基于蒸馏与编码非对称性的可靠量子通信

Lorenzo Valentini、Ren´e Bødker Christensen、Petar Popovski、Marco Chiani

arXiv:2305.00949v2 [quant-ph] 3 Jun 2024

摘要

可靠地提供纠缠量子比特，是多种分布式量子计算方案的重要前提。这一目标会受到多种因素的影响，例如量子链路传输过程中的错误，以及退相干导致的纠缠随时间退化。后者可视为对量子协议时延的约束，由此将量子协议设计问题置于时延-可靠性约束的背景下。我们通过混合方案应对这一问题，这些方案结合了：（1）基于量子隐形传态和蒸馏的间接传输；（2）基于量子纠错（QEC）的直接传输。其直觉是，目前量子硬件的保真度较低，因此需要进行蒸馏；另一方面，量子纠错技术能够实现低时延。研究表明，在所提出的框架中，蒸馏协议会产生可由非对称量子纠错码（QECC）利用的非对称性，这为独特的混合蒸馏与编码设计奠定了基础。结果显示，与传统量子纠错相比，专用非对称码能够提升性能并缩减码字长度，且在单链路和量子网络场景中均如此。

索引词

量子通信、量子蒸馏、纠缠、非对称信道、非对称量子纠错。

Lorenzo Valentini 和 Marco Chiani 任职于意大利博洛尼亚大学的 CNIT/WiLab、DEI。电子邮箱：{lorenzo.valentini13、marco.chiani}@unibo.it。Ren´e Bødker Christensen 任职于丹麦奥尔堡大学电子系统系和数学科学系。电子邮箱：rene@math.aau.dk。Petar Popovski 任职于丹麦奥尔堡大学电子系统系。电子邮箱：petarp@es.aau.dk。本文部分经费由丹麦 Velux Foundations 提供的 Villum Investigator Grant “WATER” 资助，并由意大利欧盟 Next Generation EU 的 PNRR 项目及 PRIN 项目 n. 2022JES5S2 资助。

I. 引言

量子互联网的发展与经典通信及现有互联网技术相辅相成，由此带来了许多有趣的研究挑战 [1]–[3]。量子通信主要有两类应用：（*a*）增强现有服务，例如量子密钥分发 [4] 或超密编码 [5]；（*b*）实现新服务，例如分布式量子计算 [6]–[8] 或远程处理量子传感数据 [9], [10]。（a）类应用传输经典信息，而（b）类应用传输量子信息。量子网络可定义为由一组节点构成的网络，这些节点能够交换量子比特，并在网络节点之间分发纠缠态 [11]。交换量子信息有两种可能方式：通过量子隐形传态协议进行间接传输 [12],，以及利用量子纠错（QEC）直接传输量子比特 [13]。

对于间接传输，实现基于量子隐形传态的可靠通信的关键构件，是分发爱因斯坦–波多尔斯基–罗森（EPR）纠缠对或其他类型的纠缠态 [14]–[16]。由于这种分发会受到不完美因素的影响[17]–[22], ，人们开发了蒸馏协议 [23], [24] ，以提高共享 EPR对的保真度。这样，便能以增加时延和量子比特资源使用量为代价，实现可靠通信。

先导式纠缠生成有三种基本方案 [25]: i) 源端，由发送方负责生成并共享纠缠； ii) 中间点，纠缠源位于发送方与接收方之间； iii) 两端，由发送方和接收方协同完成纠缠共享。这些方案催生了多种量子互联网协议栈提案。例如， [26] 提出了一种基于源端分发的协议栈，而 [27], [28] 中的作者采用基于两端的分发方案。

图1中的示例展示了两个量子计算机之间利用在源端进行纠缠分发实现的间接通信。具体而言，图1的时序图说明了将一个量子比特 Q_1 从量子计算机 C_1 发送到另一台计算机 C_2所需的总时延。首先，一条量子消息从 C_1 发送至 C_2，其中包含若干量子比特（EPR对的半部）。由于噪声的影响，共享的量子对通常将不再处于完全纠缠状态，因此不适合直接用于量子隐形传态。于是，双方交换一系列经典消息，以提高这些量子对的可靠性，具体依据

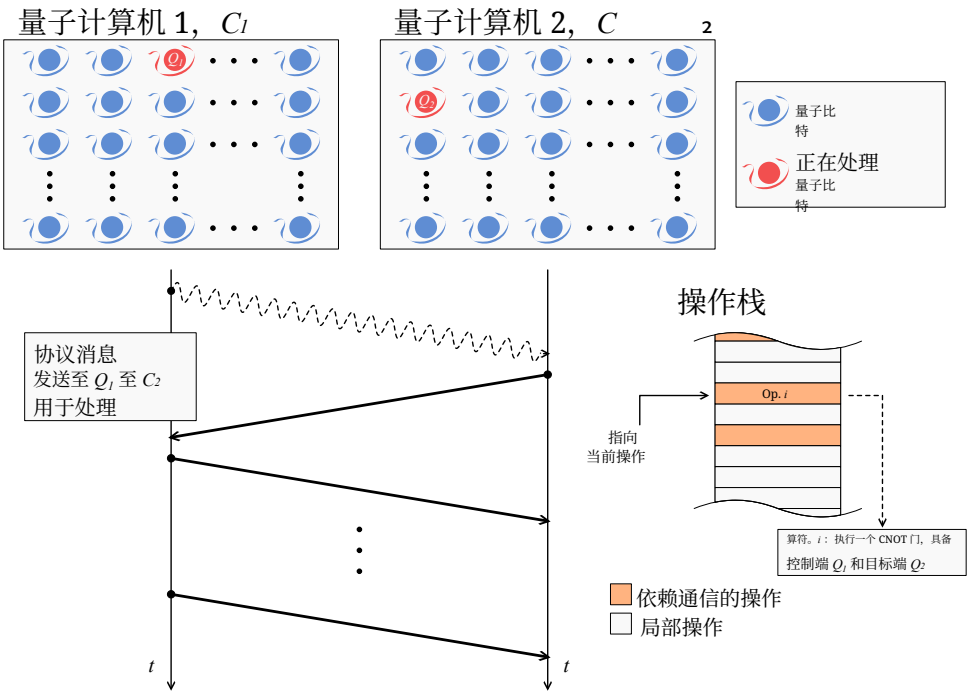

图 1. 分布式量子计算的一个示例。两台量子计算机 C_1 和 C_2 共同承担一项任务，该任务由一个顺序操作栈表示。按照与计算相关的某种调度，当两台不同量子计算机中的两个量子比特需要相互作用时，就使用量子通信链路将其中一个量子比特发送到另一台计算机，执行操作后再将其送回。

蒸馏协议 [23]。另一方面，这种消息交换也会增加总时延。最后，发送一条（经典的）量子隐形传态消息，以传递量子信息。需要注意的是，由于退相干，共享量子对的保真度会随时间降低；这被建模为对协议延迟的约束。

以图 1 为例，可靠性 是指沿着传输路径将传输状态保留至接收方的能力，而时延是指从打算传输量子比特到其实际被接收之间的时间。假设需要执行一项涉及许多量子比特的量子算法，例如因式分解算法 [29]。我们知道，任何量子计算都可以通过采用一组有限的通用量子门来实现，这些量子门作用于一个或两个量子比特。操作可能的调度方式由图 1 中的堆栈表示。当单台量子计算机的量子存储器不足以运行该算法时，我们可以考虑使用多台量子计算机，例如图 1 中标示为 C_1和 C_2 的两台。为了以分布式方式执行双量子比特算子，两台量子计算机应能够可靠地交换量子比特。假设在某个时刻， C_1 的一个量子比特 Q_1 需要与 C_2的一个量子比特 Q_2 进行交互。因此， C_1 使用基于蒸馏和量子隐形传态的间接通信方式，将其量子比特发送给 C_2 ，如前文所述

（另请参见时序图）。此时，计算机 C_2 可以对 Q_1和 Q_2执行本地操作。我们注意到，更高的可靠性约束要求更多的蒸馏（经典）消息，从而增加通信协议的时延，并直接影响算法的计算时间。请注意，可靠性约束至关重要，因为通信错误会导致算法从头开始重置或重新启动。从这个简单的例子中，我们发现有必要寻找一种策略，在达到与蒸馏协议相同可靠性的同时，尽可能减少交换的经典消息数量。

关于直接通信，在 [13] 中，作者考虑了一条量子链路，其中信息量子比特由表面码传输 [30]–[32]。存在量子纠错时，也可以将经典信息搭载在量子信息上 [33]。一般而言，我们可以将量子纠错码分为对称码 [34]–[36] 和非对称码 [37], [38]。对称 $[[n,k,d]]$ 量子纠错码将 k 个信息量子比特编码为 n 个物理量子比特，并能够纠正编码量子比特上至多 $t=\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ 个一般错误（即 Pauli $\boldsymbol{X}$、 $\boldsymbol{Z}$或 $\boldsymbol{Y}$错误）。另一方面，具有（e_{g}， e_{Z}）纠错能力 [38]的非对称 $[[n,k]]$ 量子纠错码能够纠正至多 e_{g} 个一般错误以及 e_{Z} 个特定错误，在此情况下为 Pauli $\boldsymbol{Z}$错误。其他非对称码也可定义为 $[[n,k,d_{\mathrm{X}}/d_{\mathrm{Z}}]]$ ，因为它们能够纠正 $t_{\mathrm{X}}=\lfloor (d_{\mathrm{X}}-1)/2 \rfloor$ 个 Pauli $\boldsymbol{X}$ 错误以及 $t_{\mathrm{Z}}=\lfloor (d_{\mathrm{Z}}-1)/2 \rfloor$ 个 Pauli $\boldsymbol{Z}$ 错误（例如 Calderbank-Shor-Steane 码 [37], [39]–[41]）。在量子通信中，对于传输量子比特上固定的错误概率，只要初始错误概率低于某个依赖于码的阈值，基于量子纠错的通信方案就比未编码方案具有更高的可靠性。一般而言，这种初始错误概率称为保真度，并且取决于技术。此外，在直接通信协议中，可靠性的提升需要通过编码来增加量子存储器的容量。

将量子通信协议划分为直接和间接两类的这一思路也见于 [42], ，其中网络根据所采用的错误管理方案被划分为不同的“代”。其中一些通过蒸馏处理错误，另一些则使用量子纠错。在这一背景下，我们将本文定位于这两类代际之间，并研究同时采用蒸馏和量子纠错技术的混合方案。具体而言，我们假设与非局部错误（即传输导致的保真度降低）相比，局部错误（即量子门错误和量子测量）可以忽略。在这种情形下，直接通信尚不可行，但可以在网络的每个节点利用量子纠错。采用量子纠错方案（无论是混合方案还是纯量子纠错方案）的理由在于，与无编码方案相比，这些方案能够降低时延。事实上，为了实现

相同的目标可靠性，无编码方案需要更多蒸馏步骤，这些步骤以经典消息的传输次数来表示。另一方面，也可以预先设定蒸馏步骤的数量来固定时延，并利用量子纠错码提高可靠性。此外，在这一新框架下，我们指出，蒸馏协议会产生可由非对称量子纠错码利用的非对称性 [37], [38],，因此可以联合设计蒸馏与编码。除了图1中讨论的示例外，应用还包括面向量子互联网的中代错误管理方案、自适应量子纠错以实现量子网络中的可靠通信、多核量子计算 [6], 、网络上的量子图态构造 [43]–[45] ，以及其他许多应用。

本文的主要贡献可概括如下：

- 提出一种混合蒸馏-量子纠错方案，利用蒸馏协议所产生的非对称性；
- 分析蒸馏协议的等效量子信道参数演化，以找出可利用的非对称性；
- 提出并设计一种改进的量子网络协议，该协议基于交换和蒸馏的调度策略。
- 证明，与传统量子纠错相比，专用非对称码可在单链路和网络场景中提升性能并缩短码字长度；

本文结构如下。第二节介绍预备概念和模型，并提供一些背景知识。第三节着重介绍本文的主要贡献。第四节展示数值结果。最后，第六节总结全文。

符号说明：全文中，大写粗体字母表示矩阵。我们采用狄拉克符号表示量子态对应的向量。Ket 向量 $|\psi\rangle$ 是一个复系数列向量，而 bra 向量 $\langle\psi|$ 是其复共轭。

II. 预备知识与背景

量子比特是二维希尔伯特空间 $\mathcal{H}^2$中的一个元素，其标准正交基为$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ [46], [47]。泡利算符 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}$和 $\boldsymbol{Y}$定义为 $\boldsymbol{I}|a\rangle = |a\rangle$、$\boldsymbol{X}|a\rangle = |a \oplus 1\rangle$$(-1)^a|a\rangle$和 $\boldsymbol{Y}|a\rangle = i$$(-1)^a|a \oplus 1\rangle$，其中 $a \in \{0, 1\}$，$\oplus$ 表示异或运算。这些算符彼此之间要么对易，要么反对易。其他

本文中使用的其他有用单量子比特门包括哈达玛门，其表示为$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z})/\sqrt{2}$，以及 x轴旋转门 $\boldsymbol{R}_x(\theta) = \cos(\theta/2)\boldsymbol{I} - i\sin(\theta/2)\boldsymbol{X}$。对于双量子比特贝尔态，或等价地EPR对，我们使用记号 $|\Phi^{\pm}\rangle = (|0\theta\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$ 和 $|\Psi^{\pm}\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$。CNOT门是一种作用于两个量子比特的量子门，其中一个称为控制端，另一个称为目标端。具体而言，如果控制量子比特处于状态 $|1\rangle$，则根据 $|c\rangle|t\rangle \mapsto |c\rangle|t \oplus c\rangle$，目标量子比特会翻转；否则不发生任何变化。对于一个 n量子比特系统，我们用 $\boldsymbol{Z}_j$ 表示作用于第 j个量子比特的泡利 $\boldsymbol{Z}$ 算符。类似地，对于CNOT门，我们用$\boldsymbol{CX}_{j,k}$ 表示该算符以第 j个量子比特为控制端、第 k个量子比特为目标端。我们将混合态定义为量子态上的一种分布 $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$，这意味着系统以 p_i 的概率处于状态 $|\psi_i\rangle$。我们使用密度矩阵表示 $\boldsymbol{\varrho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$来表示量子系统的状态。

量子隐形传态协议是一种算法，它通过消耗两个经典比特和一个EPR对，将量子态从一个量子比特传送到另一个量子比特 [12]。该过程可概括如下： *i)* 在 $|\psi\rangle|\Phi^+\rangle$中制备一个三量子比特态； *ii)* 应用 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{CX}_{1,2}$； *iii)* 在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$基下测量第一个和第二个量子比特； *iv)* 根据测量结果 $(m_1, m_2) \in \{0,1\}^2$，应用 $\boldsymbol{X}_3^{m_2}\boldsymbol{Z}_3^{m_1}$，以在第三个量子比特上获得 $|\psi\rangle$。由于第一个操作仅作用于前两个量子比特，因此，只要预先共享一个EPR对，并通过经典信道传输两比特信息，就可以在相距一定距离的两端传送一个未知量子态。

A. 量子蒸馏协议

为了可靠地传送量子态，假设事先共享了一个完美的 EPR对 $|\Phi^+\rangle$。然而，不完美局部操作以及远距离纠缠生成会给预先共享的对引入误差，从而导致混合态。我们用密度矩阵描述该混合态:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varrho} = A\left|\Phi^+\right\rangle\left\langle\Phi^+\right| + B\left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right| \\ + C\left|\Psi^+\right\rangle\left\langle\Psi^+\right| + D\left|\Phi^-\right\rangle\left\langle\Phi^-\right|\end{aligned} \tag{1}$$

其中系数为实数、经过归一化 $A + B + C + D = 1$，且定义在区间 $[0,1]$ 上。系数 A 是纠缠对的保真度。一种重要的混合态是最大混合态，以下称为 Werner 态 [23], [48], [49],

其密度矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varrho} = \mathcal{F}\left|\Phi^{+}\right\rangle\left\langle\Phi^{+}\right| \\ + \frac{1-\mathcal{F}}{3}\Big[\left|\Psi^{-}\right\rangle\left\langle\Psi^{-}\right| + \left|\Psi^{+}\right\rangle\left\langle\Psi^{+}\right| + \left|\Phi^{-}\right\rangle\left\langle\Phi^{-}\right|\Big].\end{aligned} \tag{2}$$

人们已开发出多种技术来提高用于量子隐形传态的纠缠态保真度。此处我们考虑 [24] 中提出的、可改进 [23] 的蒸馏算法。该蒸馏协议可概述如下 [50]: i) 共享两个EPR对（即第一对：量子比特 1 和 2；第二对：量子比特 3 和 4），两对均处于状态 (1)； ii) 应用局域旋转 $\boldsymbol{R}_{x_1}(\pi/2)\boldsymbol{R}_{x_2}(-\pi/2)\boldsymbol{R}_{x_3}(\pi/2)\boldsymbol{R}_{x_4}(-\pi/2)$； iii) 应用局部受控非门$\boldsymbol{CX}_{1,\ 3}\boldsymbol{CX}_{2,\ 4}$； iv) 测量量子比特 3 和 4，并通过经典消息共享测量信息； v) 如果测量结果一致（即两者均为 0 或均为 1），则保留最终的一对，否则将其丢弃。本文中，我们认为量子测量、量子局域操作和经典通信中的误差可以忽略不计。在 [51]–[53] 中，已考虑了其中一些方面，不过未采用 [24] ，而这正是本文的重点。由于从 ii) 到 iv) 的步骤仅使用局部操作和测量，因此这些步骤可以高效地流水线化，以最大限度地降低通信协议的时延 [26]。图 2 展示了蒸馏过程的示意图。对于均匀分布的EPR对（亦称对称蒸馏），所得混合态描述为

$$\begin{aligned}A_{i+1} &= \left(A_i^2 + B_i^2\right) N_i^{-1} \\ B_{i+1} &= 2C_i D_i N_i^{-1} \\ C_{i+1} &= \left(C_i^2 + D_i^2\right) N_i^{-1} \\ D_{i+1} &= 2A_i B_i N_i^{-1}\end{aligned} \tag{3}$$

其中，下标表示蒸馏步骤的数量， $N_i = (A_i + B_i)^2 + (C_i + D_i)^2$是一个归一化因子。式（3）收敛到 $A_i \to 1$ （当 $i \to \infty$ 时）已在[54]中得到证明。参数 N_i 也表示第 i个蒸馏步骤成功的概率。由于生成过程具有随机性，发送方起初并不知道哪个量子比特实际可用。因此，它必须将这些量子比特存储起来，直到接收方确认纠缠生成（示意图见图2）。正如[24], 中所指出的，在 [23] 中执行的扭转操作（即一种使误差态均匀分布、从而得到 $B = C = D$的操作）会减慢 $A_i \to 1$的收敛速度。因此，

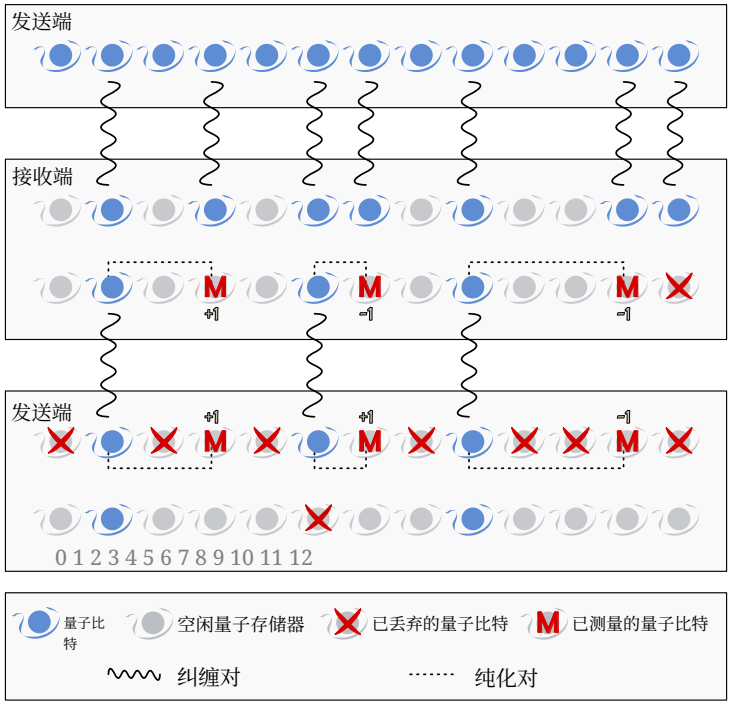

图 2. 原始纠缠分发及一步纠缠纯化的示意图。在此示例中，发送方尝试共享 13 个量子比特，其中每个量子比特都属于不同的 EPR对。接收方在传输的 13 个量子比特中成功检测到 7 个。它将其中 3 对分组进行纯化，并丢弃未配对的量子比特。最后，它将需要保留的量子比特及测量结果的信息发送给最初的发送方。完成此示例中的纯化过程后，用户各自的量子存储器中，位置 1 和 8 上共有 2 个 EPR对。

接下来，我们将初始态设为 Werner 态，以说明专用编码如何改善这一关键情形。

近年来，已有多种蒸馏协议被提出 [55], [56]。不过，为了简化分析处理，我们采用 [24] 。另一方面，也可以使用所提出的技术，在其他蒸馏协议中寻找非对称性，然后如后文所示，采用专用纠错。我们将在第四节讨论对其他协议的分析。

B. 量子纠错

我们用 $[[n,k,d]]$ 表示一种量子纠错码，它将 k 个信息量子比特编码为由 n 个量子比特组成的码字，距离为 d。该码能够纠正所有最多包含 $t=\lfloor(d-1)/2\rfloor$ 个错误的模式。我们考虑由 $n-k$ 个相互独立且彼此对易的算符 $\boldsymbol{G}_i \in \mathcal{G}_n$生成的稳定子码 $\mathcal{C}$，这些算符称为生成元，其中 $\mathcal{G}_n$ 是作用于 n 个量子比特的 Pauli群 [47], [57]。码 $\mathcal{C}$是满足 $\boldsymbol{G}_i|\psi\rangle=|\psi\rangle$， $i=1$，2，……， $n-k$ 的量子态 $|\psi\rangle$ 的集合。这些量子纠错码通过测量额外的量子比特来保存信息

（通常称为辅助量子比特），这些量子比特已与码字正确纠缠。为清楚起见，假设码字 $|\psi\rangle \in \mathcal{C}$ 受到信道错误的影响。借助辅助量子比特，按照稳定子 $\boldsymbol{G}_i$ 对码字进行测量后，错误会塌缩到由泡利算符组合 $\boldsymbol{E} \in \mathcal{G}_n$[57] 表示的一组离散可能性之一。例如，由旋转 $\boldsymbol{R}_x(\theta)$ 表示的错误会塌缩为 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{X}$；当依据稳定子测量辅助量子比特时，相应概率分别为 $\cos^2(\theta/2)$ 和 $\sin^2(\theta/2)$。因此，稳定子码的量子信道可通过指定单个泡利错误的概率来描述。对辅助量子比特进行测量会得到量子错误综合征 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{E}) = (s_1, s_2, \ldots\ldots, s_{n-k})$，其中每个值为 $s_i = 0$ 或 1，取决于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{G}_i$ [57]对易还是反对易。随后，最大似然解码器 $\hat{}$ 将推断出与测得的综合征相容且概率最高的错误 $\boldsymbol{E} \in \mathcal{G}_n$。另一方面，对于能够纠正最多 $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ 个错误的解码器（即有界距离解码器所保证的纠错能力），逻辑量子比特错误概率为

$$\rho_{\mathrm{L}} = 1 - \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} \rho^j \, (1-\rho)^{n-j} \tag{4}$$

其中，ρ 是物理量子比特错误概率。该式可用于给出最大似然解码器错误概率的上界；对于简并效应可忽略的码，它也是一个紧确近似 [31]。下文还将考虑 $[[n,k]]$ 非对称码，它们能够纠正多达 e_{g} 个一般错误（即 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{Z}$或无错误），以及多达 e_{Z}个泡利 $\boldsymbol{Z}$ 错误，且不能纠正其他错误 [38]。当量子信道的错误概率存在非对称性时，这些码能够提升性能和码长效率。在此设定下，我们将 p_{X}、p_{Y} 和 p_{Z} 分别定义为发生 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Z}$类型错误的概率。然后，根据每种错误模式发生的相应概率对其加权，式（4）可推广为 [38]

$$\rho_{\mathrm{L}} = 1 - \sum_{j=0}^{e_{\mathrm{g}}+e_{\mathrm{Z}}} \binom{n}{j} (1-\rho)^{n-j} \sum_{i=(j-e_{\mathrm{g}})^+}^{j} \binom{j}{i} p_{\mathrm{Z}}^i \, (\rho - p_{\mathrm{Z}})^{j-i} \tag{5}$$

其中 $(x)^+ =$ 最大值$\{x, 0\}$ 和 $\rho = p_{\mathrm{X}} + p_{\mathrm{Y}} + p_{\mathrm{Z}}$。

III. 通过量子隐形传态信道进行专用编码

A. 量子隐形传态信道：定义

在量子信道中，有一类信道可用泡利错误来描述，例如第二节-B 中简要介绍的错误坍缩所导致的情形。对于这类信道，经过它们的量子比特可能发生泡利错误 $\boldsymbol{X}$、 $\boldsymbol{Y}$、 $\boldsymbol{Z}$ ，也可能不发生错误。相应地，它们发生的概率分别为 p_{X}、 p_{Y} 和 p_{Z}；不发生错误的概率为 $1-\rho$，其中$\rho = p_{\mathrm{X}} + p_{\mathrm{Y}} + p_{\mathrm{Z}}$。具体而言，一些广为人知的情形可表示为：$i$) 比特翻转（相位翻转）信道，其中量子比特只可能以概率 p_{X}（p_{Z}）发生 $\boldsymbol{X}$ （$\boldsymbol{Z}$）错误； ii) 退极化信道，其中 $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}} = p_{\mathrm{Z}}$ [47]； iii) 由非对称参数 $\mathcal{A} = p_{\mathrm{Z}}/p_{\mathrm{X}}$ 表征的非对称信道，其中 $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}}$ 和 $p_{\mathrm{Z}} = \mathcal{A}\,\rho/$（$\mathcal{A}+2$）[37], [38]； iv) 独立的 $\boldsymbol{XZ}$ 信道，其中每个量子比特依次经过比特翻转信道和相位翻转信道的级联 [58]。对于非对称信道，式（5）可以表示为 ρ 和 $\mathcal{A}$ 的函数，而不是 ρ 和 p_{Z}的函数。通常，我们定义等效非对称参数 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}} = 2\,p_{\mathrm{Z}}/$（$p_{\mathrm{X}} + p_{\mathrm{Y}}$），由此得到逻辑量子比特错误概率

$$\rho_{\mathrm{L}} = 1 - \sum_{j=0}^{e_{\mathrm{g}}+e_{\mathrm{Z}}} \binom{n}{j} (1-\rho)^{n-j} \rho^{j} \left(\frac{2}{\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}+2}\right)^{j} \times \sum_{i=(j-e_{\mathrm{g}})^{+}}^{j} \binom{j}{i} \left(\frac{\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}}{2}\right)^{i} \tag{6}$$

采用非对称码时。另一方面，性能由（4）描述的对称码不受任何错误不平衡的影响，因为它们作用于一般错误。由于非对称信道是所定义的等效非对称信道的一种特殊情况，以下为简洁起见，我们使用 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}$ 参数，并省略“等效”这一表述。

由于EPR对存在不完美，量子隐形传态协议可以解释为一种量子通信信道 [23]。事实上，考虑待传送的信息态 $|\psi\rangle$ 以及EPR对 $|\Psi^{+}\rangle$ ，而非第二节 $|\Phi^{+}\rangle$ 中所述的情况，在隐形传态算法结束时，我们得到 $\boldsymbol{X}\,|\psi\rangle$。一般而言，考虑（1）中的EPR对混合态，我们可以用一个具有 $p_{\mathrm{X}} = C$、$p_{\mathrm{Y}} = B$和 $p_{\mathrm{Z}} = D$ 的替代信道来描述量子隐形传态（见图3）。特别要指出的是，假设共享对为Werner态，则量子隐形传态等价于通过退极化信道传输。

这一观察虽简单，却是连接量子蒸馏与

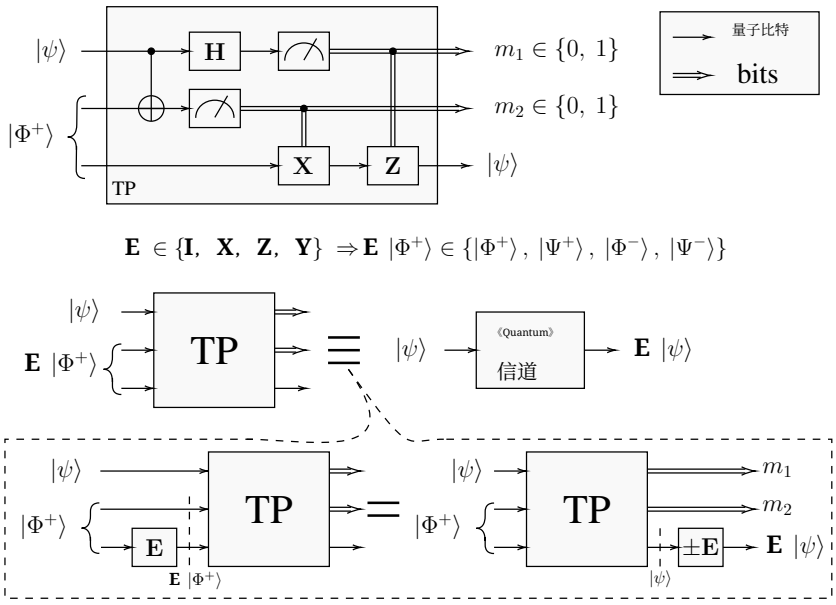

图 3. 使用含噪 EPR 对的隐形传态协议与基于泡利误差的量子通信信道之间的等价关系。

面向可靠低延迟通信的量子纠错、自适应量子网络量子纠错以及中代错误管理方案的桥梁。

B. 量子隐形传态信道：分析

在本小节中，我们分析了 [24],第二节 A 中提出的蒸馏协议。我们的目的是说明，蒸馏协议往往会在输出纠缠对中产生非对称性，而非对称纠错方案可以利用这种非对称性。具体而言，我们考虑处于 Werner 态 (2) 且初始保真度为 $\mathcal{F}_0$ 的共享纠缠对。以下分析也可用于寻找其他蒸馏协议或不同初始条件下的非对称性。不过，解析处理并非总是可行的。

在我们的设定中，经过一步蒸馏后，量子态演化为

$$\begin{aligned} A_1 &\propto \mathcal{F}_0^2 + (1-\mathcal{F}_0)^2/9 \\ B_1 &\propto 2(1-\mathcal{F}_0)^2/9 \\ C_1 &\propto 2(1-\mathcal{F}_0)^2/9 \\ D_1 &\propto 2\mathcal{F}_0\,(1-\mathcal{F}_0)/3 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 w 我们省略了共同的归一化因子。我们观察到，等价的 t

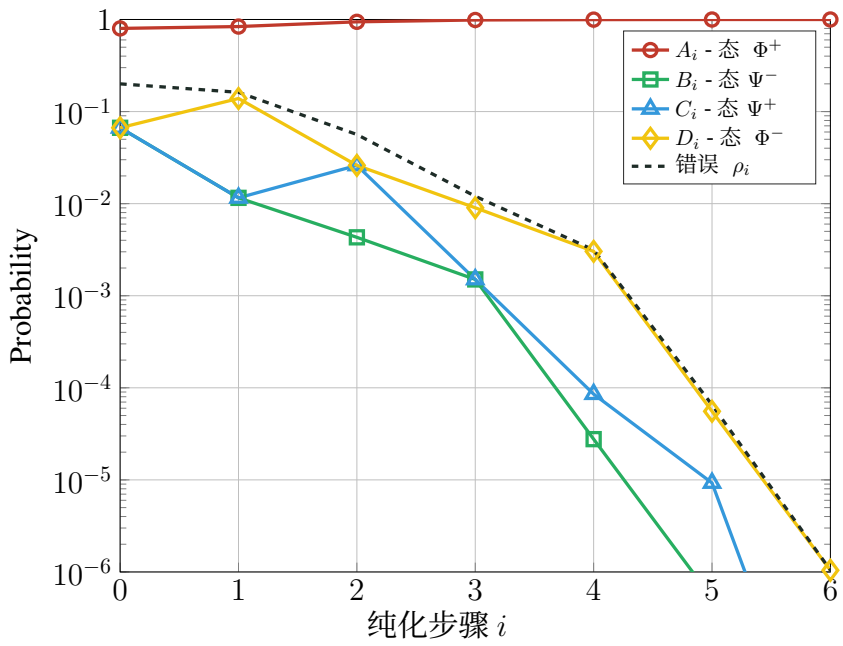

图4。 Evo由蒸馏算法（3）导致的式（1）所描述的 EPR对混合态概率分布的演化). 初始 态是保真度为 $\mathcal{F}_0 = 0.8$ 的 Werner态。

量子隐形传态信道从退极化信道演变为第三节-A 中描述的非对称信道。要描述此类信道，只需给出错误概率 ρ 和等效不对称参数 $\mathcal{A}_{\text{eq}}$。在我们的情况中，我们有

$$\mathcal{A}_{\text{eq},1} \triangleq \frac{2\,D_1}{B_1 + C_1} = 3\left(\frac{1}{\rho_0} - 1\right) \tag{8}$$

$$\rho_1 \triangleq B_1 + C_1 + D_1 = 2\rho_0 \frac{3 - \rho_0}{9 - 12\,\rho_0 + 8\,\rho_0^2} \tag{9}$$

其中 $\rho_0 = 1 - \mathcal{F}_0$ 是初始错误概率。由（9）可知，即使考虑 $\rho_0 \ll 1$，错误概率仍趋于 $2\,\rho_0/3$。这种有限的改进正是算法在 [23] 中比 [24] 需要更多蒸馏步骤才能达到相同目标保真度的原因。对于对称量子纠错，与所消耗的原始 EPR对相比，单次蒸馏带来的改进可能并不值得。然而，在非对称量子纠错中，性能同时受错误参数和非对称参数影响，因此这种方案颇具吸引力。事实上，从（8）可以看出，第一步蒸馏有效地将信道的非对称性从 $\mathcal{A}_{\text{eq}} = 1$ 提高到 $\mathcal{A}_{\text{eq}} \approx 3/\rho_0$。

在图 4 中，我们展示了由 (3) 蒸馏得到的 EPR对的状态演化，并假设初始状态为参数为 $\mathcal{F}_0 = 0.8$ 的 Werner态。如 (7) 所示，且如图 4 所示，经过一次蒸馏后，量子隐形传态信道在

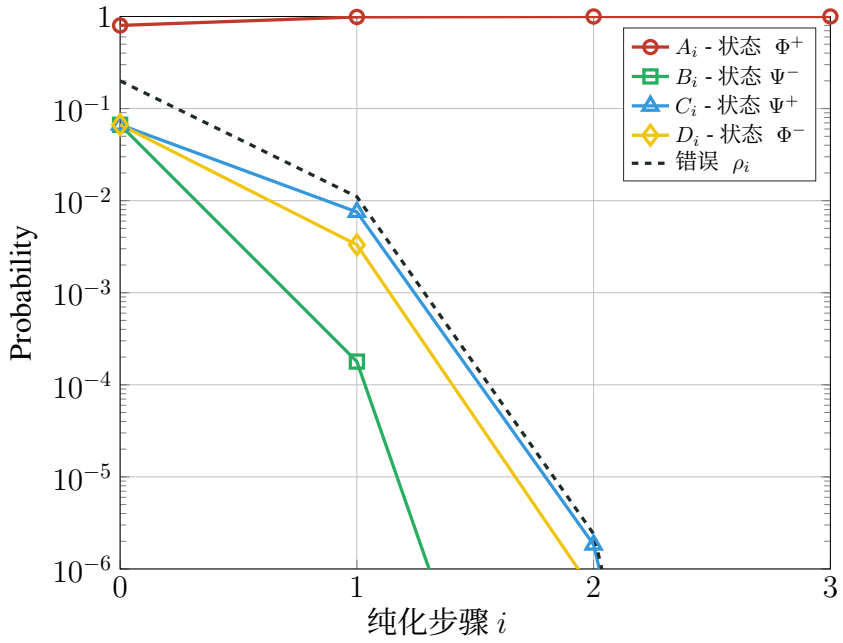

图 5。 Evo式（1）描述的 EPR对混合态概率分布因 STRINGENT 蒸馏 n
算法 [5 9]。初始态是保真度为 $\mathcal{F}_0 = 0.8$ 的 Werner态。

传统意义上变得非对称（即 $p_X = p_Y$）。更一般地，只要前一状态具有 $C_{i-1} = D_{i-1}$，就会发生这种情况。事实上，若状态的参数 $\{A, B, C, D\}$ 等于 $\{A, B, k, k\}$，应用 (3) 后，我们得到一个具有 $\{A^2 + B^2, 2\,k^2, 2\,k^2, 2\,AB\}$ 的状态，其中省略了公用归一化因子。只考察 $i = 0$ 与 $i = 4$ 之间的蒸馏过程时，似乎在第 i 步得到非对称信道，就会在第 $i + 1$ 步得到具有 $C_{i+1} = D_{i+1}$ 的状态。然而，这通常并非如此，正如从第 $i = 3$ 步到第 $i = 4$ 步的状态演化图所示（或由 (3) 可验证）。我们得到 $C_2 = D_2$，是基于 Werner态假设 $B_0 = C_0 = D_0$ 的结果，而非由于 $B_1 = C_1$。值得注意的是，这种初始行为并不具有递归性；我们观察到，量子隐形传态信道趋于呈现非对称性，即对于 $i > i_{\min}$，有 $D_i \gg B_i + C_i$，其中 $i_{\min}$ 取决于初始保真度 $1 - \rho_0$。我们由此得出结论：蒸馏对中会出现非对称性。因此，利用蒸馏协议的这一特性，可能是提升量子通信性能的关键。

作为与较新的蒸馏协议的比较，我们在图5中展示了与图4相同的设置，但使用STRINGENT协议 [59] ，而不是式（3）中的Deutsch等人提出的蒸馏方法。虽然我们确实看到每一步的保真度提升更大，但需要注意的是，STRINGENT电路更为复杂，与式（3）中的蒸馏方法相比，需要大量

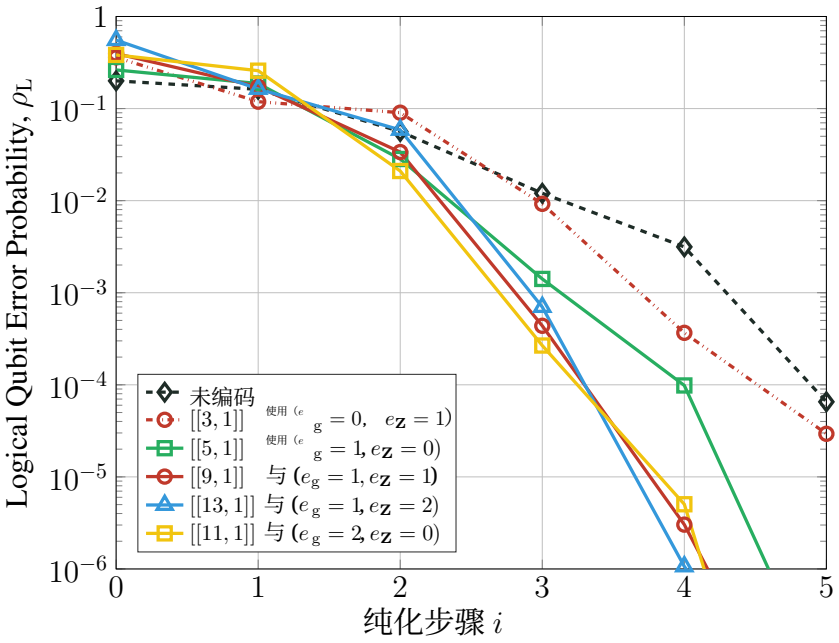

图 6. 不同编码方案下，逻辑量子比特错误概率随蒸馏步骤变化的关系。我们考虑对具有 (e_g, e_Z) 纠错能力的 $[[n, k]]$ 码进行有界距离译码，如文献 (6) 所述。初始态为保真度为 $\mathcal{F}_0 = 0.8$ 的 Werner 态。

的量子门和测量。这一点也体现在成功概率上。对于此处考虑的初始保真度 $\mathcal{F}_0 = 0.8$，使用STRINGENT进行蒸馏的第一步成功概率为 $\sim$5.8%，同时可将保真度提高到 $\sim$0.99。另一方面，采用Deutsch等人的较早蒸馏协议进行的前三步，合计成功概率为 $\sim$51.6%，最终保真度仍可达到 $\sim$0.99。显然，成功概率较低意味着需要进行更多次蒸馏尝试，才能获得相同数量的蒸馏对。因此，要么需要并行进行更多次蒸馏（这会提高对量子存储器和处理能力的要求），要么需要依次进行更多次蒸馏（这会增加时延）。在我们的设定中，这两种选择都不理想，因此我们将仅采用式（3）所概述的蒸馏过程。

专用量子纠错是利用蒸馏过程中不断变化的特定信道配置的一种可能方式。为此，我们在图 6 中报告了若干 $[[n, k]]$ 码在具有（e_g, e_Z）纠错能力时的性能，以逻辑错误概率（即 1 减去可靠性）衡量，并改变蒸馏步骤数 i。一般而言，对于具有 $e_g > 0$ 的码，我们发现经过一个蒸馏步骤 ℓ 后，编码方案的性能开始优于无编码方案，并且在每个 $i > \ell$ 下都持续优于无编码方案。具体而言，ℓ 取决于码和初始错误概率 ρ_0，后者固定为

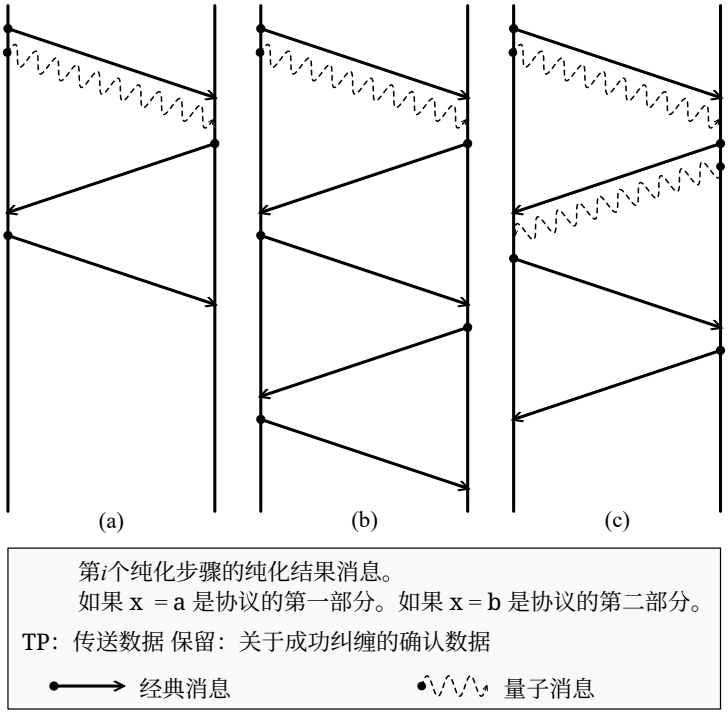

图 7. EPR对生成、蒸馏和量子隐形传态的协议消息传递。以下各项的消息交换：(a) 单次蒸馏；(b) 三次蒸馏；(c) 采用单次蒸馏的往返协议。

$\rho_0 = 0.2$ 。横向阅读图表，还可以了解时延方面的一些情况。事实上，当目标可靠性为 $1 - \rho_{\mathrm{L}}^*$ 时，无编码方案需要更多蒸馏步骤；在某些情况下，这相当于需要更多经典协议消息。最后，我们想强调的是，仅观察对称码时，可以发现超过某个阈值ℓ后，较大的码总是更优。换言之，超过某个阈值后，各码的 ρ_{L} 会形成一种顺序，并且这一顺序得以保持；这是因为蒸馏协议会收敛至保真度为 1 [54], ，而较大的码具有更高的 e_{g}。另一方面，考虑非对称码时，信道不对称性 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq},\,i}$ 会与 ρ_i一道成为重要的设计参数。因此，必须根据具体的量子隐形传态信道谨慎选择码。

C. 低延迟协议：单量子链路

本节讨论具有低时延约束的按需单量子链路隐形传态协议。具体而言，我们旨在尽量减少建立可靠通信所需的消息交换次数。先从两个节点之间的正向通信协议谈起。

如 [26] 所述并如图7a所示，可以通过蒸馏后的EPR对（一个蒸馏步骤）以三步流程建立量子信道。首先，希望进行通信的节点生成 M 对EPR对，并发送请求消息，随后发送用于在两个节点之间分发纠缠的量子比特 [17]–[21]。这种先导式纠缠生成被归类为“源端”生成 [11], [60]。如果接收方未处于忙碌状态，便会将那些经探测器确认已成功纠缠的量子比特存入其量子存储器 [17], [61]。随后，接收方执行第二节-A中所述的第一步蒸馏所需的局部操作。定义 p 为接收到量子比特且该量子比特正确纠缠的概率，则接收量子比特的数量 n_0 服从二项分布，其试验次数为 M，成功概率为 p （有时也称为发射概率）。

其次，它会传输有关哪些初始 EPR对已成功接收的信息（通常称为 保留 消息）、哪些对已被选中进行蒸馏，以及通过测量步骤获得的部分蒸馏结果。收到这些信息后，最初请求信道的用户便可对相应的对执行蒸馏过程，并根据结果了解哪些对已成功蒸馏。此时，经过一步蒸馏后的 EPR对数量 n_1 再次服从二项分布，其试验次数为 $\lfloor n_0/2 \rfloor$，成功概率为$N_1 = (A_1+B_1)^2+(C_1+D_1)^2$，这是由式 (3) 所述的蒸馏过程决定的。参照图 2 所示示例，从 $M = 13$ 对开始，接收方检测到 $n_0 = 7$ 个量子比特，而经过一步蒸馏后，最终得到 $n_1 = 2$ 个蒸馏后的 EPR对。

最后，用户可以选择继续串接另一个蒸馏步骤、串接量子信息量子隐形传态，或直接结束蒸馏并发送测量结果。

为进行下一次蒸馏步骤，发送方必须重复接收方在步骤二中执行的相同操作。因此，它会在第一次蒸馏的测量数据（此时充当保留消息）后附加新的测量结果及推论信息。例如，图 7b 展示了一个包含三层嵌套蒸馏的协议。鉴于我们的目标是低延迟协议，我们直接考虑传送量子数据。这也代表了时延最低的协议，因为纠缠生成是偶发事件，因此保留消息不可或缺。具体而言，若没有 EPR对确认，链路保真度的下限将由纠缠生成概率决定（远距离生成时该概率通常很低），从而导致链路无法使用。因此，传输这条保留消息后，始终可以执行一次蒸馏步骤

而不会显著增加时延。

为提高保真度，我们提出一种结合蒸馏与量子纠错（QEC）的混合方案。事实上，与其对量子数据使用隐形传态协议，不如传送表示编码数据的量子码字。通常，采用量子纠错旨在提高系统的可靠性，但代价是传输速率降低。具体而言，采用 $[[n,k]]$ 码时，传送 k 信息量子比特需要 n 个EPR对。由于在中间一代中可能难以构造长而复杂的量子纠错码（QECC），而这类码正是第三代错误管理方案的目标，因此下文考虑短码 [34], [35], [38], [62]。

在（8）式中，我们观察到，从Werner态出发，经过一次蒸馏步骤后，等效量子信道的非对称性有所增加。考虑到这一点，如广义量子汉明界所示 [38]，我们可以设计专用码，以更少的量子比特达到相同性能，反之亦然。在这种非对称场景下，一些非常简单的码也可能具有实际应用价值，例如 $[[n,1]]$ （ $e_{\mathrm{g}}=0$ 和 $e_{\mathrm{Z}}=\lfloor n/2 \rfloor$ ，即重复码）。这是因为编码器和解码器结构简单，而且在非对称性较强时能够带来性能提升。更一般地，在这种混合通信协议中采用具备纠错能力的 $[[n,k]]$ （e_{g}， e_{Z}），我们将在第四节展示整体可实现的保真度提升。

最后，我们讨论实现可靠的双向通信协议的可能性。该协议如图7c所示，适用于节点需要向邻居发送量子比特以进行多量子比特处理的应用。该操作（例如 CNOT）在邻居量子比特与发送的量子比特之间执行，随后该量子比特被送回其所有者。一些应用示例包括通过网络进行多核量子计算 [6]、量子图态的构建 [43]–[45] ，以及通常所有适合将局部操作的概念扩展至邻居节点的应用。与图7a中仅使用第一个 EPR流创建前向链路 的传统协议相比，在第二次传输期间，会级联第二个 EPR流以创建反向链路。与往常一样，经过三次传输后，接收方持有发送方的量子比特并可进行处理。处理完成后，利用反向链路 ，只需一次经典传输即可将量子比特送回。相应地增大流的规模和初始量子存储器 M ，便可并行执行这一过程以传输一组量子比特。可以使用 $[[n,k]]$ 码字 $k>1$ ，也可以级联 $[[n,1]]$ 码字来实现。

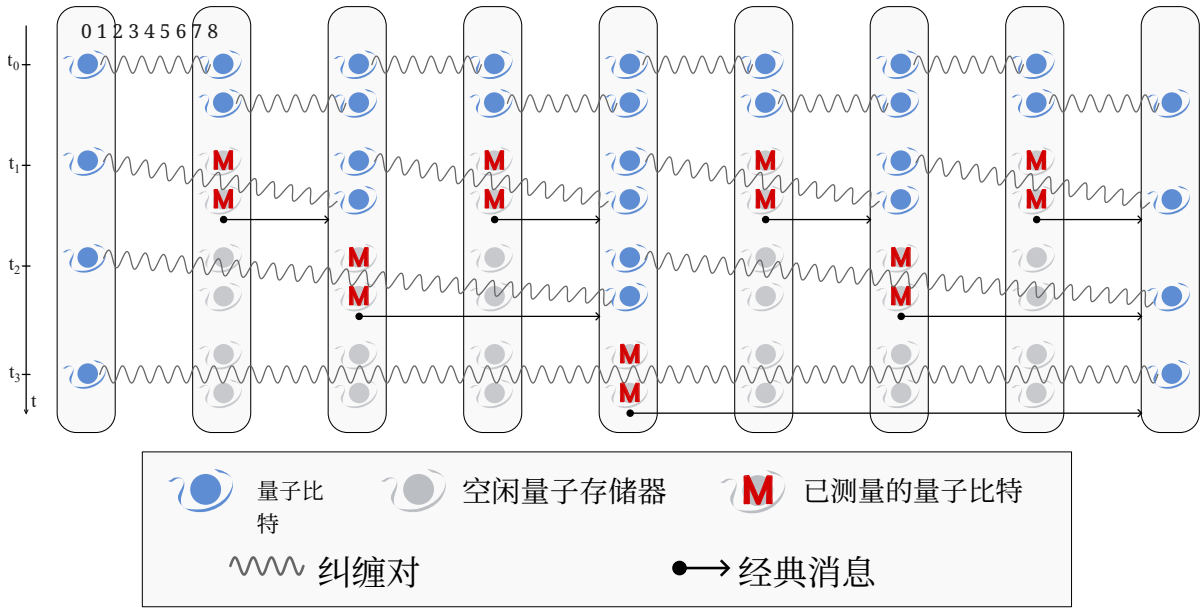

图 8. 嵌套纠缠交换过程，用于在远距离节点之间共享 EPR对。示例中，我们有一个包含 8 跳的网络，需要 3 个交换步骤。

注意： 这种链路通信不需要双倍大小的量子存储器。这是因为接收方可以将新的EPR对量子比特（EPR流 2）分配到存放着尚未生成的纠缠对、测量量子比特和丢弃的量子比特的存储器中。例如，在图2中，EPR流 1 由13个量子比特组成，而 EPR流 2 最多可由10个量子比特组成。因此，初始存储器 M 可能需要增大，但不必扩大一倍。

D. 低延迟协议：量子网络

量子网络中的纠缠分发通过纠缠交换协议 [11]实现。该协议是传统的量子隐形传态，不过它传输的不是一个信息量子比特，而是一个纠缠对中的一个量子比特[63]。为便于说明，我们来看这个例子。三位用户 u_1、 u_2 和 u_3 共享两个 EPR对 $|\Phi^+\rangle_{12}$ 和 $|\Phi^+\rangle_{23}$，其中下标表示哪些用户持有这些量子比特。用户 2 可以按照第二节所述，使用 $|\Phi^+\rangle_{23}$ 将纠缠对 $|\Phi^+\rangle_{12}$ 中的量子比特量子隐形传态至 u_3 ，从而得到一个状态为 $|\Phi^+\rangle_{13}$的单一纠缠对。图 8 展示了一个包含 9 个节点（即 8 跳）的纠缠交换协议 [26], [52], [63] 示例。

一般来说，这种协议会降低纠缠对的质量。具体而言，考虑用于传态的量子对与其中一个量子比特已完成传态的量子对具有相同的概率分布，我们得到.....

.....所描述的特征参数的概率演化

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 + D_i^2 \\ B_{i+1} &= 2A_iB_i + 2C_iD_i \\ C_{i+1} &= 2A_iC_i + 2B_iD_i \\ D_{i+1} &= 2A_iD_i + 2C_iB_i \end{aligned} \tag{10}$$

其中，i 再次表示当前步骤，因为式（1）中的初始概率分布会按照式（3）或式（10）演变。需要注意的是，经过 ℓ 次交换步骤后，我们能够覆盖 2^ℓ 个链路跳数。

根据式（10），该协议趋于稳定的等概率构型 $A_i = B_i = C_i = D_i$。因此，为了保证达到目标保真度，蒸馏协议还必须弥补这部分保真度损失。为此，我们提出一种名为 Burst b 的协议，其中 b 是所执行的蒸馏步骤数。在该协议中，我们首先安排 b 次单链路蒸馏（例如，图 7a 中的突发1以及图 7b 中的突发 3）。随后，我们对这些蒸馏对执行必要的纠缠交换。该协议的优点是，只使用单链路蒸馏，因此能显著减少网络中的控制信令。换言之，它能够降低通信时延。此外，在交换协议降低保真度之前，该协议会累积蒸馏带来的保真度提升。与 [26] 中提出的协议栈相比，这也有助于提升可靠性；该协议栈通过交替执行蒸馏和交换来保持保真度高于目标值。我们针对多种初始量子态进行了广泛的数值研究，并根据研究结果推测，所提出的方法是最优调度。最优性的形式化证明看起来并非易事，因此留待未来工作完成。

与单链路量子通信协议类似，我们可以采用量子纠错来构建能够可靠传输量子信息的混合方案。由式（10）可知，对于较小的错误概率（即 $\rho_i \ll 1$）以及特定错误概率之间存在非平凡的不平衡时，有 $B_{i+1} \approx 2B_i$、$C_{i+1} \approx 2C_i$ 和 $D_{i+1} \approx 2D_i$。因此，我们可以认为，纠缠交换保留了等效量子信道的非对称性。因此，出于实际考虑，非对称性 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq},\,i}$ 由初始态和蒸馏步骤数决定。基于此，纠缠交换协议仅通过增大误差参数 ρ_i来影响量子纠错码设计。

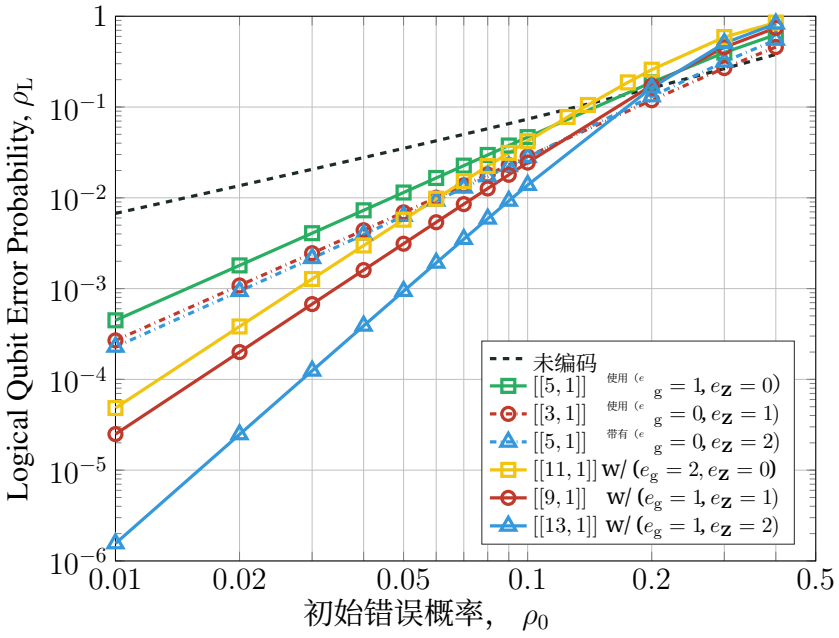

图 9. 考虑单次蒸馏步骤时，逻辑量子比特错误概率与初始错误概率 $\rho_0 = 1 - \mathcal{F}_0$ 的关系。我们考虑具有 $(e_{\mathrm{g}}, e_{\mathrm{Z}})$ 纠错能力的 $[[n, k]]$ 码的有界距离译码，如文献 (6) 所述。

IV. 数值结果

本节比较量子混合通信协议的性能，并采用式（6）给出的逻辑量子比特错误概率 ρ_{L}作为指标。为计算式（6）中的参数，我们首先利用式（3）和式（10）求出最终蒸馏对态 $\{A, B, C, D\}$，然后求出 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}} = 2D/(B + C)$ 和 $\rho = B + C + D$。这样便无需通过蒙特卡罗模拟来评估结果。我们针对单链路和网络场景分别报告这些比较结果，并改变所采用的 $[[n, k]]$ with $(e_{\mathrm{g}}, e_{\mathrm{Z}})$ 纠错码。出于实现方面的考虑，我们重点考察较短的量子码，例如 $[[3, 1]]$ 和 $[[5, 1]]$ 重复码、5量子比特码 [35], 以及 $[[11, 1]]$ 能够纠正多达 2 个一般错误的码 [36], ，还有 $[[9, 1]]$ 和 $[[13, 1]]$ 非对称码 [38]。下文仅考虑初始态为 Werner 态的情形。

A. 单量子链路上的专用编码

在图9中，我们报告了低时延单量子链路通信在初始错误概率为 ρ_0 时的性能，其中执行了一次蒸馏步骤（见图7a）。未编码曲线再次表明，从 Werner态 开始时，一次蒸馏步骤并不能显著提高保真度。然而，这个看似无用的步骤却能带来非对称性，让我们可以通过专用编码加以利用。事实上，采用

非对称量子纠错码（即 $e_{\mathrm{Z}} > 0$）可以显著提升性能。从图中可以观察到一些有趣的现象。首先，简单且易于实现的、适用于相位翻转信道的 $[[3,1]]$ 重复码，其性能可以优于5量子比特码（$e_{\mathrm{g}} = 1$）。事实上，在非对称性很强时，这两种码具有相同的有效纠错能力。因此，量子比特数较少的码在错误概率和码字长度方面都能胜过另一种码。其次，考察$[[5,1]]$重复码时，我们发现其性能并未优于 $[[3,1]]$。这是因为双重 $\boldsymbol{Z}$ 错误的发生概率正接近单个 $\boldsymbol{X}$的发生概率，从而限制了性能的进一步提升。类似地，对比 $[[11,1]]$ 码和 $[[9,1]]$ 码的性能可见，当非对称性足够大时，防护一般错误并不高效。第三，我们注意到，在固定 e_{g}的情况下，增大 e_{Z}可以提升性能，如 $[[9,1]]$ 和 $[[13,1]]$ 非对称码所示。这一结果并非显而易见，因为增大 e_{Z} 需要增加码字长度，使总体性能也受到信道不对称性的影响。在图9所示的情形中，信道不对称性使得采用对 $\boldsymbol{Z}$ 错误具有更强纠错能力的码更为有利。最后，若目标逻辑量子比特错误概率为 $\rho_{\mathrm{L}}^{*} = 10^{-3}$，则不使用编码时，初始保真度需达到 $\mathcal{F}_0 \geq 99.85\%$；使用 $[[3,1]]$ 重复码时，所需初始保真度为 $\mathcal{F}_0 \geq 98\%$；使用 $[[13,1]]$ 非对称码时，所需初始保真度为 $\mathcal{F}_0 \geq 95\%$。

图 9 的另一种用途是进行码选择。给定链路参数 $\{A, B, C, D\}$以及可用蒸馏对的数量，利用 (6) 我们可以找到在蒸馏对数量不超过可用数量的条件下，ρ_{L} 最低的码。由于结果是通过解析推导得出的，因此无需进行仿真。这项分析也可扩展至拓扑码，并使用最小权完美匹配解码器，因为 [32] 最近推导出了拓扑码的解析逻辑错误率。采用其他蒸馏算法（例如 STRINGENT），也可以通过数值计算这些协议相应的 ρ_i 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq},\ i}$，并将其表示为 ρ_0 的函数，从而进行相同的分析。然后，对每种所需的码使用 (6)，即可获得类似图 9 的性能比较。能否看到性能提升，取决于特定蒸馏算法的 ρ_i和 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq},\ i}$。

B. 量子网络分析

在图10中，我们报告了量子网络场景下量子比特错误概率 ρ_i 的影响，改变交换步骤的数量 i，并考虑第 b 突发协议

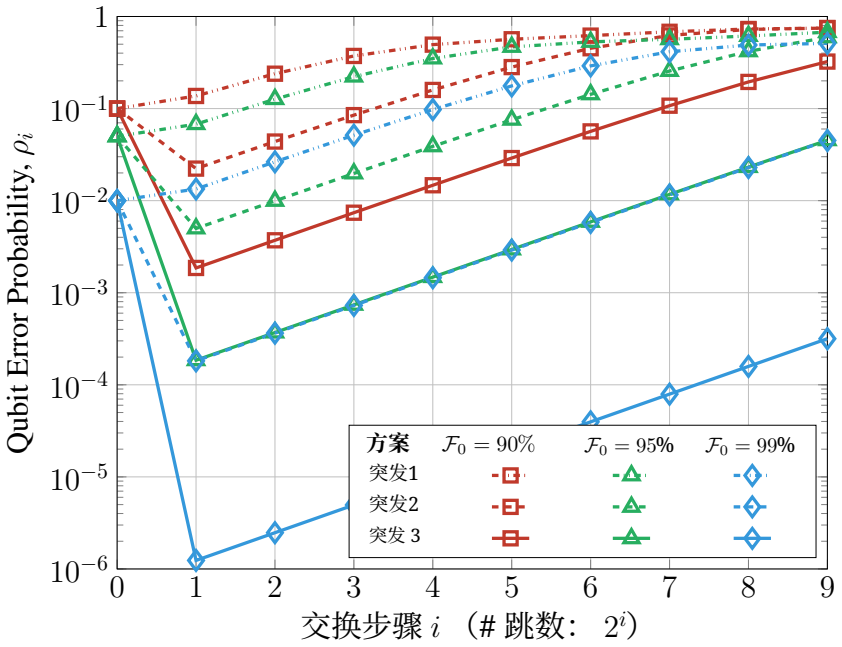

图10。 E由于纠缠交换，等效量子隐形传态信道错误概率的演变 ρ_i g （10），对于 rst $b = 1$，2，3 个协议和初始保真度 $\mathcal{F}_0 = 90\%$，95%，99%。 Bu

该协议在第III-D节中提出。如预期，当 ρ_1 足够小时，我们有 $\rho_i \approx 2^{i-1}\rho_1$。因此，要设计无编码方案，只需确定需要覆盖的步骤数 $i_{\max}$ ，并对 b 采取措施，以满足 $\rho_{\mathrm{L}}^* \geq 2^{i_{\max}-1}\rho_1$。需要注意的是，交换步骤的数量并不等于链路跳数。准确地说，通过 i 个交换步骤可以覆盖 2^i 跳（见图8）。从图中可以看出，突发1方案，以及通常所有仅包含一个蒸馏步骤的网络方案，始终给出 $\rho_i > \rho_0$、 $i \geqslant 1$。这是因为一个蒸馏步骤带来 $2/3$ 的改善因子，而交换会造成2倍的性能下降；因此，对于满足 $\rho_0 < 0.75$ 的非平凡维尔纳态，在较低的 ρ_0 下会得到 $\rho_1 \approx 4\rho_0/3$ 。因此，为了改善量子比特错误概率，我们必须采用包含 $b > 1$ 的突发 b 方案。例如，考虑初始保真度为 $\mathcal{F}_0 = 90$ % 的情况，对于突发2和突发 3协议，在交换步骤3和步骤6之前，我们有 $\rho_i < \rho_0$ 。

在图 11 中，我们报告了量子网络场景下等效不对称性 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq},\ i}$ 随 Burst b 协议的交换步骤数量 i 变化所产生的影响。正如图 4 所预期的，对于专用编码，突发1和突发 3 的不对称性值较好，而突发2则几乎对称（$p_{\mathrm{Z}} = p_{\mathrm{X}}$ 正如图 4 所示）。因此，即使突发2已能在某些 i 取值下提供 $\rho_i < \rho_0$ ，为了在蒸馏对上采用专用量子纠错，也可以考虑使用突发 3。此外，我们提醒读者，在

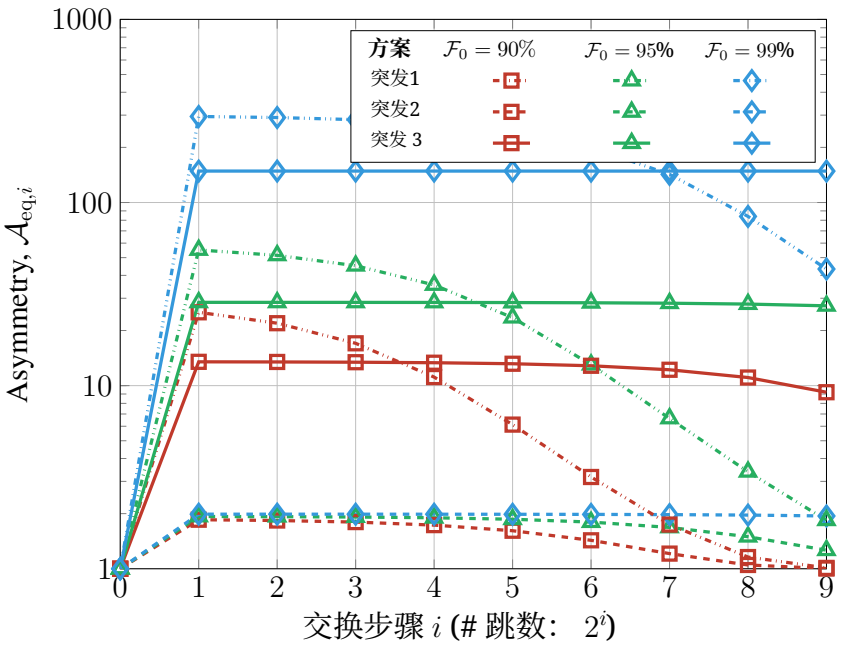

图 11. 由于纠缠交换（10），在 Burst $b = 1$、2、3 协议下，量子隐形传态信道的等效不对称性 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}i}$ 的演变，以及初始保真度为 $\mathcal{F}_0 = 90\%$、95%、99% 时的情况。不对称性 $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}} = 1$ 表示众所周知的退极化信道。

时延方面，突发2和突发 3 是等效的，如图 7b 所示。正如第二节-D节中所讨论的，对于具有实际意义的 ρ_i （即 $\rho_i < 0.1$），我们可以看到，执行交换协议时，不对称性得以保持。

C. 量子网络上的专用编码

在图 12 中，我们报告了通过改变初始错误概率 ρ_0时量子网络通信的性能，其中采用 Burst 3 并执行 5 个交换步骤。与图 9 相比，在这种情况下，量子纠错码处于不同的工作区间。事实上，比较进行 1 步和 3 步蒸馏时的信道参数可知，非对称性$\mathcal{A}_{\mathrm{eq},i}$ 相近（另见图 11），但考虑 3 步蒸馏时，错误概率 ρ_i 要小得多。因此，对称五量子比特码的性能优于针对相位翻转错误设计的重复码。采用 $n \geqslant 9$ 的更大型码可进一步提升性能，如图所示。更具体地说，由于信道具有非对称性，我们可以适当地设计非对称码，在 e_{g} 和 e_{Z} 之间取得平衡。从图中可以清楚地看出，$[[11, 1]]$ 对称码的性能实际上与 $[[9, 1]]$ 非对称码相同。后者每个码字所需的量子比特较少，因此在实际实现中可能更受青睐。总的来说，我们强调，对初始参数的估计

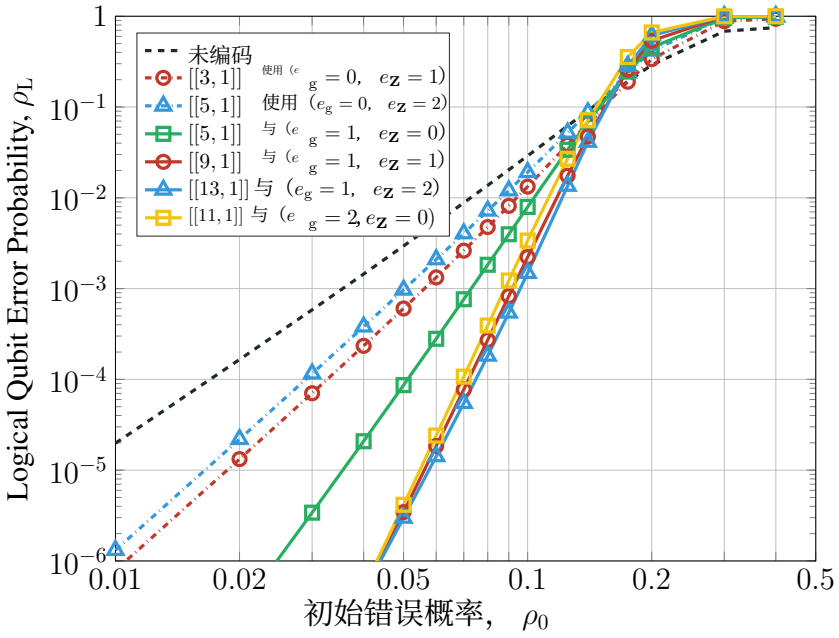

图 12. 采用 Burst 3协议和 5 个交换步骤（即 32 个网络跳数）时，逻辑量子比特错误概率随初始错误概率 $\rho_0 = 1 - \mathcal{F}_0$ 的变化。我们考虑对具有（e_g, e_Z）纠错能力的 $[[n, k]]$ 码进行有界距离译码，如（6）所示。

可用于量身设计量子纠错码。这些参数可以取自所采用技术给出的标称参数。然而，当这些参数不可用时，就无法利用非对称性；与纯蒸馏方案相比，降低协议延迟的唯一办法是使用对称量子纠错码构造次优混合方案。

V. 讨论与未来工作

本文重点关注低延迟协议，并证明即使仅考虑少量蒸馏步骤，也能实现良好的性能。在当前的设想中，第一代网络将仅采用蒸馏来确保通信可靠，而第三代网络将仅采用量子纠错，以实现可靠且低延迟的通信协议 [11], [42]。在我们设想的发展路径中，介于这两代网络之间的混合方案可能会应运而生，在利用蒸馏的同时，也解决时延方面的问题。

未来研究的一个方向可以深入探讨将蒸馏与量子纠错结合，而非直接蒸馏出完美EPR对的优势。此类研究或可为理解量子网络在何种条件下

能够达到足够的可靠性提供有价值的见解，从而推动关注重点从仅通过蒸馏解决可靠性问题，转向解决更广泛的问题（例如时延），并标志着网络从第一代向第二代的转变。可以通过比较采用不同蒸馏步骤数量的方案来开展这项研究。除所提供的框架外，为了全面分析具有不同时延的协议，还必须考虑时延较长的方案会： i)遭受更严重的退相干； ii)占用通信链路更长时间； iii)减慢需要量子隐形传态的应用。

另一个可能的方向是评估非对称性，这是选择合适编码策略时的关键因素。量子通信链路可以是： i) 非自适应；ii) 自适应。对于非自适应量子通信链路，我们可以根据所采用的纠缠分发技术选择合适的编码方案。事实上，给定该技术后，我们便有初始状态概率分布 $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$。有了保真度目标（或等价的可靠性目标），我们就可以开展分析，找出最终的非对称性和最佳方案。对于自适应量子通信链路，我们可以设想一种协议，定期估计 $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ （例如通过层析），并据此调整编码方案。

VI. 结论

我们提出了一种混合方案，将蒸馏与非对称量子纠错码结合起来，以便通过量子网络交换信息。其核心思想是，蒸馏会产生一个等效的量子通信信道，且该信道具有非对称泡利错误概率。我们表明，先执行少数几步蒸馏，再通过量子纠错码保护信息并进行隐形传态，可以显著提升性能。例如，从 Werner态出发，假设执行一步蒸馏，且目标逻辑量子比特错误概率为 10^{-3}，则仅使用蒸馏的协议要求初始保真度达到 $\mathcal{F}_0 \geq 99.85\%$，而我们提出的混合协议采用非对称 $[[13, 1]]$ 码时，在 $\mathcal{F}_0 \geq 95\%$ 的初始保真度下即可运行。在需要通过若干交换步骤连接两个节点的量子网络场景中，我们展示了如何设计满足既定网络质量要求的高效混合方案。结果表明，无论是在单链路还是量子网络场景下，与仅采用蒸馏的通信协议相比，我们提出的混合蒸馏/量子纠错协议在时延和保真度方面都具有显著优势。

参考文献

[1] S. Wehner、D. Elkouss 和 R. Hanson，《量子互联网：未来发展愿景》，《科学》，第 362 卷，第 6412 期，2018年。[2] A. S. Cacciapuoti、M. Caleffi、F. Tafuri、F. S. Cataliotti、S. Gherardini 和 G. Bianchi，《量子互联网：分布式量子计算中的网络挑战》，《IEEE网络》，第 34 卷，第 1 期，第 137–143 页，2019年。[3] M. Pompili、C. Delle Donne、I. te Raa、B. van der Vecht、M. Skrzypczyk、G. Ferreira、L. de Kluijver、A. J. Stolk、S. L. Hermans、P. Pawełczak 等，《利用量子网络协议栈实现纠缠分发的实验演示》，《npj量子信息》，第 8 卷，第 1 期，第 121 页，2022年。[4] C. H. Bennett 和 G. Brassard，《量子密码学：公钥分发与掷币》，arXiv 预印本 arXiv:2003.06557，2020年。[5] C. H. Bennett 和 S. J. Wiesner，《通过作用于爱因斯坦-波多尔斯基-罗森态的单粒子与双粒子算符进行通信》，《物理评论快报》，第 69 卷，第 20 期，第 2881 页，1992年。[6] H. Jnane、B. Undseth、Z. Cai、S. C. Benjamin 和 B. Koczor，《多核量子计算》，《物理评论应用》，第 18 卷，第 4 期，2022年。[7] R. G. Sundaram、H. Gupta 和 C. Ramakrishnan，《在通用量子网络上分发量子电路》，载于《2022年IEEE量子计算与工程国际会议（QCE）》。IEEE，2022年，第 415–425 页。[8] D. Ferrari、S. Carretta 和 M. Amoretti，《面向分布式量子计算的模块化量子编译框架》，IEEE量子工程汇刊，第 4 卷，第 1–13 页，2023年。[9] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，《量子传感》，《现代物理评论》，第 89 卷，第 3 期，第 035002 页，2017年。[10] S. Bi，《量子遥感科学与技术研究》，载于《红外遥感与仪器学》第二十七卷。SPIE，2019年。[11] W. Kozlowski、S. Wehner、R. V. Meter 等，《量子互联网的架构原则》，互联网工程任务组，互联网草案 draft-irtf-qirg-principles-11，2022年8月，进行中。[在线]。网址：https://datatracker.ietf.org/doc/draft-irtf-qirg-principles/11/[12] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´epeau、R. Jozsa、A. Peres 和 W. K. Wootters，《通过经典信道与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道隐形传态未知量子态》，《物理评论快报》，第 70 卷，第 13 期，1993年。[13] A. G. Fowler、D. S. Wang、C. D. Hill、T. D. Ladd、R. Van Meter 和 L. C. Hollenberg，《表面码量子通信》，《物理评论快报》，第 104 卷，第 18 期，第 180503 页，2010年。[14] D. M. Greenberger、M. A. Horne 和 A. Zeilinger，《超越贝尔定理》，《贝尔定理、量子理论与宇宙观》，第 69–72 页，1989年。[15] E. D’Hondt 和 P. Panangaden，《W态和GHZ态的计算能力》，arXiv 预印本 quant-ph/0412177，2004年。[16] M. Pompili、S. L. N. Hermans、S. Baier、H. K. C. Beukers、P. C. Humphreys、R. N. Schouten、R. F. L. Vermeulen、M. J. Tiggelman、L. dos Santos Martins、B. Dirkse、S. Wehner 和 R. Hanson，《远程固态量子比特多节点量子网络的实现》，《科学》，第 372 卷，第 6539 期，第 259–264 页，2021年4月。[17] J. I. Cirac、P. Zoller、H. J. Kimble 和 H. Mabuchi，《量子网络中远程节点之间的量子态传输与纠缠分发》，《物理评论快报》，第 78 卷，第 16 期，第 3221 页，1997年。[18] L. Childress、J. Taylor、A. S. Sørensen 和 M. D. Lukin，《采用最少物理资源的容错量子中继器及基于单光子发射器的实现》，《物理评论A》，第 72 卷，第 5 期，2005年。[19] P. Van Loock、T. Ladd、K. Sanaka、F. Yamaguchi、K. Nemoto、W. Munro 和 Y. Yamamoto，《利用明亮相干光的混合量子中继器》，《物理评论快报》，第 96 卷，第 24 期，第 240501 页，2006年。

[20] M. Uphoff、M. Brekenfeld、G. Rempe 和 S. Ritter，《在光纤腔中利用单原子实现电信波长下的集成量子中继器》，应用物理B，第122卷，第1–15页，2016年。[21] X.-M. Hu、C.-X. Huang、Y.-B. Sheng、L. Zhou、B.-H. Liu、Y. Guo、C. Zhang、W.-B. Xing、Y.-F. Huang、C.-F. Li等，《面向量子通信的长距离纠缠纯化》，《物理评论快报》，第126卷，第1期，第010503页，2021年。[22] G. Moody、V. J. Sorger、D. J. Blumenthal、P. W. Juodawlkis、W. Loh、C. Sorace-Agaskar、A. E. Jones、K. C. Balram、J. C. Matthews、A. Laing等，《2022年集成量子光子学路线图》，《物理学杂志：光子学》，第4卷，第1期，第012501页，2022年。[23] C. H. Bennett、G. Brassard、S. Popescu、B. Schumacher、J. A. Smolin 和 W. K. Wootters，《通过噪声信道实现噪声纠缠的纯化与保真隐形传态》，《物理评论快报》，第76卷，第5期，第722页，1996年。[24] D. Deutsch、A. Ekert、R. Jozsa、C. Macchiavello、S. Popescu 和 A. Sanpera，《噪声信道上的量子隐私放大与量子密码学安全性》，《物理评论快报》，第77卷，第13期，第2818页，1996年。[25] A. S. Cacciapuoti、M. Caleffi、R. Van Meter 和 L. Hanzo，《当纠缠遇上经典通信：面向量子互联网的量子隐形传态》，IEEE通信汇刊，第68卷，第6期，2020年。[26] R. Van Meter、T. D. Ladd、W. J. Munro 和 K. Nemoto，《长线路量子中继器的系统设计》，IEEE/ACM网络汇刊，第17卷，第3期，第1002–1013页，2008年。[27] A. Dahlberg、M. Skrzypczyk、T. Coopmans、L. Wubben、F. Rozpedek、M. Pompili、A. Stolk、P. Pawełczak、R. Knegjens、J. de Oliveira Filho等，《量子网络的链路层协议》，载于ACM数据通信特别兴趣小组会议论文集，2019年，第159–173页。[28] W. Kozlowski、A. Dahlberg 和 S. Wehner，《量子网络协议设计》，载于第16届新兴网络实验与技术国际会议论文集，2020年，第1–16页。[29] P. W. Shor，《量子计算算法：离散对数与因数分解》，载于第35届计算机科学基础年度研讨会论文集，1994年11月，第124–134页。[30] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《具有边界的晶格量子码》，arXiv预印本 quant-ph/9811052，1998年。[31] L. Valentini、D. Forlivesi 和 M. Chiani，《非对称信道上量子纠错表面码的性能分析》，载于2023年IEEE国际通信会议论文集，意大利罗马，2023年5月。[32] D. Forlivesi、L. Valentini 和 M. Chiani，《XZZX与旋转量子表面码的逻辑错误率》，IEEE精选通信领域期刊，2024。[33] M. Chiani、A. Conti 和 M. Z. Win，《搭载于量子流之上》，《物理评论A》，第102卷，第1期，2020年7月。[34] P. W. Shor，《降低量子计算机存储器退相干的方案》，《物理评论A》，第52卷，第R2493–R2496页，1995年10月。[35] R. Laflamme、C. Miquel、J. P. Paz 和 W. H. Zurek，《完美量子纠错码》，《物理评论快报》，第77卷，第1期，1996年。[36] M. Grassl，《线性码与量子码最小距离的界》，在线资料：http://www. codetables.de，2007年，访问日期：2019-12-20。[37] P. K. Sarvepalli、A. Klappenecker 和 M. R¨otteler，《非对称量子码：构造、界与性能》，《皇家学会学报A辑：数学、物理与工程科学》，第465卷，第2105期，第1645–1672页，2009年。[38] M. Chiani 和 L. Valentini，《针对一种占主导地位的泡利错误类型的量子信道短码》，IEEE精选信息论领域期刊，第1卷，第2期，第480–486页，2020年。[39] A. Steane，《多粒子干涉与量子纠错》，《伦敦皇家学会会刊：A辑》，第452卷，第1954期，第2551–2577页，1996年。

[40] A. R. Calderbank 和 P. W. Shor，《存在优良的量子纠错码》，《物理评论A》，第54卷，第2期，第1098页，1996年。[41] A. M. Steane，《扩展Calderbank-Shor-Steane量子码》，IEEE信息论汇刊，第45卷，第7期，第2492–2495页，1999年。[42] S. Muralidharan、L. Li、J. Kim、N. L¨utkenhaus、M. D. Lukin 和 L. Jiang，《长距离量子通信的最优架构》，《科学报告》，第6卷，第1期，第20463页，2016年。[43] M. Hein、J. Eisert 和 H. J. Briegel，《图态中的多方纠缠》，《物理评论A》，第69卷，第6期，第062311页，2004年。[44] M. Hein、W. D¨ur、J. Eisert、R. Raussendorf、M. Nest 和 H.-J. Briegel，《图态中的纠缠及其应用》，arXiv预印本 quant-ph/0602096，2006年。[45] C. Meignant、D. Markham 和 F. Grosshans，《在任意量子网络中分发图态》，《物理评论A》，第100卷，第5期，第052333页，2019年。[46] E. Rieffel 和 W. Polak，《面向非物理学家的量子计算导论》，《ACM计算调查》（CSUR），第32卷，第3期，第300–335页，2000年。[47] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2010年。[48] R. F. Werner，《具有爱因斯坦-波多尔斯基-罗森关联且可由隐变量模型描述的量子态》，《物理评论A》，第40卷，第8期，第4277页，1989年。[49] Y.-S. Zhang、Y.-F. Huang、C.-F. Li 和 G.-C. Guo，《通过自发参量下转换实验制备Werner态》，《物理评论A》，第66卷，第6期，第062315页，2002年。[50] S. Das、M. S. Rahman 和 M. Majumdar，《利用量子电路设计量子中继器并在IBM量子计算机上对其性能进行基准测试》，《量子信息处理》，第20卷，2021年。[51] W. D¨ur、H.-J. Briegel、J. I. Cirac 和 P. Zoller，《基于纠缠纯化的量子中继器》，《物理评论A》，第59卷，第1期，1999年。[52] W. D¨ur 和 H. J. Briegel，《纠缠纯化与量子纠错》，《物理学进展报告》，第70卷，第8期，第1381页，2007年。[53] H. H. S. Chittoor 和 O. Simeone，《通过有噪经典通信学习量子纠缠蒸馏》，arXiv预印本 arXiv:2205.08561，2022年。[54] C. Macchiavello，《论QPA过程的解析收敛性》，《物理快报A》，第246卷，第5期，第385–388页，1998年。[55] S. Krastanov、V. V. Albert 和 L. Jiang，《优化纠缠纯化》，《Quantum》，第3卷，第123页，2019年。[56] K. Goodenough、S. de Bone、V. L. Addala、S. Krastanov、S. Jansen、D. Gijswijt 和 D. Elkouss，《利用图码进行近期 n 至 k蒸馏协议》，arXiv预印本 arXiv:2303.11465，2023年。[57] D. Gottesman，《量子纠错与容错量子计算导论》，arXiv预印本 quant-ph/0904.2557，2009年。[58] D. J. MacKay、G. Mitchison 和 P. L. McFadden，《用于量子纠错的稀疏图码》，IEEE信息论汇刊，第50卷，第10期，第2315–2330页，2004年。[59] N. H. Nickerson、Y. Li 和 S. C. Benjamin，《在噪声极大的网络中实现拓扑量子计算，局部错误率接近百分之一》，《自然-通讯》，第4卷，第1期，第1756页，2013年4月。[60] A. S. Cacciapuoti、M. Caleffi、R. Van Meter 和 L. Hanzo，《当纠缠遇上经典通信：面向量子互联网的量子隐形传态》，IEEE通信汇刊，第68卷，第6期，第3808–3833页，2020年。[61] S. D. Barrett 和 P. Kok，《利用物质量子比特与线性光学实现高效高保真量子计算》，《物理评论A》，第71卷，第6期，第060310页，2005年。

[62] A. M. Steane, 《量子理论中的纠错码》, 《物理评论快报》, 第 77 卷, 第 5 期, 第 793 页, 1996 年。[63] H.-J. Briegel、W. D¨ur、J. I. Cirac 和 P. Zoller, 《量子中继器：不完美局部操作在量子通信中的作用》, 《物理评论快报》, 第 81 卷, 第 26 期, 1998 年。