G 同构。

反之，假设存在一种斜左 brace 结构 $(H, \cdot, \circ)$，使得 $H^{(\circ)}$ 与 G 同构。令 $\lambda : H^{(\circ)} \to$ Aut$(H^{(\cdot)})$ 为与该斜左 brace 相关联的 λ-映射。由命题 3.8 可知，$(H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda, \mathrm{Id}_H)$ 是一个相对 Rota-Baxter 群。此外，可得 $Gr(\mathrm{Id}_H)$ 是 S$(H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda)$ 中的一个元素，且与 $H^{(\circ)}$ 同构。□

设 $M, N \in$ S(H, G, ϕ) 满足 $M \cong N$。根据命题 3.9，群 $M$and$N$分别对应于 R_M 和 R_N 的图像。由于 $M \cong N$，可得 $H^{(\circ_{R_M})} \cong H^{(\circ_{R_N})}$。这一观察引出了以下自然问题。

问题 3.11. 设 (H, G, ϕ, R) 和 (H, G, ϕ, S) 是两个相对 Rota-Baxter 群，且 $Gr(R) \cong Gr(S)$。能否得出群 $R(H)$ 和 $S(H)$ 同构?

一般而言，问题 3.11 的答案并不总是肯定的。例如，取 $H = G = \mathbb{Z}_5$ 和 ϕ: $G \to$ Aut(H)上的平凡作用。在这种情况下，群 $M = \langle$(1,1)$\rangle$ 和

$N = \{0\} \times \mathbb{Z}_5$ 同构，且都属于 S(H, G, ϕ)。所诱导的相对 Rota-Baxter 算子 R_M 和 R_N 分别是恒等映射和平凡同态，因此 $R_M(H) = \mathbb{Z}_5$ 和 $R_N(H) = \{0\}$。于是，$R_M(H) \ncong R_N(H)$。

我们关注由相对 Rota-Baxter 群诱导的斜左 brace 的同构类。设 H_R 和 H_B 是分别由相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 和 (H, G, ϕ, B) 诱导的斜左 brace。用‘$\cdot$’表示 H上的群结构。那么，$H_R \cong H_B$ 当且仅当存在一个群同构 $\psi_H : H^{(\cdot)} \to H^{(\cdot)}$ 使得

$$\psi_H \ \phi_{R(h)} = \phi_{B(\psi_H(h))} \ \psi_H \tag{3.5}$$

对所有 $h \in H$均成立。

由定义 2.5 可知，若 $(\psi_H, \psi_G) : (H, G, \phi, R) \to (H, G, \phi, B)$ 是一个态射，则 $\psi_H : H_R \to H_B$ 是诱导斜左 brace 的同态。因此，同构的相对 Rota-Baxter 群会诱导同构的斜左 brace。这回答了 Bardakov 和 Gubarev 的问题 [4, 第 21] 页，如下所示。

推论 3.12. 群 H 上的两个 Rota-Baxter 算子 R 和 B 诱导同构的斜左 brace，当且仅当存在一个同构 $\psi_H : H \to H$，使得

$$\psi_H(R(h))^{-1} B(\psi_H(h)) \in \mathrm{Z}(H) \quad for\ all \quad h \in H. \tag{3.6}$$

特别地，如果 H 具有平凡中心，那么 (3.6) 可以简化为

$$\psi_H \ R = B \ \psi_H. \tag{3.7}$$

证明. Rota-Baxter 算子是相对 Rota-Baxter 算子的一种特殊情形，其作用 $\psi : H \to \mathrm{Aut}(H)$ 为伴随作用。结论立即由 (3.5) 得出。□

注意，完备群上的每种斜左 brace 结构都由该群 [4, 上的某个 Rota-Baxter 算子诱导 [4, 命题 3.12]。96 阶群的斜 brace 结构目前尚不明确 [6]。我们使用定理 3.9 来统计 96 阶无中心群上的 Rota-Baxter 算子总数。条件 (3.7) 对统计小阶群上 Rota-Baxter 算子的等价类非常有用，因为它与作用 ϕ无关。

算法。设 G 和 H 是有限群，且 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 是一个作用。设 $S := G \ltimes_\phi H$,$\mathcal{M}$ 为 S 的所有子群的集合，$\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{M}$ 中由阶等于 H的阶的那些子群组成的子集。我们要确定满足自然投影 $A \to H$ 到第二个坐标为满射的元素 $A \in \mathcal{N}$。但是，由于 H 在 GAP 库中并未以元组的形式存储，因此没有自然的方式来定义这样的映射。所以，我们先定义一些映射，以简化这个任务。

(1) $E_1 := Embedding(S, 1)$，这给出了 G 到 S中的嵌入。(2) $E_2 := Embedding(S, 2)$，这给出了 H 到 S中的嵌入。(3) $p := Projection(S)$，这给出了 S 到 G的投影。(4) 定义 $C : S \to E_2(H)$，使得 $C(x) = x\ E_1(p(x)^{-1})$。映射 C 将作为自然投影映射。

现在，当且仅当 $C|_A : A \to E_2(H)$ 是满射时，$A \in \mathrm{S}(H, G, \phi)$ 才是子群。换言之，当 $C|_A(A)$ 的基数与 H 的基数相同时，$A \in \mathrm{S}(H, G, \phi)$。因此，关于作用 ϕ，从 H 到 G 的相对 Rota-Baxter 算子数量，等于满足映射 C 的限制是双射的 $\mathcal{N}$ 中元素的数量。

现在假设 $G = H$，且 ϕ 是伴随作用。在这种情况下，我们给出一种算法，以显式定义 G 上的所有 Rota-Baxter 算子。

设 $C_A := C|_A$，其中 $A \in$ 满足 $\mathrm{S}(G, G, \phi)$。定义 $R_A : G \to G$ 如下:

$$R_A(x) := p(C_A^{-1}(E_2(x))).$$

那么映射 R_A 是 H 上的 Rota-Baxter 算子。接下来，按照以下规则在 $\mathrm{S}(G, G, \phi)$ 上定义关系 $\sim$。对于 $\mathrm{S}(G, G, \phi)$ 中的 $A, B \in$，若存在自同构$\psi_H : H \to H$ 使得 $A \sim B$，则称 $A \sim B$，

$$\psi_H(R_A(h))^{-1} R_B(\psi_H(h)) \in \mathrm{Z}(H) \quad for\ all \quad h \in H.$$

$\sim$ 等价类的数量给出了 H 上斜左 brace 结构数量的下界。此外，若 $\mathrm{Z}(H)$ 是平凡的，则 $\sim$ 等价类的数量恰好等于 H 上斜左 brace 结构的数量。

令 $|RBO|$ 表示给定群上 Rota-Baxter 算子的总数。借助 GAP，我们发现阶为 96 的无中心群有 5 个。

GAP 群编号	(96,64)	(96,70)	(96, 71)	(96, 72)	(96, 227)
$\lvert RBO\rvert$	352	1512	528	552	4504

我们已经证明，每个相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 都可以由集合 $\mathrm{S}(H, G, \phi)$ 中的一个元素来标识。众所周知，非同构的斜左 brace 可能具有同构的加法群和乘法群。因此，如果我们有 $M, N \in \mathrm{S}(H, G, \phi)$，且 $M \cong N$，就不能假设由 M 和 N 诱导的相应斜左 brace 同构。于是，由 M 和 N 分别诱导的相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R_M) 和 (H, G, ϕ, R_N) 可能不同构。这引出了以下问题:

问题 1. 给定 $M, N \in \mathrm{S}(H, G, \phi)$，在什么条件下，由 R_M 和 R_N 诱导的斜左 brace 同构? 更强地说，相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R_M) 和 (H, G, ϕ, R_N) 在什么条件下同构?

众所周知，群 H 上的斜左 brace 结构可以与其全纯群 Hol(A) 中的一个正则子群对应。此外，如果相应的子群是正规子群，那么所得的斜左 brace 就是一个双斜左括号 [8, 定理 3.4]。考察 H 上通过一个属于 S(H, G, ϕ) 的群给出的斜左 brace 结构时，也会出现类似的情形。

问题 2. 当 M 是位于 S(H, G, ϕ) 中的 $G \ltimes_\phi H$ 的正规子群或特征子群时，我们对由 R_M 诱导的斜左 brace H_M 能作何说明?

4. Morphisms of relative Rota-Baxter groups

由于原始定义仅适用于相对于相同作用的相对 Rota-Baxter 群，我们现在给出相对 Rota-Baxter 群的态射的更广泛定义。

设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，并设 $K \leq H$ 和 $L \leq G$ 是子群。

(1) 如果 K 在作用 ϕ 下是 L-不变的，则将 ϕ 的限制记为 $\phi| : L \to$Aut(K)。 (2) 如果 $R(K) \subseteq L$，则将 R 的限制记为 $R| : K \to L$。

定义 4.1. 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，且 $K \leq H$和 $L \leq G$是子群。假设对于所有 $\ell \in L$，都有 $\phi_\ell(K) \subseteq K$，并且 $R(K) \subseteq L$。那么 ($K, L, \phi|, R|$) 是一个相对 Rota-Baxter 群，称为 (H, G, ϕ, R) 的相对 Rota-Baxter 子群，记作 ($K, L, \phi|, R|$) $\leq$ (H, G, ϕ, R)。

定义 4.2. 设 (H, G, ϕ, R) 和 (K, L, φ, S) 是两个相对 Rota-Baxter 群 .

(1) 相对 Rota-Baxter 群的一个同态 $(\psi, \eta) : (H, G, \phi, R) \to (K, L, \varphi, S)$ 是一对 (ψ, η)，其中 $\psi : H \to K$ 和 $\eta : G \to L$ 是群同态，使得

$$\eta\, R = S\, \psi \quad and \quad \psi\, \phi_g = \varphi_{\eta(g)}\, \psi \quad for\ all \quad g \in G. \tag{4.1}$$

（2）相对 Rota-Baxter 群的同态 $(\psi, \eta) : (H, G, \phi, R) \to (K, L, \varphi, S)$ 的核是四元组

$$(\mathrm{Ker}(\psi), \mathrm{Ker}(\eta), \phi|, R|),$$

其中，Ker(ψ) 和 Ker(η) 分别表示群同态 ψ 和 η的核。(4.1)中的条件表明，该核本身也是一个相对 Rota-Baxter 群。

(3) 相对 Rota-Baxter 群之间的同态 $(\psi,\eta):(H,G,\phi,R)\to(K,L,\varphi,S)$ 的像是四元组

$$(\mathrm{Im}(\psi),\mathrm{Im}(\eta),\varphi|,S|),$$

其中，Im(ψ) 和 Im(η) 分别表示群同态 ψ 和 η的像。该像本身是一个相对 Rota-Baxter 群。

(4) 若相对 Rota-Baxter 群的同态 (ψ,η) 中，ψ 和 η 都是群同构，则称 (ψ,η) 为同构。类似地，若相对 Rota-Baxter 群的态射 (ψ,η) 中，ψ 和 η 都是群的嵌入，则称 (ψ,η) 为嵌入。

注 4.2. 显然，若 $(\psi,\eta):(H,G,\phi,R)\to(K,L,\varphi,S)$ 是相对 Rota-Baxter 群的同态，则 (Ker(ψ), Ker(η) $\phi|$, $R|$) 是 (H,G,ϕ,R) 的相对 Rota-Baxter 子群，而 (Im(ψ), Im(η) $\varphi|$, $S|$) 是 (K,L,φ,S) 的相对 Rota-Baxter 子群。

命题 4.3. 相对 Rota-Baxter 群的同态诱导相应斜左 brace 的同态。

证明。设 $(\psi,\eta):(H,G,\phi,R)\to(K,L,\varphi,S)$ 是相对 Rota-Baxter 群的同态。设 H_R 和 K_S 是诱导的斜左 brace。于是，对于 $x,y\in H$，有

$$\psi(x\circ_R y)=\psi(x\phi_{R(x)}(y))=\psi(x)\psi(\phi_{R(x)}(y))=\psi(x)\varphi_{\eta(R(x))}\psi(y)=\psi(x)\varphi_{S(\psi(x))}\psi(y)=\psi(x)\circ_S\psi(y),$$

因此，$\psi:H_R\to K_S$ 是诱导斜左 brace 之间的一个同态。 □

假设 $(H,\cdot,\circ)$ 是一个斜左 brace，且 $\lambda:H^{(\circ)}\to\mathrm{Aut}(H^{(\cdot)})$ 是相应的 λ-映射。那么，四元组 $(H^{(\cdot)},H^{(\circ)},\lambda,\mathrm{Id}_H)$ 称为由斜左 brace $(H,\cdot,\circ)$ 诱导的相对 Rota-Baxter 群。

命题 4.4. 斜左 brace 的同态会诱导相应相对 Rota-Baxter 群的同态。

证明。设 $\psi:(H,\cdot_H,\circ_H)\to(K,\cdot_K,\circ_K)$ 是斜左 brace 的一个态射。那么，ψ可视为一个同态 $H^{(\cdot_H)}\to K^{(\cdot_K)}$ 和 $H^{(\circ_H)}\to K^{(\circ_K)}$。此外，我们看到，对于所有 $h\in H$，都有 $\psi\,\mathrm{Id}_H=\mathrm{Id}_K\,\psi$和 $\psi\,\lambda^H_h=\lambda^K_{\psi(h)}\,\psi$，其中 λ^H和 λ^K分别是 $(H,\cdot_H,\circ_H)$ 和 $(K,\cdot_K,\circ_K)$ 的 λ-映射。因此，$(\psi,\psi):(H^{(\cdot_H)}{}_{H^{(\circ_H)}}\lambda^H,\mathrm{Id}_H)\to(K^{(\cdot_K)}{}_{K^{(\circ_K)}}\lambda^K,\mathrm{Id}_K)$ 是相对 Rota-Baxter 群的一个同态。□

命题 4.5. 设 (H,G,ϕ,R) 和 (K,L,φ,S) 是两个相对 Rota-Baxter 群，且 R 和 S 是双射。那么，从 H_R 到 K_S 的同态集合与从 (H,G,ϕ,R) 到 (K,L,φ,S) 的同态集合之间存在一一对应。

证明。设 $\psi: H_R \to K_S$ 是斜左 brace 的同态。那么，对所有 $h \in H$，有

$$\psi\ \phi_{R(h)} = \varphi_{S(\psi(h))}\ \psi. \tag{4.3}$$

定义 $\eta: G \to L$，使得 $\eta(g) = S(\psi(h_g))$，其中 $g = R(h_g)$，对某个唯一的 $h_g \in H$ 成立。映射η 是良定义的，因为 R 和 S 都是双射。对于 $g_1、g_2 \in G$，我们有

$$\eta(g_1g_2) = S(\psi(h_{g_1g_2})), \tag{4.4}$$

其中 $R(h_{g_1g_2}) = g_1g_2$。已知 $g_1 = R(h_{g_1})$ 且 $g_2 = R(h_{g_2})$，并且由于 R 是相对 Rota-Baxter 算子，我们可以写成 $h_{g_1}\phi_{R(h_{g_1})}(h_{g_2}) = h_{g_1} \circ_R h_{g_2}$。将此值代入（4.4），并注意到 ψ 是斜左 brace 的同态，且 S 是相对 Rota-Baxter 算子，可得

$$\begin{aligned}\eta(g_1g_2) &= S(\psi(h_{g_1}\phi_{R(h_{g_1})}(h_{g_2})))\\ &= S(\psi(h_{g_1})\varphi_{S(\psi(h_{g_1}))}(\psi(h_{g_2})))\\ &= S(\psi(h_{g_1}))S(\psi(h_{g_2}))\\ &= \eta(g_1)\eta(g_2).\end{aligned}$$

这表明 η 是群同态。根据 η的定义，我们有 $\eta\ R = S\ \psi$。此外，（4.3）意味着，对于每个 $g \in G$，我们有

$$\psi\ \phi_g = \varphi_{\eta(g)}\ \psi.$$

因此，$(\psi, \eta) : (H, G, \phi, R) \to (K, L, \varphi, S)$ 是相对 Rota-Baxter 群的同态。由此可立即得出，映射 $\psi \mapsto (\psi, \eta)$ 是从 $\mathrm{Hom}(H_R, K_S)$ 到 $\mathrm{Hom}((H, G, \phi, R), (K, L, \varphi, S))$ 的双射。

□

如果相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 的 Rota-Baxter 算子 $R : H \to G$ 是双射，则称该群是双射的。

定理 4.6. 双射相对 Rota-Baxter 群的范畴 $\mathcal{BRRB}$ 与斜左 brace 的范畴 $\mathcal{SLB}$ 同构。

证明。定义 $\mathcal{F}$: $\mathcal{BRRB} \to \mathcal{SLB}$，使得 $\mathcal{F}(H, G, \phi, R) = H_R$；并定义 $\mathcal{G}$: $\mathcal{SLB} \to \mathcal{BRRB}$，使得 $\mathcal{G}(H, \cdot, \circ) = (H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda, \mathrm{Id}_H)$。利用命题 4.3 和 4.4，可以证明 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是函子。

设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace。由于由相对 Rota-Baxter 群 $(H^{(\cdot)}, H^{(\circ)}, \lambda, \mathrm{Id}_H)$ 诱导的斜左 brace 与 $(H, \cdot, \circ)$ 相同，因此 $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ 是恒等函子。

设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。那么由 H_R 诱导的相对 Rota-Baxter 群为 $(H^{(\cdot)}, H^{(\circ_R)}\lambda, \mathrm{Id}_H)$，其中 $\lambda\colon H^{(\circ_R)} \to \mathrm{Aut}(H^{(\cdot)})$ 定义为 $\lambda_h = \phi_{R(h)}$。由于 $R: H \to G$ 是双射，因此 $R: H^{(\circ_R)} \to G$ 是群同构。由 $R\,\mathrm{Id}_H = R\,\mathrm{Id}_H$ 和 $\mathrm{Id}_H\ \lambda_h = \phi_{R(h)}\,\mathrm{Id}_H$ 这两个事实可立即得出，$(\mathrm{Id}_H, R) : (H^{(\cdot)}, H^{(\circ_R)}\lambda, \mathrm{Id}_H) \to (H, G, \phi, R)$ 是相对 Rota-Baxter 群同构。□

5. Substructures in the category of relative Rota-Baxter groups

我们引入相对 Rota-Baxter 群范畴中的子结构，并用它们给出该范畴中商结构的完整定义。

设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，并考虑子群 $K \leq H$和$L \leq G$。我们将四元组 $(H, \mathrm{Im}(R)\ \phi|, R|)$ 记作 $\mathrm{I}(H, G, \phi, R)$，它显然是一个相对 Rota-Baxter 群。

命题 5.1. 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。那么，由 (H, G, ϕ, R) 和 $\mathrm{I}(H, G, \phi, R)$ 诱导的斜左 brace 相同。

证明。证明可由诱导斜左 brace 的定义得出 e. □

定义 5.2. 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，且 $(K, L, \phi|, R|) \leq (H, G, \phi, R)$ 是其相对 Rota-Baxter 子群。若满足以下条件，则称 $(K, L, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的理想:

$$K \trianglelefteq H \quad and \quad L \trianglelefteq G, \tag{5.1}$$

$$\phi_g(K) \subseteq K \ for\ all\ g \in G, \tag{5.2}$$

$$\phi_\ell(h)h^{-1} \in K \ for\ all\ h \in H \ and\ \ell \in L. \tag{5.3}$$

我们用 $(K, L, \phi|, R|) \trianglelefteq (H, G, \phi, R)$ 表示一个相对 Rota-Baxter 群的理想。

接下来，我们引入相对 Rota-Baxter 群的商结构。

定理 5.3. 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群，且 $(K, L, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的一个理想。那么存在映射 $\overline{\phi}\colon G/L \to \mathrm{Aut}(H/K)$ 和 $\overline{R}\colon H/K \to G/L$，定义如下:

$$\overline{\phi}_{\overline{g}}(\overline{h}) = \overline{\phi_g(h)} \quad and \quad \overline{R}(\overline{h}) = \overline{R(h)}$$

对于 $\overline{g} \in G/L$ 和 $\overline{h} \in H/K$，使得 $(H/K, G/L, \overline{\phi}, \overline{R})$ 是一个相对 Rota-Baxter 群。

证明。条件 (1)–(4) 是专为确保映射 $\overline{\phi}$ 和 $\overline{R}$ 定义良好而设的。此外，由于 R 满足相对 Rota-Baxter 恒等式，映射 $\overline{R}$ 也满足该恒等式。为了证明 $(K, L, \phi|, R|)$ 是一个相对 Rota-Baxter 群，只需证明对于所有 $\ell \in L$，ϕ_ℓ 在 K 上的限制是 K 的一个自同构。由于对于所有 $\ell \in L$，ϕ_ℓ 已经是单射，

接下来只需证明 ϕ_ℓ 在 K 上的限制是满射。若 $k \in K$，则存在一个 $h \in H$ 使得

$$\phi_\ell(h) = k. \tag{5.4}$$

利用条件 (2)，我们可以写成

$$\phi_\ell(h) = k'h \tag{5.5}$$

对于某个 $k' \in K.$，比较 (5.4) 和 (5.5) 可得 $h \in K$，这正是所需的结论。 □

记号 5.1. 我们用 $(H, G, \phi, R)/(K, L, \phi|, R|)$ 表示相对 Rota-Baxter 群 $(H/K, G/L, \overline{\phi}, \overline{R})$。

定义 5.4. 若斜左 brace $(I, \cdot, \circ)$ 是斜左 brace $(H, \cdot, \circ)$ 的子斜左 brace，且 $I^{(\cdot)}$ 是 $H^{(\cdot)}$ 的正规子群，$I^{(\circ)}$ 是 $H^{(\circ)}$ 的正规子群，并且对于所有 $a \in H$，$\lambda_a(I) \subseteq I$，则称 $(H, \cdot, \circ)$ 的理想为 $(I, \cdot, \circ)$。

命题 5.5. 若 $(K, L, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的理想，则 $K_{R|}$ 是 H_R 的理想。

证明。令 $H_R := (H, \cdot, \circ_R)$ 为由 R 诱导的斜左 brace，如命题 3.5 中所定义。由于 $(K, L, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的理想，由 (5.1) 和 (5.2)，我们有 $K^{(\cdot)}$ 是 $H^{(\cdot)}$ 的正规子群，并且对所有 $h \in H$，$\phi_{R(h)}(K) \subseteq K$。还需证明 $K^{(\circ_R)}$ 是 $H^{(\circ_R)}$ 的正规子群。若 $k \in K$、$h \in H$ 和 $h^\dagger$ 表示 h 在 $H^{(\circ_R)}$ 中的逆映射，则有

$$\begin{aligned} h \circ_R k \circ_R h^\dagger &= h \circ_R (k \cdot \phi_{R(k)}(h^\dagger)) \\ &= h \cdot \phi_{R(h)}(k \cdot \phi_{R(k)}(h^\dagger)) \\ &= h \cdot \phi_{R(h)}(k \cdot \phi_{R(k)}(\phi_{R(h)^{-1}}(h)^{-1})) \\ &= h \cdot \phi_{R(h)}(k) \cdot \phi_{R(h)R(k)R(h)^{-1}}(h^{-1}) \\ &= (h \cdot \phi_{R(h)}(k) \cdot h^{-1}) \cdot (h \cdot \phi_{R(h)R(k)R(h)^{-1}}(h^{-1}). \end{aligned}$$

由于 $K^{(\cdot)}$ 是 $H^{(\cdot)}$ 的正规子群，并且对所有 $h \in H$，$\phi_{R(h)}(K) \subseteq K$，因此可得 $h \cdot \phi_{R(h)}(k) \cdot h^{-1} \in K$。此外，利用 $R(K) \subseteq L$ 这一事实以及条件 (5.3)，我们得到 $h \cdot \phi_{R(h)R(k)R(h)^{-1}}(h^{-1}) \in K$。这表明 K 是斜左 brace H_R 的理想。□

命题 5.6. 设 $(K, L, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的一个理想。那么由 $(H/K, G/L, \overline{\phi}, \overline{R})$ 诱导的斜左 brace 同构于 $H_R/K_{R|}$。

证明。显然，恒等映射就是所需的同构 . □

6. Isoclinism of relative Rota-Baxter groups

本节中，我们引入相对 Rota-Baxter 群的同伦概念，并将其与近期提出的斜左 brace 同伦概念联系起来 [20]。这一思想源自 Hall [17] 的经典研究，其中探讨了群的同伦。接下来，我们需要在相对 Rota-Baxter 群的背景下引入一些相关定义。

设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。于是，由命题 2.7，$R\colon (H, \circ_R) \to G$ 是一个群同态，因此 $\mathrm{Ker}(\phi\ R)$ 定义良好。我们令

$$\mathrm{Z}_R^{\phi}(H) := \mathrm{Z}(H) \cap \mathrm{Ker}(\phi\ R) \cap \mathrm{Fix}(\phi),$$

其中，$\mathrm{Z}(H)$ 是群 H 的中心，而 $\mathrm{Fix}(\phi) = \{x \in H \mid \phi_g(x) = x$ 对所有 $g \in G\}$ 而言是该作用的不动点子群。

定义 6.1. 相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 的中心定义为

$$\mathrm{Z}(H, G, \phi, R) := \big(\mathrm{Z}_R^{\phi}(H), \mathrm{Ker}(\phi), \phi|, R|\big).$$

设 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace，$\mathrm{Z}(H^{(\cdot)})$ 表示群 $H^{(\cdot)}$ 的中心，并且对所有 $a \in H\}$, $\mathrm{Fix}(\lambda) = \{x \in H \mid \lambda_a(x) = x$。那么，$(H, \cdot, \circ)$ 的湮灭子定义为

$$\mathrm{Ann}(H) := \mathrm{Ker}(\lambda) \cap \mathrm{Z}(H^{(\cdot)}) \cap \text{不动点子群}(\lambda) = \{a \in H \mid b \circ a = a \circ b = b \cdot a = a \cdot b \text{对所有} b \in H\}.$$

显然，$\mathrm{Ann}(H)$ 是 $(H, \cdot, \circ)$ 的一个理想。

命题 6.2。 设 (H, G, ϕ, R) 是一个相对 Rota-Baxter 群。则以下结论成立：

(1) $\mathrm{Z}(H, G, \phi, R)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的一个理想，并且由 $\mathrm{Z}(H, G, \phi, R)$ 诱导的斜左 brace 是平凡的。(2) 由 $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(H, G, \phi, R))$ 诱导的斜左 brace 与 $\mathrm{Ann}(H_{R|})$ 相同。(3) 由 $\mathrm{I}(H, G, \phi, R)/\ \mathrm{Z}(\mathrm{I}(H, G, \phi, R))$ 诱导的斜左 brace 与 $H_{R|}/\ \mathrm{Ann}(H_{R|})$ 相同。

证明。我们逐一证明各项断言。

(1) 显然，$\mathrm{Z}(H, G, \phi, R)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的相对 Rota-Baxter 子群。为证明它是 (H, G, ϕ, R) 的理想，我们验证条件 (5.1)、(5.2) 和 (5.3)。显然，$\mathrm{Z}_R^{\phi}(H) \trianglelefteq H$ and $\mathrm{Ker}(\phi) \trianglelefteq G$。若 $g \in G$ and $x \in \mathrm{Z}_R^{\phi}(H)$，则 $\phi_g(x) = x$，因此 $\phi_g(\mathrm{Z}_R^{\phi}(H)) = \mathrm{Z}_R^{\phi}(H)$。若 $\ell \in \mathrm{Ker}(\phi)$ and $h \in H$，则 $\phi_\ell(h)h^{-1} = 1$。最后，由 $\mathrm{Z}(H, G, \phi, R)$ 诱导的斜左 brace 是平凡的，因为对所有 $x, y \in \mathrm{Z}_R^{\phi}(H)$，$x \circ_{R|} y = x \cdot y$。这就证明了断言 (1)。

(2) 只需证明 $\mathrm{Z}_{R|}^{\phi|}(H) = \mathrm{Ann}(H_{R|})$ 作为集合相等。回顾 $\mathrm{Ann}(H_{R|}) = \mathrm{Z}(H^{(\cdot)}) \cap \mathrm{Ker}(\lambda) \cap \mathrm{Fix}(\lambda)$，其中 $\lambda\colon H^{(\circ_R)} \to \mathrm{Aut}(H^{(\cdot)})$ 是与斜左 brace $H_{R|}$相关联的 λ-映射。然而，对于任意 a、$b \in H$，我们有 $\lambda_a(b) = a^{-1}(a \circ_R b) = \phi_{R(a)}(b)$，并且

因此 Ker(λ) = Ker(ϕ R)。类似地,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\lambda) &= \{x \in H \mid \lambda_a(x) = x \quad \text{for all} \quad a \in H\}\\ &= \{x \in H \mid \phi_{R(a)}(x) = x \quad \text{for all} \quad a \in H\}\\ &= \{x \in H \mid \phi_y(x) = x \quad \text{for all} \quad y \in \mathrm{Im}(R)\}\\ &= \mathrm{Fix}(\phi|),\end{aligned}$$

这证明了我们的断言。

(3) 令 $(H/\,\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H))_{\overline{R}}$ 为由 I(H, G, ϕ, R)/ Z(I(H, G, ϕ, R)) 诱导的斜左 brace。由断言 (2) 可知，斜左 brace $(H/\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H))_{\overline{R}}$ 和 $H_{R|}/$Ann($H_{R|}$) 的加法群相同。分别用 $\circ_{\overline{R}}$ 和 $\overline{\circ_R}$ 表示 $(H/\,\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H))_{\overline{R}}$ 和 $H_{R|}/\,\mathrm{Ann}(H_{R|})$ 中的乘法群运算。于是，对于 $\overline{h}_1, \overline{h}_2 \in H/\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)$, 有

$$\overline{h}_1 \circ_{\overline{R}} \overline{h}_2 = \overline{h}_1 \overline{\phi}_{\overline{R}(\overline{h}_1)}(\overline{h}_2) = \overline{h_1 \phi_{R(h_1)}(h_2)} = \overline{h_1 \circ_R h_2} = \overline{h}_1 \overline{\circ_R}\, \overline{h}_2.$$

这就证明了该断言。

□

记号 6.1. 对于相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R)，用 $H^{(2)}$ 表示由集合 $\{\phi_g(h)h^{-1} \mid h \in H$ 和 $g \in G\}$ 生成的 H 的子群。

在此设定下，我们有

命题 6.3. $(H^{(2)}, G, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的一个理想。

证明。设 $g \in G$ 和 $x = \phi_{g_1}(h)h^{-1} \in H^{(2)}$，其中 $h \in H$ 和 $g_1 \in G$。那么

$$\phi_g(x) = \phi_{gg_1}(h)\phi_g(h^{-1}) = \phi_{gg_1g^{-1}}(\phi_g(h))\phi_g(h^{-1}) = \phi_{g_2}(h_1)h_1^{-1},$$

whe关于 $g_2 = gg_1g^{-1}$ 和 $h_1 = \phi_g(h)$。因此， $H^{(2)}$ 在作用 ϕ下保持不变 .

现在我们证明 $H^{(2)}$ 在 H中的正规性。设 $h, x \in H$ 和 $g \in G$。由于 ϕ_g 是 H的自同构，存在 $h_1 \in H$ 使得 $\phi_g(h_1) = x$。因此，我们有

$$\begin{aligned}x^{-1}\phi_g(h)h^{-1}x &= \phi_g(h_1^{-1})\phi_g(h)h^{-1}\phi_g(h_1)\\ &= \big(\phi_g(h_1^{-1}h)\big)\big(h^{-1}h_1\big)\big(h_1^{-1}\phi_g(h_1)\big)\\ &= \big(\phi_g(h_1^{-1}h)\ (h_1^{-1}h)^{-1}\big)\ \big(h_1^{-1}\phi_g(h_1)\big) \in H^{(2)},\end{aligned}$$

因此 $H^{(2)} \trianglelefteq H$。条件 (5.2) 和 (5.3) 显然成立，因此 $(H^{(2)}, G, \phi|, R|)$ 是 (H, G, ϕ, R) 的理想。
□

记号 6.2。给定一个相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R)，令 $(H, G, \phi, R)^{(2)}$ 表示相对 Rota-Baxter 子群 $(H^{(2)}, G, \phi|, R|)$。此外，若 $(H, \cdot, \circ)$ 是一个斜左 brace，我们用 $H^{(2)}$ 表示由 $a^{-1} \cdot (a \circ b) \cdot b^{-1}$（其中 $a, b \in H$）生成的 $(H, \cdot, \circ)$ 的理想。

在此设定下，我们继续得到以下结果。

命题 6.4. 设 (H, G, ϕ, R) 为一个相对 Rota-Baxter 群。则有以下结论：

(1) 设 K 是 H 中包含 $H^{(2)}$ 的任意正规子群。那么，对于任意形如 $(K, L, \phi|, R|)$ 的理想，相对 Rota-Baxter 群 $(H, G, \phi, R)/(K, L, \phi|, R|)$ 是平凡的。(2) 由 $\big(\mathrm{I}(H, G, \phi, R)\big)^{(2)}$ 诱导的斜左 brace 同构于 $H_R^{(2)}$。

证明。回顾一下，诱导作用 $\overline{\phi}: G/L \to \mathrm{Aut}(H/K)$ 由 $\overline{\phi}_{\overline{g}}(\overline{h}) = \phi_g(h)$ 给出，其中 $\overline{g} \in \overline{G/L}$ 和 $\overline{h} \in H/K$。我们看到

$$\overline{\phi}_{\overline{g}}(\overline{h}) = \overline{\phi_g(h)} = \overline{\phi_g(h) h^{-1} h} = \overline{h},$$

因此，相对 Rota-Baxter 群是平凡的，从而证明了断言（1）。第二个断言可由定义立即得出。□

定义 6.5。相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 的交换子定义为相对 Rota-Baxter 群 $(H^{\phi}, G, \phi|, R|)$，其中 H^{ϕ} 是由其交换子群 $[H, H]$ 和 $H^{(2)}$ 生成的 H 的子群。我们将交换子记为 $(H, G, \phi, R)'$。

给定一个斜左 brace $(H, \cdot, \circ)$，$(H, \cdot, \circ)$ 的交换子 H' 是由 $H^{(\cdot)}$ 和 $H^{(2)}$ 的交换子群生成的 $H^{(\cdot)}$ 的子群。事实证明，交换子 H' 是 $(H, \cdot, \circ)$ 的理想。以下观察是显然的。

命题 6.6. 设 (H, G, ϕ, R) 为一个相对 Rota-Baxter 群。则以下结论成立：

(1) 交换子 $(H, G, \phi, R)'$ 是 (H, G, ϕ, R) 的理想。(2) 由 $(\mathrm{I}(H, G, \phi, R))'$ 诱导的斜左 brace 与 $H'_{R|}$ 同构。

引理 6.7. 设 (H, G, ϕ, R) 为一个相对 Rota-Baxter 群。那么存在映射 $\omega_H, \omega_H^{\phi}: \big(H/\mathrm{Z}_R^{\phi}(H)\big) \times \big(H/\mathrm{Z}_R^{\phi}(H)\big) \to H^{\phi}$ 定义为

$$\omega_H(\overline{h}_1, \overline{h}_2) = [h_1, h_2]$$

and

$$\omega_H^{\phi}(\overline{h}_1, \overline{h}_2) = \phi_{R(h_1)}(h_2) h_2^{-1}.$$

证明。显然，ω_H 是良定义的。为证明 ω_H^{ϕ} 的良定义性，设 $\overline{h}_1 = \overline{h}_3$ 和 $\overline{h}_2 = \overline{h}_4$ 属于 $H/\mathrm{Z}_R^{\phi}(H)$。那么，存在 z_1、$z_2 \in \mathrm{Z}_R^{\phi}(H)$，使得 $h_1 = h_3 z_1$ 和 $h_2 = h_4 z_2$。由此可得

$$\omega_H^{\phi}(\overline{h}_1, \overline{h}_2) = \phi_{R(h_1)}(h_2) h_2^{-1} = \phi_{R(h_3 z_1)}(h_4 z_2)(h_4 z_2)^{-1}. \tag{6.1}$$

根据$\mathrm{Z}_R^\phi(H)$的定义，对于所有 $g \in G$，都有 $\phi_g(z_1) = z_1$，因此

$$R(h_3 z_1) = R(h_3 \phi_{R(h_3)}(z_1)) = R(h_3) R(z_1).$$

利用 (6.1) 中 $R(h_3 z_1)$ 的值，我们得到

$$\begin{aligned}
\omega_H^\phi(\overline{h}_1, \overline{h}_2) &= \phi_{R(h_3)R(z_1)}(h_4 z_2)(h_4 z_2)^{-1} \\
&= \phi_{R(h_3)}(h_4) z_2 (h_4 z_2)^{-1} \quad (\text{since } z_1 \in \mathrm{Ker}(\phi\ R) \text{ and } z_2 \in \mathrm{Fix}(\phi)) \\
&= \phi_{R(h_3)}(h_4) h_4^{-1} \quad (\text{since } z_2 \in \mathrm{Z}(H)) \\
&= \omega_H^\phi(\overline{h}_3, \overline{h}_4).
\end{aligned}$$

这表明ω_H^ϕ 是良定义的。 □

定义 6.8. 若存在相对 Rota-Baxter 群的同构

$$(\psi_1, \eta_1) : (H, G, \phi, R)/\,\mathrm{Z}(H, G, \phi, R) \to (K, L, \varphi, S)/\,\mathrm{Z}(K, L, \varphi, S)$$

and

$$(\psi_2, \eta_2) : (H, G, \phi, R)' \to (K, L, \varphi, S)'$$

使得下图可交换

$$\begin{array}{ccccc}
H^\phi & \xleftarrow{\omega_H} & (H/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H)) \times (H/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H)) & \xrightarrow{\omega_H^\phi} & H^\phi \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1 \times \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} \\
K^\varphi & \xleftarrow{\omega_K} & (K/\,\mathrm{Z}_S^\varphi(K)) \times (K/\,\mathrm{Z}_S^\varphi(K)) & \xrightarrow{\omega_K^\varphi} & K^\varphi.
\end{array} \tag{6.2}$$

当作用 ϕ: $G \to \mathrm{Aut}(H)$ 和 φ：$L \to \mathrm{Aut}(K)$ 均为平凡作用时，前述定义就归结为群 H 和 K 的通常的同伦定义。

命题 6.9. 相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R) 和 (K, L, φ, S) 的一个同伦诱导出群 H 和 K 的一个同伦。

证明. 根据相对 Rota-Baxter 群同伦的定义，存在同构ψ_1：$H/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H) \to K/\mathrm{Z}_S^\varphi(K)$ 和 ψ_2：$H^\phi \to K^\varphi$，使得图表 (6.2) 交换。由 (6.2) 的交换性可得 $\psi_2|_{[H,H]}$：$[H, H] \to [K, K]$ 和 $\psi_2^{-1}|_{[K,K]}$:$[K, K] \to [H, H]$，因此 $\psi_2|_{[H,H]}$是一个同构。

令 $h \in \mathrm{Z}(H)$ 且 $x \in H$。由 (6.2) 的交换性可得 $\omega_K(\psi_1(\overline{h})\ \psi_1(\overline{x})) = \psi_2([h, x]) = \psi_2(1) = 1$。这意味着 $\psi_1(\mathrm{Z}(H)/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H)) \subseteq \mathrm{Z}(K)/\,\mathrm{Z}_S^\varphi(K)$。同样，由 (6.2) 的交换性以及 ψ_1 是一个同构这一事实可得 $\psi_1(\mathrm{Z}(H)/\mathrm{Z}_R^\phi(H)) = \mathrm{Z}(K)/\,\mathrm{Z}_S^\varphi(K)$。现在，我们有一个同构 ψ_1：$H/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H) \to K/\mathrm{Z}_S^\varphi(K)$，使得 $\psi_1(\mathrm{Z}(H)/\,\mathrm{Z}_R^\phi(H)) = \mathrm{Z}(K)/\mathrm{Z}_S^\varphi(K)$。由第三同构定理可知，存在

一个诱导同构 $\overline{\phi}_1$：$H/\operatorname{Z}(H)$ 和 $K/\operatorname{Z}(K)$。此外，图表 (6.2) 的交换性意味着诱导图表

$$\begin{array}{ccc} (H/\operatorname{Z}(H)) \times (H/\operatorname{Z}(H)) & \xrightarrow{\omega_H} & [H,H] \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\phi}_1 \times \overline{\phi}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2|_{[H,H]}} \\ (K/\operatorname{Z}(K)) \times (K/\operatorname{Z}(K)) & \xrightarrow{\omega_K} & [K,K] \end{array}$$

也满足交换性，这正是所需要的。 □

记号 6.3. 给定一个相对 Rota-Baxter 群 (H, G, ϕ, R)，令 $H^{R,\phi}$ 表示由集合 $\{\phi_{R(h_1)}(h_2) h_2^{-1} \mid h_1, h_2 \in H\}$ 生成的 H 的子群。

命题 6.10. 设 (H, G, ϕ, R) 和 (K, L, φ, S) 是等临相对 Rota-Baxter 群。则有以下结论：

(1) $\operatorname{Im}(R)/(\operatorname{Im}(R) \cap \text{核}(\phi)) \cong \operatorname{Im}(S)/(\operatorname{Im}(S) \cap \text{核}(\varphi))$。 (2) $H^{R,\phi} \cong K^{S,\varphi}$。
(3) $H/\operatorname{Z}^{\phi|}_{R|}(H) \cong K/\operatorname{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)$。 (4) $\mathrm{I}(H, G, \phi, R)$ 和 $\mathrm{I}(K, L, \varphi, S)$ 是等临相对 Rota-Baxter 群。

证明。由于（H， G， ϕ， R）与（K， L， φ， S）等临，存在同构

$$(\psi_1, \eta_1) : (H, G, \phi, R)/\operatorname{Z}(H, G, \phi, R) \to (K, L, \varphi, S)/\operatorname{Z}(K, L, \varphi, S)$$

and

$$(\psi_2, \eta_2) : (H, G, \phi, R)' \to (K, L, \varphi, S)'$$

使得图表（6.2）交换。

（1）对于 $h \in H$，令 $[R(h)]$ 表示 $R(h)$ 在 $\operatorname{Im}(R)/(\operatorname{Im}(R) \cap \operatorname{Ker}(\phi))$ 中的像，并令 $R(h)$ 表示 $R(h)$ 在 $G/\operatorname{Ker}(\phi)$ 中的像。于是，映射 $[R(h)] \mapsto R(h)$ 是从 $\operatorname{Im}(\overline{R})/(\operatorname{Im}(R) \cap \operatorname{Ker}(\phi))$ 到 $G/\operatorname{Ker}(\phi)$ 的嵌入。类似地，我们有从 $\operatorname{Im}(S)/(\operatorname{Im}(S) \cap \operatorname{Ker}(\varphi))$ 到 $K/\operatorname{Ker}(\varphi)$ 的嵌入。由于（ψ_1， η_1）是相对 Rota-Baxter 群的同态，我们有 $\eta_1 \overline{R} = \overline{S}\, \psi_1$。这一恒等式表明， η_1 将 $\operatorname{Im}(R)/(\operatorname{Im}(R) \cap \operatorname{Ker}(\phi))$ 映射到 $\operatorname{Im}(S)/(\operatorname{Im}(S) \cap \operatorname{Ker}(\varphi))$。
（2）图表（6.2）的交换性给出

$$\psi_2(\phi_{R(h_1)}(h_2) h_2^{-1}) = \varphi_{S(k_1)}(k_2) k_2^{-1} \tag{6.3}$$

对于所有 $h_1, h_2 \in H$，其中 $\psi_1(\overline{h}_1) = \overline{k}_1$ 和 $\psi_1(\overline{h}_2) = \overline{k}_2$，对某些 $k_1, k_2 \in K$成立。这表明 ψ_2 将 $H^{R,\phi}$ 映射到 $K^{S,\varphi}$中。我们断言 $\psi_2|_{H^{R,\phi}} : H^{R,\phi} \to K^{S,\varphi}$ 是满射。设 $\varphi_{S(k_1)}(k_2) k_2^{-1} \in K^{S,\varphi}$，其中 $k_1, k_2 \notin \operatorname{Z}^{\varphi}_{S}(K)$。利用 ψ_1 是同构这一事实，我们可以找到 $h_1, h_2 \in H$，使得 $\psi_1(h_1) = k_1$ 且 $\psi_2(h_2) = k_2$。将这些值代入 (6.3)，得到 $\psi_2(\phi_{R(h_1)}(h_2) h_2^{-1}) = \varphi_{S(k_1)}(k_2) k_2^{-1}$，从而证明了我们的断言。

(3) 令 $\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)$ 和 $\mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)$ 分别表示 $\mathrm{I}(H,G,\phi,R)$ 和 $\mathrm{I}(K,L,\varphi,S)$ 的中心的第一元组。注意，$\mathrm{Z}^{\phi}_{R}(H) \subseteq \mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)$ 且 $\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K) \subseteq \mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)$。此外，我们有一个群同构 $\psi_1 \colon H/\mathrm{Z}^{\phi}_{R}(H) \to K/\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$。我们断言，在 ψ_1 的限制下，$\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)/\mathrm{Z}^{\phi}_{R}(H)$ 和 $\mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)/\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$ 同构。为此，取 $x \in \mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)$，并令 $\psi_1(\overline{x}) = \overline{k}$ 对某个 $k \in K$ 成立。由于 (ψ_1, η_1) 是相对 Rota-Baxter 群的同态，对所有 $g \in G$，我们有

$$\overline{S}\psi_1 = \eta_1\overline{R} \quad \text{and} \quad \psi_1\overline{\phi}_{\overline{g}} = \overline{\varphi}_{\eta_1(\overline{g})}\psi_1. \tag{6.4}$$

Since $x \in$ 不动点子群$(\phi|)$，我们有 $\phi_{R(h)}(x) = x$ 对所有 $h \in H$均成立。利用 (6.4)，我们得到

$$\overline{k} = \psi_1(\overline{x}) = \psi_1\overline{\phi}_{\overline{R}(\overline{h})}(\overline{x}) = \overline{\varphi}_{\eta_1(\overline{R}(\overline{h}))}\psi_1(\overline{x}) = \overline{\varphi}_{\overline{S}(\psi_1(\overline{h}))}(\overline{k}),$$

因此在 $\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$ 模意义下有 $k \in$ 不动点子群$(\varphi|)$。任取 $k_1 \in K$，令 $\psi_1(\overline{x}_1) = \overline{k}_1$。由于$x \in \mathrm{Z}(H)$，我们有

$$\overline{k}\,\overline{k}_1 = \psi_1(\overline{x})\psi_1(\overline{x}_1) = \psi_1(\overline{xx_1}) = \psi_1(\overline{x_1x}) = \psi_1(\overline{x}_1)\psi_1(\overline{x}) = \overline{k}_1\overline{k},$$

因此在 $\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$ 模意义下有 $k \in \mathrm{Z}(K)$。最后，由于 $x \in$ 核$(\phi\ R)$，利用 (6.4)，我们得到 $k \in$ 核$(\varphi\ S)$ 模 $\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$。因此，我们可以推得 $\psi_1(\overline{x})$ 属于 $\mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)/\mathrm{Z}^{\varphi}_{S}(K)$。为了证明 ψ_1 的限制映射是满射，取 $y \in \mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)$，并设 $h \in H$ 满足 $\psi_1(\overline{h}) = \overline{y}$。采用与前面类似的论证，我们可以证明$h \in \mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H)$。这就证明了我们的断言。现在，由第三同构定理可知，ψ_1 诱导出一个同构 $H/\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H) \cong K/\mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K)$，这正是所需结果。

（4）根据定义，我们有

$$\mathrm{I}(H,G,\phi,R)/\mathrm{Z}(\mathrm{I}(H,G,\phi,R)) = (H/\mathrm{Z}^{\phi|}_{R|}(H), \mathrm{Im}(R)/(\mathrm{Im}(R)\cap\mathrm{Ker}(\phi)), \overline{\phi}, \overline{R}),$$

$$(\mathrm{I}(H,G,\phi,R))' = (H^{\phi|}, \mathrm{Im}(R), \phi|, R|),$$

$$\mathrm{I}(K,L,\varphi,S)/\mathrm{Z}(\mathrm{I}(K,L,\varphi,S)) = (K/\mathrm{Z}^{\varphi|}_{S|}(K), \mathrm{Im}(S)/(\mathrm{Im}(S)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)), \overline{\varphi}, \overline{S})$$

and

$$(\mathrm{I}(K,L,\varphi,S))' = (K^{\varphi|}, \mathrm{Im}(S), \varphi|, S|).$$

由断言（1）和（3）可得

$$\mathrm{I}(H,G,\phi,R)/\mathrm{Z}(\mathrm{I}(H,G,\phi,R)) \cong \mathrm{I}(K,L,\varphi,S)/\mathrm{Z}(\mathrm{I}(K,L,\varphi,S))$$

通过由数对 (ψ_1, η_1) 诱导的同构。类似地，由断言 (2) 以及事实 $(H,G,\phi,R)' \cong (K, L,\varphi,S))'$ 可得，$(\mathrm{I}(H,G,\phi,R))' \cong (\mathrm{I}(K,L,\varphi,S))'$通过由数对 (ψ_2, η_2) 诱导的同构。现在，由图表 (6.2) 的交换性可知，相对 Rota-Baxter 群 $\mathrm{I}(H,G,\phi,R)$ 和 $\mathrm{I}(K,L,\psi,S)$ 等临。

□

斜左 brace 的同伦近期已在 [20] 中引入。设 $(H,\cdot,\circ)$ 为一个斜左 brace。则有映射 $\theta_H,\theta_H^*\colon (H/\operatorname{Ann}(H)) \times (H/\operatorname{Ann}(H)) \to H'$，定义为

$$\theta_H(\overline{a},\overline{b}) = a\cdot b\cdot a^{-1}\cdot b^{-1}$$

and

$$\theta_H^*(\overline{a},\overline{b}) = a^{-1}\cdot(a\circ b)\cdot a^{-1}.$$

若存在同构$\xi_1\colon H/\operatorname{Ann}(H) \to K/\operatorname{Ann}(K)$ 和 $\xi_2\colon H'\to K'$，使得下图交换，则称两个斜左 brace $(H,\cdot,\circ)$ 和 $(K,\cdot,\circ)$ 等临。

$$\begin{array}{ccccc} H' & \xleftarrow{\theta_H} & (H/\operatorname{Ann}(H))\times(H/\operatorname{Ann}(H)) & \xrightarrow{\theta_H^*} & H' \\ {\scriptstyle\xi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\xi_1\times\xi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\xi_2}\downarrow \\ K' & \xleftarrow{\theta_K} & (K/\operatorname{Ann}(K))\times(K/\operatorname{Ann}(K)) & \xrightarrow{\theta_K^*} & K'. \end{array} \tag{6.5}$$

我们以如下结果作结。

定理 6.11. 设 (H,G,ϕ,R) 和 (K,L,φ,S) 是等临相对 Rota-Baxter 群，则它们诱导的斜左 brace 也等临。

证明。由命题 6.10 可知，$\mathrm{I}(H,G,\phi,R)$ 和 $\mathrm{I}(K,L,\varphi,S)$ 也等临。因此，存在同构

$$(\psi_1,\eta_1) : \mathrm{I}(H,G,\phi,R)/\operatorname{Z}(\mathrm{I}(H,G,\phi,R)) \to \mathrm{I}(K,L,\varphi,S)/\operatorname{Z}(\mathrm{I}(K,L,\varphi,S))$$

and

$$(\psi_2,\eta_2) : (\mathrm{I}(H,G,\phi,R))' \to (\mathrm{I}(K,L,\varphi,S))'$$

使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} H^{\phi|} & \xleftarrow{\omega_H} & \big(H/\operatorname{Z}_{R|}^{\phi|}(H)\big)\times\big(H/\operatorname{Z}_{R|}^{\phi|}(H)\big) & \xrightarrow{\omega_H^{\phi|}} & H^{\phi|} \\ {\scriptstyle\psi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_1\times\psi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_2}\downarrow \\ K^{\varphi|} & \xleftarrow{\omega_K} & \big(K/\operatorname{Z}_{S|}^{\varphi|}(K)\big)\times\big(K/\operatorname{Z}_{S|}^{\varphi|}(K)\big) & \xrightarrow{\omega_K^{\varphi|}} & K^{\varphi|}. \end{array} \tag{6.6}$$

由于每个相对 Rota-Baxter 群的态射都会诱导出相应斜左 brace 的态射，图表 6.6 给出了以下诱导斜左 brace 的交换图

$$\begin{array}{ccccc} (H^{\phi|})_{R|} & \xleftarrow{\omega_H} & (H/\operatorname{Z}_{R|}^{\phi|}(H))_{\overline{R}}\times(H/\operatorname{Z}_{R|}^{\phi|}(H))_{\overline{R}} & \xrightarrow{\omega_H^{\phi|}} & (H^{\phi|})_{R|} \\ {\scriptstyle\psi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_1\times\psi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_2}\downarrow \\ (K^{\varphi|})_{S|} & \xleftarrow{\omega_K} & (K/\operatorname{Z}_{S|}^{\varphi|}(K))_{\overline{S}}\times(K/\operatorname{Z}_{S|}^{\varphi|}(K))_{\overline{S}} & \xrightarrow{\omega_K^{\varphi|}} & (K^{\varphi|})_{S|}. \end{array} \tag{6.7}$$

命题 6.2 表明，$\mathrm{I}(H,G,\phi,R)/\mathrm{Z}(\mathrm{I}(H,G,\phi,R))$ 在 $H/\mathrm{Z}_{R|}^{\phi|}(H)$ 上诱导的斜左 brace 与 $H_{R|}/\operatorname{Ann}(H_{R|})$ 相同。此外，命题 6.6 断言，$(\mathrm{I}(H,G,\phi,R))'$ 在 $H^{\phi|}$ 上诱导的斜左 brace 与斜左 brace $H'_{R|}$ 相同。由于 $H_R = H_{R|}$ 和 $K_S = K_{S|}$，图表 6.7 给出了以下斜左 brace 的交换图

$$\begin{array}{ccccc} H'_R & \xleftarrow{\omega_H} & (H_R/\operatorname{Ann}(H_R)) \times (H_R/\operatorname{Ann}(H_R)) & \xrightarrow{\omega_H^{\phi|}} & H'_R \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1\times\psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} \\ K'_S & \xleftarrow{\omega_K} & (K_S/\operatorname{Ann}(K_S)) \times (K_S/\operatorname{Ann}(K_S)) & \xrightarrow{\omega_K^{\varphi|}} & K'_S. \end{array}$$

这表明 H_R 和 K_S 是等临的。 □

注 6.8. 前述定理的逆命题未必成立。例如，取两个不同构的平凡括号（阿贝尔群）$(H,\cdot_H,\cdot_H)$ 和 $(K,\cdot_K,\cdot_K)$。由于 $H/\operatorname{Ann}(H)$、$K/\operatorname{Ann}(K)$、H' 和 K' 均为平凡的，因此它们作为括号是等临的。但是，相对 Rota-Baxter 群 $(H^{(\cdot_H)}\ H^{(\cdot_H)}, \lambda^H, \mathrm{Id}_H)'$ 和 $(K^{(\cdot_K)}\ K^{(\cdot_K)}, \lambda^K, \mathrm{Id}_K)'$不可能同构，因为 $H^{(\cdot_H)}$ 和 $K^{(\cdot_K)}$ 不同构。

致谢。作者感谢 Tushar Kanta Naik 对本工作的关注。Nishant Rathee 感谢 IISER Mohali 提供的研究所博士后奖学金。Mahender Singh 获得 SwarnaJayanti 奖学金资助，资助项目编号为 DST/SJF/MSA-02/2018-19 和 SB/SJF/2019-20。

7. Declaration

作者声明不存在利益冲突。

8. Data Availability

作　　者可应要求提供本研究中使用的 GAP 代码。

References

[1] D. Bachiller，扩张、匹配积与单括号，《纯粹与应用代数杂志》222 (2018), 1670– 1691.[2] D. Bachiller、F. Cedo、E. Jespers 和 J. Okninski，有限 brace 的迭代匹配积与单性；Yang-Baxter 方程的新解，《美国数学会会刊》370 (2018), 4881–4907.[3] D. Bachiller、F. Cedo、E. Jespers 和 J. Okninski，左 brace 的非对称积与单性；Yang-Baxter 方程的新解，《当代数学通讯》21 (2019), 1850042，30 页.[4] V. Bardakov 和 V. Gubarev，Rota-Baxter 群、斜左 brace 与 Yang-Baxter 方程，《代数杂志》587 (2022), 328–351.[5] V. Bardakov 和 V. Gubarev，群上的 Rota–Baxter 算子，《印度科学院数学科学论文集》133 (2023), 第 1 期，论文编号 4，29 页。

[6] V. Bardakov、M. Neshchadim、M. K. Yadav，小阶斜左 brace 的计算，《国际代数与计算杂志》30 (2020), 第 4 期，839–851.[7] C. Bai、L. Guo、Y. Sheng 和 R. Tang，后群、（李）Butcher 群与 Yang–Baxter 方程，《数学年刊》(2023)，即将出版.[8] A. Caranti，双斜 brace 与全纯群的正则子群，《代数杂志》，562，(2020)，647-665[9] F. Catino、I. Colazzo 和 P. Stefanelli，仿射群的正则子群与 brace 的非对称积，《代数杂志》455 (2016), 164–182.[10] F. Catino、I. Colazzo 和 P. Stefanelli，集合论解的匹配积，《纯粹与应用代数杂志》224 (2020), 1173–1194.[11] F. Catino、I. Colazzo 和 P. Stefanelli，有限阶 Yang-Baxter 方程解的匹配积，《地中海数学杂志》17 (2020), 论文编号 58，22 页.[12] F. Catino、I. Colazzo 和 P. Stefanelli，具有非平凡湮灭子的斜左 brace，《代数与应用杂志》18 (2019), 第 2 期，1950033.[13] F. Catino、M. Mazzotta 和 P. Stefanelli，Clifford 半群上的 Rota-Baxter 算子与 Yang-Baxter 方程，(2022), arXiv:2204.05004v1.[14] V. G. Drinfel'd，关于量子群论中的若干未解问题，《量子群》，列宁格勒，1990，《数学讲义》，第 1510 卷，Springer，柏林，1992，页 1-8.[15] L. Guarnieri 和 L. Vendramin，斜 brace 与 Yang-Baxter 方程，《数学计算》86 (2017), 2519–2534.[16] L. Guo、H. Lang 和 Y. Sheng，Rota-Baxter 李代数的积分与几何化，《数学进展》387 (2021), 107834，34 页.[17] P. Hall，素数幂阶群的分类，《纯粹与应用数学杂志》182 (1940), 130–141.[18] J. Jiang、Y. Sheng 和 C. Zhu，相对 Rota-Baxter 算子的李理论与上同调，(2021), arXiv:2108.02627v3.[19] V. Lebed 和 L. Vendramin，brace 的上同调与扩张，《太平洋数学杂志》284 (2016), 191–212.[20] T. Letourmy 和 L. Vendramin，斜 brace 的同伦，(2022), arXiv:2211.14414.[21] N. Rathee 和 M. K. Yadav，斜 brace 的上同调、扩张与自同构，(2021), arXiv:2102.12235.[22] W. Rump，brace、根环与量子 Yang-Baxter 方程，《代数杂志》307 (2007), 153–170.[23] W. Rump，代数逻辑中的半直积与量子 Yang-Baxter 方程的解，《代数与应用杂志》7 (2008), 471–490.[24]GAP Group，《群、算法与编程》，4.11.0 版 (2020), http://www.gap-system.org。

Department of Mathematical Sciences,
Indian Institute of Science Education and Re-search (IISER) Mohali, Sector 81,
SAS Nagar, P O Manauli, Punjab 140306, India电子邮箱：nishantrathee@iisermohali.ac.in

Department of Mathematical Sciences,
Indian Institute of Science Education and Re-search (IISER) Mohali, Sector 81,
SAS Nagar, P O Manauli, Punjab 140306, India电子邮箱：mahender@iisermohali.ac.in