arXiv:2305.00939v1 [physics.flu-dyn] 1 May 2023

通过精确相干结构及其不变流形，探索活性向列相通道流中的规则与湍流状态

Caleb G. Wagner、Rumayel H. Pallock、JaeSung Park 和 Piyush Grover*内布拉斯加大学林肯分校机械与材料工程系，内布拉斯加州林肯市，邮编 *68588*

Michael M. Norton

罗切斯特理工学院物理与天文学学院，纽约州罗切斯特市，邮编 *14623*（日期：2023年5月2日）

摘要

本研究采用精确相干结构（ECS）框架，统一研究二维活性向列相通道流中的稳定和不稳定定常态。ECS 是控制方程的定常、周期、准周期或行波解；它们与其不变流形共同组织非线性连续系统的动力学。我们拓展了此前关于前湍流区间 ECS 的研究，全面考察了活性取值范围广泛、涵盖前湍流区间和湍流状态的稳定与不稳定 ECS。在弱湍流状态下，我们计算出 200 多个在同一组参数下共存的不稳定 ECS，并揭示了对称性在组织相空间几何中的作用。我们提供了确凿的数值证据，表明在前湍流区间，典型轨迹会先后跟踪一系列不稳定 ECS，随后才趋于某个吸引子。最后，我们的研究表明，在湍流状态下，轨迹可能会影随准周期型 ECS。

一、引言

活性流体是由各种组分构成的黏性悬浮液，这些组分消耗化学能，并通过在微观尺度产生应力将其转化为机械功，从而诱发流动 [1]。它们受完全非平衡动力学 [2], 支配，其涌现的时空结构跨越多个尺度。近年来，模型活性流体在物理学与生物学之间建立了前所未有的联系 [3]。鉴于其独特性，表征和控制活性流体仍面临若干重大挑战。在各种类型的活性流体中，活性向列相 [4, 5] ——由具有活性、呈杆状且无极性的组分构成的悬浮液——尤其受到当下关注。这种关注部分源于利用活性向列相丰富现象学的潜力，包括自发相干流、动态涡旋模式和混沌流体力学（即低雷诺数下的“活性/介观湍流”） [6, 7], 来设计智能材料。

伸展型活性向列相在本质上容易受到弯曲涨落的影响而失稳 [8]。在没有边界或其他因素影响的情况下，活性向列相系统会呈现由拓扑缺陷驱动的混沌流 [9–12]。尽管不同模型的具体情况各异，但总体图景

* piyush.grover@unl.edu

均匀取向的活性向列相系统中的微小扰动会在流体动力学反馈的作用下不断增长，而这一过程由活性应力 [13]驱动。当这些扰动达到饱和时，便会产生一对 $\pm\frac{1}{2}$ 缺陷，并根据其绕数命名。在稳态下，这些缺陷会成核、自推进并湮灭，同时形成关联长度为 L_α的涡旋。随着活性增强，缺陷密度随之增加，而涡旋尺寸则相应减小，因为 $L_\alpha \sim \sqrt{K/\alpha}$，其中 K 为弹性常数， α 为活性应力的强度，使得 $\sigma_\alpha \propto \alpha\mathbf{Q}$ [4], ，其中$\mathbf{Q}$ 为向列取向张量。

对活性向列相系统的混沌流进行调控的实验工作，采用了“软性”各向异性基底摩擦 [14, 15], 、光激活活性图案化 [16–18] 或受限环境 [19, 20]。鉴于受限几何在活性生命系统中的重要性，研究人员已通过计算探究了多种几何条件下几何受限对动力学的作用。调控从层流到混沌流转变的一个关键控制参数，是域尺寸相对于 L_α的大小。该内禀长度尺度与施加的几何长度尺度（如通道宽度或域半径）之比，在很大程度上决定了指向矢场和流场的时空动力学，并已通过实验和数值方法得到广泛研究 [4, 20–24]。

在二维情况下，总体趋势 [25, 26]是：远小于 L_α 的受限几何会形成稳态系统，而远大于 L_α 的系统则会产生混沌流或介观湍流。在这两个极端之间，系统会呈现多种依赖几何条件的动力学状态，例如相干流伴随着指向矢场的稳态或非平凡周期动力学。例如，在通道几何中，这一参数范围内存在所谓的“舞蹈”态，其特征是 $+\frac{1}{2}$ 缺陷呈编织轨道运动，而通道壁上则分布着静止的$-\frac{1}{2}$ 缺陷 [22, 24, 27]。

从工程视角来看，人们对如何通过活性的空间调制或时空调制，在受限活性向列相中探索广阔的时空结构空间 [28–32], 抱有浓厚兴趣。此外，与受限环境中的活性湍流 [26, 33] 相关的基本问题仍有待解答：受限活性流体如何变得湍流化，如何对其进行表征，以及如何促进或抑制湍流。近期一些理论和计算研究推导出了活性湍流的粗粒化统计描述 [6, 34–37] ，重点关注统计稳态的能谱和空间组织，而非确定性动力学。这些研究

揭示了，与惯性湍流不同，活性向列湍流中不存在跨尺度的能量传递。此外，活性向列湍流中还存在普适标度区间。尽管这些研究为充分发展的活性湍流的能量学和标度特性提供了有价值的信息，但对于发展活性湍流的预测或控制能力，尤其是在受限环境中，所能提供的见解并不多。

研究湍流问题的另一种方法建立在动力系统理论之上。这种方法的核心思想最初应用于惯性湍流，其渊源可追溯至 [38, 39]。在这种方法中，将流体视为一个在无限维相空间 [40]中演化的确定性动力系统。给定流体动力学系统的控制方程可写成抽象的一阶常微分方程

$$\dot{X} = F(X), \tag{1}$$

其中， X 表示系统的 N维状态。在计算中， N 是一个很大但有限的数，对应于离散化系统的自由度。相应的流映射为 $f^t(X_0) = X_0 + \int_0^t F(X(\tau))d\tau$，其中 X_0为初始条件。

该系统的主导流动模式可通过精确相干结构 （ECS） [41, 42] 及连接这些结构的动力学路径来理解。精确相干结构是式1的某种解，可以是（稳定或不稳定的）平衡态、（时间）周期解、相对（时间）周期解、准周期解或行波。每种类型的精确相干结构都可定义为相应不动点方程（FPE）的解。在相空间中，平衡态是0维流形（点），周期轨道和行波是1维流形（曲线），而相对周期轨道是2维流形（曲面）。平衡态解 X_{eq}的不动点方程为 $F(X_{\mathrm{eq}}) = 0$；而周期轨道（PO）上的任意一点X_{P}都满足 $f^T(X_{\mathrm{P}}) = X_{\mathrm{P}}$，其中 T为周期。类似地，相对周期轨道（RPO）上的一点 X_{RP}满足 $f^T(X_{\mathrm{RP}}) = \tau_x(\ell)X_{\mathrm{RP}}$，其中 $\tau_x(\ell)$是一个算子，可将解沿流向平移距离 ℓ。稳定精确相干结构可通过对式1进行含时模拟来计算，而不稳定精确相干结构则需要求解上述不动点方程。

每个精确相干结构的稳定性都可以通过在相空间中对其轨迹进行线性化来确定。一般而言，如果一个 d维精确相干结构位于 N–维相空间中，且

n_u 个线性不稳定方向构成局部不稳定子空间， n_s 个线性稳定方向构成局部稳定子空间，那么 $n_u + n_s + d = N$。因此，远离分岔点时，每个不稳定精确相干结构都表现为一个（高维）鞍点。与此类精确相干结构相关联的是(n_u+d)–维不稳定流形和(n_s+d)–维稳定流形。从数学上说，稳定流形和不稳定流形分别是正向时间和反向时间下收敛到该精确相干结构的初始条件集合。这些不变流形是连接相空间中相距遥远区域的动力学路径。

在实验或时变数值模拟中直接观测到的稳态对应于各种类型的稳定 ECS。已有猜想认为，湍流对应于混沌轨迹在相空间中游走，并反复经过不同ECS（这些ECS均为不稳定）的邻域[43–45]。因此，ECS及其不变流形构成了流体复杂时空运动的组织模板。这种对复杂流动的最简描述非常适合用于通过活性图案化设计近似最优的控制输入。此类方法已成功应用于若干低维非线性动力系统 [46–48], ，在这些系统中，仅凭对各种平衡态或周期轨道及其稳定流形和不稳定流形的了解，无须求解任何形式上的优化问题，就能计算出（近似）最优控制轨迹。

在我们先前的工作 [49], 中，我们报告了在低于湍流转变的单一活性值下，相空间中共存着一个混沌吸引子、多个规则吸引子（即稳定ECS）以及大量不稳定ECS。本文从多个方面扩展了此前的分析。在III A节中，我们通过全面研究大范围活性值下的吸引子，绘制了相图。我们发现，活性值超过某一临界值后，系统中不再存在规则（即非混沌）吸引子，所有轨迹均为混沌轨迹，这标志着向湍流的转变。除吸引子之外，我们还在III B节讨论了预湍流和湍流活性区间内各种稳定和不稳定ECS的计算与分类。我们展示了明确利用系统对称性能够实现系统状态的计算与分类。对称性视角 [50, 51] 也有助于可视化和理解相空间几何。

关于湍流轨迹会在相关不变流形和异宿连接的引导下跟踪各种 ECS 的猜想

已在近期针对某些惯性湍流系统开展的数值[52] 和实验 [45, 53] 研究中得到证实。在第三节 C 中，我们回顾这些先前研究中介绍的工具 [52, 53], ，并运用这些工具提供数值证据，表明活性向列相系统在前湍流区间会影随 ECS 及其不变流形。最后，我们还在同一节中讨论了为确认湍流状态下 ECS 的影随现象所做的努力。

II. 模型、对称性与计算框架

沿用早期工作 [22, 54–56], ，我们用速度 $\mathbf{u}(\mathbf{r}\ t)=(u,v)$和向列取向张量 $\mathbf{Q}(\mathbf{r}\ t)$来描述活性向列相系统。对称且无迹的$\mathbf{Q}$ 张量可参数化为 $Q_{ij}=q(n_in_j-0.5\delta_{ij})$，其中标量 q 和单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 分别描述向列有序的程度和方向。控制方程为:

$$\begin{aligned}\rho\left(\partial_t+\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u}&=-\boldsymbol{\nabla}p+2\eta(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})-\alpha(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{Q}),\\ \left(\partial_t+\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{Q}+\mathbf{W}\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{W}&=\lambda\mathbf{E}+\gamma^{-1}\mathbf{H},\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}&=0,\end{aligned}\tag{2}$$

其中

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\partial_iu_j+\partial_ju_i\right);\qquad W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\partial_iu_j-\partial_ju_i\right)\tag{3}$$

$$\mathbf{H}=A\left[\mathbf{Q}-b\mathrm{Tr}\left(\mathbf{Q}^2\right)\mathbf{Q}\right]+K\nabla^2\mathbf{Q}.\tag{4}$$

材料对活性的响应在纳维–斯托克斯方程中体现为活性应力 $-\alpha\mathbf{Q}$，它将活性粒子建模为力偶极子 [57]。我们不在此方程中纳入被动弹性应力，因为它们是次要项 [23, 49, 58]。在$\mathbf{Q}$方程中，左端是$\mathbf{Q}$ 相对于$\mathbf{u}$的对流导数。除了通常的（$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$）项外，还有交换子乘积 $\mathbf{W}\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\mathbf{W}$，它描述了$\mathbf{Q}$ 在随体坐标系中的旋转。右端的 $\lambda\mathbf{E}$ 是流动取向项，而 $\mathbf{H}$ 则源自自由能泛函，该泛函会惩罚形变并驱动向列有序的形成。在本研究中，我们忽略流动取向，以聚焦于系统的关键特征 [12, 59]。向列相流体动力学的其他方面的

模型的推广及详细物理解释见 [57]。区域为一个周期性二维通道，参数化为 $(x, y) \in [0, L] \times [0, h]$，其中 x 为周期坐标。通道壁对 $\mathbf{u}$ 施加无滑移边界条件，并对 $\mathbf{Q}$施加强垂直锚定。

在我们的模拟中，我们采用参考文献 [58]，使用的无量纲化方法，其中基本长度和时间尺度 ℓ，τ 定义为

$$\ell = \frac{K^{1/2}}{A^{1/2}}, \qquad \tau = \frac{\gamma}{A} \tag{5}$$

相应的速度尺度 v_0 为

$$v_0 = \frac{\ell}{\tau} = \frac{K^{1/2}}{A^{1/2}} \cdot \frac{A}{\gamma} = \frac{K^{1/2} A^{1/2}}{\gamma} \tag{6}$$

在这些单位下，方程 (2) 变为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re_n} \left(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + 2(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \frac{\mathrm{R_a}}{\mathrm{Er}} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{Q}\right), \\ &\left(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \mathbf{Q} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} = \lambda \mathbf{E} + \mathbf{H}, \qquad (7) \\ &\quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} - b\mathrm{Tr}\left(\mathbf{Q}^2\right) \mathbf{Q} + \nabla^2 \mathbf{Q}, \tag{8}$$

其中

$$\mathrm{Re_n} = \frac{\rho v_0 \ell}{\eta}, \tag{9}$$

$$\mathrm{Er} = \frac{\eta v_0 \ell}{K} = \frac{\eta}{K} \cdot \frac{K}{\gamma} = \frac{\eta}{\gamma}, \tag{10}$$

$$\mathrm{R_a} = \frac{K}{A} \cdot \frac{\alpha}{K} = \frac{\alpha}{A}. \tag{11}$$

$\mathrm{R_a}$ 为无量纲活动度，Er 为埃里克森数，$\mathrm{Re_n}$ 在文献[58] 中被确定为微观雷诺数。与先前研究 [22, 60], 一致，我们固定参数 $\mathrm{Er} = 1$ 和 $\mathrm{Re_n} = 0.0136$。通道尺寸为 $L = 80$ 和 $h = 20$（以无量纲单位计）。

A. 对称性

若式（1）所示形式的动力系统在群作用 σ 下满足时间演化与群运算可交换，则称该系统具有等变性，即对于任意状态 X 和时间 T，关系 $\sigma(f^T(X)) = f^T(\sigma(X))$成立。周期通道中的式（2）所描述的系统，在由$\tau_x(\ell)$表示的连续单参数群 x 平移以及 σ_x 和 σ_y所表示的 x 和 y 反射下具有等变性，其中

$$\begin{aligned}
\sigma_x[u, v, Q_{11}, Q_{12}](x, y) &= [u, -v, Q_{11}, -Q_{12}](x, h - y), \\
\sigma_y[u, v, Q_{11}, Q_{12}](x, y) &= [-u, v, Q_{11}, -Q_{12}](L - x, y), \\
\tau_x(\ell)[u, v, Q_{11}, Q_{12}](x, y) &= [u, v, Q_{11}, Q_{12}](x + \ell, y),
\end{aligned} \tag{12}$$

且 ℓ 为任意实数。我们将使用记号 T_k 表示具有运算 $\tau_x(\frac{L}{k})$ 的离散 k重平移群。在命名各种精确相干结构（ECS）时，我们采用以下约定："Tk/m"表示具有 T_k 对称性的精确相干结构，而整数 m 是用于区分具有相同对称性的不同精确相干结构的标识符。假设初始条件X_0 关于上述任一群运算或其复合运算具有对称性，例如令 $X_0 = \sigma_x(X_0)$。那么，系统的未来状态 $f^T(X_0)$ 将保持相同的对称性 [42],，因此，对于所有 $T > 0$， $f^T(X_0) = \sigma_x(f^T(X_0))$。在这种情况下，状态 X_0及其所有未来迭代都被称为属于 τ_x对称子空间 $Fix(\sigma_x) \subset \mathbb{R}^N$，其中 $Fix(\sigma_x) = \{X \in \mathbb{R}^n | \sigma_x(X) = X\}$。我们将在以下各节中说明，这些对称性是寻找和分类各种精确相干结构（ECS）以及分析相空间几何的有力工具。

B. 计算框架

我们开发了一款名为"活性物质中的精确相干结构"（ECSAct）的开源计算工具箱[61]，该工具箱使用开源伪谱代码 Dedalus[62]。Dedalus 是一款基于 Python、采用 MPI 并行化的通用求解器，可用于在谱可表示区域上求解初值问题、边值问题和特征值问题。它通过利用稀疏性、算术树和变换的先进算法，能够高效求解几乎任意的方程。伪谱方法非常适合求解简单几何中的非线性

偏微分方程 [63]。对于通道几何，Dedalus 在周期方向上采用傅里叶基，在壁面法向上采用切比雪夫多项式。

虽然 Dedalus 可以原生求解时变问题，但目前缺少能够处理高度非线性多维 FPE（例如计算不稳定ECS时需要求解的此类方程）的复杂求解器。为求解此类 FPE，ECSAct 使用改进的牛顿-拉夫森算法 [64]。其中两个关键要素是自适应“钩步法”步长选择，以提高全局收敛 [65], ，以及用于在每次迭代中求解线性边值问题的无矩阵广义最小残量法 [66, 67]算法。无矩阵方法至关重要，因为它们能够高效扩展至流体力学模拟中遇到的大规模问题维度。ECSAct 还包含用于对各类 ECS 进行线性稳定性分析的例程，以及用于执行对称操作的例程，例如投影到对称子空间等。有关这些算法和 ECSAct 实现的更多详情，请参阅 GitHub 仓库中的 ECSAct 文档 [61]。

此处报告的所有精确相干结构和异宿连接均使用 128 个傅里叶模态和 32 个切比雪夫模态计算，对应的相空间维数为 $\sim 4 \times 128 \times 32 = 16384$。

III. 结果

A. 吸引子

1. 搜索策略

非线性动力系统可能具有多个吸引态。要通过正向时间积分发现吸引子，初始条件必须位于相应的吸引域内。然而，对于多个吸引子，目前没有通用方法能够确保所有吸引域都已被采样。因此，通常需要采用启发式方法。本节将介绍我们用于绘制活性向列相通道流中吸引子分布的启发式方法。

作为起点，我们参考此前关于单一活性值下 [49] 活性向列相通道流的研究。在该研究中，我们发现了三个共存的吸引子：三重和四重涡旋晶格（“舞动的向错”）周期轨道态，以及一个局域混沌吸引子。由于这三者

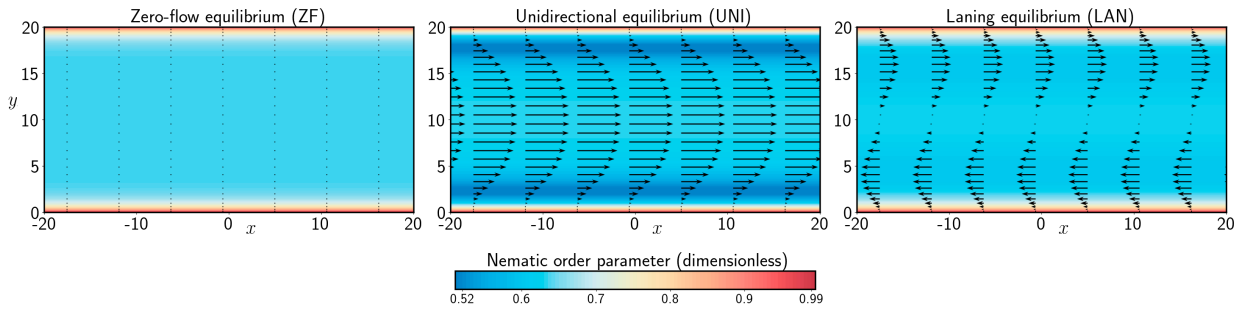

图 1：$\mathrm{R_a} = 3.4$ 下零流或一维流的三种平衡态。

在相空间中彼此分离良好，通过正向时间积分进行粗略搜索时，很容易因未能在每个吸引域中提供初始条件而遗漏其中一个。要找到全部三个吸引子，需要采用更具原则性的方法，即在一组离散对称子空间中选取初始条件。其基本思想是，动力学倾向于选择与系统长度尺度相匹配的构型，这对应于具有精确或近似离散平移对称性的流动状态。对于宽高比为 ≈ 4的通道，非混沌吸引子具有三重、四重或五重平移对称性是合理的：例如，由3个、4个或5个相同（或几乎相同）的涡旋组成的一排。事实上，这种构型与此前研究中持续观察到的稳定涡旋晶格周期轨道相一致。这一物理推理也与更普遍的动力系统背景相吻合：对称子空间在组织相空间几何方面所发挥的作用早已得到确立。因此，我们的策略是搜索位于匹配系统偏好长度尺度的对称子空间上或其附近的吸引子。一种方法是在某个对称子空间中选择初始条件，并在正向时间积分过程中显式地保持该对称性。然而，这样做会忽略只能在完整相空间中表现出来的关键特征。其中包括不同对称子空间中的精确相干结构之间的动力学连接，以及所有从对称态发生小幅扰动的吸引子，例如其中一个涡旋略有变形的涡旋晶格。因此，我们在完整相空间中搜索吸引子。实际上，具有一维流的一组平衡态（以下简称“一维平衡态”）如图1所示，可作为进入对称子空间的便捷“入口点”。这三个平衡态 [49, 68, 69] 具有连续平移对称性，因此属于每个离散平移对称子空间。出于同样的原因，在这些平衡态附近对系统进行线性化所得的不稳定特征向量是其

n_x	Re(λ)	n_x	Re(λ)	n_x	Re(λ)
6	0.623	10	0.372	9	0.207
7	0.603	3	0.296	10	0.137
5	0.595	11	0.254	12	0.12
8	0.55	7	0.249	5	0.115
4	0.497	8	0.246	11	0.042
9	0.471	6	0.208	2	-0.021

表 I： 在 $\mathrm{R_a} = 3.4$ 处围绕 UNI 线性化的动力学的主导特征向量特征。这些特征向量是 x 中的纯傅里叶模态，形式为 $e^{\pm 2\pi n_x/L} g(y)$，其中 $L = 80$ 是通道宽度。 λ 是特征值，因此 Re(λ) 为正（负）意味着该特征向量代表不稳定（稳定）方向。

形式为 $e^{\pm 2\pi n_x/L} g(y)$，因此具有离散平移对称性。这些对称性往往也是动力学上最相关的对称性，因为它们恰恰是在轨迹离开平衡态时增长并持续存在的对称性。相比之下，动力学上不利的对称性通常由稳定特征向量表示；在平衡态邻域内，这些特征向量会受到阻尼。表 I 展示了 $\mathrm{R_a} = 3.4$ 处 UNI 的这一特点。在这种情况下，不稳定特征向量的波长范围为通道宽度 L 的三分之一至十二分之一，对应的离散对称性为 T_3， T_4，……， T_{12}。正如以下各节所示，这些对称性对于表征典型的时变轨迹确实十分重要，而更高阶的对称性 $T_{n>12}$ 则无关紧要。

最终，我们的搜索包含以下步骤：

1. 对每个 $\mathrm{R_a} \in \{0.1\, n, n = 1 \ldots 50\}$，计算 UNI、LAN 和 ZF 的不稳定特征向量。

2. 对每个不稳定特征向量 $\mathbf{v}$ 构造初始条件 $\mathbf{X}_0 + \epsilon(\mathbf{v}/|\mathbf{v}|)$，其中$\mathbf{X}_0$ 是 UNI、LAN 或 ZF 之一；并且 $\epsilon = 10^{-5}$。从该初始条件出发，运行 $10^4 \tau$ 个时间单位的含时模拟。将最终状态记为 $\mathbf{X}_\infty$。

3. 以 $\mathbf{X}_\infty$ 为初始猜测运行牛顿–拉夫森求解器。如果求解器收敛，则计算稳定性并判断它是否为吸引子。

我们还对若干精确相干结构进行了分支延拓，检查不稳定解分支是否会在活性较高或较低时变得稳定。不过，大多数吸引子都是通过上述时变方法找到的。

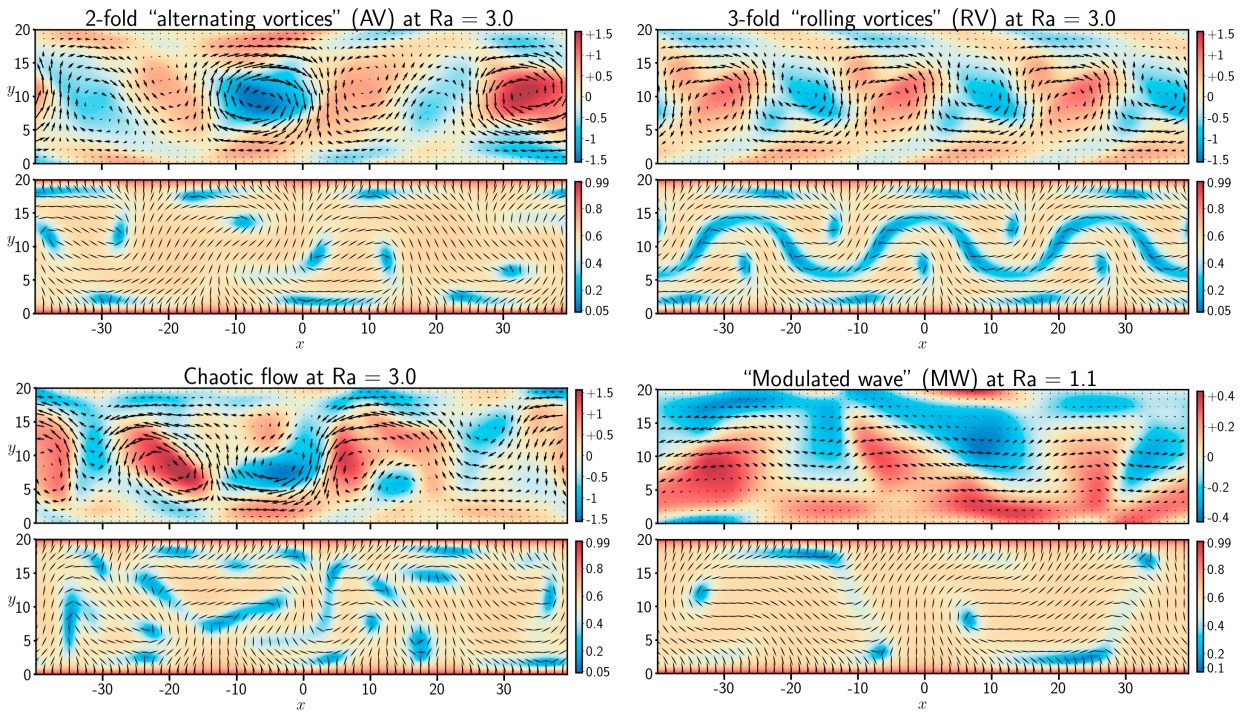

图 2：部分吸引子的快照：涡旋流（上排）和混沌流（左下）位于 $\mathrm{R_a} = 3.0$，并使用相同的色标范围显示。调制波（右下）位于 $\mathrm{R_a} = 1.1$；由于其活性较低，使用不同的色标范围显示。交替涡旋晶格相对周期轨道和调制波相对周期轨道都具有平移反射对称性 $\sigma_x T_2$，滚动涡旋晶格相对周期轨道具有三重平移对称性 T_3，而混沌流不具有任何对称性。

2. 描述与分类

非混沌吸引子可根据式 2 的对称性进行分类。对于 $0 < \mathrm{R_a} < 0.7$，一个或多个一维平衡态（ZF、UNI、LAN）是稳定的。由这些吸引子经分岔产生的平衡态或周期轨道会打破连续平移对称性，同时具有离散平移对称性。稳定的精确相干结构（即吸引子）将具有动力学上有利的长度尺度对应的对称性，而这些长度尺度又取决于系统的内禀长度尺度。对于 $\mathrm{R_a} \approx 0.7$，当 UNI 变得不稳定时，一个具有 T_4 对称性的相对周期轨道通过同宿分岔产生。该相对周期轨道在 UNI 平衡态的邻域与对应于四重涡旋晶格态的周期轨道邻域之间循环。随后出现的下一个吸引子（$\mathrm{R_a} \approx 1.1$ 附近）是一个相对于 $\sigma_x T_2$ 不变的相对周期轨道，它描述了一种移位反射对称性 [70]。尽管这一特定吸引子（标记为“调制波”（MW））仅存在于很窄的活性范围内（图 3 第 5 行），但从 $\mathrm{R_a} \approx 4.1$ 一直到该处，$\sigma_x T_2$ 对称性也反复出现在其他吸引子中。

图2（右下）展示了一个MW相对周期轨道的快照。

对于此处考虑的通道尺寸和材料常数，最稳健的吸引子具有 T_3 对称性。虽然存在一个具有 T_4 对称性的稳定周期轨道（图 3 中的绿色条），但它仅在相对狭窄的活性范围内稳定，而且稳定性也较弱。

这些对称性与其他流动特征大致相关。具体而言，T_n 对称性与以下情况之一相关：(a) 在近乎单向流动和涡旋晶格周期轨道之间循环（图 3 第 4 行）；(b) 向左或向右漂移的涡旋晶格相对周期轨道（标记为“滚动涡旋晶格”，第 7 行）；或 (c) 涡旋晶格周期轨道（第 8 行）。在情况 (b) 和 (c) 中，涡旋同向旋转。图 2（右上）展示了滚动涡旋晶格相对周期轨道的快照。相比之下，由于 σ_x 会使涡量变号，平移反射对称性（$\sigma_x T_2$）往往会产生一对反向旋转涡旋（第 6 行）。图 2（左上）展示了这一相对周期轨道的快照，其标记为“交替涡旋晶格”。

在本文所研究的零流动取向情况下，我们在活性范围 $1.1 \leq \mathrm{R_a} \leq 1.4$ 内没有发现任何非混沌吸引子。通过对多个非零流动取向值重复进行类似计算，我们证实，一般而言，在低于湍流转变的所有活性值下，至少可以找到一个非混沌吸引子。

3. 混沌吸引子

令人惊讶的是，有证据表明，即使活性低至 $\mathrm{R_a} \approx 1.1$，也存在混沌吸引子。相比之下，稳定准周期解一直存在到 $\mathrm{R_a} \approx 4.3$。在这两者之间，相空间可以划分为稳定准周期解和任意混沌吸引子的吸引域。前者由相空间中所有在 $t \to +\infty$ 时收敛到稳定准周期解的点组成，后者则由所有在 $t \to +\infty$ 时收敛到混沌吸引子的点组成。为便于可视化，我们将轨迹投影到约化三维相空间（$\langle u \rangle$，$\langle v^2 \rangle$，$\langle Q_{11} \rangle$） [49]，其中 $\langle . \rangle$ 表示瞬时通道平均。在该相空间投影中进行目视检查表明，混沌轨迹局限于一个与稳定准周期解相分离的区域；以 $\mathrm{R_a} = 3.4$的情况为例，见图 4。混沌轨迹与 $\mathrm{R_a} = 3.4$ 处吸引子之间的对称性约化距离（公式 14）被发现为 $O(1)$，这进一步证明了我们的论断。

有趣的是，　单向平衡态的不稳定流形似乎发挥着

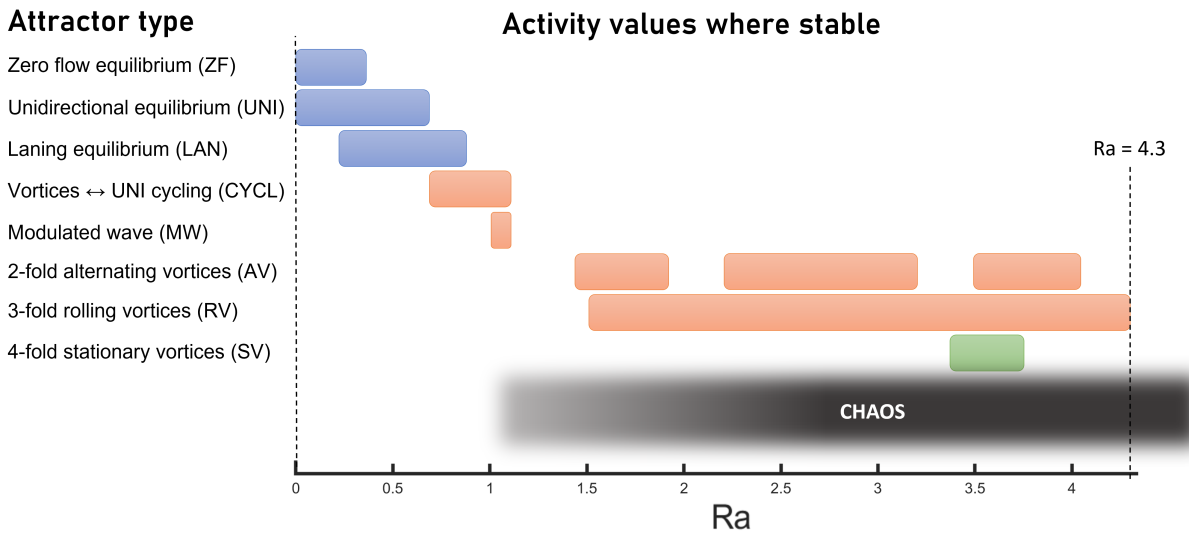

图 3： 吸引子随活性 $\mathrm{R_a} \equiv \alpha/A$ （式 11）的变化。通道尺寸为 $80\ell \times 20\ell$，其中 ℓ 由向列相的材料常数定义（式 5）。流动取向参数 λ 为 0。水平条按对称性及其他定性流动特征对吸引子进行分组。蓝色表示平衡态，橙色表示相对周期轨道，绿色表示周期轨道。部分水平条由多个精确相干结构组成；例如，在 $\mathrm{R_a} = 3.34$ 和 $\mathrm{R_a} = 3.86$之间有两个定性相似的三重旋转涡旋。实空间流动快照见图 2，精确相干结构的完整数据集见补充材料 [71]。

划分这两个区域的作用。在我们先前的研究中， [49], 我们发现了 UNI 与某些稳定精确相干结构之间稳健的异宿连接，以及从 UNI 通往混沌吸引子的轨迹。总体而言，这种相空间划分让人联想到管流中向湍流的亚临界转变 [43, 72, 73]。这些研究认为，一个余维为 1 的流形将层流态和混沌态的吸引域分隔开来。这种流形对应于具有一个不稳定方向的不稳定平衡态（或行波）的稳定流形。活性向列相通道流的相空间中是否存在类似的边缘流形，以及如何对其进行刻画，留待未来研究。

B. 不稳定ECS

除规则（稳定相干结构）和混沌吸引子外，相空间中还分布着若干不稳定ECS。这些不稳定ECS是相干稳态，无法直接 在实验或随时间演化的数值模拟中观测到。我们之所以致力于计算和刻画这些状态，是因为它们在组织

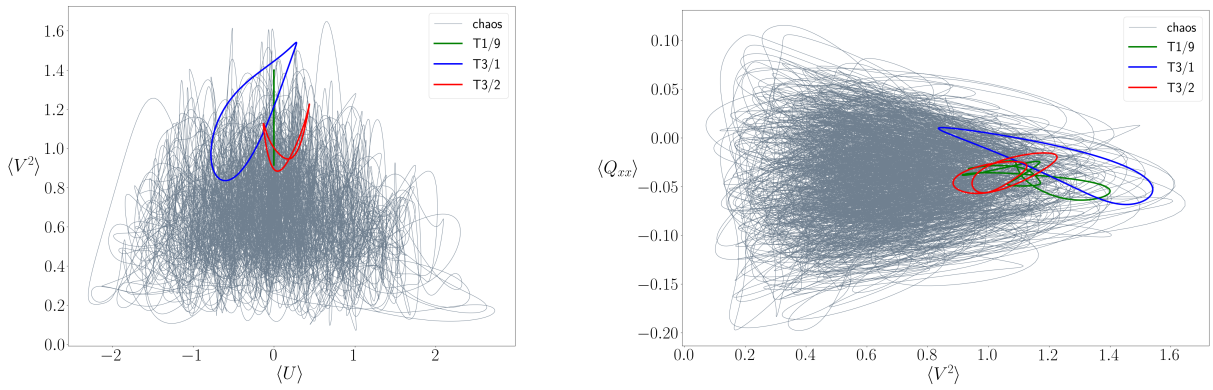

图 4: $\mathrm{R_a} = 3.4$ 时，投影到 $(\langle U \rangle, \langle V^2 \rangle)$（左）和 $(\langle V^2 \rangle, \langle Q_{xx} \rangle)$（右）平面上的一条混沌轨迹和三个吸引子。

非湍流和湍流状态下的全局动力学方面发挥着关键作用。

在若干类动力系统中，一对稳定定常态之间自然的动力学路径通常由不稳定 稳态介导。以近期一项关于小球在二维多势阱表面上滚动的动力学实验研究 [74] 为例。对于每个固定的总能量值，这个保守型二自由度系统都有一个三维相空间。轨迹可以通过一个瓶颈，在一对势阱（势能极小值）之间转换；当能量高于能量面上中间鞍点的能级时，瓶颈便会打开，见图 5。然而，除了这一能量条件外，只有当轨迹位于能量面鞍点附近存在的不稳定 周期轨道的二维柱状稳定流形内时，所需的转换才会发生。如果满足这一条件，轨迹便会沿稳定流形运动，接近鞍点区域，最终经由同一周期轨道的不稳定流形转移到第二个势阱。若不满足这一条件，即使轨迹符合能量要求，也会被反射回第一个势阱。

上述例子凸显了鞍型（不稳定）稳态的不变流形在决定全局相空间输运中的作用。在轨道力学 [46, 75], 船舶动力学 [76], 梁屈曲 [77], 以及孤立波传播 [78], 等领域也取得了类似的结果。这些研究表明，不稳定ECS预计也将在前湍流区间中连接不同吸引子的节能动力学路径中发挥类似的重要作用。相空间的几何也有助于发现可能在

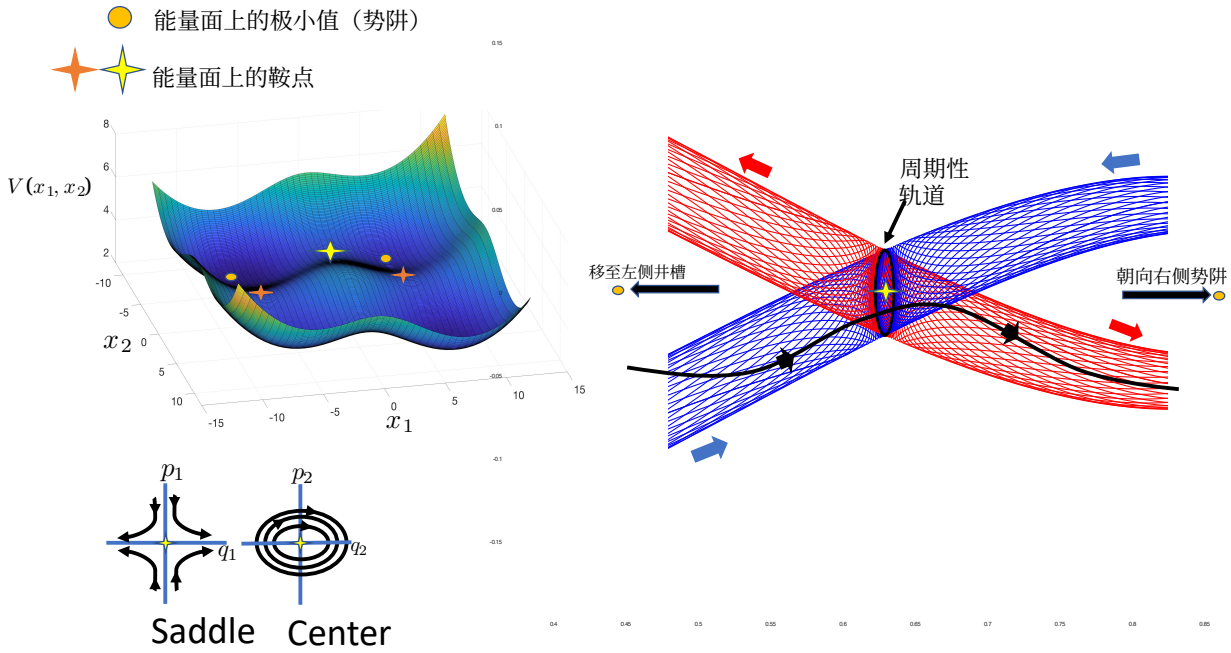

图5：左：（上）二维保守动力系统的势能面，其中标出了两个极小值和三个鞍点。（下）能量面鞍点附近的相空间可局部描述为正交平面上一个鞍定点与一个中心定点的直积。右：黄色的鞍点周围周期轨道具有二维稳定流形和不稳定流形。从左侧势阱过渡到右侧势阱的轨迹沿稳定流形向周期轨道移动，并沿不稳定流形远离周期轨道。因此，这里的周期轨道相当于一个扩展鞍点。

不同参数值。

1. 搜索策略

我们设计不稳定精确相干结构的搜索时，着眼于相空间中的两类对象：(1) 一维平衡点的不稳定流形；(2) 任意混沌吸引子。通过计算这些流形上或附近的精确相干结构，我们希望了解附近随时间演化的轨迹。具体而言，第 1 类对象与从某个一维平衡态附近出发的轨迹有关；至少在初始阶段，这些轨迹会近似沿着该平衡态的不稳定流形前进。

用于求解FPE的牛顿-拉夫森求解器需要良好的初始猜测，才能收敛到不稳定ECS。鉴于我们的目标是利用ECS来刻画时变

轨迹，从后者中获取初始猜测是很自然的。对于位于平衡态的不稳定流形上或其附近的ECS，我们从以下轨迹中选取初始猜测：这些轨迹始于平衡态附近，并沿其某个不稳定方向受到扰动。实际上，这些正是III A 节中定义的轨迹，我们曾利用它们寻找吸引子。唯一的区别在于，现在我们从轨迹的起始附近（大约前 $0 < t < 1000\tau$）而不是末端附近选取初始猜测。对于位于混沌吸引子上或其附近的ECS，我们使用同一组轨迹，但排除那些最终落在吸引性ECS上的轨迹。随后，我们从其余轨迹的渐近部分中选取初始猜测。

根据用于提供初始猜测的轨迹，收敛的求解器实例比例可能从 0 到 1 不等。在收敛的实例中，并非所有实例都会得到唯一的 ECS，因此检测并移除重复项至关重要。对于我们的情况，由于系统对空间和平移具有不变性，PO 和 RPO 在完整相空间中构成二维流形，这使问题变得复杂。具体而言，两个独立的求解器实例通常会收敛到曲面上的不同点，因此我们需要一个判据来判断两个点是否位于同一曲面上。为处理这一情况，我们采用 III C 2 节所述的距离度量；当且仅当两个 ECS 在空间和平移作用下等价时，该距离才为 0。因此，如果两个 ECS 之间的距离为 0，它们就位于同一个“相对平衡态曲面”上，我们会从数据集中移除其中一个作为重复项。对于少数几个活性值，我们还在一个或多个对称子空间中运行了牛顿-拉夫森求解器，这有助于识别一些稳定性较差的 ECS。最后，对于许多 ECS，我们在 R_a 中进行了分支延拓，有时因此发现了其他搜索遗漏的 ECS。

然而，这些搜索都不应被视为穷尽性的。在存在混沌的情况下，通常会有无限多个周期任意长的精确相干结构。由于牛顿-拉夫森求解器的收敛行为不可预测，也无法保证给定次数的搜索能够找出具有某一特定性质的所有精确相干结构，例如周期小于某个值的精确相干结构。更现实的目标是设计一种至少偏向于动力学上最相关的精确相干结构的搜索策略，而沿时变轨迹进行搜索的方法确实有助于实现这一目标。尽管如此，其他偏差因素也可能使我们的精确相干结构数据集朝不同方向偏移。尤其是，牛顿-拉夫森求解器无法搜索周期任意长的精确相干结构，因为它必须进行积分

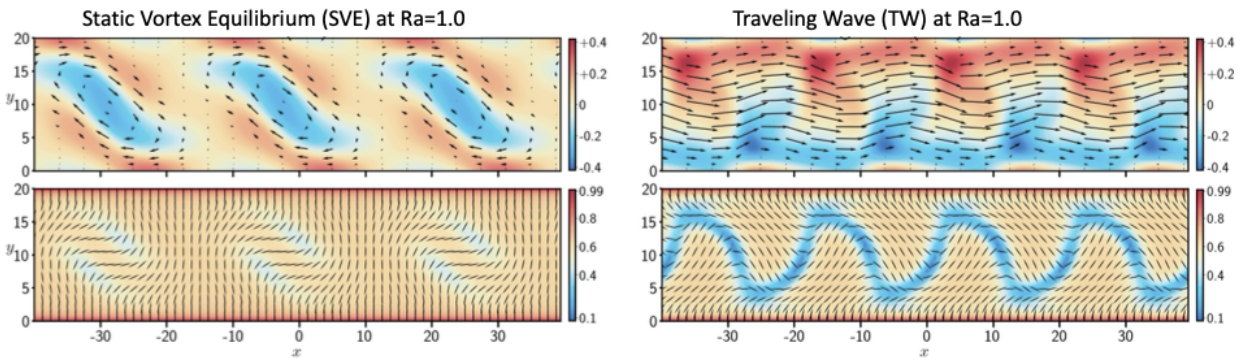

图 6：左：具有三重平移对称性的无缺陷涡旋晶格不稳定稳态（平衡态） T_3。右：具有四重平移对称性的不稳定行波 T_4。

至少跨越一个周期。这类 ECS 在某些情形下可能很重要，例如接近同宿分岔时。更一般而言，ECS 的动力学相关性与其弗洛凯指数的关系，比与其弗洛凯乘子 [52] 的关系更为密切。前者描述 ECS 上某一点附近轨迹的局部发散，后者则量化扰动在整个周期内的增长或衰减。相比之下，牛顿-拉夫森求解器更有可能收敛到弗洛凯乘子较小的 ECS。在未来的工作中，我们将探索采用基于优化的方法 [79, 80] 来寻找周期较大的 ECS。

2. 描述与分类

$\mathrm{R_a} = \{0.1\,n, n = 1 \ldots 50\}$ 的精确相干结构数据见补充材料 [71]。对于 $\mathrm{R_a} < 0.9$，我们记录了六个平衡态，其中包括图 1 中的三个一维平衡态。这个数量远少于我们在更高活性下的数据集中发现的精确相干结构数量。虽然在低活性下确实预期精确相干结构较少，但这一结果也可能受到该活性区间内搜索次数较少的影响。

我们的研究重点转向了 $\mathrm{R_a} > 0.9$，在此处，RPO 和更高维的不变对象开始主导相空间几何。对于高于这一阈值的每个 $\mathrm{R_a}$ 值，我们至少识别出 10 个精确相干结构。其中大多数是相对周期轨道，但也有周期轨道、行波和平衡态，如下文所述。为了进行下文第三节 C 的分析，我们在若干个 $\mathrm{R_a}$ 值处进行了更全面的搜索。例如，$\mathrm{R_a} = 3.4$ 数据集（用于图 8 和图 9）包含 56 个精确相干结构，而 $\mathrm{R_a} = 4.0$ 和 $\mathrm{R_a} = 4.5$ 分别有 66 个和 210 个。不稳定ECS 所体现的时空模式种类，比

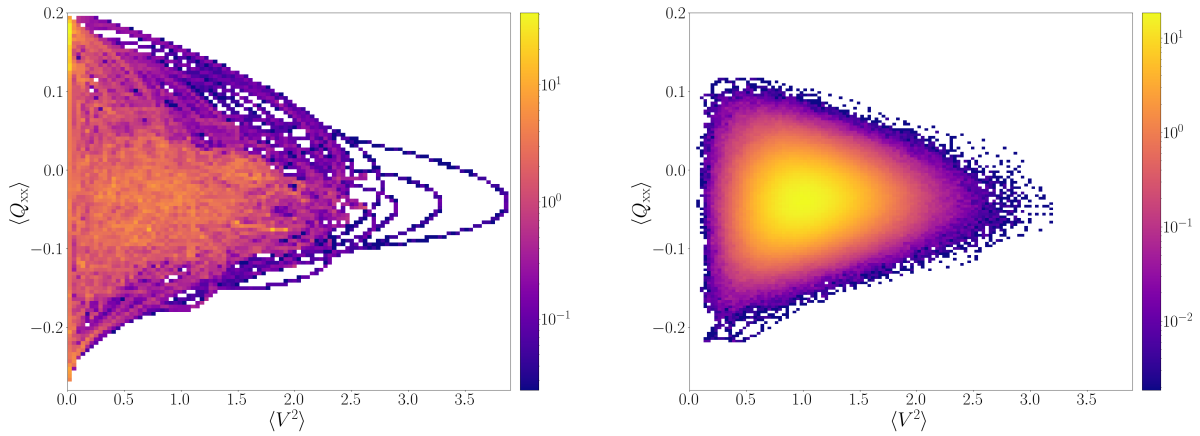

图 7： $R_a = 4.5$ 处 201 个不稳定ECS（左）和湍流吸引子（右）的轨迹“密度”，投影于（$\langle V^2 \rangle$，$\langle Q_{xx} \rangle$）平面上。每幅图均由相应轨迹中均匀采样的时间序列生成，这些时间序列经过分箱和归一化，表示为 $\langle V^2 \rangle$ 和 $\langle Q_{xx} \rangle$中的二维概率密度函数。与紫色区域相比，轨迹往往在黄色区域中停留更长时间。

吸引子丰富得多。对于 n 不超过 12 的情况，离散平移对称性 T_n 存在，其中包括两种在吸引子中未曾发现的新型精确相干结构。第一种是无缺陷的涡旋晶格平衡态，牛顿求解器仅在活性相对较小时（< 1.5）才能找到。为简便起见，我们将这些状态称为“静态涡旋平衡态”（SVE）。这些平衡态不应与前文讨论的、具有运动缺陷的定常涡旋（SV）周期轨道相混淆。第二种是行波；它们出现在更广的活性范围内，但所有情况下均不稳定。图 6 展示了这两种精确相干结构的快照。补充材料中的 “mosaic R45.png” 图 [71] 以马赛克形式直观呈现了相空间的多样性，其中包含在 $R_a = 4.5$处发现的全部 210 个精确相干结构，它们均不稳定。

3. 相空间中的分布

最后，观察湍流状态下各种 ECS 的相空间分布颇有启发意义。图 7 比较了一条长寿命湍流轨迹的概率密度与所有已计算 ECS 上轨迹的概率密度。每个 ECS 的轨迹持续时间均等于其各自的周期。在这个二维相空间投影中，这些 ECS 往往分布在一维平衡态的不稳定流形附近。在 IIIC 节中，我们提供证据表明，这一结论在完整相空间中同样成立，也就是说，它并非

图 7 中低维投影的偶然特征。

C. 瞬态流

我们关注不稳定流动模式，是因为它们有望为瞬态或混沌轨迹提供一种降阶描述。所谓降阶，是指理论描述所包含的自由度远少于完整的、随时间变化的流体动力学方程。此类描述必然通常是不完整的或近似的，但至少能够捕捉动力学的一些关键特征。所谓瞬态轨迹，是指连接不稳定ECS邻域与某个吸引子的有限时间轨迹。例如，人们可能会关注这样一个系统的行为：它初始状态接近某个不稳定平衡态，随后任其演化并趋向图3中的某个吸引子。如下文所示，系统可能采取的演化路径多种多样，因此不存在一条具有代表性的轨迹。同样，对于湍流，也不存在一条有限的代表性轨迹；在这两种情况下，复杂的非线性动力学都使得构建降阶描述变得困难。

如引言所述，动力系统框架 [41] 提出，可以基于不稳定ECS构建这样的降阶描述。一个反复出现的典型图景是：典型的湍流轨迹沿着某个不稳定、类似鞍点的ECS的稳定流形逐渐接近它，随后沿相应的不稳定流形离开，转而趋向另一个ECS。越来越多的实验 [53] 和数值 [52, 81–83] 证据支持这一观点，尤其适用于经典牛顿流体中的弱惯性湍流。参考文献 [52, 53] 完善了“接近”ECS的定义，将连续对称性以及ECS邻域内的局部几何纳入考量。据此，他们将“影随事件”定义为有限时间区间，在此期间，湍流轨迹与ECS的时间演化在定量上相似。将这一表述应用于惯性湍流后，他们得以在实验中检测到湍流泰勒-库埃特流中的影随事件 [53]。例如，这些影随事件可用作基于网络的轨迹统计模型中的节点。在一项互补研究中，参考文献 [81] 运用计算拓扑工具构建了一个马尔可夫链，其中节点代表各种ECS的邻域，而节点对之间的转移率由异宿动力学决定

这些ECS之间。马尔可夫链的不变分布是对一般湍流轨迹概率密度函数的一种粗粒化表示。

尽管已在非牛顿流体湍流中通过数值方法发现了精确相干结构（ECS） [84, 85]，但不稳定ECS在这类物理情境中的实用性仍是假设，可能需要采取一些简化措施，例如将系统限制在小区域内，并进行精确的实验控制。对于活性物质系统，这些问题尚未得到详细探讨。在此，我们提供两条证据，表明第 III B 节中的某些不稳定ECS构成了UNI不稳定流形的骨架，引导轨迹沿途 从UNI通向某个吸引子。具体而言，一条从UNI通向某个吸引子的典型轨迹会经历一个或多个影随事件，这些事件可用作降阶模型的基元，或作为施加控制输入的切入点。最后，我们还报告了在湍流状态下寻找影随现象的尝试。

1. 前湍流区间内的轨迹密度

研究类似UNI这样的平衡态的不稳定流形，一种简单方法是用具有代表性的轨迹对其进行采样。这些轨迹可以通过沿不稳定特征向量的线性组合对平衡态施加扰动来生成；在平衡态邻域内，这些特征向量张成不稳定流形的切空间。这里，我们关注活性$\mathrm{R_a} = 3.4$，此时UNI有34个不稳定特征向量，因此一般的（无穷小）扰动包含 $34-1=33$ 个系数。然而，若对这些系数进行均匀采样，生成的轨迹将由最不稳定模态主导。因此，为了也能沿不稳定流形采样次主导方向，我们仅由特征向量对构造扰动$\{\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_m\}_{n\neq m}$。于是，初始条件$\mathbf{X}_{\mathrm{init}}$ 可写为：

$$\mathbf{X}_{\mathrm{init}} = \mathbf{X}_{\mathrm{UNI}} + \epsilon\,(\mathbf{e}_n + \alpha\,\mathbf{e}_m) \tag{13}$$

其中，$\epsilon = 10^{-5}$、$n \neq m$和 α 是介于 -1 和 1 之间的随机实数。

在我们的研究中，我们使用这些初始条件进行了数百次模拟，并让它们从 $t=0$ 演化至 $t = 10^4\tau$。为汇总生成的大量数据，我们在二维相空间投影（$\langle Q_{\mathrm{xx}}\rangle, \langle v^2\rangle$）中构建了时间平均的轨迹密度 。具体而言，我们通过对（$\langle Q_{\mathrm{xx}}\rangle, \langle v^2\rangle$）时间序列进行分箱，计算了二维密度图，时间区间为

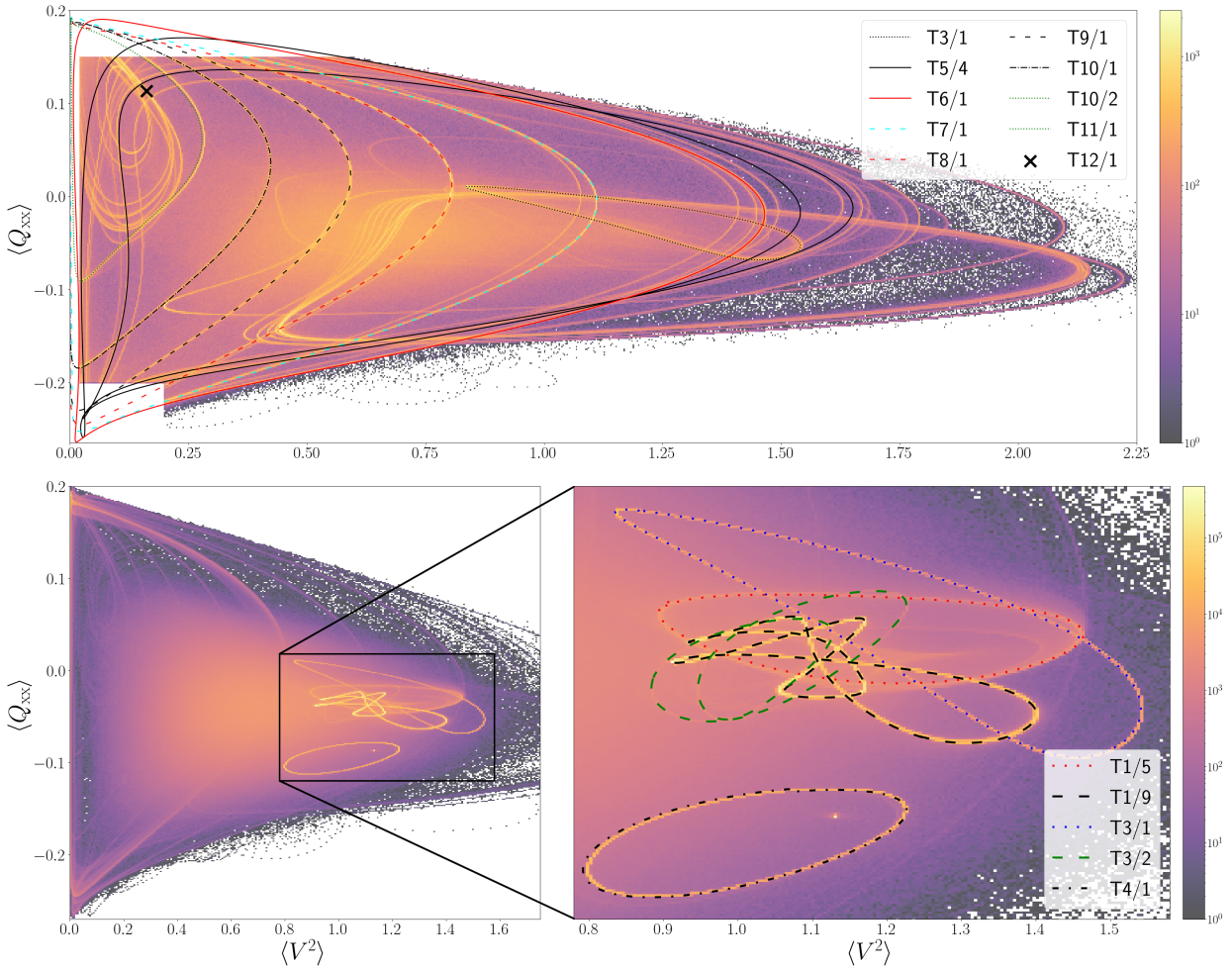

图 8：前湍流区间中，沿 UNI 不稳定流形的轨迹“密度”在（$\langle V^2 \rangle$，$\langle Q_{xx} \rangle$）平面上的投影。无量纲活动度为 $\mathrm{R_a} = 3.4$。完整的不稳定流形有 34 维，直接计算并不现实。我们采用第三节 C 1 所述的方法，定义一个轨迹集合，以描绘一个低维子空间。密度图（颜色渐变）由该轨迹集合生成，方法是在相应区间内对等间隔的时间序列进行分箱：$0 < t < 100$（上图）或 $100 < t < 10^4$（下图）。高密度区域（黄色）与不稳定 ECS 看似重叠，这表明可能发生了影随；我们已在选定案例中确认这一点（见 III C 2 节）。请注意，其中有三个稳定准周期解（或吸引子）：T1/9、T3/1 和 T3/2；其余所示 ECS 均不稳定。

给定的时间区间。图 8 展示了时间区间 $0 < t < 100\tau$ 和$100\tau < t < 10^4\tau$的结果。作为比较，我们在 $\mathrm{R_a} = 3.4$ 下列出的精确相干结构，其周期约介于 2.6τ和 22τ之间。请注意，图 8 上图的左上角和左下角各有一块矩形区域被裁去。这些区域分别包含 UNI 和 ZF 平衡态；在早期时刻 $t < 100\tau$，其轨迹密度尤其高。因此，为了聚焦于相空间其他区域的行为，我们将这些区域排除在总体

密度图。

$0 < t < 100\tau$ 的轨迹密度图呈现了瞬态统计特征，图中密度较高的区域对应于轨迹在初始瞬态期间停留时间最长的位置。图 8 上图中可以看到许多这样的高密度区域，其中有几处与不稳定（鞍点型）和稳定的精确相干结构相吻合。然而，尽管我们在底层轨迹上的各点运行了牛顿-拉夫森求解器，其他高密度等值线（尤其是对应瞬态过程的上图中的等值线）仍无法与精确相干结构对应起来。我们推测这些是非稳定二维环面（准周期轨道），属于当前求解器尚无法计算的一类精确相干结构。图 8 下图所示的 $100\tau < t < 10^4\tau$ 密度图呈现了长期统计特征。正如预期，吸引型精确相干结构上的轨迹密度更高（右下图为放大视图），不过，对三个不稳定精确相干结构的强烈影随现象也十分明显。

2. 预湍流状态下沿不稳定流形的影随

第二项证据见图 9，该图聚焦于用于生成图 8 的两条轨迹。我们的目标是确认，不稳定ECS 的表观影随（正如约化相空间中的轨迹密度所表明的那样）确实描述了完整相空间动力学中的一种特征，而不仅仅是图 8 中低维投影产生的假象。为此，有必要定义相空间中两条轨迹之间的距离度量。自然的度量显然就是场的 L^2 范数。然而，由于流向方向上的连续平移对称性（x 坐标），这种度量并不适合识别轨迹之间的动力学相似性。例如， L^2 范数可能会在两条演化几乎完全相同、但仅相差一个恒定流向平移的轨迹之间给出较大的距离。为考虑这种情况，我们使用以下轨迹 $X_1(t)$ 与 ECS $X_E(t)$ 之间随时间变化的连续对称性约化距离：

$$d_{1E}(t) = \min_{\substack{0\le l\le L\\ 0\le \tau\le T}} \|\tau_x(l)(X_1(t)) - X_E(\tau)\|_2, \tag{14}$$

其中 T 是 ECS 的时间周期（如果它是平衡态或行波，则为$T = 0$ ）。图 9 左上和左下图展示了将这一度量应用于

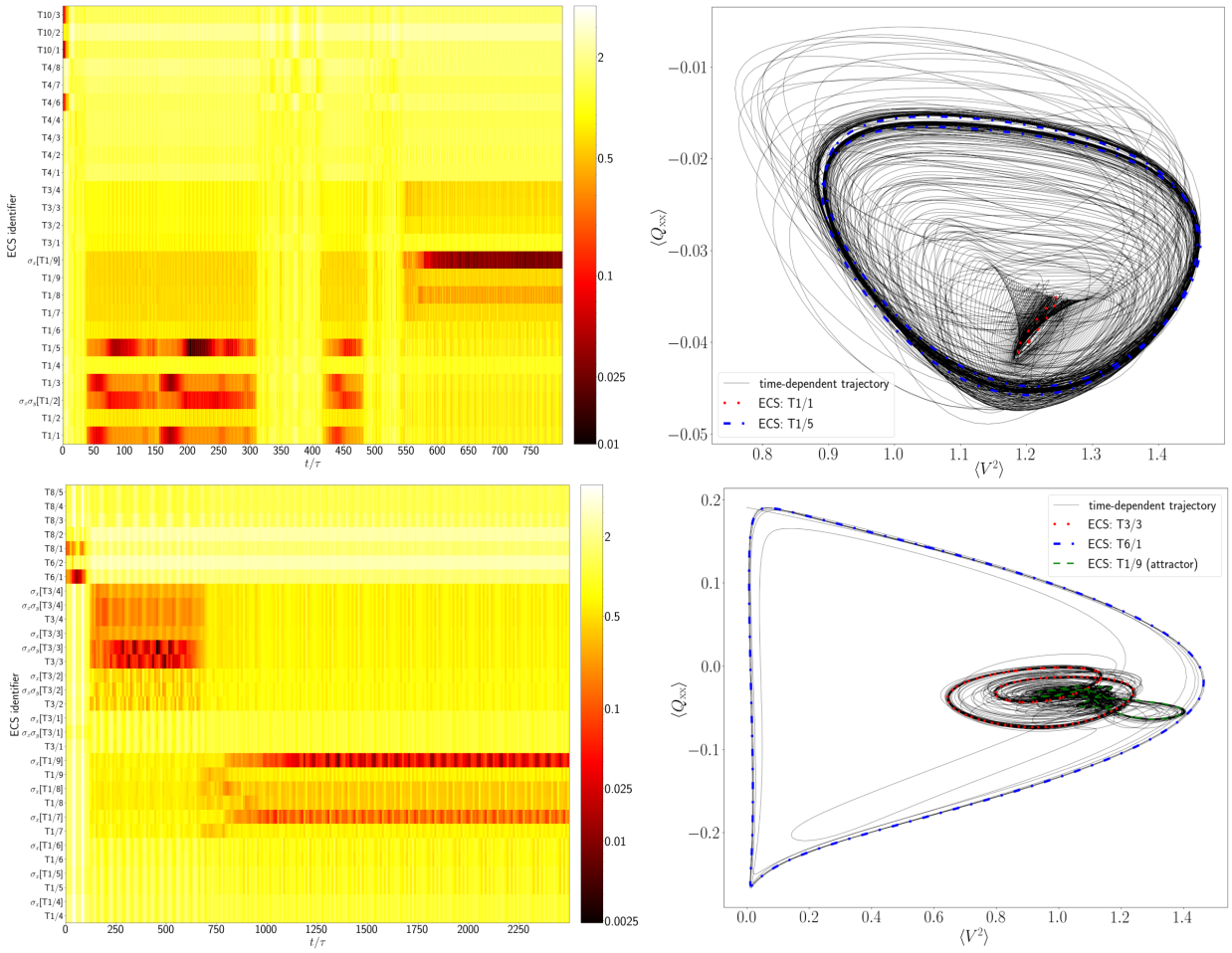

图 9：前湍流区间内单向平衡态的不稳定流形上的影随示例，瑞利数为 $\mathrm{R_a} = 3.4$。左侧的颜色渐变图显示了时变轨迹与一组选定的相同活性值下的精确相干结构之间的距离（根据方程 (14) 定义）。左上图和右上图展示了从约 200τ 到 250τ 对不稳定精确相干结构 T1/5 的影随。左下图和右下图展示了两个影随事件：首先是从约 30τ 到 70τ 对不稳定精确相干结构 T6/1 的影随，随后是从 250τ 到 600τ 对不稳定精确相干结构 $\sigma_x\sigma_y$(T3/3) 的影随。两次模拟最终都趋近于作为吸引子的 T1/9。

由式 13 初始化的两条轨迹。我们在一组固定时间点（横轴）上，针对多个 ECS（纵轴）计算对称性约化距离（颜色渐变）。可以清楚地看到若干影随事件：对称性约化距离较小的位置呈现为水平的红色/黑色线段。右侧展示了相应的约化相空间轨迹。两条轨迹与所有 ECS 之间距离的完整时间序列数据见补充材料 [71]。

3. 湍流状态中的影随检验

为检验湍流状态是否会影随任何精确相干结构（ECS），我们考察了瑞利数 $\mathrm{R_a} = 4.5$ 下湍流状态中的典型轨迹。如第 III B 2 节所述，我们在这一参数值下计算了 210 个不同的不稳定ECS。每个 ECS $X_E(t)$ 都有三个由离散对称性关联的对应解，即 $\sigma_x(X_E(t))$ $\sigma_y(X_E(t))$ 和 $\sigma_y\sigma_x(X_E(t))$。我们根据公式 14，计算了 840 个 ECS 中每个解与 22 条从 UNI 的不稳定流形出发的轨迹之间的连续对称性约化距离。这些轨迹是通过选取初始条件得到的，这些初始条件沿 UNI 的 22 个不稳定方向分别施加了小扰动。

与前湍流区间不同，我们没有发现湍流轨迹影随任何 ECS 的情况。尽管有时轨迹会接近某些 ECS，但即使在远短于相应 ECS 典型周期的时间内，混沌轨迹的演化也不像任何一个 ECS [52]。通过

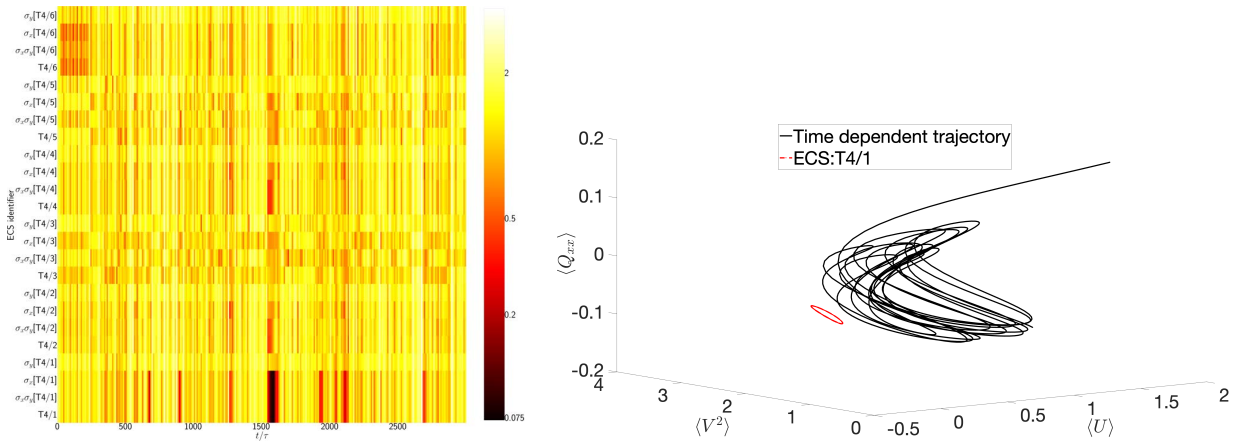

图 10： 左：从距离图中选取的一个子集，用于突出显示在湍流状态下，混沌轨迹与某个 ECS 之间的一次最近接近。当 $\mathrm{R_a} = 4.5$ 时，该轨迹访问了一个 ECS 的邻域（标记为 T4/1），时间为 $t/\tau \approx 1500$。右：$t/\tau = 0$ 至 $t/\tau \approx 1800$ 的轨迹以黑色显示，同时给出了 ECS T4/1。显然不存在对该 ECS 的影随，而该轨迹似乎是准周期的。该轨迹与所有 ECS 之间距离的完整时间序列数据见补充材料 [71]。

通过目视检查三维相空间图，我们发现混沌轨迹的某些片段似乎呈现准周期性，示例见图 10 右图。这使我们推测，这些轨迹可能正在跟踪系统的准周期相干结构。回想一下，图 7 所示前湍流区间的轨迹密度图也

表明可能存在对准周期相干结构的影随。

此前关于湍流流体中精确相干结构的大多数研究仅限于计算平衡态、周期轨道和相对周期轨道 [86]。最近的两项研究 [87, 88] 凸显了准周期（QPO）精确相干结构在确定混沌动力系统统计量方面的重要性。具有 n 个不可公度频率的准周期轨迹会在相空间中稠密地覆盖一个 n 维环面。作者认为，由于 n 维环面对 $n > 2$而言是结构不稳定的，因此平衡态、周期轨道、相对周期轨道和二维环面构成了理解混沌系统中相空间输运的完整不变对象集合。这两项研究提出了高效的二维环面计算算法，并展示了如何通过一种针对准周期轨道改进的周期轨道理论，捕捉受迫 Kuramoto-Sivashinsky偏微分方程的近似统计量。

我们的精确相干结构集合也可能遗漏了一些周期轨道/相对周期轨道；这些轨道位于混沌吸引子局部曲率过高的区域，Newton-Rhapson钩步算法无法在此收敛。活性向列相通道流中准周期精确相干结构的计算，以及对湍流活性向列相中精确相干结构影随的进一步研究，将在未来的论文中展开。

IV. 讨论与总结

我们运用精确相干结构框架，全面研究了二维周期通道中活性向列相系统的稳定与不稳定定常态。我们发现，在前湍流区间，多个规则吸引子与一个混沌吸引子共存。这表明，此类系统可能发生向混沌流的亚临界转变。这也暗示，相空间中可能存在一条边缘流形，将规则状态与混沌状态分隔开来。

我们的吸引子计算证实，随着活性的增加，先前研究中发现的稳定状态总体序列——即零流、一维流、涡旋晶格，随后转变为湍流——是正确的 [22, 26, 89], 。然而，仅凭视觉观察不足以识别不同流动状态在动力学上的相似性，而结合对称性考量的相空间分析则能提供更多见解。除上述吸引子外，我们的计算还揭示了反向旋转涡旋晶格、行波和调制波吸引子的存在。

我们证明，在前湍流区间，不稳定ECS组织着不稳定单向稳态附近扰动的短期动力学。我们发现，位于单向平衡态不稳定流形上的典型轨迹，在瞬态阶段会跟踪一部分不稳定ECS，最终在稳态下收敛到某个吸引子。

在湍流状态中，系统的特征是不存在任何吸引子；在一组固定参数下，我们发现了超过 200 个不稳定ECS。低维投影表明，这些ECS存在于相空间中与系统典型湍流轨迹相同的区域。然而，与前湍流区间不同，没有证据表明湍流轨迹跟踪了周期轨道／相对周期轨道／行波型相干结构ECS；我们推测，这些轨迹实际上跟踪的是准周期相干结构。

未来的工作将着重于计算准周期相干结构，以及周期更长的周期轨道／相对周期轨道，所采用的方法包括扩展现有的牛顿-拉夫森求解器，或使用基于优化的方法。将当前工作中发现的ECS与利用本征正交分解和动态模态分解等数据驱动的动力系统方法在活性湍流中获得的动力学模态进行比较，也将很有意义 [33]。最后，我们将考虑在实验上可实现的活性向列相系统中检测稳定准周期解和不稳定ECS，例如二维环域 [24, 27, 90] 。

致谢

本材料所述研究得到了美国能源部科学办公室基础能源科学办公室的资助，项目编号为 DE-SC0022280。本研究利用内布拉斯加大学霍兰德计算中心的设施完成，该中心获得内布拉斯加研究计划的支持。我们感谢 Aparna Baskaran、Seth Fraden、Mike Hagan、Chaitanya Joshi 和 Zahra Zarei 提供的宝贵讨论。

---

[1] S. Ramaswamy，活性流体，《Nature Reviews Physics》1，640（2019年）。[2] C. Kurzthaler、L. Gentile 和 H. A. Stone，《非平衡软物质：活性流体》（英国皇家化学学会，2023年）。

[3] L. Balasubramaniam、R.-M. M`ege 和 B. Ladoux, 《从细胞骨架组织到组织形态发生的跨尺度活性向列相》，遗传学与发育领域最新观点**73**，101897（2022年）。[4] A. Doostmohammadi、J. Ign´es-Mullol、J. M. Yeomans 和 F. Sagu´es, 《活性向列相》，自然·通讯**9**，1（2018年）。[5] F. S. Mestre, 《胶体活性物质：概念、实验实现与模型》（CRC出版社，2022年）。[6] R. Alert、J. Casademunt 和 J.-F. Joanny, 《活性湍流》，凝聚态物理年度评论**13** （2022年）。[7] B. Mart´ınez-Prat、J. Ign´es-Mullol、J. Casademunt 和 F. Sagu´es, 《活性湍流起始时的选择机制》，《自然·物理》**15**，362（2019年）。[8] R. Aditi Simha 和 S. Ramaswamy, 《自驱动粒子有序悬浮液中的流体动力学涨落与不稳定性》，《物理评论快报》**89**，058101（2002年）。[9] T. Sanchez、D. T. N. Chen、S. J. DeCamp、M. Heymann 和 Z. Dogic, 《层级组装的活性物质中的自发运动》，自然**491**，431（2012年）。[10] S. P. Thampi、R. Golestanian 和 J. M. Yeomans, 《活性向列相中的不稳定性与拓扑缺陷》，欧洲物理快报**105**，18001（2014年）。[11] S. J. DeCamp、G. S. Redner、A. Baskaran、M. F. Hagan 和 Z. Dogic, 《活性向列相中运动缺陷的取向有序》，《自然 · 材料》 **14**，1110 （ 2015 年）。[12] S. Shankar、S. Ramaswamy、M. C. Marchetti 和 M. J. Bowick, 《活性向列相中的缺陷解缚》，《物理评论快报》**121**，108002（2018年）。[13] A. Baskaran 和 M. C. Marchetti, 《细菌悬浮液的统计力学与流体动力学》，《美国国家科学院院刊》**106**，15567（2009年）。[14] P. Guillamat、J. Ign´es-Mullol 和 F. Sagu´es, 《利用磁场控制活性液晶》，《美国国家科学院院刊》**113**，5498（2016年）。[15] P. Guillamat、J. Ign´es-Mullol 和 F. Sagu´es, 《利用图案化软界面驯化活性湍流》，自然·通讯**8**，1（2017年）。[16] T. D. Ross、H. J. Lee、Z. Qu、R. A. Banks、R. Phillips 和 M. Thomson, 《通过光学定义边界控制活性物质中的组织与作用力》，自然**572**，224（2019年）。

[17] R. Zhang、S. A. Redford、P. V. Ruijgrok、N. Kumar、A. Mozaffari、S. Zemsky、A. R. Dinner、V. Vitelli、Z. Bryant、M. L. Gardel、等，通过活性图案化对液晶结构和动力学进行时空控制，《自然·材料》**20**，875（2021年）。[18] Z. Zarei、J. Berezney、A. Hensley、L. Lemma、N. Senbil、Z. Dogic 和 S. Fraden，光激活微管基二维活性向列相，arXiv 预印本 arXiv:2303.02945（2023年）。[19] J. Hardo¨uin、R. Hughes、A. Doostmohammadi、J. Laurent、T. Lopez-Leon、J. M. Yeomans、J. Ign´es-Mullol 和 F. Sagu´es，受限活性向列相的可重构流动与缺陷景观，《通信物理》**2**，1（2019年）。[20] A. Opathalage、M. M. Norton、M. P. Juniper、B. Langeslay、S. A. Aghvami、S. Fraden 和 Z. Dogic，受限活性向列相的自组织动力学及向湍流的转变，《美国国家科学院院刊》**116**，4788（2019年）。[21] L. Giomi、L. Mahadevan、B. Chakraborty 和 M. Hagan，活性向列相悬浮液中的成带、兴奋性与混沌，《非线性》**25**，2245（2012）。[22] T. N. Shendruk、A. Doostmohammadi、K. Thijssen 和 J. M. Yeomans，受限活性向列相中的舞动的向错，《软物质》**13**，3853（2017）。[23] M. M. Norton、A. Baskaran、A. Opathalage、B. Langeslay、S. Fraden、A. Baskaran 和 M. F. Hagan，活性向列相液晶动力学对拓扑约束的不敏感性，《物理评论E》**97**，012702（2018）。[24] S. Chen、P. Gao 和 T. Gao，环形区域内无极性活性悬浮液的动力学与结构，《流体力学杂志》**835**，393（2018）。[25] A. Samui、J. M. Yeomans 和 S. P. Thampi，受通道约束的活性向列相的流动转变与长度尺度，《软物质》**17**，10640（2021年）。[26] S. P. Thampi，通道约束的活性向列相，《胶体与界面科学当前观点》，101613（2022年）。[27] C. Joshi、Z. Zarei、M. Norton、S. Fraden、A. Baskaran 和 M. Hagan，从圆盘到通道：受限于环形区域的活性向列相动力学，arXiv 预印本 arXiv:2304.04895（2023年）。[28] M. M. Norton、P. Grover、M. F. Hagan 和 S. Fraden，活性向列相的最优控制，《物理评论快报》**125**，178005（2020年）。[29] S. Shankar、V. Raju 和 L. Mahadevan，活性液滴的最优输运与控制，《美国国家科学院院刊》**119**，e2121985119（2022年）。

[30] S. Shankar、L. V. Scharrer、M. J. Bowick 和 M. C. Marchetti，活性拓扑缺陷的时空控制，arXiv 预印本 arXiv:2212.00666（2022年）。[31] A. Mozaffari、R. Zhang、N. Atzin 和 J. J. De Pablo，缺陷万花尺：空间图案化活性向列相中缺陷的动力学行为，《物理评论快报》**126**，227801（2021年）。[32] M. J. Falk、V. Alizadehyazdi、H. Jaeger 和 A. Murugan，学习控制活性物质，《物理评论研究》**3**，033291（2021年）。[33] R. J. Henshaw、O. G. Martin 和 J. S. Guasto，活性湍流的动态模态结构，《物理评论：流体》**8**，023101（2023年）。[34] R. Alert、J.-F. Joanny 和 J. Casademunt，活性向列湍流的普适标度，《自然·物理》**16**，682（2020年）。[35] L. Giomi，活性向列相湍流的几何与拓扑，《物理评论X》**5**，031003（2015年）。[36] M. Linkmann、G. Boffetta、M. C. Marchetti 和 B. Eckhardt，二维活性物质湍流中向大尺度相干结构的相变，《物理评论快报》**122**，214503（2019年）。[37] M. Linkmann、M. C. Marchetti、G. Boffetta 和 B. Eckhardt，二维活性悬浮体系中的凝聚体形成与多尺度动力学，《物理评论E》**101**，022609（2020年）。[38] E. Hopf，展现湍流特征的一个数学例子，《纯粹与应用数学通讯》**1**，303（1948年）。[39]D. Ruelle 和 F. Takens，论湍流的本质，《斯特拉斯堡物理学家—数学家会议记录-RCP25**12**》，1（1971年）。[40] P. Cvitanovi´c，复返流：湍流背后的钟表机构，《流体力学杂志》**726**，1（2013年）。[41] M. D. Graham 和 D. Floryan，壁面约束湍流流动的精确相干态与非线性动力学，《流体力学年度评论》**53**（2020年）。[42] P. Cvitanovic、R. Artuso、R. Mainieri、G. Tanner、G. Vattay、N. Whelan 和 A. Wirzba，混沌：经典与量子，ChaosBook.org（尼尔斯·玻尔研究所，哥本哈根，2005年）**69**，25（2005年）。[43] J. S. Park 和 M. D. Graham，最小通道流中精确相干态及其与湍流动力学的联系，《流体力学杂志》**782**，430（2015年）。

[44] N. B. Budanur、A. S. Dogra 和 B. Hof，《流向局域化管流湍流中瞬态混沌的几何》，《物理评论：流体》**4**，102401（2019年）。[45] B. Suri、L. Kageorge、R. O. Grigoriev 和 M. F. Schatz，《利用不稳定周期轨道捕捉实验中的湍流动力学与统计特性》，《物理评论快报》**125**，064501（2020年）。[46] W. S. Koon、M. W. Lo、J. E. Marsden 和 S. D. Ross，《天体力学中周期轨道之间的异宿连接与共振转换》，《混沌》**10**，427（2000年）。[47] N. Sakamoto，《稳定流形方法在非线性最优控制设计中的应用案例研究》，《自动化》**49**，568（2013年）。[48] K. Flaßkamp、S. Ober-Bl¨obaum 和 M. Kobilarov，《利用固有动力系统结构求解最优控制问题》，《非线性科学杂志》**22**，599（2012年）。[49] C. G. Wagner、M. M. Norton、J. S. Park 和 P. Grover，《湍流前期二维活性向列相通道流的精确相干结构与相空间几何》，《物理评论快报》**128**，028003（2022年）。[50] M. Golubitsky 和 I. Stewart，对称性视角：从平衡态到相空间与物理空间中的混沌，第200卷（Springer Science & Business Media，2003年）。[51] R. Hoyle 和 R. B. Hoyle，模式形成：方法导论（剑桥大学出版社，2006年）。[52] M. C. Krygier、J. L. Pughe-Sanford 和 R. O. Grigoriev，《湍流泰勒-库埃特流中的精确相干结构与影随》，《流体力学杂志》**923**（2021年）。[53] C. J. Crowley、J. L. Pughe-Sanford、W. Toler、M. C. Krygier、R. O. Grigoriev 和 M. F. Schatz，《湍流跟踪复现解》，《美国国家科学院院刊》**119**，e2120665119（2022年）。[54] D. Marenduzzo、E. Orlandini、M. E. Cates 和 J. M. Yeomans，《活性液晶的稳态流体动力学不稳定性：混合格子玻尔兹曼模拟》，《物理评论E》**76**，10.1103/physreve.76.031921（2007年）。[55] S. P. Thampi、R. Golestanian 和 J. M. Yeomans，《活性湍流中的涡量、缺陷与关联》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》**372**，20130366（2014年）。[56] L. Giomi、M. J. Bowick、P. Mishra、R. Sknepnek 和 M. Cristina Marchetti，《活性向列相中的缺陷动力学》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理

与工程科学》**372**，20130365（2014年）。[57] M. R. Shaebani、A. Wysocki、R. G. Winkler、G. Gompper 和 H. Rieger，《活性物质的计算模型》，《Nature Reviews Physics》**2**，181（2020年）。[58] C.-M. Koch 和 M. Wilczek，《平流惯性在活性向列湍流中的作用》，《物理评论快报》**127**，268005（2021年）。[59] M. L. Blow、M. Aqil、B. Liebchen 和 D. Marenduzzo，《由“活性锚定”驱动的活性向列薄膜运动》，《软物质》**13**，6137（2017年）。[60] A. Doostmohammadi、T. N. Shendruk、K. Thijssen 和 J. M. Yeomans，《活性向列相中介观尺度湍流的起始》，《自然通讯》**8**，15326（2017年）。[61] C. Wagner 和 P. Grover，https://github.com/DynamicalSystemsLab-UNL/ECSAct（2022年）。[62] K. J. Burns、G. M. Vasil、J. S. Oishi、D. Lecoanet 和 B. P. Brown，《Dedalus：用于谱方法数值模拟的灵活框架》，《物理评论研究》**2**，023068（2020年）。[63] J. P. Boyd，切比雪夫与傅里叶谱方法，第2版（Springer-Verlag，2001年）。[64] D. Viswanath，《平面库埃特湍流中的复现运动》，《流体力学杂志》**580**，339（2007年）。[65] J. E. Dennis 和 R. B. Schnabel，无约束优化与非线性方程的数值方法（工业与应用数学学会，1996年）。[66] Y. Saad 和 M. H. Schultz，《GMRES：求解非对称线性系统的广义最小残差算法》，《SIAM科学计算杂志》**7**，856（1986年）。[67] G. J. Chandler 和 R. R. Kerswell，《嵌入湍流二维科尔莫哥洛夫流中的不变复现解》，《流体力学杂志》**722**，554（2013年）。[68] G. Duclos、C. Blanch-Mercader、V. Yashunsky、G. Salbreux、J.-F. Joanny、J. Prost 和 P. Sil- berzan，《受限细胞向列相中的自发剪切流》，《自然·物理》**14**，728（2018年）。[69] J. Walton、G. McKay、M. Grinfeld 和 N. J. Mottram，《压力驱动的活性向列液晶自发流变化》，《欧洲物理学杂志E》**43**，10.1140/epje/i2020-11973-8（2020年）。[70] J. Gibson、J. Halcrow 和 P. Cvitanovic，《平面库埃特流状态空间几何的可视化》，《流体力学杂志》**611**，107（2008年）。[71] 补充材料可通过此链接获取：https://osf.io/9cp54/。[72] C. C. Pringle、A. P. Willis 和 R. R. Kerswell，《剪切流湍流的最小种子：利用非线性瞬态增长触及混沌边缘》，《流体力学杂志》**702**，415

(2012)
.[73] Y. Duguet、A. Monokrousos、L. Brandt 和 D. S. Henningson，平面库埃特流中的最小转捩阈值，《流体物理》**25**，084103（2013年）。[74] S. D. Ross、A. E. BozorgMagham、S. Naik 和 L. N. Virgin，势阱之间转捩的相空间通道的实验验证，Physical Review E**98**，052214（2018年）。[75] P. Grover 和 S. Ross，利用受控开普勒映射设计行星-卫星环境中的轨迹，《制导、控制与动力学杂志》**32**，437（2009年）。[76] S. Naik 和 S. D. Ross，非线性船舶运动中逃逸动力学的几何，《非线性科学与数值模拟通讯》**47**，48（2017年）。[77] J. Zhong、L. N. Virgin 和 S. D. Ross，支配稳定性转变的管道动力学视角：基于跳跃屈曲的示例，《国际机械科学杂志》**149**，413（2018年）。[78] M. A. Mohammed 和 P. Grover，带缺陷的双稳态机械超材料中非线性波传播的相空间分析，Physical Review E**106**，054204（2022年）。[79] M. Farazmand，一种寻找纳维–斯托克斯方程不变解的基于伴随的方法，《流体力学杂志》**795**，278（2016年）。[80] S. Azimi、O. Ashtari 和 T. M. Schneider，利用基于伴随的变分方法构造高维混沌系统的周期轨道，Physical Review E**105**，014217（2022年）。[81] G. Yalnız、B. Hof 和 N. B. Budanur，利用周期轨道对湍流流动的状态空间进行粗粒化，《物理评论快报》**126**，244502（2021年）。[82] J. Page、M. P. Brenner 和 R. R. Kerswell，利用机器学习揭示湍流的状态空间，《物理评论：流体》**6**，034402（2021年）。[83] J. Page、P. Norgaard、M. P. Brenner 和 R. R. Kerswell，作为湍流基础的重复流动模式：从结构预测统计量，arXiv预印本 arXiv:2212.11886（2022年）。[84] J. Page、Y. Dubief 和 R. R. Kerswell，黏弹性通道流中的精确行波解，《物理评论快报》**125**，154501（2020年）。[85] Y. Dubief、J. Page、R. R. Kerswell、V. E. Terrapon 和 V. Steinberg，弹性-惯性湍流中的首个相干结构，arXiv预印本 arXiv:2006.06770（2020年）。[86] B. Suri、R. K. Pallantla、M. F. Schatz 和 R. O. Grigoriev，类柯尔莫哥洛夫流中的异宿与同宿

连接，《物理评论 E》**100**，013112（2019年）。[87] J. P. Parker 和 T. M. Schneider，耗散超混沌中的不变环面，Chaos：《非线性科学跨学科期刊》**32**，113102（2022年）。[88] J. P. Parker、O. Ashtari 和 T. M. Schneider，利用不稳定不变环面预测混沌统计量，arXiv预印本 arXiv:2301.10626 （ 2023 年）。[89] A. Doostmohammadi 和 J. M. Yeomans，致密活性物质的相干运动，《欧洲物理学杂志：特刊》**227**，2401（2019年）。[90] Z. Zarei、C. Joshi、M. Norton、M. Hagan 和 S. Fraden，环形区域约束对二维活性向列行为的作用，Bulletin of the American Physical Society**65** （2020年）。