关于（∞，2）-范畴的局部纤维化

Fernando Abellán

arXiv:2305.00947v1 [math.AT] 1 May 2023

摘要

本文提出了一个与模型无关的（∞，2）-范畴局部纤维化概念，它推广了广为人知的（∞，1）-范畴局部余笛卡尔纤维化理论。基于先前的工作，我们构造了一个模型范畴，作为此类纤维化的一种具体组合模型。我们的主要结果是对 Lurie 的局部余笛卡尔直化与反直化构造的推广；对于任意缩放单纯集 S，该构造给出（∞，2）-范畴之间的一个等价：一边是 S 上（0，1）-纤维化的（∞，2）-范畴（亦称内余笛卡尔纤维化），另一边是以（∞，2）-范畴为值的函子 $S \to \mathrm{fat}^{(\infty,2)}$ 所成的（∞，2）-范畴。给定一个（∞，2）-范畴 ,，我们的格罗滕迪克构造可特化为一个等价，将 , 上局部纤维化的（∞，2）-范畴与以 $\mathrm{fat}^{(\infty,2)}$ 为值的 oplax 幺半函子的（∞，2）-范畴对应起来。最后，作为本文结果的一项应用，我们给出了（∞，2）-范畴的米田引理版本。

目录

1 引言 2 2 预备知识 7 3 模型结构 9 3.1 标记缩放单纯集.19 **4 局部纤维化 21 5 格罗滕迪克构造 32** 5.1 点上的直化.44 5.2 单纯形上的直化.46 5.3 主定理.53

6 ∞-双范畴 Yoneda 嵌入 56

1 引言

(∞,2)-范畴理论近年来发展迅速且广泛。若干基础构造已经问世，可用于研究同伦相容结构，例如 Gray 张量积（[GHL21]）、部分 lax 上极限（[Be21],[GHL22b],[AG21]）以及二维纤维化理论（[GHL22c],[AGSI22],[ASII22]）。更值得一提的是，我们开始看到这些技术如何用于范畴化当前研究领域的具体实例，以及它们如何为已知构造提供新的视角。

- 在 [LNP22], 中，作者将全局谱的 ∞-范畴描述为某种部分松弛余极限，从而刻画了这个 ∞-范畴的二维泛性质。

- 在 [CDW23], 中，作者运用二维范畴论技巧研究稳定 ∞-范畴，并探索了构造同调代数的范畴化理论的初步步骤。

然而，基础性问题尚未全部得到解决。本文旨在提供一项可用于未来应用的补充技术：局部纤维化理论。在深入探讨二维理论之前，让我们先回顾一下（∞,1)-范畴中局部余笛卡尔纤维化的概念。

设 $p\colon X \to \mathcal{C}$ 是一个[1] （∞,1)-范畴之间的函子。我们称 p 为局部余笛卡尔纤维化（分别称为局部笛卡尔纤维化），若对每个态射 $e : \Delta^1 \to \mathcal{C}$， p 沿 e的限制，

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathcal{C}} \{e\} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta^1 & \xrightarrow{e} & \mathcal{C} \end{array}$$

是 Δ^1 上的余笛卡尔纤维化（分别地，笛卡尔纤维化）。更非正式地说，我们可以将局部余笛卡尔纤维化视为一种编码以下数据的方式：

i) 对于每个 $c \in \mathcal{C}$ an ∞-范畴 X_c。

ii) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $u : c_0 \to c_1$， 函子 $u_*\colon X_{c_0} \to X_{c_1}$。

iii) 对于每个交换三角形 in $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} & & c_1 & & \\ & \overset{u}{\nearrow} & & \overset{v}{\searrow} & \\ c_0 & & \xrightarrow{\quad w \quad} & & c_2 \end{array}$$

一个（不一定可逆的）自然变换 $\eta\colon \ X_{c_0} \times \Delta^1 \to X_{c_2}$ 介于 $w_* \Rightarrow v_* \circ u_*$。

这种描述可以利用 Lurie 的局部余笛卡尔直化-反直化等价成功地形式化（参见 [Lur18，定理 3.8。1]），该等价表明， $\mathcal{C}$ 上的局部余笛卡尔纤维化恰好对应于一个余松弛幺半函子 St 的数据$_{\mathcal{C}}(X)\colon \ \mathcal{C} \to$Cat$_\infty$

[1]这里给出的是一个与模型无关的定义，但需要注意，我们所说的函子是指一个“足够纤维化”的映射。

其值属于 ∞-范畴。本文旨在将前面的讨论推广到 (∞,2)-范畴的情形。换言之，我们将给出 (∞, 2)-范畴的局部纤维化定义，并证明这类纤维化等价地可以描述为取值于 (∞, 2)-范畴的 (∞,2)-范畴中的余松弛幺半函子。

为介绍我们的主要定义，我们回顾一下（i， j）-范畴的（∞，2）-纤维化的概念。

设 $p\colon \mathbf{X} \to \mathfrak{f}$ 是（∞，2）-范畴之间的函子。我们称 p 是一个（i， j）-纤维化，其中i， $j \in \{0, 1\}$，如果：

F1) 对于每个 a， $b \in \mathbf{X}$，诱导的映射 $\mathbf{X}(a,\ b) \to$ “$(p(a)\ p(b))$ 在映射 ∞-范畴上，当 $j = 0$ 时是余笛卡尔纤维化，当 $j = 1$ 时是笛卡尔纤维化。

F2) 对于每个 a， b， $c \in \mathbf{X}$，复合函子

$$\mathbf{X}(a, b) \times \mathbf{X}(b, c) \longrightarrow \mathbf{X}(a, c)$$

当 $j = 0$ 时保持余笛卡尔边（相应地，当 $j = 1$ 时保持笛卡尔边）。

C1) 设 $i = 0$。给定一个对象 $a \in \mathbf{X}$ 和一个态射 $e\colon p(a) \to y$ in “，则存在一条边 $\hat{}e\colon a \to \hat{}y$ over e，具有如下性质：对于每个 $z \in \mathbf{X}$，与 $\hat{}e$ 的前复合诱导出一个 ∞-范畴的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}(\hat{y}, z) & \longrightarrow & \mathbf{X}(a, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}(y, p(z)) & \longrightarrow & \mathbb{S}(p(a), p(z)). \end{array}$$

我们称 $\hat{}e$ 是 e 的一个 $(0, j)$-笛卡尔提升。若 $i = 1$，则可定义一个对偶条件（它推广了 (∞,1)- 笛卡尔边的概念），并由此得到 $(1, j)$- 笛卡尔边的定义。

我们想指出，文献（[GHL22c],[AGSI22]）中出现了 $(0, j)$-纤维化，并将其称为外余笛卡尔 $j = 0$ （若 $j = 1$，则称为内余笛卡尔）；类似地，$(1, j)$-纤维化在 $j = 0$ 时称为外笛卡尔纤维化，在$j = 1$时称为内笛卡尔纤维化。

在 [AGSI22],[ASII22] 中，我们系统地分析了 (1,0)-纤维化理论，并给出了相应的格罗滕迪克构造，将这类纤维化与反变函子 $\mathcal{F}\colon \mathbb{S}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$联系起来。然而，前述文献中用于研究这些纤维化的模型，并不能推广 [Lur09] 和 [Lur18]所发展的局部余笛卡尔纤维化理论。为了在已缩放单纯形模型中实现纤维化的局部理论（[Lur18]），本文将采用 (0,1)-变性。不言而喻，以与模型无关的方式表述时，这些问题并不存在，因此我们可以给出如下的一般定义。

Let $p\colon$ $\mathbf{X} \to$ “是一个函子。我们称 p 是局部（i， j）-纤维化，如果满足以下条件 :

- 满足条件 F1) 和 F2)。在这种情况下，如果 $j = 0$，我们称 p 是 余笛卡尔-富集的；如果 $j = 1$，则称其是 笛卡尔-富集的。
- 对于每个态射 $e\colon \Delta^1 \to$ “，拉回 $\mathbf{X} \times_{\mathbb{S}} \{e\} \longrightarrow \Delta^1$ 都是一个 (i, j)-纤维化。我们称边 $\hat{}e\colon \Delta^1 \to \mathbf{X}$ 为局部 (0,1)- 笛卡尔边，若在取相应的拉回后，它是 (0,1)- 笛卡尔的。

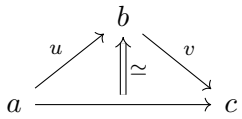
本文的第一个结果使用了在 [AGSI22] 中构造的标记双标度（**MB**）单纯集的工具，为每个（不一定是纤维化的）缩放单纯集 (S, T_S) 建立一种模型结构，其纤维对象是相对于 (S, T_S) 的 (0,1)-纤维化（见定理 3.23 和定理 3.32）。我们想要指出，对于任意缩放单纯集 (S, T_S)，(0,1)-纤维化可描述为一种标记双标度单纯集的映射，它满足相对于 **MB**-无害态射类的右提升性质（见定义 3.3）。特别是，当我们的基底不是纤维化的时，若不考虑 (S, T_S) 在缩放单纯集模型结构中的纤维化替换，我们就无法总是给出 $(0, 1)$-纤维化的一种与模型无关的描述。

定理 1. 设 (S, T_S) 是一个缩放单纯集。那么在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/(S,\sharp,T_S\subset\sharp)}$上存在一个左 *proper* 组合单纯模型结构，它由以下性质唯一刻画：

C) 态射 $f : X \to Y$ 是余纤维化，当且仅当 f 在其底层单纯集上诱导一个单态射。 e 底层单纯集合。*F)* 对象 $p : X \to S$ 是纤维化，当且仅当它是一个 (0,1)-纤维化。

此外，若 $S = \Delta^0$ 该模型结构与 *Lurie* 的模型结构（参见 *[Lur18]* 中的定理 *4.27*）在 集合$^{\mathbf{sc}}_{\Delta}$（即缩放单纯集范畴）上 *Quillen* 等价

在“ $=(S, T_S)$ 模型一个 $(\infty, 2)$-范畴的情形下（其中 T_S 由“中表示交换三角形的那些 2-单形构成），我们可以考虑一个以视觉方式描绘的三角形子集$M_S \subseteq T_S$



其中任一 u 或 v 均为等价。在定理 4.20 中，我们将前一个结果专门应用于 (S, M_S)，从而得到关于 $(0, 1)$-纤维化理论在 (S, M_S) 上的与模型无关的解释。

定理 2. 设 (S, T_S) 是一个纤维化标度单纯集，且 $p : X \to S$ 是$\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/(S,\sharp,M_S\subset\sharp)}$中的一个对象。那么，当且仅当其关联函子 $p : \mathbf{X} \to \mathbf{S}$所对应的$(\infty,2)$-范畴的局部 *(0,* $1)$-纤维化时， p 才定义一个纤维对象。

众所周知（参见 [Lur09]中的命题 2.4.2.8），局部余笛卡尔纤维化若其局部余笛卡尔边在复合下封闭，则必为余笛卡尔纤维化。我们通过考察一个纤维化标度单纯集 (S, T_S) 以及一组三角形 $M_S \subseteq \mathcal{U} \subseteq T_S$，将这一分析扩展到 $(\infty, 2)$-范畴情形，并据此作出如下定义：

- 若局部 $(0, 1)$-纤维化 p：$\mathbf{X} \to$“ 在 U 上方的三角形中，局部 $(0, 1)$-笛卡尔边复合后仍为局部笛卡尔边，则称其为 U-局部。

由此可得，定理 4.27 表明，$\mathcal{U}$-局部纤维化也可刻画为我们模型结构中的纤维对象。

定理 3. 设(S, T_S) 是一个纤维化标度单纯形，并设 U 是一个三角形集合，使得 $M_S \subseteq \mathcal{U} \subseteq T_S$。那么，对象 $p : X \to S$ 在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/(S,\sharp,\mathcal{U}\subset\sharp)}$ 中是纤维化的，当且仅当其对应的函子 p：$\mathbf{X} \to \mathbf{S}$ 所定义的$(\infty, 2)$-范畴是一个局部$(0,1)$-纤维化，且此外还是$\mathcal{U}$-局部的。

上述结果可作如下解读：给定一个由纤维化标度单纯集 (S, T_S) 建模的 $(\infty,2)$-范畴，对于 $M_S \subseteq \mathrm{U} \subseteq T_S$，在已缩放单纯集 (S, U) 上的一个 $(0,1)$-纤维化，是一个局部 $(0,1)$-纤维化，其局部 (0,1)-笛卡尔边还具有由缩放 U 所规定的进一步可复合性。

一旦建立了（∞，2）-范畴纤维化的局部理论基础，我们便着重给出预期的格罗滕迪克构造，使我们能够将纤维化解释为取值于（∞，2）-范畴的（∞，2）-范畴中的函子。由于本文专门研究缩放单纯集，我们将为$(\infty,2)$ 选择一个特定模型，并记作,icat$_\infty$： ∞-双范畴的 ∞-双范畴（即纤维化标度单纯集）。

令 S 为一个已缩放单纯对象，并将 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{01}(S)$ 记为其上方的 ∞-双范畴，其中对象为 (0,1)-纤维化，S^2 并将 Fun$(S,\mathbb{B}\mathrm{icat}_\infty)$ 记为函子 ∞-双范畴。我们的主要构造是对 Lurie 在 [Lur18] 中给出的直化-反直化等价的推广（该文仅考虑具有 ∞-范畴纤维的纤维化），推广到纤维为 ∞-双范畴的 (0,1)-纤维化的情形。结合定理 5.51 与 注 5.53 我们得到：

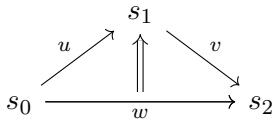
定理 4. 设 S 是一个缩放单纯集。那么直化-反直化伴随 n

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_S : \mathbb{F}\mathrm{ib}^{01}(S) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(S, \mathbb{B}\mathrm{icat}_\infty) : \mathbb{U}\mathrm{n}_S$$

给出一个 ∞-双范畴之间的等价： S 上的 ∞-双范畴的 *(0,1)*-纤维化与取值于 ∞-双范畴的协变函子的 ∞-双范畴。

上述定理的一般性使我们能够考虑一些特别值得关注的特例。具体而言，设“ $=(S, T_S)$ 是一个 ∞-双范畴，并设 $S_{\mathrm{oplax}} = (S, M_S)$。现在我们可以考虑 ŒFib(“) := †ib$^{01}(S_{\mathrm{oplax}})$，并应用格罗滕迪克构造，从而得到“上的局部 (0,1)-纤维化的 ∞-双范畴与范畴 Fun$(S_{\mathrm{oplax}}$, ,icat$_\infty)$ 之间的等价。根据 Gagna-Harpaz-Lanari 在[GHL21] 中的工作，后者可被解释为取值于 ∞-双范畴的余松弛幺半函子的 ∞-双范畴的一个模型。事实上，给定一个缩放单纯集的映射 $\mathcal{F}$: $S_{\mathrm{oplax}} \to$,icat$_\infty$ ，展开定义可得：

1. 对于每个对象 $s \in S$ an ∞-双范畴 $\mathcal{F}(s) = X_s$。
2. 对于每个态射 u : $s_0 \to s_1$ in S ，都有一个函子 $u_* : X_{s_0} \to X_{s_1}$。
3. 对于每个 2-单形 σ : $\Delta^2 \to S_{\mathrm{oplax}}$,



一个自然变换 η_σ : $X_{c_0} \times \Delta^1 \to X_{c_2}$ between $w_* \Rightarrow v_* \circ u_*$ ，当且仅当 $\sigma \in M_S$ 时可逆。

当 η_σ 退化时， σ 也是退化的，这一事实告诉我们， $\mathcal{F}$ 是一个保单位函子。此外，由于一般而言 $M_S \subseteq T_S$ ，因此可知 $\mathcal{F}$ 仅在不可逆 2-态射意义下保持复合。我们进一步注意到，由于“中的每个可逆 2-态射都属于

[2]这个 ∞-双范畴由我们的模型结构得到，因此取决于 S 上的缩放。

M_S 由此可知，对于“中的每一对对象， $\mathcal{F}$ 在相应的映射 ∞-范畴之间定义了一个函子

$$\mathcal{F}_{(s,s')} : \mathbb{S}(s,s') \longrightarrow \mathrm{Fun}(X_s, X_{s'}).$$

因此，我们的主定理可特化为（推论 5.56）：

推论 1. 设$\mathbb{S}$ 为由纤维化标度单纯集$(\infty,2)$-范畴呈现的(S, T_S)。那么，与缩放单纯集(S, M_S)相关联的直化—反直化伴随

$$\mathbb{St}^{\mathrm{oplax}}_{\mathbb{S}} : \mathbb{LFib}(\mathbb{S}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{S}, \mathbb{Bicat}_\infty) : \mathbb{Un}^{\mathrm{oplax}}_{\mathbb{S}}$$

在 ∞-双范畴的局部$(0,1)$-纤维化的 ∞-双范畴与取值于 ∞-双范畴的 *oplax* 幺半函子的 ∞-双范畴之间给出一个等价。

我们预计，当处理相干性数据过于繁琐时，我们的纤维化方法将成为定义 oplax 函子的有力工具。此外，这一变体的格罗滕迪克构造将在即将开展的工作中发挥基础性作用 [AGH23]，届时我们将研究 $(\infty,2)$-范畴的一般伴随态射演算。

我们通过将前一个结果推广到 U-局部情形来结束本节。给定一组三角形 $M_S \subseteq \mathbb{U} \subseteq T_S$，我们定义 $(S, \mathbb{U}) = S_{\mathcal{U}}$，并配以 ŒFib(“)$^{\mathcal{U}}$ =†ib^{01}($S_{\mathcal{U}}$)。同样，我们的主定理可特化为：

推论 2. 设$\mathbb{S}$ 是由纤维化标度单纯集(S, T_S)所呈现的$(\infty,2)$-范畴。给定一族薄三角形 $M_S \subseteq \mathcal{U} \subseteq T_S$，则与缩放单纯集$(S, \mathcal{U})$相关联的直化-反直化伴随

$$\mathbb{St}^{\mathcal{U}}_{\mathbb{S}} : \mathbb{LFib}(\mathbb{S})^{\mathcal{U}} \rightleftarrows \mathrm{Fun}^{\mathcal{U}}(\mathbb{S}, \mathbb{Bicat}_\infty) : \mathbb{Un}^{\mathcal{U}}_{\mathbb{S}}$$

在$\mathbb{S}$ 上局部且同时为$\mathcal{U}$-局部的*(0,1)*-纤维化所构成的 ∞-双范畴，与取值于∞-双范畴、并保持沿$\mathcal{U}$中三角形的复合的余松弛幺半函子所构成的 ∞-双范畴之间，给出了一个等价。

∞-双范畴的∞-米田引理

作为我们结果的一个应用，我们给出<style> ∞-双范畴的米田引理的一个纤维化证明。我们想强调，这样的结果早已见于文献中，具体来说，Hinich 的工作 [Hin20] 在其中确立了一个关于富 ∞-范畴的一般米田引理。

在本文中，我们将米田引理的证明直接应用格罗滕迪克构造给出。给定一个 ∞-双范畴 $\mathbb{C}$，我们考虑 (0，1)-纤维化 $\mathrm{ev}_1 : \mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(\Delta^1, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$（更多详情见 [GHL22c] 中的定理 2.2.6），其中 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(\Delta^1, \mathbb{C})$ 是由函子和 lax自然变换构成的范畴，也称为 $\int$ 的 lax箭头范畴。

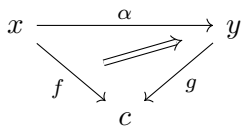
仔细展开这一构造后可以发现，这个函子的纤维配备了映射

$$\mathbb{C}_{/c} = \mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(\Delta^1, \mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} \{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

而这些映射又是 (1，0)-纤维化，其纤维为 ∞-范畴。我们可以如下描述 ∞-双范畴 $\int_c$

- $\int_c$ 的对象由 $\int$ 中目标为 c 的态射 $f : x \to c$ 给出。

- 从 $f\colon x \to c$ 到 $g\colon y \to c$ 的态射由一个松弛交换图给出



- 从 $\alpha\colon x \to y$ 到 $\beta\colon x \to y$ 的 2-态射由一个 2-态射 $\theta\colon \alpha \Rightarrow \beta$ 给出，使得显然的图表交换。

分两步应用格罗滕迪克构造，我们得到一个函子 $\mathcal{Y}\colon \mathbb{C} \to$ 函子$(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)$. 此外，根据先前的工作（[ASII22b]中的定理 3.17），可知 $\mathbb{C}_c$ 在格罗滕迪克构造下对应于可表函子 $\mathbb{C}(-, c)$。我们在定理 6.7中证明本文的最终结果。

定理 5. 对于每个 ∞-双范畴 $\mathbb{C}$*Yoneda*嵌入

$$\mathcal{Y} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty), \quad c \mapsto \mathbb{C}(-, c)$$

是全忠实的。此外，给定函子 $\mathcal{F}$:$\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ ，存在一个取值于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 的函子之间的等价。

$$\mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{Y}(-), \mathcal{F}) \xRightarrow{\simeq} \mathcal{F}$$

（其中 $\mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(-,-)$ 是$\mathrm{Fun}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)$)中的映射 ∞-范畴，它关于 $\mathcal{F}$是自然的。 .

致谢
作者谨此感谢 Rune Haugseng 就局部纤维化的模型无关定义所进行的有益讨论。

2 预备知识

本节将主要汇集 Lurie 在 [Lur18]. 中介绍的缩放单纯集理论的主要定义。

定义 2.1。一个已缩放单纯集 (X, T_X) 由一个单纯集 X 以及一族 2-单形（也称为三角形） T_X 构成，其中包含每个退化三角形。我们称 T_X 中的元素为 X 的薄三角形。已缩放单纯集之间的态射 $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ 是一个单纯集映射 $f\colon X \to Y$，满足 $f(T_X) \subseteq T_Y$。我们用 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathrm{sc}}$ 表示相应的已缩放单纯集范畴。

注记 2.2。在不会引起混淆时，我们将省略有序对记法，直接将已缩放单纯集 (X, T_X) 记作 X。

记号。给定一个单纯集 A ，我们有两种将其视为缩放单纯集的典范方式：

- 我们定义 $A_\flat = (A, \flat)$，其中 $\flat$ 是仅由 A的退化三角形构成的集合。

- 我们定义 $A_\sharp = (A, \sharp)$，其中 $\sharp$ 是由 A中的每个三角形组成的集合。

定义 2.3。由生成的标度无害映射 **S** 是由以下各项组成的缩放单纯集映射集合:

(i) 内角的包含

$$(\Lambda^n_i, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \to (\Delta^n, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \quad 0 < i < n;$$

(ii) 映射

$$(\Delta^4, T) \to (\Delta^4, T \cup \{\Delta^{\{0,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,4\}}\}),$$

其中我们定义

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\Delta^{\{0,2,4\}},\ \Delta^{\{1,2,3\}},\ \Delta^{\{0,1,3\}},\ \Delta^{\{1,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,2\}}\};$$

(iii) 映射的集合

$$\Big(\Lambda^n_0 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 3.$$

缩放单纯集的一般映射，如果它属于标度无害映射的弱饱和闭包**S**，则称其为标度无害映射。

定义 2.4。 一个缩放单纯集 X 被称为 ∞-双范畴，如果它对定义 2.3中标度无害映射的缩放具有右提升性质。在这种情况下，我们将 T_X 的 2-单形视为交换三角形的集合。

定义 2.5。我们用 Cat^+_Δ 表示 Set^+_Δ -富化范畴（即以标记单纯集为富化的范畴）所成的范畴。注意，通过逐个 Hom 应用神经函子，并在每个映射范畴中标记等价，我们可以将（严格）2-范畴的范畴 2Cat 视为 Cat^+_Δ 的全子范畴。

定义 2.6。 设 I 是一个有限线序集。我们定义一个 2-范畴 O^I 如下

- O^I 的对象是 I的元素,
- 对象 $i, j \in I$之间的态射范畴 $\mathsf{O}^I(i, j)$ 定义为满足 $\min(S) = i$ 且 $\max(S) = j$ 的有限集合 $S \subseteq I$ 按包含关系构成的偏序集,
- 复合函子定义如下：对于 $i, j, l \in I$,

$$\mathbb{O}^I(i, j) \times \mathbb{O}^I(j, l) \to \mathbb{O}^I(i, l), \quad (S, T) \mapsto S \cup T.$$

当 $I = [n]$时，我们将 O^I 记作 O^n。注意，O^n 构成 2-范畴范畴中的一个余单纯对象，我们将其记作 $\mathsf{O}^\bullet$。

定义 2.7。映射

$$\Delta \xrightarrow{\mathfrak{C}} \mathrm{Cat}^+_\Delta$$

将 $[n]$ 映射到 O^n 的函子为我们提供了 Cat^+_Δ 中的一个余单纯对象。此外，我们可以将薄 2-单形 $\Delta^2_\sharp$ 映射到配备最大标记映射空间的 $\mathfrak{C}[\Delta^2]$ 。通常的构造

通过神经与实现，进而得到伴随函子

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}} : \mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{sc}} \rightleftarrows \mathrm{Cat}_{\Delta}^{+} : \mathrm{N}^{\mathbf{sc}}$$

我们将其称为缩放神经和缩放刚性化。

定理 2.8。在 集合$_{\Delta}^{\mathbf{sc}}$ 上存在一个左 *proper*、组合模型结构，其中

W）弱等价是态射 f： $A \to B$，满足 $\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}[f]$： $\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}[A] \to \mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}[B]$ 在$\mathrm{Cat}_{\Delta}^{+}$ 中是一个等价。

C）余纤维化是单态射。

此外，该模型结构中的纤维对象是 ∞-双范畴，并且伴随函 n

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}} : \mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{sc}} \rightleftarrows \mathrm{Cat}_{\Delta}^{+} : \mathrm{N}^{\mathbf{sc}}$$

是一个 *Quillen* 等价。

证明。这是[Lur18，定理 A.3.2。4]。纤维对象的刻画见 [GHL22，定理 5。1]。 □

定义 2.9。我们称缩放单纯集之间的一个映射为双范畴等价，如果它是定理 2.8中给出的模型结构下的弱等价。类似地，将缩放单纯集的模型结构中的纤维化称为双范畴纤维化。

定义 2.10。给定一对缩放单纯集 X, Y我们用 $\mathbf{Fun}(X, Y)$ 表示由泛性质确定的缩放单纯集

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{sc}}}(K, \mathrm{Fun}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{sc}}}(K \times X, Y)$$

其中，$K \times X$ 表示缩放单纯集合的笛卡尔积。

定义 2.11. 设 $\mathfrak{f}$ 为一个 ∞-双范畴。给定一个对象 $y \in \mathfrak{f}$，我们定义一个已缩放单纯集合 $\mathfrak{f}_{y}$ 如下。n-单形 $\Delta^{n} \to \mathfrak{f}_{y}$ 的数据由一个映射 $\sigma : \Delta^{n+1} \to \mathfrak{f}$ 给出，使得 $\sigma(n+1) = y$。包含 d_{n+1}: $\Delta^{n} \to \Delta^{n+1}$ 诱导出一个映射

$$\pi : \mathbb{C}_{y} \longrightarrow \mathbb{C}$$

我们用它来声明$\mathbb{C}_{y}$ 中的一个三角形，当且仅当其像在 π 下$\mathbb{C}$中是薄的时，该三角形为薄的。由 [GHL22，命题 233] 可知，π 在对象 $x \in \mathbb{C}$ 处的纤维是$\mathbb{C}(x, y)$ 映射 ∞-范畴的一个模型。

3 模型结构

定义 3.1。一个标记的双缩放单纯集（**MB** 单纯集）由以下数据给出

- 一个单纯集 X。
- 包含所有退化边的边集 $E_X \in X_1$ 。

- 包含所有退化三角形的三角形集 $T_X \in X_2$ 。我们将此集合中的元素称为薄三角形。

- 满足 $T_X \subseteq C_X$ 的三角形集合 $C_X \in X_2$ 。我们将这类集合的元素称为瘦三角形。

我们将这类对象记作三元组 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$。映射 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subseteq C_Y)$ 由一个单纯集映射 $f\colon X \to Y$ 给出，并且该映射与上述边集和三角形集相容。我们用 $\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathrm{mb}}$表示 MB 单纯集的范畴。

记号。设 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$ 是一个 MB 单纯集。假设集合 E_X 只包含退化边。那么我们固定记号 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) = (X, \flat, T_X \subseteq E_X)$，并对集合 T_X 作类似处理。若 C_X 只包含退化三角形，我们固定记号 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) = (X, E_X, \flat)$。类似地，我们将使用符号“$\sharp$”表示包含所有边（分别地，所有三角形）的集合。最后，假设 $T_X = C_X$，那么我们将采用记号 (X, E_X, T_X)。

注记 3.2. 定义集合 E_X（分别为 T_X、C_X）时，我们常常会滥用记号，只指定其非退化边（分别为三角形）。

定义 3.3. MB 单纯集的生成的 *mb* 无害映射集合由以下映射组成：

(A1) 内角包含

$$(\Lambda^n_i, \flat, \flat \subset \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \to (\Delta^n, \flat, \flat \subset \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \quad 0 < i < n;$$

这些映射迫使左退化精简标度三角形表示映射范畴的笛卡尔边。

(A2) 映射

$$(\Delta^4, \flat, \flat \subset T) \to (\Delta^4, \flat, \flat \subset T \cup \{\Delta^{\{0,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,4\}}\}),$$

其中我们定义

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\Delta^{\{0,2,4\}},\ \Delta^{\{1,2,3\}},\ \Delta^{\{0,1,3\}},\ \Delta^{\{1,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,2\}}\};$$

(A3) 映射的集合

$$\left(\Lambda^n_0, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\right) \to \left(\Delta^n, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\right) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

这迫使标记态射相对于给定的薄三角形是 p-余笛卡尔的。

(A4) 初始顶点的包含

$$\left(\Delta^0, \sharp, \sharp\right) \to \left(\Delta^1, \sharp, \sharp\right).$$

这要求基底中的态射存在 p-余笛卡尔提升。

（S1）映射

$$\left(\Delta^2, \{\Delta^{\{0,1\}}, \Delta^{\{1,2\}}\}, \sharp\right) \to \left(\Delta^2, \sharp, \sharp\right),$$

要求 p-余笛卡尔态射能够沿薄三角形复合。

(S2) 该映射

$$\left(\Delta^2, \flat, \flat \subset \sharp\right) \to \left(\Delta^2, \flat, \sharp\right),$$

这要求薄三角形之上的瘦三角形本身也是薄的。

(E) 对每个 Kan 复形 K，映射

$$\left(K, \flat, \sharp\right) \to \left(K, \sharp, \sharp\right).$$

这要求每个等价都是标记态射。

若一个 MB 单纯集的映射属于**MB**的弱饱和闭包**MB**，则称其为**MB**-无角映射。

注记 3.4. 在此前的工作中 [AGSI22] 我们也引入了 **MB**-无角映射的概念，用于讨论 (1,0)-纤维化理论。我们想指出，这两类映射并不相同，但为避免使用过于繁琐的记号，我们对它们沿用同一个名称$\mathbf{MB}^{01}$-无角映射。

定义 3.5. MB 单纯集的一个映射称为 **MB**-纤维化，如果它相对于 **MB**-无角映射类具有右提升性质。

引理 3.6。 设 $p\colon X \to S$ 是一个 ***MB***-纤维化，则对每个 $s \in S$， s 上的纤维，

$$\begin{array}{ccc} X_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta^0 & \xrightarrow{s} & S \end{array}$$

是一个 ∞-双范畴，其中标记边恰好是等价。

证明。 注意，在 X_s 中，瘦三角形与薄三角形重合，因为在 **MB**-纤维化中，位于薄三角形上方的瘦三角形本身就是薄的。因此， X_s 对缩放反常映射类具有右提升性质，因而它是一个 ∞-双范畴。注意，根据定义，等价必须在 X_s中被标记。此外，由于 X_s 对映射类 (A3)具有提升性质，很容易验证标记态射都是等价。 □

引理 3.7。 ***MB***-单纯集的态射 $(\Delta^2, \{\Delta^{\{0,1\}}, \Delta^{\{0,2\}}\}\ \sharp) \to (\Delta^2, \sharp, \sharp)$ 是***MB***-无害的。

证明。 证明是对偶于 [AGSI22，引理 3。11]。 □

引理 3.8。 ***MB***单纯集的态射

$$\iota : (\Delta^3, \Delta^{\{0,1\}}, \{\Delta^{\{0,1,3\}}\} \subset U_0) \to (\Delta^3, \Delta^{\{0,1\}}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\} \subset \sharp),$$

是 ***MB***-无角的，其中 U_0 是除 $\Delta^{\{1,2,3\}}$ 之外所有 *2*-面的集合。

证明。 令 $S = (S, E_S, T_S \subset \sharp)$ 为一个 **MB** 单纯集，并令 $p\colon X \to S$为一个 **MB**-纤维化。我们将证明 p 对映射 ι 具有右提升性质。一旦这一断言

得到证明，我们将对 ι 进行分解

$$(\Delta^3, \Delta^{\{0,1\}}, \{\Delta^{\{0,1,3\}}\} \subset U_0) := A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{p} (\Delta^3, \Delta^{\{0,1\}}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\} \subset \natural) = B$$

作为一个**MB**-无害态射，后接一个**MB**-纤维化，其中 B 具有 $(S, E_S, T_S \subset \natural)$ 的形式。由此便可得到提升问题的一个解

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & B \end{array}$$

这表明 ι 是**MB**-无角映射 α 的一个收缩，从而完成证明。为了完成证明，我们必须证明这一断言。假设给定了一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & S \end{array}$$

令 $\sigma(1 \to 2) = u$、$\sigma(2 \to 3) = v$ 和 $\sigma(1 \to 3) = \omega$。由于 p 是一个**MB**-纤维化，我们可以解出提升问题

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2_1 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \overset{\varphi}{\nearrow} & \downarrow \\ \Delta^2 & \xrightarrow[d_0(p(\sigma))]{} & S \end{array}$$

并构造一个瘦三角形 φ。我们考虑 $Q \subset \Delta^4$ 的一个子单纯集，它由以下各面组成：

- 缺少顶点 2 的面。
- 缺少顶点 4 的面。
- 二维面 $\Delta_{\{2,3,4\}}$。

于是我们如下构造一个映射 $\theta : Q \to X$

- 我们通过 σ 映射缺少顶点 2 的面。
- 我们通过 $s_1(d_3(\sigma))$ 映射缺少顶点 4 的面。
- 我们通过 $\Delta_{\{2,3,4\}}$ 映射 φ。

并为 Q 配备诱导装饰。由此可知，我们可以将 Q 延拓为一个映射 $\Xi : \Delta^4 \to X$ 位于 $s_1(p(\sigma))$ 之上。由于 p 对态射(A2) 具有右提升性质，我们看到 $d_0(\sigma)$ 是精简的，当且仅当 $\Delta^{\{1,2,4\}}$ 在 Ξ 下的像在 X中是薄的。

我们注意到，在 $d_1(\Xi)$ 中，除可能缺少顶点 2 的面外，每个面都是精简的已缩放面。同样，由于(A2) ，可知这个面也必定是精简的已缩放面。此外，这个面位于 S 的一个薄单纯形之上，因此它本身也必定是薄的。从现在起，我们可以将注意力集中在 $d_3(\Xi)$。

我们注意到，在 $d_3(\Xi)$ 中，$= \rho$ 每个面都是薄缩放的，唯一可能例外的是缺少顶点 0 的面；边 $0 \to 1$ 是标记的。容易验证，沿着

单纯形薄 $d_2(p(\sigma))$ 单纯形的拉回产生了一个 ∞-双范畴的纤维化 $X' \to (\Delta^2, \sharp)$，其中我们可以将 $d_0(\rho)$ 的像识别为 X' 的映射 ∞-范畴中的一个态射。容易证明，该态射是一个等价，因此必定是薄的。证明至此完成。 □

定义 3.9。我们称 **MB** 单纯集之间的映射为余纤维化，若其底层单纯集映射是单态射。容易验证，余纤维化类由以下映射族生成：

(C1) 对于 $n \geqslant 0$，边界包含 $(\partial\Delta^n, \flat, \flat) \to (\Delta^n, \flat, \flat)$。

(C2) 映射 $(\Delta^1, \flat, \flat) \to (\Delta^1, \sharp, \flat)$. (C3) 映射 $(\Delta^2, \flat, \flat) \to (\Delta^2, \flat, \flat \subset \sharp)$. (C4) 映射 $(\Delta^2, \flat, \flat \subset \sharp) \to (\Delta^2, \flat, \sharp)$.

命题 3.10。 设 $f : (X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subset C_Y)$ 是***MB***单纯集的余纤维化，且 $g : (A, E_A, T_A \subseteq C_A) \to (B, E_B, C_B \subseteq T_B)$ 是一个***MB***-无害态射。那么推出积：

$$f \wedge g : X \times B \coprod_{X \times A} A \times Y \longrightarrow Y \times B$$

又是***MB***-无穷瘦弱映射。

证明。 证明与[AGSI22，命题 3.14] 几乎完全相同，留作练习。 □

备注 3.11。 注意，给定一对**MB** 单纯集 X, Y，我们可以用显然的方式构造一个函子**MB** 单纯集 $\mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(X, Y)$。

推论3.12。 设 $p : Y \to S$ 是一个***MB***-纤维化。那么对于每个***MB*** 单纯集 X，诱导映射

$$\mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(X, S)$$

是一个***MB***-纤维化。

证明。 由命题 3.10 考察伴随提升问题即可得出 s. □

定义3.13。 设 $p : Y \to S$ 是一个 **MB**-纤维化，并考虑一个 **MB** 单纯集$q : X \to S$的映射。我们将 ∞ 定义为关于 S 的函子双范畴，其定义为拉回。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_S(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{q} & \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(X, S) \end{array}$$

定义 3.14。 给定一个缩放单纯集 (S, T_S)，我们如下定义 $(S, \sharp, T_S \subset \sharp)$ 上的**MB**单纯集的范畴 $\left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$：

- The objects are maps $p : (X, E_X, T_X \subset C_X) \to (S, \sharp, T_S \subset \sharp)$.

- 从 $p\colon (X, E_X, T_X \subset C_X) \to (S, \natural, T_S \subset \natural)$ 到 $q\colon (Y, E_Y, T_Y \subset C_Y) \to (S, \natural, T_S \subset \natural)$ 的态射由映射 $f\colon (X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subset C_Y)$ 给出，并满足$q \circ f = p$。

$\left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的对象称为 (0,1)-纤维化，当且仅当相应的**MB** 单纯集映射是**MB**-纤维化。

定义 3.15. 态射 $f\colon A \to B$ 在 $\left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中称为:

- 余纤维化，如果其底层**MB** 单纯集映射是余纤维化。
- 弱等价，如果对于每个 (0,1)-纤维化 $p : X \to S$ 其对应的 ∞- 双范畴映射都是双范畴等价。

$$f^* : \mathrm{Map}_S(B, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_S(A, X)$$

- 平凡纤维化，如果它对 $\left(\mathrm{Set}_{\mathbf{mb}_{\Delta}}\right)_{/S}$ 中的每个余纤维化都具有右提升性质。
- 平凡余纤维化，如果它既 是弱等价又是余纤维化。

引理 3.16。设 $f : A \to B$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中位于 S 上的态射，且 f 是平凡纤维化。则 f 是弱等价。

证明。 注意，由于 f 是平凡纤维化，我们可以构造一个截面 $g : B \to A$ ，使得$f \circ g = \mathrm{id}_B$。此外，我们还可以构造一个标记同伦 $A \times (\Delta^1)^\sharp \to A$，使恒等态射 A 与复合 $g \circ f$ 之间存在同伦，并且该同伦与从 A 到 S的投影映射相容。因此，这对同伦逆态射定义了所需的映射 ∞-双范畴之间的等价

$$f^* : \mathrm{Map}_S(B, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_S(A, X)$$

因此 f 是弱等价。 □

命题 3.17。 $f : A \to B$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$中的态射。给定一个 (0,1)-纤维化$p : X \to S$ ，考虑映射 ∞-双范畴之间的诱导函子

$$f^* : \mathrm{Map}_S(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}_S(A, X)$$

由此可得

i) 若 f 是***MB***-无锋的，则 f^* 是缩放单纯集合之间的平凡纤维化。

ii) 若 f 是余纤维化，则 f^* 是 ∞-双范畴之间的纤维化。

iii) 若 f 是平凡余纤维化，则 f^* 是缩放单纯集合之间的平凡纤维化。

证明。 第一个陈述直接由 命题 3.10得出。为证明 $ii)$ 成立，我们注意到，根据 命题 3.10 ，f^* 对所有标度无害映射都具有右提升性质。由于映射 ∞-双范畴中的标记态射是等价，因此可得 f^* 是一个等纤维化。在 [GHL22], 中，作者刻画了

将缩放单纯集合视为一种 Cisinski 模型结构。进而，这意味着 f^* 是缩放单纯集合的一个纤维化。最后一个断言由 ii）以及弱等价类的定义得出。

□

引理 3.18。 考虑 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的一个推出图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{i} & P \end{array}$$

其中 u 是弱等价，且 v 是余纤维化。那么 i: $B \to C$ 也是弱等价。

证明。 给定一个 (0，1)-纤维化 $p: X \to S$，我们注意到，由于 v 是余纤维化，因此可以得到一个 ∞-双范畴的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_S(P, X) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{Map}_S(C, X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^*} \\ \mathrm{Map}_S(B, P) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{Map}_S(A, X) \end{array}$$

这表明 i^* 是双范畴等价，因此我们看到 i: $B \to C$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的弱等价。

□

命题 3.19。 p： $X \to S$ 中的一个对象 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 具有相对于平凡余纤维化类的右提升性质，当且仅当它是一个$(0，1)$-纤维化。

证明。 注意，由于 i) 在 命题 3.17 中可知，每个 **MB**-无害态射都是平凡余纤维化。因此，任何具有相对于平凡余纤维化的右提升性质的对象都必须是一个 (0， 1)-纤维化。为验证反向蕴含，我们考虑一个 (0，1)-纤维化 p:$X \to S$ 以及一个平凡余纤维化 $f: A \to B$。接下来，为了构造提升问题的一个解

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & S \end{array}$$

我们注意到，由于映射 f^*: $\mathrm{Map}_S(B, X) \to \mathrm{Map}_S(A, X)$ 是平凡纤维化，因而特别是满射，所以我们可以选取 $\alpha \in \mathrm{Map}_S(A, X)$ 的一个原像，从而得到我们问题的解。

□

定义 3.20. 设 p： $X \to S$ 是一个 (0,1)-纤维化，并考虑 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的一个对象 $A \to S$。我们采用以下记号:

1. 我们将 $\mathrm{Map}_S^{\mathrm{th}}(A, X)$ 所表示的映射 ∞-双范畴的底层 ∞-范畴记作 y.
2. 我们将 $\mathrm{Map}_S^{\simeq}(A, X)$ 所表示的映射 ∞-双范畴的底层群胚记作。

命题 3.21。设 f： $X \to Y$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的一个态射，其中 X 和 Y 都是$(0,1)$-纤维化。则以下条件等价:

i) 对每个 *(0, 1)*-纤维化 $Z \to S$，诱导映射 $f^*\colon \mathit{Maps}(Y, Z) \to \mathit{Maps}(X, Z)$ 是 ∞-双范畴之间的等价。 *ii)* 对每个 *(0, 1)*-纤维化 $Z \to S$，诱导映射 $f^*\colon \mathit{Map}^{\mathrm{th}}_S(Y, Z) \to \mathit{Map}^{\mathrm{th}}_S(X, Z)$ 是 ∞- 范畴之间的等价。 *iii)* 对每个 *(0, 1)*- 纤维化 $Z \to S$，诱导映射 $f^*\colon \mathit{Map}^{\simeq}_S(Y, Z) \to \mathit{Map}^{\simeq}_S(X, Z)$ 是群胚之间的同伦等价。 *iv)* 存在一个态射 $g\colon Y \to X$，它在 S 之上，且是 f 的同伦逆。 *v)* 对每个 $s \in S$，纤维上诱导的态射 $f_s\colon X_s \to Y_s$ 是双范畴等价。

证明。蕴含关系 $i) \implies ii) \implies iii)$ 显然。我们首先证明 $iii) \implies iv)$。考虑同伦等价 $\mathrm{Map}^{\simeq}_S(Y, X) \to \mathrm{Map}^{\simeq}_S(X, X)$，并选取一个对象 $g \in \mathrm{Map}^{\simeq}_S(Y, X)$，使得 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$。为证明 g是f所需的同伦逆，我们需要证明 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$。为此，我们注意到映射 $\mathrm{Map}^{\simeq}_S(Y, Y) \to \mathrm{Map}^{\simeq}_S(X, Y)$ 将 $f \circ g$ 和 id_Y 都映到与 f等价的态射。因此，我们得到$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$。

注意，$iv) \implies v)$ 可由以下事实推出：由于我们的同伦是逐纤维的，它们会在相应的纤维上诱导等价。

为了证明 $v) \implies i)$，我们使用小对象论证将 $f\colon X \to Y$分解为复合 $X \to \hat{} X \to Y$，其中第一个态射是 **MB**-无害（因此是弱等价），而第二个态射对 **MB**-无害态射类具有右提升性质。特别地，由此可知 $\hat{} X \to S$ 仍然是一个 (0,1)-纤维化。结论由命题 4.22得出。

□

引理 3.22. 给定一个对象 $A \to S$，属于 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$，则投影映射 $\pi_A\colon A \times (\Delta^n, \sharp, \sharp) \to A$ 是一个弱等价。

证明. 令 $\iota\colon \Delta^0 \to (\Delta^n, \sharp, \sharp)$ 为初始顶点的包含。这是一个简单的练习，可以证明 ι 是 **MB**-无导子的。由此可得，*Proposition* 3.10 蕴含 $\iota_A\colon A \to A \times (\Delta^n, \sharp, \sharp)$ 也是 **MB**-无导子的。注意到 $\pi_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A$，证明得证。 □

定理 3.23.令 S 为一个缩放单纯集。则在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$ 上存在一个左 *proper* 组合单纯模型结构，它由以下性质唯一刻画：

C) 态射 $f\colon X \to Y$ 在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$ 中是余纤维化，当且仅当 f 在底层单纯集合上诱导单态射。*F)* 对象 $p\colon X \to S$ 在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$ 中是纤维化的，当且仅当它是一个$(0,1)$-纤维化。

证明。 证明与 [AGSI22] 中定理 3.42 的证明完全类似。 □

注记 3.24。 我们将前一定理中的模型结构称为 S 上 (0,1)-笛卡尔纤维化的模型结构。

定义 3.25。 令 $K = (K, E_K) \in \text{集合}^{+}_{\Delta}$，并令 $p\colon X \to S$ 为 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$中的一个对象。我们将张量 $K \otimes X$定义为 $I(K) \times X \to X \to S$，其中 $I(K) = (K, E_K, \sharp)$。类似地，我们定义

通过声明一个映射 **MB**-单纯集 $\varphi: Y \to X^K$ 在 $\overline{\varphi}: Y \to S$ 之上等价于一个交换图的数据，来定义余张量 X^K

$$\begin{array}{ccc} (K, E_K, \sharp) \times Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & S. \end{array}$$

定理 3.26. 模型范畴 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 是一个集合$_{\Delta}^{+}$-富集模型范畴

$y.$

证明。 显然，构造 $\mathrm{Map}_S^{\mathrm{th}}(-,-)$ 赋予 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 一个集合$_{\Delta}^{+}$-富集模型范畴的结构。由于张量分别在两个变量上保持余极限，因此只需证明：给定 $i: L \to K$ 中的一个余纤维化，以及 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的一个余纤维化 $f: X \to Y$，相应的推出积映射

$$i \wedge f : L \otimes Y \coprod_{L \otimes X} K \otimes X \to K \otimes Y$$

仍是余纤维化；并且当 i 或 f 是弱等价时，它也是弱等价。注意到 $i \wedge f$ 显然是余纤维化，因此我们可以集中证明该断言中的弱等价部分。

首先，回顾一下，对于标记单纯集之间的无害态射 $A \to B$，可推出 $I(A) \to I(B)$ 是 **MB**-无害态射。因此，由 命题3.10 可知，我们可以假设 i 和 f 是相应模型结构中纤维对象之间的态射。

注意，给定一对纤维对象 L 和 $p: X \to S$ 可知， $L \otimes X$ 仍然是纤维对象。为完成证明，我们假设 $f: X \to Y$ 是弱等价（ i的情形完全类似）。于是对每个 $s \in S$，映射 $(L \otimes X)_s \to (L \otimes Y)_s$ 可识别为映射

$$L \times X_s \xrightarrow{\simeq} L \times Y_s$$

根据假设，这是一个双范畴等价。由此可知，映射 $L \otimes X \to L \otimes Y$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的弱等价。现在我们可以考虑一个推出图

$$\begin{array}{ccc} L \otimes X & \xrightarrow{\simeq} & L \otimes Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \otimes X & \xrightarrow{\simeq} & L \otimes Y \coprod_{L \otimes X} K \otimes X \end{array}$$

此外，运用与之前类似的论证，我们看到 $K \otimes X \xrightarrow{\simeq} K \otimes Y$ 也是一个弱等价。由三取二性质即可得出结论。 □

命题 3.27。 设 $f: S \to S'$ 是缩放单纯集之间的一个映射，则与f 后复合会诱导一个左 *Quillen* 函子

$$f_! : \left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} \rightleftarrows \left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S'} : f^*$$

它是拉回函子 f^* 的左伴随。

证明。 显然， $f_!$ 保持余纤维化。为完成证明，我们只需证明 $f_!$ 保持弱等价。给定 ι : $A \to B$ 和一个纤维对象 p : $Y \to S'$ ，我们注意到有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_S(B, f^*Y) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Map}_S(A, f^*Y) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{Map}_{S'}(i_!B, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{S'}(i_!A, Y) \end{array}$$

因此，由三取二性质可得结论成立。 □

我们以比较定理 3.23 中的模型结构与在 [Lur18]中构造的定理 3.2.6 中的模型结构作结。

定义 3.28。 设 (S, T_S) 是一个缩放单纯集，并考虑范畴 $\left(\mathrm{Set}_\Delta^+\right)_{/S}$ 上的标记单纯集。我们有一个函子

$$R : \left(\mathrm{Set}_\Delta^+\right)_{/S} \longrightarrow \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}, \qquad (X, E_X) \longrightarrow (X, E_X, T_X \subset \sharp)$$

其中， T_X 由 X 中位于 S的薄三角形之上的那些三角形组成。

定理 *3.29*。设 *(S, T_S)* 是一个缩放单纯集，并考虑 $\left(\mathit{Set}_\Delta^+\right)_{/S}$ 中的一个对象 *(X, E_X)*，则 $X =$ *(X, E_X)* 是 $\mathfrak{P}_S$-纤维化的（参见 *[Lur18]* 中的定义 *3.2.1* 和例 *3.2.9*），当且仅当 *$R(X)$* 是一个 *(0, 1)*-纤维化。此外，如果 Y 是一个在 S 上的 *(0, 1)*-纤维化，且 Y 的每个三角形都是精简的，那么存在一个 $\mathfrak{P}_S$-纤维化对象 T，使得 *$R(T)$* $= Y$。

证明。假设 X 是 $\mathfrak{P}_S$-纤维化的，并证明 $R(X)$ 定义了一个 (0,1)-纤维化。我们将证明 $R(X)$ 对 MB-无害态射类具有右提升性质。为此，我们回顾一下： $\left(\mathrm{Set}_\Delta^+\right)_{/S}$ 中的一个对象是 $\mathfrak{P}_S$-纤维化的，当且仅当它对 [Lur18] 中定义 3.2.10 所述的 $\mathfrak{P}_S$-无害态射类具有右提升性质。首先，我们验证 $R(X)$ 对 (E) 中给出的映射类具有右提升性质。事实上，给定一个从 Kan 复形 $K \to R(X)$ 出发的映射，我们可以利用 [Lur18 的定义 3.2.10] 中的 (A_1) 型态射，得出 K 的每个态射都映射到 $R(X)$ 中的一个标记边。类似地，我们对 R 的构造保证了 $R(X)$ 对 (S2) 型态射具有右提升性质。其余提升问题由 $\mathfrak{P}_S$-无害态射类的定义立即得出。

逆命题可由类似的论证得到。为完成证明，假设给定了形如 $Y = (Y,\ E_Y,\ T_Y \subset \sharp)$ 的 $(0,\ 1)$-纤维化。于是 (S2) 蕴含 T_Y恰好是位于 S中的薄三角形之上的三角形的集合。因此，我们可以考虑 $Y = (Y,\ E_Y)$，并注意到 $R(\hat{}Y) = Y$。证明的前一部分表明，$\hat{}Y$必须是$\mathfrak{P}_S$-纤维化的。 □

命题 3.30。 设 p : $X \to S$ 是一个 $(0,\ 1)$-纤维化，则对于每个 $s \in S$ ，纤维 X_s 是一个∞-范畴，当且仅当 X 的每个三角形都是精简的。

证明。 显然，如果每个 X 三角形都是精简的，那么纤维必定是 ∞-范畴。反过来，假设对于每个 $s \in S$ ，纤维 X_s 都是一个 ∞-范畴。令 σ : $\Delta^2 \to X$

并假设对于某个边 $\Delta^1 \to S$， $p(\sigma) = s_1(p(f))$。我们选取一个位于 $p(f)$ 之上的标记边，并构造一个 3-单形 θ： $\Delta^3 \to X$，它位于 $s_1(p(\sigma))$ 之上，使得 $\theta(0 \to 1)$ 是我们选定的标记边，并且除可能的 $d_1(\theta) = \sigma$ 外，每个面都是精简的。我们得出 σ 是精简的，因为 p 对 A2 型态射具有右提升性质。

对于一般情形，我们取一个位于 $p(1 \to 2)$ 上方的标记边，并构造另一个 3-单纯形 Ξ： $\Delta^3 \to X$，使得 $\Xi(1 \to 2)$ 是我们选定的标记边，并且满足 $d_2(\Xi) = \sigma$。由此可知， Ξ 的每个面都是精简的，唯一可能例外的是跳过顶点 1 的面和缺少顶点 2 的面。我们得出，缺少顶点 1 的面是精简的，因为它属于前一种情形。因此， σ 是精简的。 □

3.1 标记缩放单纯集。

在本节中，我们考虑 **MB** 上的单纯集的模型结构 Δ^0，并证明其与 [Lur18] 中给出的缩放单纯集上的模型结构 Quillen 等价。在此过程中，我们将注意到，在这一特定情形下，精简三角形和薄三角形的集合变得多余。为处理这一问题，我们在带有标记边集合以及 一个 三角形集合的单纯集上引入第三种模型结构，并将其称为标记缩放单纯集。

定义 3.31。令 $\left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\Delta^0} = \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$。我们考虑函子 $R : \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}} \to \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{sc}}$，它将一个 **MB** 单纯集 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$ 映射为缩放单纯集 $R(X, E_X, T_X \subseteq C_X) = (X, C_X)$。该函子有一个左伴随 $L : \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{sc}} \to \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$，其定义为 $L(Y, T_Y) = (Y, \flat, \flat \subset T_Y)$。

定理 3.32。 函子 $L : \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{sc}} \to \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$是一个左 *Quillen* 等价。

证明。 显然， L 保持余纤维化和余极限，因此要证明 L 是左 Quillen 函子，只需证明 L 保持弱等价。注意，给定一个对象 $(X, E_X, T_X \subset C_X)$，存在一个无害态射 $(X, E_X, T_X \subset C_X) \to (X, E_X, C_X)$，因为 Δ^0 中的每个三角形都是薄的。利用这一点，容易看出 L 将缩放无害态射映射为 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$ 中的平凡余纤维化。这说明只需证明 L 保持纤维化缩放单纯集之间的弱等价。然而，这显然成立，因为纤维化缩放单纯集之间的弱等价存在一个同伦逆。

为了得出 L 是一个左 Quillen 等价，我们首先注意到，根据定义， $R \circ L = \mathrm{id}$。这表明只需证明，对于任意纤维对象 $(Y, E_Y, T_Y \subseteq C_Y) \in \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$，余单位映射 $LR(Y) \to Y$ 是弱等价。注意，由于我们选取的 MB 单纯集是纤维化的 $C_Y = T_Y$，且 (Y, T_Y) 是一个 ∞-双范畴。特别地，我们看到 $LR(Y) \to Y$是定义 3.3 中类型 (E) 和 (S2) 态射构成的弱饱和类。 □

定义 3.33。 一个标记缩放单纯集记作 (X, E_X, T_X)，由以下内容给出

1. 一个单纯集 X。2. 一个边的集合 $E_X \subseteq X_1$，其中包含所有退化的边。我们将此集合中的元素称为标记的边。3. 一个三角形的集合 $T_X \subseteq X_2$，其中包含所有退化的三角形。我们将此集合中的元素称为薄三角形。

标记缩放单纯集之间的态射 f: $(X, E_X, T_X) \to (Y, E_Y, T_Y)$ 由一个单纯集映射给出，该映射满足 $f(E_X) \subseteq E_Y$且 $f(T_X) \subseteq T_Y$。我们用 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$表示.....的范畴

标记缩放单纯集。

定义 3.34。 生成标记缩放无奇异映射 **MS** 构成的标记缩放单纯集映射集合为

(M1) 内角包含

$$(\Lambda^n_i, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \to (\Delta^n, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}). \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \quad 0 < i < n;$$

(M2) 映射

$$(\Delta^4, \flat, T) \to (\Delta^4, \flat, T \cup \{\Delta^{\{0,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,4\}}\}),$$

其中我们定义

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{\Delta^{\{0,2,4\}},\ \Delta^{\{1,2,3\}},\ \Delta^{\{0,1,3\}},\ \Delta^{\{1,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,2\}}\};$$

(M3) 映射集合

$$\Big(\Lambda^n_0, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

(M4) 初始顶点的包含

$$\Big(\Delta^0, \sharp, \sharp\Big) \to \Big(\Delta^1, \sharp, \sharp\Big).$$

(MS1) 映射

$$\Big(\Delta^2, \{\Delta^{\{0,1\}}, \Delta^{\{1,2\}}\}, \sharp\Big) \to \Big(\Delta^2, \sharp, \sharp\Big).$$

(ME) 对于每个 Kan 复形 K，映射

$$\Big(K, \flat, \sharp\Big) \to \Big(K, \sharp, \sharp\Big).$$

这要求每个等价都是标记态射。

若一个 **MS** 单纯集的映射属于 **MS** 的弱饱和闭包，则称其为**MS**-无害态射。

注记 3.35. 注意，(X, E_X, T_X) 对 **MS**-无害态射类具有右提升性质，当且仅当 X 是一个 ∞-双范畴， E_X 是 X 中等价的集合，且 T_X 是薄三角形的集合。因此，我们也可以将这样的标记缩放单纯集称为 ∞-双范畴。

定义 3.36.若一个标记缩放单纯集之间的态射的底层单纯集映射是余纤维化，则称该态射为余纤维化。

命题 3.37. 设 $f\colon X \to Y$ 是 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$ 中的余纤维化，且 $g\colon A \to B$ 是一个 ***MS***-无害态射。那么推出积

$$X \times B \coprod_{X \times A} Y \times A \longrightarrow Y \times B$$

又是 ***MS***-无害态射。

推论 3.38.给定一个标记双缩放单纯集 X ，它对 ***MS***-无害态射类具有右提升性质，由此可知函子$^{\mathbf{ms}}(A,X)$ *(与备注 3.11相比)* 对每个 ***MS***-无害态射类都具有右提升性质 $A\in$集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$。

定义 3.39。标记缩放单纯集的态射 $i: A\to B$ 称为弱等价，如果对每个 ∞-双范畴 X，诱导映射

$$i^*:\mathrm{Fun}^{\mathbf{ms}}(B,X)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Fun}^{\mathbf{ms}}(A,X)$$

是双范畴等价。

备注 3.40。与之前类似，给定 $K\in$ 集合$^{+}_{\Delta}$ 和 $X\in$ 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$，我们定义张量 $K\times X:=I(K)\times X$，其中 $I(K)=(K,E_K,\sharp)$。类似地，我们定义余张量 $X^K:=$函$^{\mathbf{ms}}(I(K)\ X)$。

定理 3.41。在集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$上存在一个左 *proper* 组合单纯模型范畴，其由以下性质唯一刻画：

C) 态射 $f: X\to Y$ 在集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$中是余纤维化，当且仅当 f 在底层单纯集上诱导一个单态射。
F) 对象 X 在集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$中是纤维化，当且仅当它对标记无害态射类具有右提升性质。

此外，备注 *3.40* 赋予 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$以 集合$^{+}_{\Delta}$ -富集模型范畴的结构。

定理 3.42。 函子 L: 集合$^{\mathbf{sc}}_{\Delta}\to$集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$将缩放单纯集 (X,T_X) 映为标记缩放单纯集 $(X,\flat,T_X)$，是一个左 *Quillen* 等价。

证明。 证明与 定理 3.32 的证明几乎完全相同，故略去。 □

4 局部纤维化

本节将给出（∞，2）-范畴的局部余笛卡尔纤维化的模型无关定义，按我们的术语即局部（0，1）-纤维化。我们将使用 定理 3.23 的模型结构，以（∞，2）-范畴的局部余笛卡尔纤维化理论，来描述为（0，1）-纤维化在（S，M_S）之上，其中（S，T_S）是一个 ∞-双范畴，而 $M_S\subset T_S$是薄三角形的一个子集。

定义 4.1. 设 $(S,\ T_S)$ 是一个 ∞-双范畴，我们将 $M_S\subseteq T_S$ 定义为由满足以下条件的薄三角形组成的子集：边 $\Delta^{\{0,1\}}$ 或边 $\Delta^{\{1,2\}}$ 在 S中是等价。我们称 M_S 中的元素为 S的可逆 2-态射。

注记 4.2. 注意，集合 M_S 已在 [GHL21] 中得到研究，用以给出以下对象的 oplax 幺半函子的定义：∞-双范畴。

定义 4.3. 我们将用粗体字母“ $:=(S,\ T_S)$”来表示纤维化缩放单纯集。

注记 4.4. 在本节中，我们采用如下记号约定：用 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$ 表示 **MB** 单纯集在 S，M_S) 上的范畴，其中 (S，T_S) 是一个 ∞-双范畴，而 M_S 是定义于 定义 4.1 中的 2-单形集合。

命题 4.5。令 p： $X \to S$ 为一个(0,1)-纤维化。我们定义一个缩放单纯集 $\mathbf{X}$，其底层单纯集是 X 的底层单纯集，并规定：当一个三角形在 X 中是精简的，且其在 p 下的像属于 T_S时，该三角形为薄的。则相关函子p： $\mathbf{X} \to \mathbf{S}$ 是一个双范畴纤维化。

证明。显然，p： $\mathbf{X} \to$ “ 对标度无害映射类具有右提升性质，因此可知 $\mathbf{X}$ 自身是一个 ∞-双范畴。为完成证明，我们需要证明 p 是一个等纤维化。给定一个等价 e： $\Delta^1 \to$ “ 以及源 $\Delta^0 \to \mathbf{X}$ 的一个提升，我们可以构造一个标记边 $\hat{}e$： $\Delta^1 \to X$，其位于 e之上。我们注意到，在“中证明 e 为等价所需的 2-单形包含于 M_S 中；特别地，这可用于证明 $\hat{}e$ 是 $\mathbf{X}$中的一个等价。 □

命题 4.6. 设 $p\colon X \to S$ 是一个(0,1)-纤维化。那么，对每一对对象 $a, b \in X$，映射 ∞-范畴上的诱导函子

$$\mathbf{X}(a,b) \longrightarrow \mathbf{S}(p(a),p(b))$$

是一个笛卡尔纤维化。此外，复合函子 $\mathbf{X}(a,b)\times\mathbf{X}(b,c) \to \mathbf{X}(a,c)$ 保笛卡尔边。

证明。我们选取一个模型来表示 ∞-范畴，参见 定义 2.11。给定一个态射 $\alpha\colon \Delta^1 \to \mathbf{S}(p(a)\ p(b))$ 以及目标的一个提升 $g\colon \Delta^0 \to \mathbf{X}(a,b)$，我们可以考虑一个 (A1) 型态射，以在 $\mathbf{X}(a,b)$ 中产生一条在 **MB** 单纯集 X 中精简的边。类似地，我们可以将以下形式的提升问题转化为：

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_n & \longrightarrow & \mathbf{X}(a,\ b) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \text{“}(p(a)\ p(b)) \end{array}$$

其中，顶端水平态射中的最后一条边映射到一个精简的 2-单形，从而对应于以下形式的提升问题

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1}_n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^{n+1} & \longrightarrow & S \end{array}$$

其中三角形 $\Delta^{\{n-1,n,n+1\}}$ 被映射为 X 中的瘦三角形，因而存在解。我们得出结论： $\mathbf{X}(a,b)$ $\to$“$(p(a)\ p(b))$ 是一个笛卡尔纤维化。为完成证明，我们考虑复合函子

$$\mathbf{X}(a,b)\times\mathbf{X}(b,c) \longrightarrow \mathbf{X}(a,c)$$

给定一对笛卡尔边 α： $f \to g$ 和 β： $u \to v$，复合映射得到一个

在 $\mathbf{X}(a,\ c)$ 中形如以下的交换图

$$\begin{array}{ccc} f\circ u & \longrightarrow & f\circ v \\ \downarrow & & \downarrow \\ g\circ u & \longrightarrow & g\circ v \end{array}$$

这说明，只需验证与一个 1-态射前复合和后复合时，笛卡尔 2-态射仍保持为笛卡尔 2-态射。这是因为 p 对于类型为 (A2)的态射具有右提升性质。

□

定义 4.7。 双范畴纤维化 $p:\ \mathbf{X}\to$“ 称为笛卡尔富化的 d if

- 对于每个 $a,\ b\in\mathbf{X}$ 态射 $\mathbf{X}(a,\ b)\to$“$(p(a)\ p(b))$ 都是笛卡尔纤维化。
- 对于每个 $a,\ b,\ c\in\mathbf{X}$ 复合映射 $\mathbf{X}(a,\ b)\times\mathbf{X}(b,\ c)\to\mathbf{X}(a,\ c)$ 保持笛卡尔边。

给定两个笛卡尔富化的双范畴纤维化 p: $\mathbf{X}\to$ “ 和 $q:\mathrm{TM}\to$ “，若函子 $f:\mathbf{X}\to\mathrm{TM}$ 保持映射范畴中的笛卡尔边，则称其为笛卡尔富化的。

定义 4.8。 设 $p:\ \mathbf{X}\to$ “ 是一个双范畴纤维化。若边 $e:\ a\to b$ 属于 $\mathbf{X}$，则称其为局部 (0，1)-笛卡尔边（或局部 (0，1)-笛卡尔边）：

i) 给定 $g:\ a\to c$ in $\mathbf{X}$ and $\sigma:\Delta^2\to$ 中的一个交换图（由薄单纯形表示）“

$$\begin{array}{ccccc} & & p(b) & & \\ & {\scriptstyle p(e)}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \alpha} & \\ p(a) & & \xrightarrow[p(g)]{} & & p(c) \end{array}$$

使得 α 是一个等价，则存在一个态射 $\hat{}\alpha:\ b\to c$ 使得 $p(\hat{}\alpha)=\alpha$，以及一个薄 2-单形 $\hat{}\sigma$，它展示了 $e\circ\ \hat{}\alpha\simeq g$，且满足 $p(\hat{}\sigma)=\sigma$。

ii) 给定任意 $\phi:\ b\to c$，使得 $\phi\circ e\simeq g$，且如上所述满足 $p(\phi)=\alpha$，那么对于任意其他的$\varphi:\ b\to c$，沿 e 前复合会诱导一个空间的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,c)}(\phi,\varphi) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,c)}(\phi\circ e,\varphi\circ e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(b),p(c))}(p(\phi),p(\varphi)) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(a),p(c))}(p(\phi\circ e),p(\varphi\circ e)) \end{array}$$

注 4.9。 我们注意到，位于“中的等价之上的局部 (0,1)-笛卡尔边，必然是 $\mathbf{X}$ 中的等价。此外，局部 (0,1)-笛卡尔边与等价的复合仍是局部 (0,1)-笛卡尔边。

定义 4.10。设 $p:\ \mathbf{X}\to$ “ 是一个双范畴纤维化。若沿 e 的前复合对每个 $c\in\mathbf{X}$ 都诱导出一个拉回图，则称边 $e:\ a\to b$ 是 (0,1)-笛卡尔的，图中为

∞-范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}(b,\ c) & \longrightarrow & \mathbf{X}(a,\ c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{“}(p(b)\ p(c)) & \longrightarrow & \text{“}(p(a)\ p(c)). \end{array}$$

命题 4.11。设 $p:\ \mathbf{X} \to \mathbf{S}$ 是一个双范畴纤维化，并进一步假设 p 是笛卡尔富化的。给定 $\mathbf{X}$ 中的一条边 $e:\ a \to b$，则以下条件等价：

i) 边 e 在局部是 (0,1)-笛卡尔的。

ii) 对于每个 $\ell \in \mathbf{X}$，使得 $p(\ell) = p(b)$，我们有一个 ∞-范畴的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{p(b)}(b,\ell) & \xrightarrow{(-)\circ e} & \mathbf{X}(a,\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{p(e)} & \mathbf{S}(p(a),p(b)) \end{array}$$

其中 $X_{p(b)}$ 是 p 在 $p(b)$ 上的纤维。

iii) 边 e 在沿着 $p(e)$ 的拉回中是 *(0,1)*-笛卡尔的，$\mathbf{X}_{p(e)} = \mathbf{X} \times_{\mathbf{S}} \Delta^1 \to \Delta^1$。

证明。为证明 $i) \implies ii)$，我们注意到，由于 $\mathbf{X}(a,\ell) \to$ “$(p(a)\ p(b))$ 是一个 ∞-范畴的笛卡尔纤维化，因此在 $p(e)$ 上的严格纤维已经是该∞-范畴拉回的一个模型。因此，只需证明映射

$$e^* : \mathbf{X}_{p(b)}(b,\ell) \longrightarrow \mathbf{X}_{p(e)}(a,\ell),$$

是一个 ∞-范畴之间的等价。注意，定义 4.8 中的第一个条件保证 e^* 本质满。给定一对对象 ϕ, $\varphi \in \mathbf{X}_{p(b)}(b,\ \ell)$，由条件$ii)$ 可知，定义 4.8 中有一个空间的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,\ell)}(\phi,\varphi) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,\ell)}(\phi\circ e,\varphi\circ e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(b),p(b))}(p(\phi),p(\varphi)) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(a),p(b))}(p(\phi\circ e),p(\varphi\circ e)) \end{array}$$

因此，特别地，在取纤维之后，我们得到一个空间的同伦等价。

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,\ell)}(\phi,\varphi)_{\mathrm{id}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,\ell)}(\phi\circ e,\varphi\circ e)_{p(e)}$$

我们将其与 e^* 在映射空间上的作用相对应，这便证明了我们的结论。

注意，$ii) \Leftrightarrow iii)$ 可由定义立即得出，因此只需证明 $ii) \implies i)$。

首先注意到，由于 $p:\ \mathbf{X} \to$ “ 是双范畴纤维化，它特别也是等纤维化。因此，为了证明 e 是局部 (0,1)-笛卡尔的，我们将定义 4.8 中的条件具体化到 $p(\alpha)$ 是退化边的情形。取满足 $p(\ell) = p(b)$ 的 $\ell \in \mathbf{X}$，并考虑一条边 $u:\ a \to \ell$，使得 $p(u) \simeq p(e)$ 位于 “$(p(a)\ p(b))$ 中。由于 p 是笛卡尔富集的，我们可以在 $\mathbf{X}(a,\ell)$ 中选取一个等价 $\hat{u} \simeq u$，使得 $p(\hat{u}) = p(e)$。于是，根据我们的假设

瓜拉尼语这保证存在一个对象 $\phi \in \mathbf{X}(b,\ \ell)$，使得 $p(\phi)$ 是退化的，并且使得 t

$$\phi \circ e \simeq \hat{u} \simeq u,$$

这表明定义 4.8 中的第一个条件 $\phi:\ \ b \to \ell$ 在 $\mathbf{X}$ 中，使得 $p(\phi)$ 在 $p(b)$ 上是退化的。为了证明我们得到了所需的空间拉回方块，只需证明对于每个 $\Xi \in \mathrm{Map}^{\mathbf{S}(p(b),p(b))}(p(\phi)\ p(\varphi,$ 相应的纤维上的态射

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,\ell)}(\phi,\varphi)_{\Xi} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,\ell)}(\phi\circ e,\varphi\circ e)_{\Xi\circ p(e)}$$

是一个同伦等价。注意，我们的假设保证，当 Ξ 是恒等态射时，这一结论成立。由于映射 $\mathbf{X}(b,\ \ell) \to$"$(p(b)\ p(b))$ 是一个笛卡尔纤维化，我们选取 $\mathbf{X}(b,\ \ell)$ 中 Ξ 的一个笛卡尔提升，并将其记为 $i:\hat{}\varphi \to \varphi$；我们注意到，$p$ 的富化意味着 $i \circ e$ 仍是 $\mathbf{X}(a,\ \ell)$ 中的一个笛卡尔态射。i 是笛卡尔态射这一事实使我们能够构造一个空间的交换图。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,\ell)}(\phi,\hat{\varphi})_{\mathrm{id}} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,\ell)}(\phi\circ e,\hat{\varphi}\circ e)_{p(e)} \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,\ell)}(\phi,\varphi)_{\Xi} & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,\ell)}(\phi\circ e,\varphi\circ e)_{\Xi\circ p(e)}
\end{array}$$

因此，结论由三取二性质得出。 □

定义 4.12。双范畴纤维化 $p:\ \mathbf{X} \to$"称为局部 (0,1)-纤维化，如果满足以下条件：

1. 映射 p 是笛卡尔富化的（见 定义 4.7）。
2. 对每个 $a \in \mathbf{X}$ 以及每个 $e:\ p(a)\ \to b$ in "，存在一个局部 (0,1)-笛卡尔边 $\hat{}e:\ a \to b$，使得 $p(\hat{}e) = e$。

我们称交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{X} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbf{Y} \\
& {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\
& \mathbf{S} &
\end{array}$$

其中 p和 q是局部 $(0,1)$-纤维化；如果 f是笛卡尔富化纤维化的态射，并且它将 p 中的局部 (0,1)-笛卡尔边映射到 q中的局部 (0,1)-笛卡尔边，则称其为局部 (0,1)-纤维化的态射。

引理 4.13. 设 $p:\ \mathbf{X} \to \mathbf{S}$ 是一个局部 $(0,1)$-纤维化，并考虑$\mathbf{X}$中的一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
a & \xrightarrow{\simeq} & u \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
b & \xrightarrow{\simeq} & v
\end{array}$$

其中水平态射是 $\mathbf{X}$中的等价。那么 f 是一个局部 $(0,1)$-笛卡尔边，当且仅当 g 也是。

证明。 留作练习。 □

定理 4.14。考虑一个由 ∞-双范畴构成的交换图，其中竖直态射是双范畴纤维化

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathbb{S} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{D} \end{array}$$

并且水平态射均为双范畴等价。那么， p 是局部$(0,1)$-纤维化，当且仅当 q 是。

证明。 注意到，我们可以将该图视为 $\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{sc}}$ 的箭范畴中的一个单射纤维化-余纤维化图。这保证了存在弱等价 $\int \to \mathbb{X}$ 和 „ $\to$ “，使得显然的图交换。因此，不失一般性，我们可以假设 q 是一个局部 (0,1)-纤维化。通过考察映射范畴中的相关图，我们得知 p 必须是笛卡尔富集的。为了完成证明，我们需要证明 p 具有充足的局部 (0,1)-笛卡尔边。

首先，我们注意到，我们的交换图实际上是 ∞-双范畴的拉回图。因此，我们有一个弱等价 $\varphi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{P}$，其中 $\hat{}q\colon \mathbb{P} \to$“ 表示沿底部水平态射 q 的严格拉回。由此可知，$\hat{}q$ 是一个局部 (0,1)-纤维化。将 φ 分解为一个余纤维化（它必然是平凡余纤维化）和一个平凡纤维化后，我们不妨假设 φ 是一个平凡余纤维化。于是我们得到一个截面 $\xi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{X}$，使得 $\xi \circ \varphi =$ id。

给定 $a \in \mathbb{X}$ 和一条边 $e\colon p(a) \to b$，在“中我们选取 $\mathbb{P}$ 中 e 的一个以 $\varphi(a)$ 为源的提升，并将其记为 $\hat{}e$。最后，我们考虑 $\xi(\hat{}e) = \tau$。我们断言， τ是 p的局部 (0, 1)-笛卡尔边。为此，我们注意到，由引理 4.13 可知， $\varphi(\tau)$ 是 $\mathbb{P}$的局部 (0, 1)-笛卡尔边。截面 ξ的存在以及 $\varphi(\tau)$ 是局部 (0, 1)-笛卡尔这一事实表明，定义 4.8 中的条件i)成立。第二个条件直接由 φ 是双范畴等价这一事实得出。 □

引理 4.15。 设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{S}$ 是局部$(0,1)$-纤维化。设 $\sigma\colon \Delta^2 \to \mathbb{X}$ 是一个 *2*-单形，其在 $\mathbb{X}(\sigma(0)\ \sigma(2))$ 中的关联 *2*-态射是笛卡尔的。给定一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{F}_{\mathbb{X}} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \Delta^n & \longrightarrow & S \end{array}$$

使得 φ 对 $\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}$ 的限制等于 σ，那么虚线箭头就存在。

证明。 根据 定理 4.14 我们可以假设函子具有如下形式： $p\colon \mathrm{N}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{C}) \to \mathrm{N}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{D})$。由此可知，我们的提升问题等价于

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Lambda_i^n](0,n) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\varphi(0),\varphi(n)) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n](0,n) & \longrightarrow & \mathbb{D}(p\varphi(0),p\varphi(n)). \end{array}$$

我们得出虚线箭头存在，因为左侧可以在笛卡尔模型结构中写成无害态射的迭代推出。

□

定义 4.16。设 $\pi:\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是 ∞-范畴的一个纤维化。我们称对象 $x\in\mathcal{C}$ 是 p-初始 的，如果对于每个 $y\in\mathcal{C}$，函子 π 给出一个同伦等价 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,\ y)\ \simeq\mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(\pi(x)\ \pi(y))$。

注 4.17。注意到，上述对象 $x\in\mathcal{C}$ 是 p-初始的，当且仅当对于每个 $n\geqslant 1$，提升问题

$$\begin{array}{ccc}\partial\Delta^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathcal{D}\end{array}$$

在 $\varphi(0)\ =x$ 时有解。

引理 4.18。设 $p:\ \mathbb{X}\to\mathbb{S}$ 是一个局部$(0,1)$-纤维化。那么，边 $e:\ \Delta^1\to\mathbb{X}$ 是局部$(0,1)$-笛卡尔的，当且仅当对于每个 $n\geqslant 2$，形如以下的提升问题

$$\begin{array}{ccc}\Lambda^n_0 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X}\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p}\\ \Delta^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{S}\end{array}$$

在满足 $\varphi(0\to 1)\ =e$、$\varphi(0\to 1\to n)$ 在 $n\geqslant 2$ 且 $\phi(1\to n)$ 是$\mathbb{S}$中的等价时有解。如果 $n=2$，我们要求 $\phi(0\to 1\to n)$ 是薄的，$\phi(1\to n)$ 是 $\mathbb{S}$ 中的等价，并且我们的解是 $\mathbb{X}$ 中的薄单纯形。

证明。首先注意，如果我们能够为那些提升问题构造解，e 限制到 Δ^1 ,之后必定是一个 (0,且断言由 命题 4.11 得出。现在证明逆向结论。

显然，情形 $n=2$ 恰好是定义 4.8中的第一个条件。为处理情形 $n\geqslant 3$，我们再次假设 $p:\mathrm{N}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{C})\ \to\mathrm{N}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{D})$。注意，由于$\varphi(0\to 1\to n)$ 是薄的，我们可以解这个提升问题

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Lambda^n_0](0,n) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\varphi(0),\varphi(n))\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n](0,n) & \longrightarrow & \mathbb{D}(p\varphi(0),p\varphi(n)).\end{array}$$

为完成证明，我们必须证明可以构造出下方的虚线箭头

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Lambda^n_0](1,n) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\varphi(1),\varphi(n))\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle\phi}\\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n](1,n) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\varphi(0),\varphi(n)\times_{\mathbb{D}(p\varphi(0),\varphi(n))}\mathbb{D}(p\varphi(1),p\varphi(n)).\end{array}$$

然而，根据 ii）和定义 4.8，左侧的对象 $1n$ 被映射到一个 ϕ-初始对象中，该对象位于$\mathbb{C}(\varphi$ (1) $\varphi(n)$ 中。由于最左侧的垂直映射可通过沿边界包含进行迭代推出 $\partial\Delta^n\to\Delta^n$得到，且初始对象始终是 $1n$，因此我们可以构造出上方的虚线箭头。

□

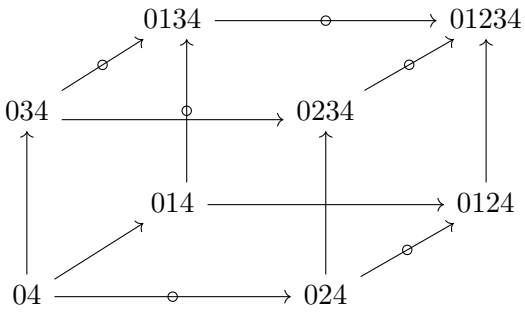
引理 4.19. 设 $p:\ \mathbb{X}\to\mathbb{S}$ 是一个局部 $(0,1)$-纤维化。假设给定一个简单的 x

σ： $\Delta^4 \to \mathbb{X}$ 使得以下三角形族

$$T = \{\Delta^{\{0,2,4\}},\ \Delta^{\{1,2,3\}},\ \Delta^{\{0,1,3\}},\ \Delta^{\{1,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,2\}}\}$$

被映射到表示相应映射范畴中的笛卡尔 2-态射的 2-单形。于是，三角形 $\Delta^{\{0,1,4\}}$ 和 $\Delta^{\{0,3,4\}}$ 也表示$\mathbb{X}$（$\sigma(0)$ σ(4)）中的笛卡尔 2-态射。

证明。 如常，我们假设我们的函子形式为 p : N^{sc}(f) $\to$ N^{sc}(„)。这使我们能够将问题归结为证明 P $= \mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}[\Delta^4]$(0，4) 中的某些边被映射到 f($\sigma$(0) σ(4)) 中的笛卡尔边。更具体地说，我们将 P 视为如下偏序集



其中，带圆圈的箭头根据假设被映射为笛卡尔边（注意，要看出这一点，关键在于使用 p 是笛卡尔富化的这一事实），而我们希望证明 $04 \to 014$ 和 $04 \to 034$被映射到 f(σ(0) σ(4)) 中的笛卡尔边。

由于 $\pi : \mathbb{C}(\sigma(0)\ \sigma(4)) \to \mathbb{D}(p\sigma(0)\ p\sigma$(4)) 是一个笛卡尔纤维化，这等价于要求某些态射在纤维 $\pi(04) = \alpha$中是等价。利用π 的函子性，我们可以将上面的图移到纤维 α 中的一个图，此时圈出的箭头都是等价。容易看出，我们现在可以像命题 3.1.13 中那样构造一个逆映射，见 [Lur18]。 □

定理 4.20。 设 p: $X \to S$ 是 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$中的一个纤维对象。则它所关联的缩放单纯集映射（见命题 4.5） p : $\mathbb{X} \to \mathbb{S}$ 是一个局部 (0,1)-纤维化。反过来，任意局部 (0,1)-纤维化都自然地定义了 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$中的一个纤维对象。

证明。 设 p : $X \to S$ 是一个 (0,1)-局部纤维化。由 命题 4.5 和命题 4.6 可知 p : $\mathbb{X} \to \mathbb{S}$ 是笛卡尔富化的。要证明所讨论的映射定义了一个局部 (0, 1)-纤维化，只需证明 X 中的标记边是局部 (0,1)-笛卡尔边。然而，很容易看出，标记边 e 是 ,上的 (0,1)-笛卡尔边， Δ^1 因此结论成立。

为了证明逆命题，我们需要从局部 (0,1)-纤维化 $p : \mathbb{X} \to$ “ 构造一个 $\left(\text{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的纤维对象。我们如下定义一个 MB-单纯集 $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$：

- $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ 的底层单纯集合是 $\mathbb{X}$。
- 当且仅当一条边是 $\mathbb{X}$中的局部 (0,1)-笛卡尔边时，才将其标记。
- 若一个三角形所关联的 2-态射是 $\mathbb{X}(a, b)$ 中的笛卡尔边，则称该三角形是精简的。
- 若一个三角形是精简的，且其在“中的像属于 M_S，则称它为薄三角形。

这个定义显然给出了一个映射 $q\colon \mathrm{F}_{\mathbf{X}} \to (S, \sharp, M_S \subseteq \sharp)$，因此只需证明 q 对 定义 3.3中的态射类具有右提升性质。这由引理 4.15 和引理 4.18 可知，q 对(A1) 和(A3) 型的态射具有右提升性质，见定义 3.3。引理 5.26 表明 q 对(A2)型的态射类具有右提升性质。其余提升问题可立即得出，因此我们的结果得证。

□

命题 4.21。设 $f\colon \mathbf{X} \to \mathrm{TM}$ 是局部 (0,1)-纤维化之间的一个态射。则以下条件等价：

i) 映射 f 是一个双范畴等价。

ii) 对每个 $s \in \mathbb{S}$ 映射 f 在纤维 $f_s\colon \mathbf{X}_s \xrightarrow{\simeq} \mathrm{TM}_s$上诱导一个等价。

证明。假设 f 是一个双范畴等价，并令 $s \in$“。首先证明 f_s是本质满的。给定 $y_s \in \mathrm{TM}_s$，利用 f 是本质满的这一事实，取某个 $x \in \mathbf{X}$使得 $f(x) \simeq y$。记等价 $f(x) \simeq y$在 $q\colon \mathrm{TM} \to$“ 下的像为 u，并利用 $p\colon \mathbf{X} \to$ “ 是等纤维化这一事实，得到一个等价 $v\colon x \to x_s$，其中 $p(x_s) = s$。由此可知 $f(v)$ 仍是一个等价，因而在 TM 中定义了一个局部 (0, 1)-笛卡尔边，据此可以构造一个等价 $f(x_s) \simeq y_s$，其位于 s上的恒等映射之上。为证明 f_s 的全忠实性，我们考虑 $a, b \in \mathbf{X}_s$，并注意到由于我们有一个笛卡尔纤维化的映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}(a, b) & \longrightarrow & \mathrm{TM}(f(a) f(b)) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \text{“}(s, s) & \end{array}$$

根据假设，这是一个等价。由此可知，对 s上的恒等映射取纤维后，我们仍得到一个等价。随后，利用命题 4.11，可将此态射识别为映射

$$\mathbf{X}_s(a, b) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Y}_s(f(a), f(b))$$

这表明 f_s 是完全忠实的。

证明逆命题成立。注意，根据假设，f 已经是本质满的。因此，只需证明，对于每个 $a, b \in \mathbf{X}$ 以及每个 $\alpha\colon p(a) \to p(b)$，纤维上的诱导态射

$$\mathbf{X}(a, b)_\alpha \longrightarrow \mathbf{Y}(f(a), f(b))_\alpha$$

是一个范畴等价。通过选取一个笛卡尔提升 $e\colon a \to \hat{b}$ 使得 $p(e) = \alpha$ 我们可以再次使用 命题 4.11 构造一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}_{p(b)}(\hat{b}, b) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{Y}_{p(b)}(f(\hat{b}), f(b)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbf{X}(a, b)_\alpha & \longrightarrow & \mathbf{Y}(f(a), f(b))_\alpha \end{array}$$

其中我们使用三取二性质得出底部的水平态射是弱等价，从而我们的断言成立。

□

命题 4.22。设 T 是一个缩放单纯集，并考虑 $f\colon X \to Y$ 在 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/T}$ 中的(0, 1)-纤维化态射。进一步假设满足以下条件：

1. 映射 f 对***MB***-无害态射类具有右提升性质 *s.*

2. 对于每个 $t \in T$，诱导态射 $f_t\colon \ X_t \to Y_t$ 都是双范畴等价。

那么 f 是***MB***-单纯集之间的平凡纤维化。

证明。 我们断言， f 是 MB-单纯集之间的平凡纤维化，当且仅当对于每个最小标度单纯形 $\Delta^n_\flat$ 以及每个态射 $\sigma : \Delta^n_\flat \to T$，限制态射

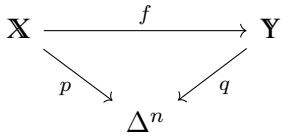
$$f_{|\sigma} : X \times_{\Delta^n_\flat} \Delta^n_\flat \longrightarrow Y \times_{\Delta^n_\flat} \Delta^n_\flat$$

是MB-单纯集之间的平凡纤维化。一个方向显然成立。假设$f_{|\sigma}$ 总是平凡纤维化。那么显然，f 对以下态射具有右提升性质：

- $(\partial\Delta^n,\ \flat,\ \flat) \to (\Delta^n,\ \flat,\ \flat)$。
- $(\Delta^2,\ \flat,\ \flat) \to (\Delta^2,\ \flat,\ \flat \subset \sharp)$。
- $(\Delta^1,\ \flat,\ \sharp) \to (\Delta^1,\ \sharp,\ \sharp)$。

由于 X 中的薄三角形就是位于 T 中某个薄三角形之上的精简三角形，因此 f 也能检测薄三角形，结论成立。

不失一般性，设 $T = \Delta^n_\flat$ 并考虑相应的图表（参见 定理 4.20）中的局部 (0,1)-纤维化



首先，我们来证明 f 是一个 ∞-双范畴之间的平凡纤维化。注意，我们的假设结合 命题 4.21 意味着 f 是一个双范畴等价。此外， f 对于 定义 2.3 中给出的已缩放无角映射类，具有右提升性质。因此，只需证明 f 是一个等纤维化。给定 e 中的一个等价： $\Delta^1 \to \mathrm{TM}$，可知它在 Δ^n 中的像必定是退化的。由于该提升问题发生在一个纤维中，并且根据我们的假设，映射 $f_t : X_t \to Y_t$ 是缩放单纯集之间的平凡纤维化，因此可知 f 是一个等纤维化。

为完成该证明，我们必须证明 f 检测局部 (0,1)-笛卡尔边。给定一条边e： $\Delta^1 \to \mathbf{X}$，使得 $f(e)$ 是一条局部 $(0,1)$-笛卡尔边，我们考虑一条局部 $(0,1)$-笛卡尔边 u： $\Delta^1 \to \mathbf{X}$，使得 $u(0) = e(0)$，并且使得 $f(u) = f(e)$。由此可知，存在一条边 α： $u(1) \to e(1)$，使得 $\alpha \circ u \simeq e$。此外， $p(\alpha)$ 是一个等价，并且位于 Δ^n 中一个退化态射之上。因此我们看到， α 必定是 $\mathbf{X}$ 中的一个等价，因而e 是一条局部 (0,1)-笛卡尔边。 □

定义 4.23. 设 $p : \mathbf{X} \to$ “ 是一个双范畴纤维化，且设 $\sigma : \Delta^2 \to$ “ 是一个薄三角形。我们称 $e : a \to b$ 中位于 $\sigma(0 \to 1)$ 之上的一条边 $\mathbf{X}$ 为 σ- 局部的，如果满足以下条件：

i) 对于每个位于 $\sigma(1 \to 2)$ 上方的 $\mathbf{X}$ 中的 $a \to c : g$，都存在某个 $b \to c : \alpha$，以及一个薄单纯形 θ，它展示了 $e \circ \hat{}\alpha \simeq g$，使得 $p(\theta) = \sigma$。

ii) 对于任意 $b \to c : \phi$，若 $e \circ \phi \simeq g$，且其关联单纯形为 τ，并满足 $p(\tau) = \sigma$；对于任意 $b \to c : \varphi$，沿 e 的前复合都会诱导出一个空间的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,c)}(\phi,\varphi) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,c)}(\phi\circ e,\varphi\circ e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(b),p(c))}(p(\phi),p(\varphi)) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(a),p(c))}(p(\phi\circ e),p(\varphi\circ e)). \end{array}$$

注记 4.24。注意到 定义 4.23 表明，一条边是 (0,1)-笛卡尔态射，当且仅当它对于每个薄单纯形 σ都是 σ -局部的：$\Delta^2 \to \mathbf{S}$。类似地，一条边是局部 (0,1)-笛卡尔态射，当且仅当它对于每个可逆 2-态射都是 σ-局部的（参见 定义 4.1）。

命题 4.25。设 $p : \mathbf{X} \to \mathbf{S}$ 是一个局部 $(0,1)$-纤维化。那么，一个局部 $(0,1)$-笛卡尔边，$e : a \to b$ 是 σ-局部的，当且仅当对于每个局部 $(0,1)$-笛卡尔边 $u : b \to c$，只要复合 $v \simeq u \circ e$ 位于 σ 之上，那么 v 也必定是一个局部 $(0,1)$-笛卡尔边。

证明。我们假设 e 是 σ-局部的，并假设我们有 u 和 v 如上所述。假设我们有 $h : a \to d$ 并证明条件 i）满足 定义 4.8 。

由于 p 是局部 (0,1)-纤维化，因而特别是笛卡尔富化的，我们只需证明沿 $p(v)$ 拉回后，v 是 (0,1)-笛卡尔的。因此，不失一般性，我们可以假设 $p(h) = p(v)$。注意到，由于 e 是 σ-局部的，我们可以得到一个态射$\alpha : b \to d$，使得 $\alpha \circ e \simeq h$。此外，我们可以利用 u 是局部 (0,1)- 笛卡尔边这一点，得到一个态射 $\phi : c \to d$，使得 $\alpha \simeq \phi \circ u$。由此可得 $h \simeq v \circ \phi$，因此第一个条件成立。

给定如上所述的 $\phi : c \to d$，以及另一个满足 $p(\varphi) = \mathrm{id}$ 的 $\varphi : c \to d$，我们构造如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(c,d)}(\phi,\varphi) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,d)}(\phi\circ u,\varphi\circ u) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,d)}(\phi\circ v,\varphi\circ v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(c),p(d))}(\mathrm{id},\mathrm{id}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(b),p(d))}(p(u),p(u)) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathbf{S}(p(a),p(d))}(p(v),p(v)) \end{array}$$

注意到，外层交换图是通过拼接两个拉回图得到的，因此它本身也必定是一个拉回图。由此可得，v 是局部 (0,1)-笛卡尔边。

现在我们希望证明逆命题成立。设 $h : a \to d$ 是位于 σ（$0 \to 2$）之上的一条边。我们取 σ（$1 \to 2$）的一个局部（0, 1）-笛卡尔提升 $u : b \to c$。由于根据假设，$v \simeq u \circ e$ 再次是局部（0, 1）-笛卡尔的，我们得到某个 $\Xi : c \to d$，使得 $h \simeq \Xi \circ v$。于是我们可以令$\phi = \Xi \circ u$。显然，此时 $\phi \circ e = \Xi \circ u \circ e \simeq \Xi \circ v \simeq h$，因此定义 4.23 中的条件 i) 得到满足。设 $\phi : b \to d$ 如上，并假设给定任意另一个 $\varphi : b \to d$。我们希望证明，定义 4.23 中相关的交换图（见 ii）是空间的笛卡尔图。注意到，完全类似于命题 4.11 中的论证表明，只需证明相关的纤维映射

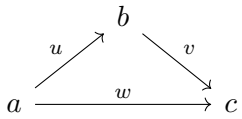
$$\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,d)}(\phi,\varphi)_{p(u)} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,e)}(\phi\circ e,\varphi\circ e)_{p(v)}$$

当 $p(\phi) = p(\varphi)$ 时是等价。由于 u 是局部 (0，1)-笛卡尔边，我们可以找到 ~ ~
态射 ϕ，$\widetilde{\varphi} : c \to d$，使得 $\phi \circ u \simeq \phi$ 且 $\widetilde{\varphi} \circ u = \varphi$。然后我们可以构造这些态射

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{X}(c,d)}(\widetilde{\phi},\widetilde{\varphi})_{\mathrm{id}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(b,d)}(\phi,\varphi)_{p(u)} \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbf{X}(a,e)}(\phi\circ e,\varphi\circ e)_{p(v)}.$$

我们注意到，复合映射也必定是弱等价，从而完成证明，因为根据假设，v 是局部 (0，1)-笛卡尔边。 □

定义 4.26。 设 $\mathbf{S}$ 是一个 ∞-双范畴，并设 U 是 $\mathbf{S}$ 中包含 $\mathbf{S}$ 的可逆 2-态射的薄三角形子集（见 定义 4.1）。我们称局部 $(0,1)$-纤维化 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbf{S}$ 是 $\mathcal{U}$-局部的，若对于一对局部 $(0,1)$-笛卡尔边 $u, v\colon \Delta^1 \to \mathbb{X}$以及下图所示的一个薄 2-单形 σ

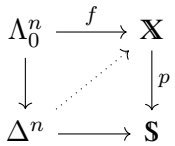


使得 $p(\sigma) \in \mathrm{U}$，那么 w 也是局部 (0,1)-笛卡尔的。如果 U 由所有薄三角形构成，我们称 $p\colon \mathbb{X} \to$ “ 是一个 (0,1)-笛卡尔纤维化。

定理 4.27。 设 (S, T_S) 是一个纤维化标度单纯集，且设 $U \subset T_S$ 是一个包含所有可逆 2-态射的子集，记为 $\overline{S} = (S, U)$。给定一个纤维对象 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/\overline{S}}$，则其关联的缩放单纯集映射 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbf{S}$ 定义了一个$\mathcal{U}$-局部纤维化。反过来，任意$\mathcal{U}$-局部纤维化都唯一地确定 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/\overline{S}}$中的一个纤维对象。

证明。 假设我们给定了 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/\overline{S}}$中的一个纤维化对象。特别地，我们可以使用定理 4.20 来得到一个局部 (0,1)-纤维化 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbf{S}$。由于原对象对于类 (S1) 具有右提升性质，因此，我们的局部 (0,1)-笛卡尔边在位于 $\mathcal{U}$ 中的三角形上方的三角形间复合，结论得证。

现在我们证明反向结论。注意，由于命题 4.25 ，我们的局部 (0,1)-笛卡尔边相对于 σ中的元素是 σ-局部的$\mathcal{U}$。我们唯一需要证明的是，给定一个 $\mathcal{U}$-局部纤维化，我们可以构造出下方的虚线箭头



其中 $f(0 \to 1)$ 是局部 (0,1)-笛卡尔的，而 $f(0 \to 1 \to n)$ 落在 $\mathcal{U}$中。这个事实的证明与引理 4.18 中的证明基本相同，因此留作练习。 □

5 格罗滕迪克构造

令 $S = (S, T_S)$ 为一个已缩放单纯集，并令 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S]$ 表示其缩放刚性化（定义 2.7）(S, T_S)。本节的目标是证明以下定理。

定理 6。 令 S 为一个已缩放单纯集。则存在一个 *Quillen* 等价

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_S : \left(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}) : \mathbb{U}\mathrm{n}_S$$

在 (0,1)-笛卡尔纤维化（定义于 S 上）与取值于标记缩放单纯集的 集合$_{\Delta}^{+}$ -富集函子的投射模型结构之间。

首先，我们要定义左伴随 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S$，它将是第 3 节中构造的直化函子的一个 2-范畴增强版本，见 [Lur18]。介绍主要构造之前，我们需要先给出一些预备定义。

定义 5.1. 设 X, $Y \in$ 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$。我们如下定义 Gray 张量积 $X \otimes Y \in$ 集合$^{\mathrm{sc}}_{\Delta}$（参见 [GHL22b]中的定义 4.1.1）：

1. $X \otimes Y$ 的底层单纯集合定义为 $X \times Y$，即底层单纯集合的笛卡尔积。

2. 给定一个单纯形 $\sigma : \Delta^2 \to X \otimes Y$，记 σ_X 和 σ_Y 为笛卡尔积中相应因子的投影。我们称 σ 在 $X \otimes Y$ 中是已缩放的，当且仅当满足以下条件：i) 单纯形 σ 在 X 和 Y 中均是已缩放的。ii) 限制 $\sigma_X(1 \to 2)$ 在 X 中是标记的，或者 限制 $\sigma_Y(0 \to 1)$ 在Y 中是标记的。

定义 5.2. 设 $n \geqslant 0$。我们如下定义偏序集 P_n：

- 这些对象由子集 $S \subseteq [n]$ 给出，满足 $S \neq \varnothing$ 且 $\max(S) = n$。
- 我们通过如下方式在 P_n 上定义一个偏序：当 $\min(S) \leqslant \min(T)$，且存在某个 U满足 $\min(U) = \min(S)$ 和 $\max(U) = \min(T)$，并且 $S \subseteq U \cup T$时，声明 $S \leqslant T$。

注记 5.3. 注意，在上述定义中，$U \leqslant V$当且仅当 $\min(U) \leqslant \min(V)$，并且对于每个满足 $x \geqslant \min(V)$ 的 $x \in U$，都有 $x \in V$。此外，我们可以将 P_n 中无法分解为 $U < W < V$ 的那些不等式$U < V$ 识别为

O1) 我们有 $U < V$，其中 $\min(U) = \min(V)$，且 $V = U \cup \{s\}$。

O2) 我们有 $U < V$，其中 $V = U \setminus \min(U)$，且 $\min(V) = \min(U) + 1$。

注 5.4。我们注意到，给定 S, $T \in P_n$ 使得 $S \leqslant T$，我们可以有如上所述的若干子集U，使得 $S \subseteq U \cup T$。此外，我们可以按包含关系对这些子集排序，并定义$U_{S,\,T}$为满足 $S \subseteq U_{S,\,T} \cup T$的最小子集。令 $\min S = s$，并令 $\min T = t$，于是我们可以将其描述为$U_{S,\,T} = \{s,\ t\} \cup \{s < i < t \mid i \in S\}$。

定义 5.5。令 $\mathrm{P}_n = \mathrm{N}(P_n)$。我们如下将 P_n 提升为一个缩放单纯集。给定由 $S \leqslant T \leqslant W$ 表示的 2- 单形 σ，若 $U_{S,\,W} = U_{S,\,T} \cup U_{T,\,W}$，则我们声明 σ 为薄的。

注 5.6。令 $\Delta^n_\flat = (\Delta^n,\ \flat,\ \flat)$，并令 $\Delta^1 \otimes_\flat \Delta^n = \Delta^1_\flat \otimes \Delta^n_\flat$。我们考虑 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1 \otimes_\flat \Delta^n]$。回顾一下，给定 $(i,\ j) \leqslant (k,\ \ell)$，在 $\Delta^1 \times \Delta^n$ 中，我们有 $(i,\ j)$，$(k,\ \ell))$ 由链 C 的偏序集的神经给出。

$$(i,j) = (i_0,j_0) < (i_1,j_1) < \cdots < (i_{\alpha-1},j_{\alpha-1}) < (i_\alpha,j_\alpha) = (k,\ell)$$

按细化排序。假设 $i = 0$ 且 $k = 1$。那么，给定一条链 $C = \{(i_\alpha, j_\alpha)\}_{\alpha \in A}$，我们可以将 m_C 定义为 A 中满足 $i_{m_C} = 0$的最大指标。由此我们可以定义一个映射

$$\pi_{j,\ell} : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1 \otimes_\flat \Delta^n]\,((0,j),(1,\ell)) \longrightarrow \mathcal{P}_{[j,\ell]},\ \ C \mapsto \bigcup_{\alpha \geqslant m_C} j_\alpha.$$

显然，这个赋值是偏序集的一个映射，它将我们映射单纯集中的标记边映到 $\mathbf{P}_{[j,l]}$中的恒等映射。我们使用映射 $\pi_{j,\ell}$ ，为左侧赋予由 $\mathbf{P}_{[j,l]}$诱导的缩放。

定义 5.7。我们通过指定集合$\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}$的余极限下生成元的取值，定义一个保余极限函子 $\Pi : \mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}} \to \mathbf{Cat}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$，其值取在集合$\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$-富化范畴的范畴中，如下所示：

1) 给定一个极小标记且双重缩放的单纯形 $\Delta^n_\flat = (\Delta^n, \flat, \flat)$，我们定义 $\Pi(\Delta^n)$ 的底层集合$^+_\Delta$-范畴为 $\Delta^1 \otimes_\Pi \Delta^n$ 的缩放刚性化，其中后者表示注 5.6 中定义的 Gray 张量积 $\Delta^1 \otimes_\flat \Delta^n$ ，并额外将 $\Delta^{\{0\}} \times \Delta^n$ 中包含的所有 2-单形作为缩放。给定 $\Pi(\Delta^n_\flat)$ 中的 $(i, j) < (k, \ell)$，我们通过规定当且仅当 $i \neq 0$ 和 $k \neq 1$时每个三角形都已缩放，为映射单纯集赋予缩放。若 $i = 0$ 且 $k = 1$，则我们按照注 5.6 对 $\Pi(\Delta^n_\flat)((0, j), (1, \ell))$ 进行缩放。

2) 给定一个精简的已缩放 2-单形，即 $\Delta^2_\dagger = (\Delta^2, \flat, \flat \subset \sharp)$，我们通过缩放映射单纯集中的每个三角形，定义 $\Pi(\Delta^2_\dagger)$，它来自 $\Pi(\Delta^2_\flat)$。

3) 给定一个薄的已缩放 2-单形，即 $\Delta^2_\sharp = (\Delta^2, \flat, \sharp)$，我们通过额外标记 $\Pi(\Delta^2_\sharp)$，从 $\Pi(\Delta^2_\dagger)$ 得到：将 $\Pi(\Delta^2_\sharp)((0, 0), (1, 2))$ 中的每个态射标记出来，这些态射在 注 5.6 中的映射作用下映至 $02 \to 012$ 中的态射 。

4) 给定一条标记边 $(\Delta^1)^\sharp = (\Delta^1, \sharp)$，我们可以将 $\Pi((\Delta^1)^\sharp) = \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1 \times \Delta^1]$ 识别为 .

容易验证，我们对装饰的选择与复合相容，因此我们的定义给出了良定义的 $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$-富化范畴；而且我们的定义在 $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}$的生成元集合上是函子性的。由于 $\mathbf{Cat}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$是余完备的，我们的函子可以通过余极限延拓，因此该定义是完备的。

定义 5.8。令 $j : \mathbf{Cat}^+_\Delta \to \mathbf{Cat}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$为一个函子，它对映射单纯集中的每个 2-单形进行缩放。给定一个缩放单纯集 S ，我们定义一个函子

$$\Pi_S : \left(\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} \longrightarrow \mathbf{Cat}_{\Delta}^{\mathbf{ms}},\ X \mapsto \Pi(X) \coprod_{j\circ\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[X]} j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S]$$

其中 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[X]$ 表示 X 的底层缩放单纯集的缩放刚性化，而态射 $j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[X] \to \Pi(X)$由 $\Delta^{\{1\}} \times X$的包含给出。

我们进一步定义一个函子，

$$C_S : \left(\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} \to \mathbf{Cat}_{\Delta}^{\mathbf{ms}},\ X \mapsto \Pi_S(X) \coprod_{j\circ\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[X_\sharp]} \Delta^0$$

其中 $X_\sharp$ 表示赋予最大缩放的 X 底层缩放单纯集，而态射 $j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[X_\sharp] \to \Pi_S(X)$由包含 $\Delta^0 \times X_\sharp \to \Delta^1 \otimes_\Pi X$诱导。

注 5.9. 从此处起，我们将省略记号 $j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}$ ，并将 $\mathbf{Set}^+_\Delta$ -富化范畴视为 $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{ms}}$-富化范畴的全子范畴，该子范畴由映射单纯集均为完全已缩放的那些富化范畴构成。

注记 **5.10.** 设 $f\colon S \to S'$ 是一个缩放单纯集之间的映射。给定 $p\colon X \to S$ 属于 $\left(\text{集合}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$

我们断言存在一个 $\mathsf{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$-富化范畴之间的同构

$$C_S(X) \coprod_{\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S]} \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S'] \xrightarrow{\simeq} C_{S'}(f_!X),$$

其中 $f_!X$ 表示函子 C'_S 在对象 $f \circ p\colon X \to S'$ 处的值。底层集合$^+_\Delta$-范畴上的同构是显然的。唯一需要证明的是，对于形如 $C_{S'}(f_!X)((0,x),(1,s'))$ 的映射单纯集，两个集合$^{\mathbf{ms}}_\Delta$-富化范畴中的缩放相同。这一点通过直接检查即可得出，因为这些单纯集上的缩放（它不经过对象 $(1,s)$ 和 $(1,s')$ 之间的某个映射单纯集分解）与基底无关。

定义 5.11。我们将 v 称为 $C_S(X)$ 定义中的坍缩点。于是，对于每个 $p\colon X \to S$ 以及集合$^+_\Delta$富化范畴之间的每个态射 $\phi : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to \mathcal{C}$，我们可以定义一个函子

$$\mathbb{St}_\phi(X) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}},\ \ c \mapsto \mathrm{Map}_{C_\phi}(v,c),\ \ \text{where } C_\phi := C_S(X) \coprod_{\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S]} \mathcal{C},$$

我们将其称为 $p\colon X \to S$ 的直化 。此定义延拓为一个函子

$$\mathbb{St}_\phi : \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}})$$

其值落在 Set^+_Δ-富集函子范畴中。如果 ϕ 是一个同构，我们将使用记号 St_S。

注记 5.12。容易验证，St^ϕ 保持 $\left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$ 中的所有余极限。由伴随函子定理可知，存在一个函子

$$\mathbb{Un}_\phi : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}) \longrightarrow \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S}$$

我们称之为反直化 函子。

命题 5.13。 设 $f\colon S \to S'$ 是缩放单纯集的一个映射，也是以下 Set^+_Δ-富化范畴的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] & \xrightarrow{\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[f]} & \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S'] \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathcal{C}' \end{array}$$

那么下图在可逆自然变换意义下交换

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S} & \xrightarrow{\mathbb{St}_\phi} & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}) \\ \downarrow{\scriptstyle f_!} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_!} \\ \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/S'} & \xrightarrow{\mathbb{St}_{\phi'}} & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}) \end{array}$$

其中 $\psi_!$ 是限制函子 ψ^* 的左伴随。

证明。令 $\theta = \psi \circ \phi$。由直接检查并结合注 5.10 可得 $\mathrm{St}'_{\phi} \circ f_! \simeq \mathrm{St}_{\theta}$。为完成证明，我们必须证明 $\psi_! \circ \mathrm{St}_{\phi} \simeq \mathrm{St}_{\theta}$。显然，两个函子除了可能在缩放上有所不同外，其他方面都一致。然而，给定 $p : X \to S$，$\mathrm{St}_{\theta}(X)(c')$ 中的缩放由 $\Pi(X)$ 的某些映射单纯集中的缩放自由生成，因此结论成立。 □

注记 5.14。注意，在上述情形下，取右伴随后，我们得到函子 $\mathrm{Un}_{\phi} \circ \psi^* \simeq f^* \circ \mathrm{Un}_{\phi'}$的等价关系。

引理 5.15。对于任意单纯集 (S, T_S)，函子 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S$ 保余纤维化。

证明。由于 St_S 保余极限，因此只需证明由定义 3.9 中给出的生成类余纤维化所组成的情形。此外，给定一个余纤维化 $\alpha : A \to B$，我们可以使用命题 5.13 将问题化归到 $S = B$的情形。$\varnothing \to \Delta^0$ 的情形显然成立。对于其余生成元，我们有 $B = (\Delta^n, \flat)$（当 $n \geqslant 1$ 时），或 $B = (\Delta^2, \sharp)$，并且映射 $\mathrm{St}_B A(i) \to \mathrm{St}_B B(i)$ 除非 $i = n$ 外都是恒等映射；在该情形下，此映射是一个余纤维化。立即可见，在这种情形下，映射 $\mathrm{St}_B A \to \mathrm{St}_B B$ 对平凡纤维化类具有左提升性质。 □

注记 5.16. 令 $\iota : \mathrm{Set}^+_{\Delta} \to \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$为由 $\iota(X, E_X) = (X, E_X, \sharp)$ 定义的函子。给定一个已缩放单纯集 (S, T_S)，令 $\iota_* \mathrm{St}_S : \left(\mathrm{Set}^+_{\Delta}\right)_{/S} \to \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta})$ 为定义 3.5.4 中给出的直化函子，该函子在 [Lur 18] 之后与富集函子 ι复合。回忆函子 R 的定义（见定义 3.28），于是我们可以定义一个函子

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_S \circ R : \left(\mathrm{Set}^+_{\Delta}\right)_{/S} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}).$$

由此可知，$\iota_* \mathrm{St}_S$ 与 $\mathrm{St}_S \circ R$ 的差异仅在于缩放，因此诱导出一个自然变换$\eta_S : \mathrm{St}_S \circ R \Rightarrow \iota_* \mathrm{St}_S$。

命题 5.17。令 (S, T_S) 为一个已缩放单纯集，则自然变换 $\eta_S : \mathbb{S}\mathrm{t}_S \circ R \Rightarrow \iota_* \mathrm{St}_S$ 是逐对象弱等价。

证明。显然，这两个函子都保留余极限。此外，完全类似于引理 5.15 的证明表明，$\iota_* \mathrm{St}_S$ 保留余纤维化。也不难验证，$\iota_* \mathrm{St}_S$ 满足与命题 5.13中类似的基变换性质。由此可知，只需证明对于 $k \geqslant 0$，$\eta_k = \eta_{\Delta^k_{\flat}}(\Delta^k)$是一个等价；对于$\eta^{\sharp}_1 = \eta_{(\Delta^1)^{\sharp}}((\Delta^1)^{\sharp})$，同样如此。容易验证，$\eta_0$, η_1, η_2 和 $\eta^{\sharp}_1$ 都是同构。

对于 $k \geqslant 3$，我们通过缩放 L^k 的映射单纯形范畴中的每个三角形，来定义 $\mathrm{L}^k = \Pi_{\Delta^k_{\flat}}((\Delta^k, \flat, \flat \subset \sharp))$ 和 $\mathrm{L}^k_{\sharp}$。不难看出，我们的问题可以归结为证明映射 (

$$\varphi_k : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}^k_{\sharp}$$

是集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$-富化范畴之间的等价。利用对 k 的归纳法，我们可以假设映射单纯集 $\mathrm{L}^k((0,i),(1,j))$ 均已最大化缩放，除非 $i = 0$ 和 $j = k$。令 $\mathrm{L}^k((0,0),(1,k)) = A^k$，类似地，令 $\mathrm{L}^k_{\sharp}((0,0),(1,k)) = A^k_{\sharp}$。我们注意到，对于每个面

$d_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ 有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A^{k-1} & \xrightarrow{\simeq} & A^{k-1}_\sharp \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \downarrow \\ A^k & \longrightarrow & A^k_\sharp \end{array}$$

其中顶部的水平态射是弱等价。因此，我们可以归纳地假设， A^k 中由映射 α_i （对于 $i = 0...$ ... k ）的像构成的三角形都已缩放。

设 σ : $C_0 \subset C_1 \subset C_2$ 为 A^k 中的一个三角形，并固定记号 $C_j = \{(\varepsilon_i^j, a_i^j\}_{i=0}^{\ell}$。设 $e = C_0 \subset C_1$ 为 A^k 中的一条边。我们将 $S(e)$ 定义为初始顶点为 C_0 且终止顶点为 C_1 的非退化单形所构成的集合。最后，我们令 $|e| = \max\{\dim(\phi)|\ \phi \in S(e)\}$。注意，这是一个定义良好的数。给定上述的一个 2-单形 σ ，我们定义 $|\sigma| = |d_1(\sigma)|$。我们将证明，可以通过沿一个 **MS**-无害态射作推出，并利用关于 $|\sigma| = \ell$ 的归纳法，对 σ 进行缩放。通过直接检查，很容易得到 $\ell = 2$ 的情形。因此，从现在起，我们假设$\ell > 1$。

假设对于满足 $|d_2(\tau)| = 1$ 的 2-单形 τ ，以及满足 $|\sigma| < \ell - 1$ 的 2-单形 σ ，该断言成立。那么，给定满足 $|d_2(\sigma)| > 1$ 且满足 $|\sigma| = \ell$ 的 σ : $C_0 \subset C_1 \subset C_2$ ，我们可以构造一个 3-单形 ρ : $C_0 \subset D \subset C_1 \subset C_2$ ，使得以下结论成立:

1. 我们有 $|d_2 d_3(\rho)| = 1$ ，特别地，对于 $i = 2,\ 3,\ d_i(\rho)$ 是薄缩放的。

2. 我们有 $|d_0(\rho)| = \ell - 1$ ，因此它是已缩放的。

由此可知，我们可以通过沿着 ρ 一个类型为 (M2) 的态射作推出，定义 3.34从而将其完全缩放。因此，我们已将问题归结为证明上述断言。

设 σ : $C_0 \subset C_1 \subset C_2$ 使得 $|d_2(\sigma)| = 1$。我们注意到，除非 $C_0 = (0,\ 0) < (1,\ k)$，否则 σ 已缩放。否则，我们可以将 σ 表示为范畴 $\mathbf{L}^k$ 中某种复合，由归纳假设可知 σ 是薄的。

现在我们可以看到， $C_1 = (0,\ 0) < (\varepsilon,\ a) < (1,\ k)$，这使我们需要根据参数 $\varepsilon \in \{0,\ 1\}$ 的取值来讨论不同情形。

$\varepsilon = 1$) 接下来，不失一般性，我们可以假设 C_2 在 C_2 中包含一个形如 $(0, x)$ 的元素，且 $x \neq 0$。这是因为，否则注 5.6 中的映射 $\pi_{0,k}$ 会表明 σ 已缩放。此外，我们还可以假设 C_2 中只有一个形如 $(0, x)$ 的元素。事实上，若存在某个 $(0, y) < (0, x)$，则我们可以构造一个 3-单形 ρ : $C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_2$ ，其中 $C_2 = C_2 \setminus \{(0, y)\}$。根据定义， $d_0(\rho)$ 和 $d_1(\rho)$ 必须已缩放，因此 $d_2(\rho)$ 可缩放，当且仅当 $d_3(\rho)$ 可缩放，由此便得出所需结论。此外，我们注意到，如果 $x \neq 1$ ，则 σ 通过上文某个态射 $\alpha_j : A^{k-1} \to A^k$ 进行分解。最后可见，在这种情况下，$\pi_{0,k}(\sigma)$ 由一个形如 $0n \to 0an \to S$ 的单纯形给出，且 $\min(S) = 1$ ，因此它在 $\mathbf{P}_k$ 中已缩放。

$\sim\varepsilon = 0$) 注意，如果 C_2 包含一个形如 $(0, x)$ 的元素，且满足 $x < a$ ，我们便可以像上文一样定义 C_2 ，并构造一个 3-单形 ρ: $C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_2$ ，这表明我们能够对 $\sigma = d_2(\rho)$ 进行缩放，当且仅当我们能够对 $d_3(\rho)$ 进行缩放。与 $\varepsilon = 1$ 的情形完全类似，我们可以假设 $a = 1$。如果 C_2 不包含任何形如 $(0, z)$ 的元素，且满足

$z > 1$ 那么 σ 必定已经已缩放。此外，通过构造某个 C_2，我们可以仿照之前的论证，不失一般性地假设 C_2 只含有一个形如 $(0, z)$ 的元素$\widetilde{}$。在这种情况下，我们可以假设 $z = 2$，否则该单纯形会经由某个态射 $\alpha_j : A^{k-1} \to A^k$ 分解。若 C_2 不含有满足 $s \neq k$ 的形如 $(1, s)$ 的元素，则通过直接检查可知 σ 已经已缩放。若非如此，我们考虑由 C_2 删除所有满足 $s \neq k$ 的形如 $(1, s)$ 的元素后得到的 D。于是得到一个 3-单形 $\Xi : C_0 \to C_1 \to D \to C_2$。容易验证，$\Xi$ 的每个面都已缩放，除了可能的 $d_2(\Xi) = \sigma$，因此结论成立。

□

推论 5.18。设 (S, T_S) 是一个缩放单纯集，并考虑 $u : (A, E_A) \to (B, E_B)$ 在 $\left(\text{集合}^{+}_{\Delta}\right)_{/S}$ 中的一个弱等价。则函子 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S$ 将态射 $(A, E_A, T_A \subset \sharp) \to (B, E_B, T_B \subset \sharp)$ 映射为 函子$(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \text{集合}^{\mathbf{ms}}_{\Delta})$中的一个弱等价。

注记 5.19。设 $i : A \to B$ 是 **MB** 单纯集的一个余纤维化，我们将其视为 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/B}$ 中的一个态射，并回顾 Π_B 在 定义 5.8中的定义。我们定义 $\Pi_B(A)^{\uparrow}$ 为推出

$$\begin{array}{ccc} j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[A_\sharp] \times \Delta^{\{0\}} & \longrightarrow & j \circ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[B_\sharp] \times \Delta^{\{0\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_B(A) & \longrightarrow & \Pi_B(A)^{\uparrow} \end{array}$$

根据我们的定义，要验证 $\mathrm{St}_B(A) \Rightarrow \mathrm{St}_B(B)$ 是逐点弱等价，只需验证所诱导的映射 $\Pi_B(A)^{\uparrow} \to \Pi_B(B)$ 是 $\mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$-范畴中的弱等价。

注记 5.20。设 $\theta : \Delta^{n+1} \to \Delta^1 \times \Delta^n$ 是一个非退化单纯形，并设 $i \in \Delta^{n+1}$ 是满足 $\theta(i) = (i, 0)$ 的最大元素。我们将使用记号 $\theta = \sigma_i$，并通过规定若 $i < j$ 则 $\sigma_i < \sigma_j$，为 $\Delta^1 \times \Delta^n$ 中最大维数的非退化单形集合赋予一个序。

定义 5.21。设 $\mathbb{K}_n = \Pi_{\Delta^n_\flat}((\Delta^n, \flat, \flat))$，并设 $K_n = \mathbb{K}_n((0, 0), (1, n))$。对于 σ_i 如注记 5.20 所述，定义 K^i_n 为 K_n 的子偏序集（带有继承的装饰），由元素属于 σ_i的像的那些链组成。注意到 K^i_n 作为单纯集同构于 $C_n = (\Delta^1)^n$。

给定 $0 < s < n + 1$，我们将 $d_s(K^j_n)$ 定义为由 K^j_n 构成的单纯集，其中元素属于 $d_s(\sigma_j)$ 的像的链。

引理 5.22。设 $0 < j < n$，并且 $d_{j+1}(K^j_n) \subset K^j_n$ 是一个单纯子集（带有诱导装饰），由那些元素可经因子分解通过 $d_{j+1}(\sigma_j)$的链组成。我们将 $\Delta^1 \times d_{j+1}(K^j_n)$视为标记缩放单纯集，定义如下：

- 标记由笛卡尔积中的那些标记边以及 e 包含在 $\Delta^1 \times \{e\}$ 中的边组成，其中 $e : C_0 \to C_1$ 是 K^j_n 中的一条标记边，且 C_0 包含元素 $(0, j)$。
- 缩放采用笛卡尔积上的通常缩放。

于是我们得到标记缩放单纯集之间的同构 $\Delta^1 \times d_{j+1}(K^j_n) \simeq K^j_n$

证明。 我们只需检查两侧的装饰是否一致。为证明有关标记的断言，我们注意到 K^j_n 的标记边总是经过立方体 C_n 的一个面分解（参见 定义 5.21），因此直接检查即可得出结论。

为了说明 K^j_n 的缩放恰好由乘积缩放给出，我们考虑一个三角形σ： $C_0 \to C_1 \to C_2$，并定义 $D_i = C_i \setminus \{(1, j)\}$，由此得到另一个三角形 φ： $D_0 \to D_1 \to D_2$。我们声称， σ 在 K^j_n 中已缩放，当且仅当 φ 已缩放。注意，由于 φ 始终属于 $d_{j+1}(K^j_n)$，这就足以证明关于缩放的这一断言。

我们采用记号 $\pi_{0,n}(C_i) = S_i$ 和 $\pi_{0,n}(D_i) = T_i$。于是有如下结论：

1. 若 $(0, j) \in C_i$，则 $S_i = T_i$；否则 $S_i = T_i \setminus \{j\}$。
2. 我们有 $\min(S_i) = \min(T_i)$。
3. 给定 $C \in d_{j+1}(K^j_n)$，并设 $V = \pi_{0,n}(C)$，则可得 $\min(V) \leqslant j$。

我们的最后一个断言是，对于 $i < j$，子集（见注 5.4）$U_{S_i,S_j} = U_{T_i,T_j}$ 满足该断言。注意，$j \in U_{S_i,S_j}$ 当且仅当 $j \in \{\min(S_i), \min(S_j)\}$，或者 $j \in S_i$ 且 $\min(S_i) < j < \min(S_j)$。然而，根据上面的 3)，这不可能成立。断言由此得证。 □

引理 5.23。 令$(A, E_A, T_A) \subset (B, E_B, T_B)$ 为标记缩放单纯集的一个包含，使得 $E_A = E_B$。假设存在某个顶点 $v \in A$ 具有以下性质：

- 对于每个单纯形 σ： $\Delta^n \to B$ 如果不通过 A 分解，那么 v 就是 σ的终止顶点。

令 M_A （分别地， M_B）为（标记缩放单纯集的）笛卡尔积 $\Delta^1 \times A$ （分别地， $\Delta^1 \times B$）中的标记边的集合，并包含边 $\Delta^1 \times \{v\}$。于是诱导态射

$$j : \Delta^1 \times A \coprod_{\Delta^{\{1\}} \times A} B \longrightarrow \Delta^1 \times B$$

其中两个单纯集分别配备了乘积缩放以及由 M_A和 M_B 给出的标记，是集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$中的平凡余纤维化。

证明。 首先，假设该结论对于 $E_A = E_B = \flat$ 成立。那么，对于一般标记，映射 j 可由映射 $j_\flat$ 通过推出得到，其中后一个映射是与最小标记相关联的包含映射。这表明一般情形下的结论也随之成立。

逐个单纯形地处理，我们可以将问题归约到以下情形。

i) $(\partial\Delta^n, \flat, \flat) \to (\Delta^n, \flat, \flat)$ for $n \geqslant 1$.

ii) $(\Delta^2, \flat, \flat) \to (\Delta^2, \flat, \sharp)$.

其中， v 由终止顶点给出。

为验证 $i)$，我们采用与 [Lur18] 中引理 3.5.12 完全类似的论证，该引理告诉我们，在这种情况下，上述映射属于 定义 3.34 (M1) 型态射的弱饱和类，并且属于

$*)$ $(\Lambda^n_n, \Delta^{\{n-1,n\}}, \Delta^{\{0,n-1,n\}}) \longrightarrow (\Delta^n, \Delta^{\{n-1,n\}}, \Delta^{\{0,n-1,n\}})$

因此该断言成立。为证明 $ii)$，我们注意到，可以利用沿着 (M2) 型态射的推出，对剩余的单形进行缩放，该类型见 定义 3.34，并结合态射

$\diamond)$ $(\Delta^3, \Delta^{\{n-1,n\}}, U_3) \longrightarrow (\Delta^3, \Delta^{\{n-1,n\}}, \sharp)$

其中， U_3 是除去 $\Delta^{\{0,1,2\}}$ 后所有三角形的集合。 □

引理 5.24。 设 i： $A \to B$ 是 *(A1)* 型的一个态射，见 定义 *3.3*。则所诱导的自然变换 $\mathbb{S}\mathrm{t}_B(A) \Rightarrow \mathbb{S}\mathrm{t}_B(B)$ 是逐点弱等价。

证明。 由于$\mathbb{S}\mathrm{t}_B$ 保余极限和余纤维化，因此只需在以下特定情形下证明该结论： $A = (\Lambda^n_i, \flat, \flat \subset \Delta^{\{i-1,i,i+1\}})$ 和 $B = (\Delta^n, \flat, \flat \subset \Delta^{\{i-1,i,i+1\}})$。根据注记 5.19 ，我们将证明映射 $\Pi_B(A)^\uparrow \to \Pi_B(B)$ 是集合$_\Delta^{\mathbf{ms}}$-范畴之间的一个等价。

我们注意到，标记缩放单纯集之间的诱导态射 $\Pi_B(A)^\uparrow(x,y) \to \Pi_B(B)(x,y)$ 是同构，除非 $x = (0,0)$ 和 $y = (1,n)$。回忆定义 5.21 中的定义K_n ，用从 $\Pi_B((0,0),(1,n))$ 诱导的装饰来赋予这个标记缩放单纯集。类似地，我们定义 $\Lambda^n_i K = \Pi_B(A)^\uparrow((0,0),(1,n))$。我们定义一个滤过

$$\Lambda^n_i K = A_{-1} \longrightarrow A_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n = K_n$$

其中 A_s 是 K_n 的子单纯集，它包含所有可通过 K^j_n 因子分解的$j \leqslant s$ （参见 定义 5.21 ，其中定义了 K^j_n） 。我们将证明，这个滤过的每一步都是弱等价。情形 $n = 2$ 可通过直接计算轻易得出。对于证明的其余部分，我们假设 $n \geqslant 3$。

对于 $0 \leqslant j \leqslant n$ ，我们考虑拉回-推出图。

$$\begin{array}{ccc} Q^j_n & \longrightarrow & K^j_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{j-1} & \longrightarrow & A_j \end{array}$$

我们将证明顶部的水平态射是平凡余纤维化。首先考虑情形 $0 \leqslant j < n$。我们将 Q^j_n 描述为 K^j_n 的一个单纯子集，它包含立方体 C_n 的每个面，但那些通过 $d_\alpha(K^j_n)$ 分解的面除外，其中 $\alpha \notin \Phi(i)$ 满足

$$\Phi(i) = \begin{cases} \{j+1, i+1\} \ , & \text{if } j < i, \\ \{j+1\} \ , & \text{if } j = i, \\ \{j+1, i\} \ , & \text{if } j > i. \end{cases}$$

我们构造一个两步滤过 $Q^j_n \to Z^j_n \to K^j_n$ ，其中 Z^j_n 是通过附加 $d_\beta(K^j_n)$ 中的单形从 Q^j_n 得到的，其中 $\beta \neq j+1$ ，且 $\beta \in \Phi(i)$ 。

我们注意到，对于 $n \geqslant 3$ ，每个 $d_{j+1}(K^j_n)$ 中的标记边都可经由 Z^j_n分解。因此，我们可以结合 () 和 ()(K^j_n), 应用 引理 5.23 ，从而得到一个标记缩放单纯集之间的平凡余纤维化

$$\varphi : \Delta^1 \times (Z^j_n)_{|d_{j+1}(K^j_n)} \longrightarrow \Delta^1 \times d_{j+1}(K^j_n).$$

由此引理 5.22 可知， $\Delta^1 \times A$ 的缩放与 Z^j_n 的缩放相同，唯一可能的例外是来自 $\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}$ 的那些三角形；对于 $\Delta^1 \times B$ 和 K^j_n，情况也类似。我们还注意到， K^j_n 的每条标记边都经过 Z^j_n。经过直接检查，我们

观察到，我们可以构造一个推挽图表

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times (Z_n^j)_{|d_{j+1}(K_n^j)} & \longrightarrow & \Delta^1 \times d_{j+1}(K_n^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_n^j & \longrightarrow & K_n^j. \end{array}$$

因此，我们可以通过沿着一个余纤维化对 φ 作推出来添加其余装饰，这表明滤过的最后一步是平凡余纤维化。为证明 $Q_n^j \to Z_n^j$ 是平凡余纤维化，我们考虑一个拉回推出图

$$\begin{array}{ccc} Z_{n-1}^u & \longrightarrow & d_\beta(K_n^j) = K_{n-1}^u \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n^j & \longrightarrow & Z_n^j \end{array}$$

并通过前面的论证得出结论；若 $n = 3$，也可以通过直接计算得出结论。

为完成证明，我们将证明 $Q_n^n \to K_n^n$ 是平凡余纤维化。在此情形下， Q_n^n 包含所有经过 C_n 的某个面的单纯形，除了那些经过 $d_i(K_n^n)$ 的单纯形。对每个 $k \in [n]$，我们定义一条链

$$D_k = (0,0) < (0,1) < \cdots < (0,k) < (1,n).$$

注意，利用 (M2) 型态射以及 定义 3.34 中的 $\diamond$）型态射，按照 引理 5.23 的证明中的做法，我们可以缩放 $D_{i-1} \subset D_i \subset D_{i+1}$ 中的三角形 A_{n-1} 以及 A_n。回顾一下，对于每条链 $C = \{(i_\alpha, j_\alpha)\}_{\alpha \in A}$，我们定义 m_C 为 A中满足 $i_{m_C} = 0$的最大元素。我们可以利用这个参数定义一个映射

$$r_n : K_n^n \longrightarrow (\Delta^n, \flat, \Delta^{\{i-1,i,i+1\}}), \quad C \mapsto j_{m_C}$$

此外， r_n 有一个截面 s_n，该截面按照上文的定义将 j 映射到 D_j。由此可知， $s_n \circ r_n$与 K_n^n上的恒等映射之间存在标记同伦。此外， r_n限制为一个映射 $\hat{}r_n : Q_n^n \to \Lambda_i^n$。容易验证，由于 Q_n^n 和 Λ_i^n可以表示为沿着由 Q_n^n 的（n-1）维面所索引的余纤维化进行的迭代推出，并且映射 r_n 在其每个面上都限制为一个等价，因此 $\hat{}r_n$ 也是一个弱等价。我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Q_n^n & \longrightarrow & K_n^n \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ (\Lambda_i^n, \flat, \Delta^{\{i-1,i,i+1\}}) & \xrightarrow{\simeq} & (\Delta^n, \flat, \Delta^{\{i-1,i,i+1\}}) \end{array}$$

因此根据三取二性质，结论得证。 □

引理 5.25。 设 $i:\ A \to B$ 是 *(A3)* 类型的态射，见 定义 *3.3*。则诱导出的自然变换 $\mathbb{S}\mathrm{t}_B(A) \Rightarrow \mathbb{S}\mathrm{t}_B(B)$ 是逐点弱等价。

证明。 证明将沿用前一个引理的策略。再次注意到，映射单纯集 $\Pi_B(A)^\uparrow(x,\ y) \to \Pi_B(B)(x,\ y)$ 的诱导态射是一个同构

但 $x=(0,\ 0)$ 和 $y=(1,\ n)$，或 $x=(0,\ 1)$ 和 $y=(1,\ n)$ 的情形除外。然而我们注意到，由于边 $(0,\ 0)\ \to (0,\ 1)$ 将被压缩，以定义函子 St_B 的值，因此只需构造类似的滤过

$$\Lambda^n_0 K = A_{-1} \longrightarrow A_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n = K_n$$

并证明每一步都是平凡余纤维化。和之前一样，$n=2$ 的情形留作简单练习，我们将重点讨论 $n\geqslant 3$的情形。注意在这种情形下，来自标记边 $0\to 1$ 和薄三角形 $0\to 1\to n$ 的装饰已包含在 $\Lambda^n_0 K$中。

对于 $0\leqslant j<n$，我们考虑拉回-推出图

$$\begin{array}{ccc} Q^j_n & \longrightarrow & K^j_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{j-1} & \longrightarrow & A_j \end{array}$$

其中 Q^j_n 是 K^j_n 的单纯子集，它包含 C_n 除 $d_{j+1}(K^j_n)$ 之外的每个面；并且若 $j>0$ 面 C^0_n 由那些包含元素 (0,1) 的链组成。此处的证明与引理 5.24的证明完全类似。我们通过向 Q^j_n添加面 C^0_n 来构造 Z^j_n，并由引理 5.23 得出，滤过 $Q^j_n\to Z^j_n\to K^j_n$ 中的每一步都是平凡余纤维化。

为了证明 $A_{n-1}\to A_n$ 是平凡余纤维化，我们还需要多做一些工作。首先考虑一个交换图，其中用带圈的箭头表示标记态射

$$\begin{array}{ccc} (0,0)<(1,0)<(1,n) & \overset{\circ}{\longrightarrow} & (0,0)<(1,0)<(1,1)<(1,n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (0,0)<(1,n) & \longrightarrow & (0,0)<(1,1)<(1,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0,0)<(0,1)<(1,n) & \overset{\circ}{\longrightarrow} & (0,0)<(0,1)<(1,1)<(1,n). \end{array}$$

注意到该图中的每个 2-单形都已缩放，因此我们可以通过平凡余纤维化的推出来标记每个态-射。请注意，由于 A_{n-1} 和 A_n 满足 $n\geqslant 3$，我们可以在两者中都标记这些态射。回顾 D_i 的定义，见引理 5.24，并考虑一个 3-单形

$$\rho_W : D_0\subset D_1\subset (0,0)<(0,1)<(0,n)<(1,n)\subset (0,0)<(0,1)<(0,n)<(1,n)\cup W$$

其中 W是任意一条从 (0,1) 开始并以 $(0,n$结束的链。因此，ρ_W的每个面都已缩放，唯一可能的例外是 $d_2(\rho_W)$。因此，我们可以沿着 定义 3.34中类型为 (M2) 的态射作一个推出，从而对该面进行缩放。注意，任何可能的 ρ_W 都经过 A_{n-1}，但 W 是极大链的情况除外。与前一个引理中的论证类似，

可得交换图

$$\begin{array}{ccc} A_{n-1} & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ (\Lambda^n_0, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}) & \xrightarrow{\simeq} & (\Delta^n, \{\Delta^{\{0,1\}}\}, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}) \end{array}$$

由三取二性质可得结论。 □

引理 5.26。 设 $i : A \to B$ 是 *(M2)* 类型的态射，属于 定义 *(M2)*。则诱导的自然变换 $\mathbb{S}\mathrm{t}_B(A) \Rightarrow \mathbb{S}\mathrm{t}_B(B)$ 是逐点弱等价。

证明。 令 $L = \Pi_B(A)^\uparrow((0,\ 0),\ (1,\ 4))$，并令 $K_4 = \Pi_B(B)((0,\ 0),\ (1,\ 4))$。我们唯一需要证明的是映射 $L \to K_4$ 是一个弱等价。使用前面证明中的记号可知， L 中缺失的带标度单形全部包含在 K_4^4 中。因此，若我们将 L_4^4 记为 K_4^4 在 L 上的限制，则只需证明诱导映射 $L_4^4 \to K_4^4$ 是一个弱等价。然而，可以很容易地构造一个交换图。

$$\begin{array}{ccc} L_4^4 & \longrightarrow & K_4^4 \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ (\Delta^4, \flat, T) & \xrightarrow{\simeq} & (\Delta^4, \flat, T') \end{array}$$

其中竖直映射是弱等价，而底部水平映射中的缩放是（A2）中定义 3.3。

□

命题 5.27. 设(S, T_S) 是一个缩放单纯集，且 $i\colon A \to B$ 是 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$中的一个***MB***-无害态射。那么$\mathbb{S}\mathrm{t}_S(i)$ 是函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \text{集合}^{\mathbf{ms}}_{\Delta})$中的一个弱等价。

证明. 根据 命题 5.13 ，我们可以假设 $S = B$。证明的其余部分将验证该断言对 定义 3.3中给出的每个生成元都成立。我们逐一讨论：

(A1) 由 引理 5.24可得。(A2) 由 引理 5.26可得。(A3) 由 引理 5.25可得。(M4) 由 推论 5.18可得。(S1) 由 推论 5.18可得。(S2) 通过直接验证可得。(E) 由 推论 5.18可得。

结论由此得出。 □

命题 5.28。 设(S, T_S) 是一个缩放单纯集，并设 $\phi\colon \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to \mathcal{C}$ 是一个集合$^+_\Delta$ -富化范畴的函子。那么直化函子

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_\phi : \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta})$$

是一个左 *Quillen* 函子。

证明。 我们将证明 $\mathbb{S}\mathrm{t}\phi$ 保持余纤维化和弱等价。首先指出，由于 命题 5.13 只需考虑 $\phi = \mathrm{id}$ 的情形。在这种情况下，我们在 引理 5.15 中看到，我们的函子保持余纤维化。

关于弱等价的断言，我们注意到 命题 5.27 蕴含 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S$保持 **MB**-无害态射。因此，我们只需证明 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S$保持纤维对象之间的弱等价。为此，只需证明以下结论：

* 设 $f, g\colon X \to Y$是纤维对象之间的态射，且 $\mathrm{St}_S(f)$ 是弱等价。那么，给定一个同伦 $H\colon X \times (\Delta^1)^\sharp \to Y$，它连接 f 和 g，可得 $\mathrm{St}_S(g)$ 也为弱等价。

注意到存在无害态射 $X \times \Delta^{\{0\}} \to X \times (\Delta^1)^\sharp$，这是由 命题 3.10 得出的；该命题蕴含 $\mathbb{S}\mathrm{t}_S(H)$ 是弱等价，投影到 X $\mathbb{S}\mathrm{t}_S(p)$ 所诱导的映射也是如此： $\mathbb{S}\mathrm{t}_S(X \times (\Delta^1)^\sharp) \to \mathbb{S}\mathrm{t}_S(X)$。 □

5.1 点上的直化

本节的目标是证明以下结果。

命题 5.29。 点上的直化-反直化伴随

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_* : \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\Delta^0} \rightleftarrows \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}} : \mathbb{U}\mathrm{n}_*$$

是一个 *Quillen* 等价。

为此，我们将构造一个左 Quillen 等价

$$L_* : \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\Delta^0} \longrightarrow \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$$

以及一个自然变换 $\alpha : \mathrm{St}_* \Rightarrow L$，它在每一点上都是标记的已缩放单纯集之间的弱等价。

命题 5.30。令 $L_* : \left(\text{集合}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\Delta^0} \longrightarrow \text{集合}_\Delta^{\mathbf{ms}}$为一个函子，它将一个 ***MB***单纯集 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$ 赋为标记的已缩放单纯集 (X, E_X, C_X)。那么 L_*是一个左 *Quillen* 等价。

证明。函子 L_*有一个右伴随 R_*，其定义为 $R_*(X, E_X, T_X) = (X, E_X, T_X)$。我们注意到 $L_* \circ R_* = \mathrm{id}$，并且单位 $\mathrm{id} \Rightarrow R_* \circ L_*$由 $(X, E_X, T_X \subset C_X) \to (X, E_X, C_X)$ 给出，它属于定义 3.3 中 (S2) 型态射的弱饱和类。

为完成证明，我们注意到 L_* 保留余纤维化，并将 **MB**-无害态射映为 **MS**-无害态射。于是很容易看出， L_* 保留纤维化对象之间的弱等价，结论得证。 □

回顾 $\pi_{0,\ n}$ 在 注 5.6 中的映射定义。然后将该映射与态射 $m_n : \mathcal{P}_n \to (\Delta^n, \flat)$ 复合，该态射对每个 $S \in \mathcal{P}_n$ 赋值为 $m_n(S) = \min(S)$，即可得到一个标记的缩放单纯集映射

$$\alpha_n^\flat : \mathbb{S}\mathrm{t}_*((\Delta^n, \flat, \flat)) \longrightarrow (\Delta^n, \flat, \flat)$$

可以很容易地产生与 **MB** 单纯集 $(\Delta^2,\ \flat,\ \sharp)$ 和 $(\Delta^1,\ \sharp,\ \sharp)$ 相关的这些映射 $\alpha_2^\sharp$ 和 $\alpha_1^\sharp$ 的标记变体。我们要指出，$\mathrm{St}_*(\Delta^2,\ \flat,\ \flat\subset\sharp) = \mathrm{St}_*(\Delta^2,\ \flat,\ \sharp)$，这说明了我们为何只定义一个 $\alpha_2^\sharp$。由于我们的定义对于单调态射 $[k]\to[n]$ 是函子性的，这组映射组装成一个自然变换α：$\mathrm{St}_*\Rightarrow L_{*\circ}$

命题 ion 5.31. 自然变换 $\alpha\colon \mathbb{S}\mathrm{t}_*\Rightarrow L_*$ 是逐点弱等价。 .

证明。 由于这两个函子都是左 Quillen 函子，且两个模型范畴都是左 proper，逐单纯形论证表明，只需证明分量 $\alpha_n^\flat$、 $\alpha_2^\sharp$ 和 $\alpha_1^\sharp$ 是弱等价。我们进一步注意到， $\alpha_2^\sharp$ 和 $\alpha_1^\sharp$ 可以通过沿余纤维化作推出，从其未装饰的反标记中得到。这表明我们可以将注意力限制在 $\alpha_n^\flat$ 上，对于 $n\geqslant 0$。

令 $S=(\Delta^n,\flat)$，并考虑 $\Pi_S(\Delta^n,\flat,\flat)$。将 Φ_n 记为由$\Pi_S(\Delta^n,\flat,\flat)$ 得到的集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$-范畴，其中标记了形如以下形式的映射单纯集中的每条边

$$\Pi_S(\Delta^n,\flat,\flat)((1,a),(1,b)).$$

我们将证明映射 $\hat{}\alpha_n^\flat\colon\ K_n=\Phi_n((0,n),(1,n))\longrightarrow(\Delta^n,\flat)$ 是一个弱等价。注意，$\alpha_n^\flat$ 是在识别某些单形后由 $\hat{}\alpha_n^\flat$ 得到的。容易看出，我们可以沿着**MB**-无害态射作推出，将 K_n 中在 $\hat{}\alpha_n^\flat$ 下的像退化的每条边标记。我们考虑一个滤过。

$$A_{-1}=K_n^0\to A_1\to A_2\to\cdots\to A_{n-1}\to A_n=K_n$$

其中 A_i 由 A_{i-1} 附加包含于 K_n^i 中的那些单形得到（见 定义 5.21），其中 K_n^i 带有由 Φ_n诱导的装饰。我们进一步将 $\overline{A}_i$ 在 A_i 的定义中的塌缩映射下的像记为 $\mathbb{S}\mathrm{t}_*((\Delta^n,\flat,\flat))(*$，并类似地记 $\overline{K}_n^i$。

我们将证明，将 $\alpha_n^\flat$ 限制到每个 $\overline{A}_i$ 上定义了一个弱等价

$$\alpha_{n,i}^\flat:\overline{A}_i\longrightarrow\left(\Delta^{[0,i]},\flat,\flat\right).$$

由于弱等价在滤过余极限下稳定，这将推出所需结论。假设对于 $j\leqslant i-1$，$\alpha_{n,j}^\flat$ 是一个弱等价，并考虑拉回-推挤方块

$$\begin{array}{ccc} Q_n^i & \longrightarrow & K_n^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{i-1} & \longrightarrow & A_i \end{array}$$

注意到 $\hat{}\alpha_n^\flat$ 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Q_n^i & \longrightarrow & K_n^i \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_i} \\ \Delta^{[0,i-1]} & \longrightarrow & \Delta^{[0,i]} \end{array}$$

我们断言，竖直态射是弱等价。注意，我们可以为 0 6 定义

$j \leqslant i$

$$C_j = (0,0) < (0,1) \cdots < (0,j) < (1,i) < \cdots < (1,n)$$

这为我们提供了一个截面 $s_i : \Delta^{[0,i]} \to K^i_n$，它将 j 送到 C_j。可以验证，$r_i \circ s_i =$ 是恒等映射，并且 K^i_n 的恒等映射与 $s_i \circ r_i$之间存在一个标记同伦。此外，截面 s_i 和同伦在 Q^i_n 上的限制也成立。显然，截面和同伦都可以通过商单纯集 $\overline{K}^i_n$ 和 $\overline{Q}^i_n$ 分解，这表明$\alpha^{\flat}_{n,\ i}$ 仍是一个弱等价。

□

推论 5.32。设 S 是一个缩放单纯集，并设 ϕ: $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to \mathcal{C}$ 是一个 集合$^{+}_{\Delta}$-富集函子。假设 ϕ 是本质满的，并设 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 是 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}$,集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta})$的纤维对象之间的一个映射。那么以下条件等价：

1. 映射 α 是(集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta})^{\mathcal{C}}$中的一个弱等价。
2. 对于每个 $C \in \mathcal{C}$，诱导映射 $\alpha_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{F}'(C)$ 是弱等价。
3. 对于每个顶点 $s \in S$，纤维上的诱导映射

$$\mathbb{U}\mathrm{n}_{\phi}(\mathcal{F})_s \longrightarrow \mathbb{U}\mathrm{n}_{\phi}(\mathcal{F}')_s$$

是一个双范畴等价。
4. $\mathbb{U}\mathrm{n}^{\phi}(\alpha)$ 是 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$中的弱等价。

证明。等价 1 $\iff$ 2 由定义可立即得到。由于二者 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$都是纤维化的，因此由 命题 5.28 可知 $\mathbb{U}\mathrm{n}^{\phi}(\alpha)$ 是 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/S}$中纤维对象之间的映射。然后等价 3 $\iff$ 4 由 v) 中的 命题 3.21得到。为了完成证明，我们需要证明 2 $\iff$ 3。然而，ϕ 是满射这一事实使我们可以归约到 $S = \Delta^0$ 的情形，并由 注记 5.14 和 命题 5.29得出结论。

□

5.2 单纯形上的直化

在本截面中，我们确立主定理证明中的关键要素。

命题 5.33。设 $\Delta^n_{\flat} = (\Delta^n, \flat)$ 为最小缩放的 n-单纯形。那么 *over* $\Delta^n_{\flat}$ 上的直化-反直化伴随

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n} : \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_{\flat}} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_{\flat}], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}) : \mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^n}$$

是一个 *Quillen* 等价。

在深入细节之前，让我们先对证明的一般结构作些说明。为了证明该结果，需要证明给定一个对象 $X \in \left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_{\flat}}$ 以及一个等价的集合$^{+}_{\Delta}$-富集函子

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是一个纤维化函子，因此伴随映射 $X \to \mathbf{Un}_{\Delta^n}(\mathcal{F})$ 是$\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_{\flat}}$ 中的弱等价。利用三取二性质，不妨设 $p : X \to \Delta^n$ 是一个

纤维对象。现在，为了验证我们的伴随映射是一个弱等价，根据命题 3.21，只需验证纤维上的诱导态射

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\simeq} \mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^n}(\mathcal{F})_i$$

是 $0 \leqslant i \leqslant n$上的双范畴等价。假设我们已经证明了 命题 5.33对 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 成立，并注意到基例已在 命题 5.29中证明。我们断言，对每个 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，映射 φ_i 都是双范畴等价。

考虑态射 $i : \Delta_\flat^{[0,n-1]} \to \Delta_\flat^n$，并将 X 沿 i 的拉回记为 $\overline{X}$。类似地，将 $\mathcal{F}$ 沿 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[i] = j$ 的限制记为 $\overline{\mathcal{F}} = j^*\mathcal{F}$。我们注意到：

1. 对每个函子 $\mathcal{G} : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta_\flat^n] \to$ 集合$_\Delta^{\mathbf{ms}}$，都有 $j_!(j^*\mathcal{G})(i) \to \mathcal{G}(i)$ 是 $0 \leqslant i < n$ 的同构。

2. 对每个 $p : X \to \Delta^n$，映射 $\mathrm{St}^{\Delta_\flat^n}(\overline{X})(i) \to \mathrm{St}^{\Delta_\flat^n}(X)(i)$ 对于 $0 \leqslant i < n$ 都是同构。

3. 利用命题 5.13 和注记 5.14，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} j_!\,\mathrm{St}_{\Delta_\flat^{n-1}}\,\overline{X} & \longrightarrow & j_!j^*(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta_\flat^n}\,X & \longrightarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

由此我们得出，$\mathrm{St}_{\Delta_\flat^{n-1}}\overline{X} \to \overline{\mathcal{F}}$ 是一个弱等价。根据归纳假设，$\overline{X} \to \mathrm{Un}^{\Delta_\flat^{n-1}}(\overline{\mathcal{F}})$是一个弱等价，因此命题得证。

我们已将问题归结为证明 φ_n 是一个弱等价。我们声称，只需证明以下内容即可。

*) The map $\mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X_n)(n) \to \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X)(n)$ is a weak equivalence.

事实上，设 $r^n : \Delta^0 \to \Delta_\flat^n$表示终端顶点的包含。给定 $K \in \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$，可知我们有一个同构$r_!^n(K)(n) \simeq K$，这进而表明伴随态射

$$r_!^n(\mathbb{S}\mathrm{t}_*\,X_n) \simeq \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X_n) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X) \longrightarrow \mathcal{F}$$

它由$\mathbb{S}\mathrm{t}_*\,X_n \to \mathcal{F}(n)$ 是一个弱等价。现在我们可以利用命题 5.29 得出我们有一个双范畴等价

$$X_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^n}(\mathcal{F})_n.$$

因此，本节余下部分将用于证明上面的断言 $*$) e.

定义 5.34。设 I 为一个有限线性序集，且设 $i \in I$。我们定义一个偏序集 O_i^I，其元素为满足 $S \neq \varnothing$ 且满足 $\min(S) = i$ 的子集 $S \subseteq I$。当 $S \subseteq T$ 时，我们规定 $S \leqslant T$。注意，我们有一个映射

$$\pi_I : \mathcal{O}_i^I \to \Delta^I, \quad S \mapsto \max(S).$$

我们按如下方式将 $\pi_I : \mathrm{O}_i^I \to \Delta^I$ 提升为 $\left(\text{集合}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\Delta_\flat^I}$ 中的一个对象：

- 如果 $T = S \cup \max(T)$，我们就声明边 $S \to T$ 为标记的。
- 我们声明 O_i^I 的每个三角形都是精简的。
- 如果一个三角形在 Δ^I 中的像是退化的，我们就称它为薄的。

定义 5.35。 为简化记号，我们设 $\mathbb{O}^n = \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat]$ （参见 定义 2.6）。

注记 5.36。 设 $I = [n]$。对于每个 $i \leqslant j$，我们将 $\mathsf{O}^n(i,\ j)$ 视为一个 **MB** 单纯集，其中每个三角形都声明为薄缩放的，且只有退化边标记为已标记。我们还注意到，存在函子

$$\mathbb{O}^n(i,j) \times \mathcal{O}^n_j \ \to \mathcal{O}^n_i \ ; \ (S,T) \mapsto S \cup T,$$

它们保持这些装饰。

定义 5.37。 设 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to \mathsf{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta$是一个 Set^+_Δ -富集函子。我们按如下方式定义一个位于 $\Delta^n_\flat$ 之上的 **MB**单纯集 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$:

1. 令 $i \in [n]$。通过声明薄三角形与精简三角形的集合相同，我们将标记缩放单纯集 $\mathcal{F}(i)$ 升级为 **MB** 单纯集。

2. 我们将 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$定义为 **MB** 单纯集范畴中图表的余等化子

$$\coprod_{i<j} \mathcal{F}(i) \times \mathbb{O}^n(i,j) \times \mathcal{O}^n_j \ \rightrightarrows \coprod_i \mathcal{F}(i) \times \mathcal{O}^n_i \ , \quad i,j \in [n],$$

   其中，图表中的映射定义如下

$$\mathcal{F}(i) \times \mathbb{O}^n(i,j) \times \mathcal{O}^n_j \ \longrightarrow \mathcal{F}(j) \times \mathcal{O}^n_j \ , \quad \mathcal{F}(i) \times \mathbb{O}^n(i,j) \times \mathcal{O}^n_j \ \longrightarrow \mathcal{F}(i) \times \mathcal{O}^n_i \ .$$

3. 映射 $\mathcal{F}(i) \times \mathsf{O}^n_i \to \mathsf{O}^n_i \to \Delta^n$ 汇集为一个函子 $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \to \Delta^n$。

备注 5.38。 我们注意到，给定 $0 \leqslant i < n$，我们有一个单纯集映射

$$\Xi^i : \Delta^1 \times \mathcal{O}^{n-1}_i \longrightarrow \mathcal{O}^n_i \ , \ \Xi^i(\varepsilon, S) = \begin{cases} S, & \text{if } \varepsilon = 0, \\ S \cup \{n\}, & \text{if } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

它们使用这个映射（实际上是一个同构）为 $\Delta^1 \times \mathsf{O}^{n-1}_i$ 赋予来自 O^n_i 的诱导装饰。

给定函子 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to \mathsf{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta$，我们用 $\overline{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 沿映射 $i:\ \Delta^{[0,n-1]}_\flat \to \Delta^n_\flat$ 对 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^{n-1}_\flat]$ 的限制。我们可以使用映射 Ξ^i 构造一个单纯集之间的映射

$$\Xi_{\mathcal{F}} : \Delta^1 \times \mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}).$$

最后，我们为 $\Delta^1 \times \mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}})$ 配备由 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 经 $\Xi_{\mathcal{F}}$ 诱导的装饰，并将所得的**MB** 单纯集记为 $\Delta^1 \overline{\otimes} \mathcal{M}(\mathcal{F})$。

注记 5.39。 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 的构造定义了一个保余极限函子

$$\mathcal{M}(-) : \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta) \longrightarrow \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_\Delta\right)_{/\Delta^n_\flat}$$

其具有以下几项性质:

i) 对于每个 $j \in [n]$，我们都有一个同构 $\mathcal{M}(\mathcal{F})_j \simeq \mathcal{F}(j)$。

ii) 给定一个函子 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat]$ 我们将 $\overline{\mathcal{F}}$ 如备注 5.38中那样记作。于是我们有如下推出图

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\{1\}} \times \mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 \overline{\otimes} \mathcal{M}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{F}) \end{array}$$

MB单纯集中的

iii) 函子 $\mathcal{M}(-)$ 保持余纤维化。

引理 5.40。令 $A \to \Delta^n_\flat$ 为 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_\flat}$ 中的一个对象，我们定义如下的 ***MB*** 单纯集 $\Delta^1 \overline{\otimes} A \to \Delta^{n+1}_\flat$:

- 底层单纯集合由笛卡尔积给出 .
- 投影映射 $\Delta^1 \times A \to \Delta^{n+1}_\flat$ 由映射诱导

$$r : \Delta^1 \times \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1},\ \ r(\varepsilon, i) = \begin{cases} i, & \text{if } i = 0, \\ n, & \text{if } i = 1. \end{cases}$$

- 若 $\Delta^1 \to \Delta^1 \times A$ 在 A 中的 e_A 被标记，$(e_\flat, e_A) :\ \Delta^1 \to \Delta^1 \times A$ 就被标记；或者 若 e_A 退化，也如此。
- 三角形是精简的，当且仅当它在 A 中是精简的。
- 三角形是薄的，当且仅当它是精简的，且其在 Δ^{n+1} 中的像是退化的。

于是映射 $\Delta^{\{0\}} \times A \to \Delta^1 \overline{\otimes} A$ 是 ***MB***-无穷无小的。

证明。 该断言可由一个标准的逐单纯形论证得出，具体细节留作读者练习。 □

注记 5.41。请注意， $\Delta^1 \overline{\otimes} \mathcal{M}\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$ 在备注 5.38 中给出的缩放，恰好就是引理 5.40 中的缩放，因此特别地，我们得到一个无害态射 $\mathcal{M}\left(\overline{\mathcal{F}}\right) \to \Delta^1 \overline{\otimes} \mathcal{M}\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$。此外，在 $\mathcal{F}$ 是对象 0 上的余可表函子的特殊情形下，可推出 $\mathcal{M}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{O}^n_0$ 因此，应用引理 5.40 n 次后，我们得到一个无害态射

$$\Delta^0 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}^n_0 \ .$$

其中，上面的映射选取子集 {0}。

定义 5.42。 设 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to$ 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$是一个集合$^{+}_{\Delta}$-富集函子。我们定义一个缩放单纯集 M($\mathcal{F}$)，其薄三角形恰好是 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 的精简三角形。

引理 5.43. 设 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to$ 集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$是一个纤维化的 集合$^{+}_{\Delta}$-富集函子。给定一个 (0,1)-纤维化 $p:\ X \to \Delta^n_\flat$，以及一个位于 $\Delta^n_\flat$ 上方的态射

$$\alpha : \mathcal{M}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$$

使得对每个 $j \in [n]$，映射 α 都诱导出双范畴等价 $\mathcal{F}(j) \simeq X_j$。那么可得 α 是 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_\flat}$ 中的弱等价。

证明。由于 $p: X \to \Delta^n_\flat$ 是一个 (0,1)-纤维化，因此我们可以通过将精简三角形声明为已缩放来构造一个相应的∞-双范畴 $\mathbb{X}$。我们声称，只需证明以下内容：

$\diamond$) The associated map $\alpha : \mathbb{M}(\mathcal{F}) \to \mathbb{X}$ is a bicategorical equivalence.

事实上，给定一个 (0,1)-纤维化 $q: Z \to \Delta^n_\flat$，其关联的 ∞-双范畴为 $\check{\mathbb{S}}$，由我们的断言可知，我们有一个双范畴等价。

$$\phi : \mathrm{Fun}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{M}(\mathcal{F}), \mathbb{Z}).$$

此外，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}^{\mathbf{sc}}_{\Delta^n}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Map}^{\mathbf{sc}}_{\Delta^n}(\mathbb{M}(\mathcal{F}), \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fun}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Fun}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{M}(\mathcal{F}), \mathbb{Z}) \end{array}$$

其中，$\mathrm{Map}^{\mathbf{sc}}_{\Delta^n}(-,-)$ 表示由保持标记边并与投影映射交换的映射构成的全子范畴。我们注意到，前述已缩放单纯集中的高阶单纯形也与投影映射兼容。由于 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 中的单纯形是薄的，当且仅当它是精简的且其像在 $\Delta^n_\flat$ 中是薄的，因此我们看到，如果 ψ 是双范畴等价，则可推出 α 是 $\left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^n_\flat}$ 中的弱等价。根据构造，显然 ψ 是完全忠实的，因此只需证明它是本质满的。

给定 $u \in \mathrm{Map}^{\mathbf{sc}}_{\Delta^n}(\mathbb{M}(\mathcal{F}), \check{\mathbb{S}})$，我们可以找到某个 $v \in \mathrm{Fun}^{\mathbf{sc}}(\mathbb{X}, \check{\mathbb{S}})$，使得 $\phi(v) \simeq u$。因此，只需证明 v 可经由 $\mathrm{Map}^{\mathbf{sc}}_{\Delta^n}(\mathbb{X}, \check{\mathbb{S}})$ 分解即可。令 $x \in X$ 满足 $p(x) = i$，并选取一个等价 $\alpha(y) \xrightarrow{\simeq} x$。于是我们得到：

$$v(\alpha(y)) \simeq u(y), \quad v(\alpha(y)) \simeq v(x) \implies q(v(x)) = i.$$

因此，我们可以专注于证明上面的陈述 $\diamond$)。令 $x_i \in \mathbb{M}(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}(i) \times \mathrm{O}^n_i$ 中由一对 $(a_i, \{i\})$ 表示的对象。我们考虑一个标记态射 $f: x_i \to \hat{}x_i$，它由 $(a_i, \{i\}) \to (a_i, \{in\})$ 给出。给定一个位于 n 上方的对象 x_n，我们断言如下：

$\star$) 沿 f 的限制诱导出标记单纯集的弱等价

$$\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{M}(\mathcal{F})](\hat{x}_i, x_n) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{M}(\mathcal{F})](x_i, x_n).$$

显然，$\diamond$) 可由 $\star$) 结合常规的归纳论证得出。我们注意到，我们有如下集合$^+_\Delta$ 富化范畴的余纤维化

$$\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})] \to \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1 \times \mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})], \qquad \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})] \to \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1] \times \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})]$$

以及一个图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathrm{M}(\overline{\mathcal{F}})] & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1 \times \mathrm{M}(\overline{\mathcal{F}})] & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^1] \times \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathrm{M}(\overline{\mathcal{F}})] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathcal{F}(n)] & \longrightarrow & \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathrm{M}(\mathcal{F})] & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{F})
\end{array}$$

其中两个方块都是推出。利用 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[-]$ 是左 Quillen 等价这一事实，不难看出最右上方的水平映射是弱等价。由此我们得出，最右下方的水平态射也是弱等价。通过直接检查可以很容易看出，类似于 $\star$) 的结论对 P($\mathcal{F}$) 也成立，因此证明完成。

□

命题 5.44。 设 $p\colon X \to \Delta^n_\flat$ 是一个 (0,1)-纤维化。那么存在一个投射纤维化且余纤维化函子 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to$ 集合$^{\mathbf{ms}}_\Delta$，以及一个弱等价 $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \to X$，它属于 $\left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_\Delta\right)_{/\Delta^n_\flat}$。

证明。 根据 引理 5.43，只需构造一个映射 $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \to X$，使其在各纤维上诱导范畴等价。我们对 n进行归纳， $n = 0$ 的情形显然。假设该结论对 $n-1$成立，并令 $i\colon \Delta^{[0,n-1]}_\flat \to \Delta^n_\flat$。记 $\overline{X}$为 X 沿 i的限制。利用归纳假设，我们得到一个投射纤维化且余纤维化函子$\overline{\mathcal{F}}$: $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^{n-1}_\flat] \to$ 集合$^{\mathbf{ms}}_\Delta$以及一个逐纤维等价 $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) \to \overline{X}$。我们利用 注 5.41 为提升问题

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & X \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
\Delta^1 \overline{\otimes} \mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \Delta^n
\end{array}$$

这为我们提供了一个映射 $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) \to X_n$。我们将此映射分解为

$$\mathcal{M}(\overline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{u} \hat{X}_n \xrightarrow{v} X_n$$

ˆ，其中 u 是余纤维化，而 v 是平凡纤维化。注意，由此可知 X_n 也是一个 ∞-双范畴。我们可以利用映射 u 将 $\overline{\mathcal{F}}$ 延拓为一个纤维且余纤维函子 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to \mathbf{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta$，使得 $\mathcal{F}(n) = \hat{}X_n$。于是结论成立。

□

命题 5.45。 设 $p\colon X \to \Delta^n_\flat$ 是一个 (0,1)-纤维化。则存在一个标记缩放单纯集之间的等价

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X_n)(n) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(X)(n)$$

其中 X_n 表示 X 在 n 上的纤维。

证明。 注意，由于 命题 5.44，我们有一个纤维且余纤维函子 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat] \to$Set$^{\mathbf{ms}}_\Delta$以及一个弱等价 $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \to X$。我们将证明，对于每个射影余纤维函子 $\mathcal{G}$，映射

$$\eta_{\mathcal{G}} : \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(\mathcal{G}(n))(n) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(\mathcal{M}(\mathcal{G}))(n)$$

是标记缩放单纯集之间的弱等价。我们注意到有一对函子

$$L_i : \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^n_\flat], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta) \longrightarrow \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta, \quad i = 1, 2$$

由 $L_1(\mathcal{G}) = \mathrm{St}_{\Delta^n}(\mathcal{G}(n))(n)$ 和 $L_2 = \mathrm{St}_{\Delta^n}(\mathcal{M}(\mathcal{G}))(n)$ 给出，它们保余极限和余纤维，并带有一个自然变换 $\eta : L_1 \Rightarrow L_2$。若 $\eta_{\mathcal{G}}$ 是弱等价，我们称函子 $\mathcal{G}$ 为良好的。为完成证明，我们需要证明每个余纤维函子都是良好的。

对于每个 $-1 \leqslant j \leqslant n$，令 $i_j : \Delta_\flat^{[0,j]} \to \Delta_\flat^n$ 为显然的包含，并约定$\Delta^{[0,-1]} = \varnothing$。给定一个函子 $\mathcal{G}$，我们将 $\mathcal{G}_j$定义为先沿着 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[i_j] = f^j$限制 $\mathcal{G}$，再沿着 f^j应用左 Kan 延拓所得的结果。我们令 $\mathcal{G}_{-1}$ 为初始函子。我们还将 $r^j : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^0] \to \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta_\flat^n]$ 记为如下函子：当 $0 \leqslant j \leqslant n$时，取对象 j。

注意，给定一个射影余纤维函子 $\mathcal{G}$，则可得典范映射$\mathcal{G}_{j-1}(j) \to \mathcal{G}(j)$ 对于 $0 \leqslant j \leqslant n$是余纤维化。我们还注意到，我们有一个推出图

$$\begin{array}{ccc} r^j_! \mathcal{G}_{j-1}(j) & \longrightarrow & r^j_! \mathcal{G}(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_{j-1} & \longrightarrow & \mathcal{G}_j \end{array}$$

其中 $r^j!$ 表示沿着 r^j的左 Kan 延拓函子。由于顶部的水平映射是余纤维化，要证明 $\mathcal{G}_j$ 是良好的，只需证明 $r^j!\ \mathcal{G}_{j-1}(j)$ $r^j!\ \mathcal{G}(j)$ 和 $\mathcal{G}_{j-1}$ 是良好的。我们注意到以下事实

- 若 $j > 0$ 由此可知 $r^j!\ A(i) = \varnothing$ 对于 $i < j$。特别地，由此可知 $\mathcal{M}(r^j!\ A)$ 经由 $\Delta_\flat^{[j,n]}$ 分解。现在我们可以对 n 使用归纳法，从而得出 $r^j!\ A$ 对于 $j > 0$是良好的。

最后，我们可以对 j 使用归纳法，将问题归结为证明：对于每个 $K \in$集合$^{\mathbf{ms}}_\Delta$，函子

$$\underline{K} : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta_\flat^n] \longrightarrow \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}};\ i \mapsto K \times \mathbb{O}^n(0,i)$$

是良好的。注意，我们可以进一步将计算简化到以下情形：$K = \Delta_\flat^k$ 对于 $k \geqslant 0$、$\Delta^2_\sharp$ 以及 $(\Delta^1)^\sharp$。我们只证明 $K = \Delta_\flat^k$ 对于 $k \geqslant 0$ 这一情形；其余情形都可通过完全类似的论证得出。

我们可以将 $\mathrm{St}_\Delta(\Delta^k \times \mathrm{O}_0^n)(n)$ 识别为由从 $\Delta^1 \times \Delta^k \times \mathrm{O}_0^n$ 出发的链构成的（带装饰的）偏序集的一个商，其中起点为 $(0,\ 0,\ \{0\})$，终点为某个元素 $(1,\ \ell,\ S)$，且 $\max(S) = n$。我们定义一个映射

$$\psi : \mathbb{S}\mathrm{t}_\Delta(\Delta_\flat^k \times \mathcal{O}_0^n)(n) \longrightarrow \Delta_\flat^k \times \mathbb{O}^n(0,n);$$

将链 $C = \{(\varepsilon_i,\ k_i,\ S_i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ 映射为 $(k_{i_{m_C}},\ S_{m_C} \cup \{\max(S_j)\}_{j \geqslant m_C})$，其中 m_C 是满足 $\varepsilon_i = 0$ 的最大指标。我们考虑映射 $p_0 : \Delta^k \to \Delta_\flat^n$，其中 Δ^k 具有最小装饰，且 p_0 在顶点 0 上为常值。现在我们可以考察交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(\Delta^k)(n) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}\mathrm{t}_\Delta(\Delta_\flat^k \times \mathcal{O}_0^n)(n) & \xleftarrow{\phi} & \mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^n}(\Delta^k \times \mathbb{O}^n(0,n))(n) \\ & {\scriptstyle u}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \psi} & \swarrow{\scriptstyle v} & \\ & & \Delta_\flat^k \times \mathbb{O}^n(0,n) & & \end{array}$$

并作如下观察：

1. 由引理 5.40、注 5.41 和命题 3.10 可知，φ 是弱等价。

2. 映射 $u\colon \mathrm{St}_{\Delta^n}(\Delta^k)(n) \simeq \mathrm{St}_*(\Delta^k) \times \mathrm{O}^n(0,n) \longrightarrow \Delta^k_\flat \times \mathrm{O}^n(0,n)$ 可识别为在命题 5.29 的证明中考虑的自然变换 αat Δ^k与 $\mathrm{O}^n(0,n)$ 上的恒等映射的乘积，因此它是弱等价。由 1 可知，ψ 也是弱等价。

3. 映射 $v\colon \mathrm{St}_{\Delta^n}(\Delta^k \times \mathrm{O}^n(0,\ n))(n) \simeq \mathrm{St}_*(\Delta^k \times \mathrm{O}^n(0,\ n)) \to \Delta^k_\flat \times \mathrm{O}^n(0,\ n)$ 也可识别为自然变换 α 的分量，因此它是弱等价。由此我们得出 ϕ 是弱等价。

我们的最后一项断言已经得到证明。因此，命题 5.33 得证。 □

5.3 主定理

令 $\mathrm{Set}^{\mathbf{sc}}_\Delta$ 表示缩放单纯集范畴，并注意到我们有一对函子，

$$F_1, F_2 : (\mathrm{Set}^{\mathbf{sc}})^{\mathrm{op}}_\Delta \longrightarrow \mathrm{Set}^+_\Delta\text{– Cat},\quad F_1(S) = \mathrm{Fun}^{\mathrm{o}}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta),\quad F_2(S) = \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_\Delta\right)^{\mathrm{o}}_{/S}$$

其值属于 Set^+_Δ-富化范畴的范畴，其中上标“o”表示由纤维化-余纤维化对象构成的满（富化）子范畴。提醒读者，由此可知，对于每个 $S \in \mathrm{Set}^{\mathbf{sc}}_\Delta$，我们都有纤维化的 Set^+_Δ-富化范畴 $F_i(S)$，其中 $i = 1,\ 2$。

我们断言，反直化构造 $\mathbb{U}\mathrm{n}(-)$ 定义了一个自然变换。根据 注记 5.14 只需证明，对于每个缩放单纯集 S，都有$\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 定义了一个集合$^+_\Delta$-富集函子。给定纤维且余纤维函子 $\mathcal{F},\ \mathcal{G}$: $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to$ 集合$^{\mathbf{ms}}_\Delta$，令 $\mathrm{Nat}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$ 表示相应的映射标记单纯集。则映射 $K \to \mathrm{Nat}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$ 恰好对应于一个富集自然变换 $K \otimes \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$，其中

$$K \otimes \mathcal{F}(s) = K \times \mathcal{F}(s).$$

因此，我们可以将映射 $K \to \mathrm{Map}_S(\mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F})\ \mathcal{G})$ 定义为以下复合

$$K \times \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Un}_*(K) \times \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{U}\mathrm{n}_S(K \times \mathcal{F}) \to \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{G}).$$

这表明 $\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 定义了一个集合$^+_\Delta$-富集函子。本节的主要目标是证明，对于每个缩放单纯集 S，$\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 是集合$^+_\Delta$-富集范畴之间的等价。

命题 5.46. 设 S 是一个缩放单纯集。则以下条件等价：

i) 函子 $\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 是右 *Quillen* 等价。

ii) 函子$\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 在限制到纤维化-余纤维化对象构成的全子范畴后，定义了纤维化集合$^+_\Delta$-富化范畴之间的等价。

证明。由 [Lur09] 中的命题 3.1.10 以及我们之前的讨论可知，$ii) \implies i)$。为了证明 $i) \implies ii)$，我们证明，给定一个标记单纯集 K，则 $\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 在 Set^+_Δ 的同伦范畴中诱导出 $[K, \mathrm{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{G})] \simeq [K, \mathrm{Map}_S(\mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F}), \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{G}))]$ 之间的同构。这可由下面的同构链推出。

$$[K, \mathrm{Nat}(\mathcal{F}, \mathcal{G})] \simeq [K \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}]^{\mathrm{Fun}} \simeq [\mathbb{U}\mathrm{n}_*(K) \times \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F}), \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{G})]^{\mathrm{Fib}} \simeq [K, \mathrm{Map}_S(\mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{F}), \mathbb{U}\mathrm{n}_S(\mathcal{G})$$

其中第二个同构是 i 的结果。 □

注记 5.47。设 S 是一个已缩放单纯集，且 $\phi:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to \mathcal{C}$ 是集合$^{+}_{\Delta}$ - 富化范畴之间的一个等价。注意，由 命题 5.13 可知，$\mathbb{U}\mathrm{n}^{\phi}$ 是右 Quillen 等价，当且仅当 $\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 是右 Quillen 等价。因此，在本节余下部分，我们令 $\phi = \mathrm{id}$.

推论 5.48. 令 $\Delta^2_\sharp = (\Delta^2, \sharp)$ 表示一个最大缩放 *2*-单形。那么直化-反直化伴随函子

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_{\Delta^2_\sharp} : \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{/\Delta^2_\sharp} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\sharp], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}) : \mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^2_\sharp}$$

是 *Quillen* 等价。

证明。 注意到我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}^{\mathrm{o}}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\sharp], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^2_\sharp}} & \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)^{\mathrm{o}}_{/\Delta^2_\sharp} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fun}^{\mathrm{o}}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\flat], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathbb{U}\mathrm{n}_{\Delta^2}} & \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)^{\mathrm{o}}_{/\Delta^2_\flat} \end{array}$$

其中垂直映射是完全忠实函子。由此我们得出 $\mathbb{U}\mathrm{n}^{\Delta^2_\sharp}$ 是完全忠实的。由 命题 5.46 可知，只需证明 $\mathbb{U}\mathrm{n}^{\Delta^2_\sharp}$ 是本质满的。

令 $p:\ X \to \Delta^2_\sharp$ 为一个纤维对象，并选取一个纤维且余纤维函子 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\flat] \to$集合$^{\mathbf{ms}}_{\Delta}$，使得 $\mathbf{Un}_{\Delta^2}(\mathcal{F}) \simeq X$。为了完成证明，我们需要证明 $\mathcal{F}$ 可通过$\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\sharp]$因子分解。由于 $\mathbf{Un}_{\Delta^2}(\mathcal{F})$ 等价于 X，因此该纤维化中局部 (0，1)- 笛卡尔边的复合仍然是 (0，1)- 笛卡尔边。直接检查可知，我们的函子必须通过 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\Delta^2_\sharp]$ 因子分解，因此该断言成立。 □

注 5.49。 根据 [Lur09] 中的引理 A.3.6.17 和推论 A.3.6.18 可知， F_1 将缩放单纯集的同伦余极限映射为集合$^{+}_{\Delta}$ -富化范畴的同伦极限。

Le引理 5.50。 设 $f : S_0 \to S$ 是缩放单纯集合的一个余纤维化，则该函子

$$f^* : \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)^{\mathrm{o}}_{S} \longrightarrow \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)^{\mathrm{o}}_{S_0}$$

是 集合$^{+}_{\Delta}$ -富化范畴的纤维化。

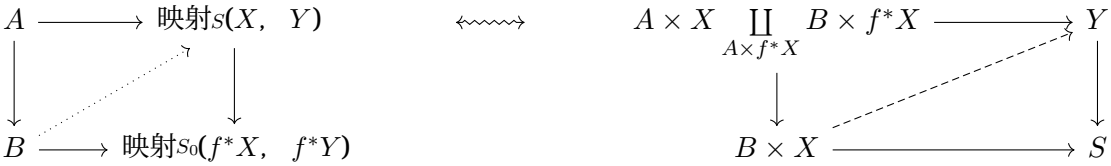
证明。 由于两个集合$^{+}_{\Delta}$ -富化范畴都是纤维化的，因此由[Lur09] 可知，只需证明以下内容：

) 给定一对纤维对象 $X, Y \in \left(\text{集合}^{\mathbf{mb}}_{\Delta}\right)_{\mathrm{o}} S$，则映射$\infty$-范畴上的诱导态射

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{th}}_{S}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}^{\mathrm{th}}_{S_0}(f^*X, f^*Y)$$

是标记单纯集之间的纤维化。

更一般地，我们考虑一对伴随提升问题



其中 $A \to B$ 是 **MB**-无害的。由于 $f : S_0 \to S$ 是一个余纤维化，因此可以得出典范映射 $f^*X \to X$ 是一个余纤维化，因此我们可以利用 命题 3.10 得出结论：我们可以构造出提升问题所需的解。

□

定理 5.51. 设 S 为一个缩放单纯集。则函子$\mathbb{U}\mathrm{n}_S$ 诱导出一个集合$^+_\Delta$ -富化范畴的等价。

$$\mathbb{U}\mathrm{n}_S : \mathrm{Fun}^{\mathrm{o}}(\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S], \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta) \longrightarrow \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_\Delta\right)^{\mathrm{o}}_{/S}$$

证明。 我们称缩放单纯集 S 是良好的，如果定理的结论成立。根据 命题 5.46 我们知道， 命题 5.33 表明缩放单纯集 $(\Delta^n, \flat)$ 对于 $n \geqslant 0$是良好的。此外，由 推论 5.48 可知，$(\Delta^2, \sharp)$ 也是良好的。

回顾一下，每个缩放单纯集 S 都可以表示为关于自然数的滤过余极限

$$S_0 \to S_1 \to \cdots S_k \to \cdots$$

使得每个映射 $S_i \to S_{i+1}$ 都是余纤维化，并且 S_0 是若干点的不交并。此外，逐单纯形论证表明，此滤过中的每一步都可以通过沿余纤维化作推出得到：

- $(\partial\Delta^n, \flat) \to (\Delta^n, \flat)$ for $n \geqslant 0$.
- $(\Delta^2, \flat) \to (\Delta^2, \sharp)$.

我们在 注 5.49 中看到， F_1 将同伦余极限映为同伦极限。我们看到，要完成证明，只需证明 F_2 将滤过中出现的余极限映为同伦极限。利用 引理 5.50 ，问题归结为验证 F_2将这些余极限映为普通极限，这一点可由直接检查得出。证明完成。

□

推论 5.52。 设 S 是一个已缩放单纯集，且 ϕ: $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[S] \to \mathcal{C}$ 是集合$^+_\Delta$ -富化范畴之间的一个等价。那么，直化-反直化伴随

$$\mathbb{S}\mathrm{t}_\phi : \left(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_\Delta\right)_{/S} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta) : \mathbb{U}\mathrm{n}_\phi$$

是一个 *Quillen* 等价。

注 5.53。设 $\mathbf{N}^{\mathbf{sc}}$ 是 $\mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}$的右伴随。给定一个已缩放单纯集 S ，我们定义 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{01}(S) = \mathbf{N}^{\mathbf{sc}}(F_2(S))$。我们还定义$\mathbb{B}\mathrm{icat}_\infty = \mathbf{N}^{\mathbf{sc}}((\mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta)_{\mathrm{o}})$，并注意到，与[ASII22] 中的讨论类似，定理 5.51 表明我们有一个∞-双范畴的等价

$$\mathbb{U}\mathrm{n}_S : \mathrm{Fun}(S, \mathbb{B}\mathrm{icat}_\infty) \longrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ib}^{01}(S).$$

定义 5.54。设“ $=(S,T_S)$ 是一个 ∞-双范畴，并设 $S_{M_S}=(S,M_S)$（见定义 4.1）。我们将 ŒFib(“) $=\dagger$ ib$^{01}(S_{M_S})$ 记为“上的局部 (0, 1)-纤维化所构成的 ∞-双范畴。类似地，给定另一个 ∞-双范畴 „，我们定义 Fun^{oplax}(“, „) $=$ Fun$(S_{M_S}$, „)。

注记 5.55。 在 [GHL21], 定义 Fun$^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{S},\mathbb{D})$ 被提出作为余松弛幺半函子的模型。预计该定义将与 [GR17] 的定义一致，但这一说法至今仍未得到证明。

推论 5.56。设$\mathbb{S}$ 为一个 ∞-双范畴。那么，与缩放单纯集(S,M_S)相关联的直化–反直化伴随关系

$$\mathbb{St}_{\mathbb{S}}^{\mathrm{oplax}} : \mathbb{L}\mathrm{Fib}(\mathbb{S}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{S},\mathbb{B}\mathrm{icat}_\infty) : \mathbb{U}\mathrm{n}_{\mathbb{S}}^{\mathrm{oplax}}$$

产生了一个 ∞-双范畴之间的等价，即以(0,1)-纤维化为对象的局部纤维化 ∞-双范畴与取值于 ∞-双范畴的余松弛幺半函子 ∞-双范畴之间的等价。

证明。 这立即由 定理 5.51 和 注 5.53得出。 □

6 ∞-双范畴 Yoneda 嵌入

本节将给出 (∞,2)-范畴的米田引理证明。我们想指出，这一结果已出现在 Hinich 的工作 [Hin20] 中，背景是富化 ∞-范畴理论。本节中，我们固定一个 ∞-双范畴 $\mathbb{C}$。

定义 6.1。 设 $\mathbb{C}$ 是一个 ∞-双范畴，并且令 $\mathbb{F}(\mathbb{C})$ $=$ 函子$^{\mathrm{gr}}(\Delta^1,\mathbb{C})$。我们注意到，在 0 和 1 处的求值分别诱导映射 ev$_i$: $\mathbb{F}(\mathbb{C})$ $\to \mathbb{C}$ 对于 $i=0,1$。由 [GHL22c] 中的定理 2.2.6 可知，在 0 处的求值给出一个 (1，0)-纤维化。类似地可以证明，映射 ev$_1$ 定义了一个 (0，1)-纤维化。

注记 6.2。 回顾一下，F(f) 中的态射是 (0,1)-笛卡尔的，当且仅当它在 ev$_0$ 下映射到一个等价。同样，F(f)(x,y) 中的 2-态射是笛卡尔的，当且仅当它在 ev$_0$ 下在 f 中的像是可逆的。

注记 6.3. 令 $f\colon \mathbb{A}\to\mathbb{f}$ 为一个 ∞-双范畴的函子，并考虑一个拉回图式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathbb{C})\times_{\mathbb{C}}\mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{F}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{C} \end{array}$$

因此，在 0 处的求值诱导出一个映射 $\mathbb{F}(\mathbb{C})\times_{\mathbb{C}}\mathbb{A}\to\mathbb{C}$，根据 *3.8* 命题，该映射是一个 (1,0)-纤维化，见 [ASII22b]。我们注意到有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{F}(\mathbb{C})\times_{\mathbb{C}}\mathbb{A} \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

其中水平态射由映射 $\Delta^1\otimes\mathbb{A}\to\Delta^0\otimes\mathbb{A}\simeq\mathbb{A}$诱导。此外，作为 [ASII22b] 中定理 3.17 的推论，我们看到，对于每个 (1，0)-纤维化 $\mathbb{X}\to\mathbb{C}$，我们有一个

∞-双范畴的平凡纤维化

$$\mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} \mathbb{A}, \mathbb{X}) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{X})$$

这里我们稍微滥用一下记号，用 $\mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(-,\ -)$ 表示相对于 (1，0)-纤维化的映射 ∞-双范畴。

注 6.4. 设 $p\colon (A,\ E_A,\ T_A \subset C_A) \to (\mathfrak{f}\ \sharp,\ T_{\mathbb{C}} \subset \sharp)$ 是 MB 单纯集之间的一个映射。那么，无论 A 的纤维性如何，我们总可以考虑 $\mathrm{F}(\mathfrak{f}) \times_{\mathbb{C}} A$ （它可能不是一个 (1，0)-纤维化），其装饰如下所示：

- 若一条边所关联的映射 $\Delta^1 \otimes \Delta^1 \to \mathfrak{f}$ 可经由 $\Delta^1 \times \Delta^1$ 分解，且限制到 $\Delta^1 \times \Delta_{\{1\}}$ 后在 A 中是标记的，则称该边为标记的。
- 若一个三角形的限制 $\Delta_{\{1\}} \otimes \Delta^2$ 在 A 中是精简的，则称该三角形为精简的。
- 若一个三角形是精简的，且其在 $\mathfrak{f}$ 中的像是薄的，则称该三角形为薄的。

然而，在 [ASII22b，定理 3.17，推论 3.20] 中的证明完全是组合自然的，仔细考察便会发现，我们总有一个（相对于给定装饰的）无害态射 $A \to \mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} A$。

考虑 (0，1)-纤维化 $\mathrm{ev}_1 : \mathrm{F}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{f}$，并注意到我们有一个在 $\mathfrak{f}$ 上的交换图，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_0 \times \mathrm{ev}_1} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & {\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_2} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

其中 π_2 是到第二个因子的投影。根据我们的定义，映射 $\mathrm{ev}_0 \times \mathrm{ev}_1$ 可视为 (0，1)-纤维化之间的映射，其中 $\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ 由取值为 $\mathfrak{f}$ 的常值函子分类。设 F 为由 $\mathrm{F}(\mathfrak{f}) \to \mathfrak{f}$ 分类的函子。我们作如下观察：

1. 对每个 $c \in \mathfrak{f}$，我们都有一个函子 $p_c : \mathrm{F}(c) \to \mathfrak{f}$；对每个态射 $u : c \to c'$，我们都有一个交换图 $p_{c'} \circ \mathrm{F}(u) = p_c$。
2. 对每个 $c \in \mathfrak{f}$，都可得一个态射

$$\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} * = \mathbb{C}_{c} \longrightarrow \mathbb{C}$$

它是一个 (1,0)-纤维化，这是由 注6.3 得出的。此外，我们注意到，对于每个 $c \in \mathbb{C}$，都可得一个态射

$$\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} * = \mathbb{C}_{c} \longrightarrow \mathbb{C}$$

它是一个 (1,0)-纤维化，这是由 注6.3得出的。仔细检查可知，对于每个 $u : c \to c'$，诱导态射 $u_* : \mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}_{c'}$ 保留 (1,0)-笛卡尔边，其纤维是∞-范畴。

3. 结合 1 和 2，我们看到 $p_c\colon \mathrm{F}(c) \to \mathfrak{f}$ 是一个 (1,0) 纤维化，并且 $\mathrm{F}(u)$ 是 (1,0)-纤维化的一个函子。

我们得出结论，F 可以表示为一个复合形式

$$\mathcal{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ib}^{10}(\mathbb{C})^{\leqslant 1} \longrightarrow \mathbb{B}\mathrm{icat}_{\infty}$$

其中第二个函子是显然的投影，上标“⩽1“表示由纤维为 ∞-范畴的 (1,0)-纤维化张成的 ∞-双范畴。利用主要结果的对偶版本，或等价地，利用 [ASII22] 中的推论 3.90，我们得到一个函子

$$\mathcal{Y} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty})$$

我们将其称为双范畴 Yoneda 嵌入。

命题 6.5。 存在一个函子 $\mathbb{I} : \mathbb{F}\mathrm{ib}^{10}(\mathbb{C})^{\leqslant 1} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{10}(\mathbb{C})^{\leqslant 1}$，它将一个 $(1,0)$-纤维化 $p : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$（具有 ∞-范畴纤维）映射为 $(1,0)$-纤维化 $\mathbb{I}(\mathcal{G})$，该纤维化被定义为由泛性质唯一刻画的 $\boldsymbol{MB}$ 单纯集。

$$\mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{I}(\mathcal{G})) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} A, \mathcal{G})$$

其中 A 是一个 $\boldsymbol{MB}$ 单纯集，且 $\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} A$ 定义如 注 *6.4*。

证明。 有两件主要的事情需要证明：我们需要证明 %o(G) → f 是一个 (1，0)-纤维化，其纤维是 ∞-范畴，并且构造 %o(–) 是函子的。我们将首先证明第二个断言。

令 $K \in$ 集合$^{+}_{\Delta}$（我们将其视为具有最大缩放），并考虑一个映射 $K \to$映射c(G，H)。我们将如下构造一个态射 $K \to$映射c(%o(G)，%o(H))：
给定一个单纯形 $\Delta^n \xrightarrow{\sigma \times \overline{\varphi}}$ %o(G) × K，我们考虑一个态射

$$\mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} \Delta^n \xrightarrow{f_\sigma \times \varphi} \mathcal{G} \times K \to \mathcal{H}$$

其中 φ 由复合 F(f) ×C Δ^n → Δ^n $\xrightarrow{\overline{\varphi}}$ K 给出。这个映射显然与投影相容且函子性地 a，因此得到一个映射 %o(G) × K → %o(H)。
为完成证明，我们将证明 %o(G) ∈ †ib^{10}(f)$^{\leqslant 1}$。首先注意，给定 $c \in$ f，我们有一个典范同构，

$$\mathbb{I}(\mathcal{G}) \times_{\mathbb{C}} \{c\} \simeq \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{c}, \mathcal{G})$$

这表明 I(G) 的纤维实际上是 ∞-范畴。设 i : $A \to B$ 是 (1，0)-纤维化模型结构中的一个无害态射，该模型结构见 [AGSI22]。由注记 6.4 可知我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} A \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{F}(\mathbb{C}) \times_{\mathbb{C}} B \end{array}$$

其中水平态射都是弱等价。由三取二性质可知，最右侧的竖直态射也是弱等价。因此我们得出，%o(G) 是一个 (1,0)-纤维化。

□

注记 **6.6.** 根据前面的命题，纤维化 %o(G) 在直 n-

化等价下对应于一个函子 $\mathcal{f}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{f}\mathrm{at}_\infty$，它将对象 c 映射到

$$\mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{c}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{C}(-,c), \mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}))$$

其中，$\mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(-,-)$ 是 $\mathrm{Fun}(\mathcal{f}^{\mathrm{op}}, \mathcal{f}\mathrm{at}_\infty)$ 中的映射 ∞-范畴。我们将省略以下事实的明确验证：存在一个反变函子之间的等价

$$\mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathbb{I}(\mathcal{G})) \simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{Y}(-), \mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G})).$$

定理 6.7。 对于每个 ∞-双范畴 $\mathbb{C}$，*Yoneda*嵌入

$$\mathcal{Y} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty), \quad c \mapsto \mathbb{C}(-,c)$$

是全忠实的。此外，给定一个函子 $\mathcal{F} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，存在一个 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$-值函子之间的等价

$$\mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{Y}(-), \mathcal{F}) \xRightarrow{\simeq} \mathcal{F}$$

它关于 $\mathcal{F}$是自然的。

证明。 为了证明，采用以下等价函子会更方便（注意这里稍微滥用了记号）：

$$\mathcal{Y} : \mathbb{C} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{10}(\mathbb{C})^{\leqslant 1}.$$

由构造可知 $\mathcal{Y}(c) : \mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}$。由 [ASII22b，定理 3。17] 应用于函子 $c : \Delta^0 \to \mathbb{C}$ 以及 ASII 中的推论 3.90 [ASII22] 可知，$\mathcal{Y}(c)$ 在格罗滕迪克构造下由 c 上的可表函子分类。

我们注意到，我们有 ∞-范畴的函子。

$$\mathbb{C}(c,c') \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{c}, \mathbb{C}_{c'}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(c, \mathbb{C}_{c'}) \simeq \mathbb{C}(c,c')$$

其中，第一个映射由 $\mathcal{Y}$ 诱导得到，第二个映射则由沿着选择 $\mathbb{C}_{c}$ 中恒等态射的映射进行限制而给出。注意，正如注6.3中所指出的，后一个映射是一个弱等价。

与之对偶的论证 [ASII22b，定理 3。17] 表明映射 $\mathbb{C} \to \mathbb{F}(\mathbb{C})$ 在 (0,1)-纤维化的模型结构中是一个等价。因而，我们可以使用 $\mathcal{Y}$对函子 $\mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ 建模。

令 $\varphi_c : \Delta^0 \to \mathrm{St}_{\mathbb{C}}(\mathcal{f})(c)$ 为选取对象 $(0,c) \to (1,c)$ 的函子，该对象在第二个分量上是退化的，并考虑其复合。

$$\Psi : \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{C}](c,c') \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi_c} \mathfrak{C}^{\mathbf{sc}}[\mathbb{C}](c,c') \times \mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})(c) \longrightarrow \mathbb{St}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})(c').$$

检查可知，Ψ 将一个态射 $f : c \to c'$ 映到 $\mathrm{St}_{\mathbb{C}}(\mathcal{f})(c')$ 中由 $(0,c) \to (1,c) \to (1,c')$ 表示的对象，因此在相关的识别下对应于对象$f \in \mathcal{f}_{c'}$。仔细分析 Ψ 可知，映射

$$\Phi : \mathbb{C}(c,c') \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(c, \mathbb{C}_{c'}) \simeq \mathbb{C}(c,c')$$

与恒等映射等价，因此是一个弱等价。由此我们得出 Y 是完全忠实的。

为了证明最后的断言，我们将证明函子 $\mathbb{I}$ 在 命题 6.5 中与恒等函子自然等价。我们构造一个到恒等函子的自然变换 $\mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{1}$ 其由以下映射给出：

诱导 典范映射 $A \to \mathrm{F}(\mathfrak{f}) \times_{\mathbb{C}} A$。我们注意到，诱导出的纤维映射

$$\mathrm{Map}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{c}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(c)$$

由沿着选取恒等态射的无角映射 $\Delta^0 \to \mathfrak{f}_c$ 作限制给出，因此是一个弱等价。

□

参考文献

[AGH23] F. Abellán、A. Gagna & R. Haugseng. (∞,2)-范畴的伴侣。准备中。[AG21] F. Abellán García. 标记余极限与高余终性。《同伦与相关结构杂志》(2021) DOI: s40062-021-00296-2[AGSI22] F. Abellán García & W.H. Stern. 2-笛卡尔纤维化 I：纤维化于 ∞-双范畴中的 ∞-双范畴模型。《应用范畴结构》，第30卷，第1341–1392页（2022）doi:[ASII22] F. Abellán & W.H. Stern. 2-笛卡尔纤维化 II：∞-双范畴的格罗滕迪克构造 2201.09589[ASII22b] F. Abellán & W.H. Stern. 关于 ∞-双范畴的余终函子[Be21] J. D. Berman. 无穷范畴中的松弛极限。arXiv: 2006.10851[Buc14] M. Buckley. 纤维化 2-范畴与双范畴。《纯粹与应用代数》，第218卷，第6期，第1034–1074页（2014）[CDW23]M. Christ, T. Dyckerhoff, T. Walde 稳定∞-范畴的复形。arXiv:2301.02606[GHL21] A. Gagna, Y. Harpaz, E. Lanari. Gray 张量积与(∞,2)-范畴的松弛函子。《数学进展》，第391卷（2021）doi: j.aim.2021.107986[GHL22] A. Gagna, Y. Harpaz, E. Lanari. 关于(∞,2)-范畴所有模型的等价。Math. Soc, Lond (2022) doi: jlms.12614[GHL22b] A. Gagna, Y. Harpaz, E. Lanari. (∞,2)-范畴的纤维化与松弛极限。arXiv: 2012.04537[GHL22c] A. Gagna, Y. Harpaz, E. Lanari. (∞,2)-范畴的笛卡尔纤维化。arXiv: 2107.12356[GR17] D. Gaitsgory and N. Rozenblyum.《导出代数几何研究，第一卷与第二卷》。《数学调查与专著》第221卷。2017年。969页。美国数学学会[Hin20] V. Hinich，富化 ∞-范畴的米田引理。《数学进展》，第367卷（2020）doi:j.aim.2020.107129[LNP22] S. Linskens, D. Nardin, L. Pol. arXiv：通过部分松弛极限实现整体同伦论。2206.01556[Lur09]J. Lurie.《高阶托普斯理论》。普林斯顿大学出版社，2009年。作者网页上可获取[Lur15] J. Lurie.《高等代数》。2017年。作者网页上可获取。[Lur18] J. Lurie. (∞, 2)-范畴与 Goodwillie 演算。arXiv: 0905.0462