arXiv:2305.00963v1 [math.CO] 1 May 2023

埃舍尔与 Stanley 的色多项式 e-正性猜想（长度-2）

ALEXANDRE ROK 和 ANDRAS SZENES

摘要。我们给出了 Stanley 关于长度为 2 的分拆的色彩 e-正性猜想的一个简短证明。

1. 引言

设 G 为一个有限图， $V(G)$ 为 G的顶点集， $E(G)$ 为G的边集。

定义 1.1. 一个正常染色 c 的 G 是一个映射

$$c : V \to \mathbb{N}$$

使得任意两个相邻顶点都不会被染成相同的颜色。

对于每种着色 c，我们定义一个单项式。

$$x^c = \prod_{v \in V} x_{c(v)},$$

其中 x_1、x_2、……、x_n、……为交换变量。我们用 $\Pi(G)$ 表示 G 的所有正常染色的集合，并用 Λ 表示以无限变量集 $\{x_1$、x_2、……$\}$ 为变量的对称函数环。

在 [10], Stanley 将图的色对称函数定义如下。

定义 1.2. 图 G 的色对称函数 $X_G \in \Lambda$ 是对图 G 的所有正常染色对应的单项式 x^c 之和：

$$X_G = \sum_{c \in \Pi(G)} x^c.$$

注记 1.3. 我们同样可以考虑一个有限但足够大的颜色数r。在这种情况下，我们将得到 $X_G \in \Lambda_r$，即由 r个变量构成的对称多项式集合。这会使记号稍微复杂一些，但不会改变我们的任何结果。

定义 1.4. 用 e_m 表示第 m 个初等对称函数：

$$e_m = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m},$$

其中 i_1、..、$i_k \in \mathbb{N}$。给定一个非递增的正整数序列（我们将这些称为分拆）

$$\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k),\ \lambda_i \in \mathbb{N},$$

k我们定义初等对称函数 $e_\lambda = \prod_{i=1} e_{\lambda_i}$。这些函数构成Λ的一组基。

定义 1.5。 若对称函数 $X \in \Lambda$ 在初等对称函数基下的系数均非负，则称其为 e-正的。

定义 1.6. 记 p_m 为 m 次幂和对称函数：

$$p_m = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^m.$$

给定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k)$，我们定义幂和对称函数 $_k p_\lambda = \prod_{i=1} p_{\lambda_i}$。这些函数也构成 Λ 的一组基。

定义 1.7. 给定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k)$，我们定义单项式对称函数

$$m_\lambda = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \sum_{\lambda' \in S_k(\lambda)} x_{i_1}^{\lambda'_1} \cdot x_{i_2}^{\lambda'_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\lambda'_k},$$

其中内层求和遍历序列 λ 的所有置换，记作 $S_k(\lambda)$。

例 1. K_n 的色对称函数（ n 个顶点上的完全图）为 $X_{K_n} = n!\, e_n$；特别地， X_{K_n} 是 e-正的。

定义 1.8. 对于偏序集 P，不可比图$\mathrm{inc}(P)$是一个以 P 的元素为顶点的图，当且仅当两个顶点在 P中不可比时，它们才相连。

定义 1.9。 给定一对自然数 a，如果偏序集 P不包含长度为 a 和长度为 b 的链，且这两条链的元素彼此不可比，则称其为 $(a+b)$*-free* 。

定义 1.10. 单位区间序（UIO）是一种偏序集，同构于 $U \subset \mathbb{R}$ 的有限子集，并具有如下偏序集结构：

$$\text{for } u, w \in U: \ u \succ w \text{ iff } u \geqslant w + 1.$$

因此，当且仅当 $|u - w| < 1$ 时， u 和 w 不可比较；此时我们使用记号 $u \sim w$ 。

定理 1.11 (Scott-Suppes [5])。 有限偏序集 P 是 *UIO*，当且仅当它不包含 $(2+2)$ 和 $(3+1)$。

Stanley [10] 开创了对无 $(3+1)$ 偏序集的不可比图的研究。通过分析这些不可比图的色对称函数，Stanley [10] 提出了以下正性猜想。

猜想 1 (Stanley)。 若 P 是无 $(3+1)$ 偏序集，则 $X_{\mathrm{inc}(P)}$ 是 e-正的。

对于图 G ，我们用 $c_\lambda(G)$ 表示 X_G 关于 e 基的系数。若不致混淆，我们省略指标 G 。因此，该猜想断言在展开式中

$$X_G = \sum_\lambda c_\lambda e_\lambda,$$

当 G 是某个 $(3+1)$-自由偏序集的不可比图时，对于所有分拆 λ，系数 c_λ 均为非负。

借助计算机，猜想 1 已对元素数不超过 20 的偏序集 [4] 得到验证。2013 年，Guay-Paquet [4] 指出，要证明这一猜想，只需验证 $(3+1)$-自由和 $(2+2)$-自由偏序集的情形，即单位区间序的情形（见定理 1.11）。更准确地说：

定理 1.12 (Guay-Paquet)。 设 P 是一个无 $(3+1)$ 偏序集。那么， $X_{inc}(P)$ 是以下色对称函数的凸组合

$$\{X_{inc}(P') \mid P' \text{ is a } (3+1)- \text{ and } (2+2)-\text{free poset}\}.$$

长期以来，这方面最强的一般性结果是 Gasharov[3] 的结果。

定义 1.13。 对于一个分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k)$，定义舒尔函数$s_\lambda = \det(e_{\lambda_i^* + j - i})_{i,j}$，其中 λ^* 是 λ的共轭分拆。函数 $\{s_\lambda\}$构成了 Λ的一组基。

定义 1.14。 若对称多项式 X 在舒尔函数基下的系数均非负，则称其为 s-正的。

显然， e-正函数的乘积仍是 e-正的。这对s-正函数也成立。因此，等式 $e_n = s_{1^n}$ 意味着 e-正函数是 s-正的，因而 s-正性弱于 e-正性。

定理 1.15 (Gasharov)。 若 P 是 $(3+1)$-自由偏序集，则 $X_{inc(P)}$ 是 s-正的。

Gasharov 通过构造所谓的 P-表，并在这些表与 s-系数 [3] 之间建立一一对应，证明了 s- 正性。

关于 e-系数的最强结果由 Stanley 于 [10] 得出。他证明了对固定长度的分拆求和得到的 e-系数非负：

定理 1.16 (Stanley)。 对于有限图 G 和 $j \in \mathbb{N}$，设

$$X_G = \sum_\lambda c_\lambda e_\lambda,$$

并令 $sink(G, j)$ 表示 G 的具有 j 个汇点的无环定向数。则

$$sink(G, j) = \sum_{l(\lambda)=j} c_\lambda.$$

R注 1.17。 取 $j = 1$，由该定理可知 c_n 非负。

在 [8], 中，我们引入了一种组合工具，将其称为正确序列（或*correct*）。

定义 1.18。 设 U 是一个 UIO。我们将把由 $w = [w_1、\ldots、w_k]$ 个元素组成的序列称为 U 正确，如果

- $w_i \not\succ w_{i+1}$对于 $i = 1、2、\ldots、k-1$，以及每个 $j = 2、\ldots、k$，都存在 $i < j$，使得 $w_i \not\prec w_j$。

每个长度为 1 的序列都是 correct；序列 $[w_1, w_2]$ 是 correct，当且仅当 $w_1 \sim w_2$。第二个条件（假设第一个条件成立）可以改写如下：对于每个 $j = 1, \ldots k$，子集 $\{w_1, \ldots, w_j\} \subset U$ 关于图结构 $(U, \sim)$ 是连通的。使用这一记号，我们证明了以下结论。

定理 1.19。 设 $X_{inc(U)} = \sum c_\lambda e_\lambda$ 是 n 元素λ单位区间序 U 的色对称函数。那么，c_n 等于长度为 n 的 *correct* 的数量，其中 U 的每个元素都恰好使用一次。

特别地，我们证明了色多项式的系数 c_n 对于 UIO 是非负的。这重现了 Stanley [11] 和 Chow [2],的结果：他们利用组合方法证明了对于 $(3+1)$-free 偏序集， c_n 具有正性，并将 e-系数与不可比图的无环定向联系起来。利用 correct 使我们能够更进一步，证明如下结果（见 [7]）：

定理 1.20。 设 $X_{inc(P)} = \sum_\lambda c_\lambda e_\lambda$ 是 $(3+1)$-*free* 偏序集 P的色对称函数，且 $k \in \mathbb{N}$。则 $c_{n-k,\ 1^k}$, $c_{n-2,\ 2,\ }$ $c_{n-3,\ 2,\ 1}$和 $c_{2^k,\ 1^{n-2k}}$ 都是非负整数。

在本文中，我们使用 Siegl 在 [9], 中引入的系数 c_n 的另一种组合表示，他们还在那里证明了对于所有等部件分拆的 e-正性。我们采用了这一新工具，并为 Stanley猜想在所有长度-2 的划分中的情形给出了一个非常简短而优雅的证明：$\lambda = n \geqslant k$。这种方法可以推广到任意分拆的情形，但这项工作要复杂得多。最近，Abreu 和 Nigro [1] 宣布了长度为 2 的情形的另一种证明，他们使用了复杂得多的工具，将这一组合问题与某些代数簇的拓扑联系起来。我们希望这些方法的结合能够进一步揭示 e-正性的含义。

这篇短文的结构如下：我们首先回顾 Stanley 同态，该同态也用于我们之前的工作（见 §2）。我们在 §3 中介绍记号，并在 §4 中给出一些初步的结构性结论。主要构造及其证明随后在 §5 中呈现。

致谢。 我们感谢 Alexander Paunov 提供的帮助、想法和慷慨支持。

2. Stanley 的 G同态

设 G 为一个有限图，其顶点集为 $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$，边集为 $E(G)$。我们将顶点视为形式上的交换变量，并引入多项式环 $\Lambda_G = \mathbb{R}[v_1, ..., v_n]$。Stanley [11, p. 6] 通过规定自由生成元的像定义了一个环同态$\rho_G : \Lambda \to \Lambda_G$，其中自由生成元属于 Λ，即初等对称多项式：

$$e_i^G = \sum_{\substack{S \subset V \\ S-\text{indep}, \#S=i}} \prod_{v \in S} v,$$

其中求和遍及 V的所有 i元独立子集 S； 这些子集中任意两个顶点都不构成一条边，也就是说，它们是独立子集。我们令 $e_0^G = 1$，并对 $i < 0$令 $e_i^G = 0$。

该对应 $e_i \mapsto e_i^G$随后扩展为环同态 $\rho_G : \Lambda \to \Lambda_G$，称为 Stanley 的 G-同态。对于 $f \in \Lambda$，我们将使用记号 f^G 表示$\rho_G(f)$。

备注 2.1。 请注意，多项式 f^G 不一定是对称的。

例 2. 给定一个分拆 $\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$，$k \in \mathbb{N}$，我们有

$$e_\lambda^G = \prod_{i=1}^{k} e_i^G,$$

$$s_\lambda^G = \det(e^G_{\lambda_i^*+j-i}).$$

对于整数函数 $\alpha : V \to \mathbb{N}$，定义单项式

$$v^\alpha = \prod_{v \in V} v^{\alpha(v)},$$

并引入记号 $[v^\alpha]f^G$，表示多项式 $f^G \in \Lambda_G$ 中 v^α 的系数。

令 G^α 表示由 G 得到的图：将其每个顶点 v 替换为大小为 $\alpha(v)$ 的完全子图：$K^v_{\alpha(v)}$。给定 G 的顶点 u 和 v，当且仅当 u 和 v 在 G 中构成一条边时，$K^v_{\alpha(v)}$ 的一个顶点才与 $K^u_{\alpha(u)}$ 的一个顶点相连。

Stanley [11, p. 6] 发现了对称函数的 G 类比与色多项式 X_G 之间的如下联系。沿用 Stanley [11]。

令 x 和 y 表示两组无限变量。利用柯西恒等式，可以证明以下著名恒等式

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda*}(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x)e_\lambda(y) = \sum_\lambda e_\lambda(x)m_\lambda(y)$$

应用 G-同态 ρ_G，我们得到函数

$$T(x,v) = \sum_\lambda m_\lambda(x)e_\lambda^G(v) = \sum_\lambda s_\lambda(x)s^G_{\lambda*}(v) = \sum_\lambda e_\lambda(x)m_\lambda^G(v). \tag{1}$$

其中，求和遍及所有分拆。于是

$$[v^\alpha]T(x,v)\prod_{v\in V}\alpha(v)! = X_{G^\alpha}. \tag{2}$$

公式 (1) 和 (2) 的一个直接推论是 Stanley 的以下结果：

定理 2.2 (Stanley)。 对于每个有限图 *G*

(1) 对每个 $\alpha : V(G) \to \mathbb{N}$， X_{G^α} 都是 *s*-正，当且仅当对于每个分拆 λ，$s_\lambda^G \in \mathbb{N}[V(G)]$。*(2)* 对每个 $\alpha : V(G) \to \mathbb{N}$， X_{G^α} 都是 *e*-正，当且仅当对于每个分拆 λ， $m_\lambda^G \in \mathbb{N}[V(G)]$ 。

注 2.3。 若 $X_{G^\alpha} = \sum c_\lambda^\alpha e_\lambda$，则 $c_\lambda^\alpha = [v^\alpha]m_\lambda^G$。因此，$\lambda m_\lambda^G$ 的单项式正性等价于对每个 α， c_λ^α 的正性。

从现在起，我们将专注于 UIO 的不可比图，并用简化记号 m_λ^U 表示相关系数。于是，定理 2.2 结合 §1 中引用的约化，便得到 Stanley 的色彩猜想在 G-多项式语言下的如下简洁重新表述。

命题 2.4。 假设每个 *UIO* $U = \{v_1、\ldots\ldots、v_n\}$中，多项式 $m_\lambda^{\mathrm{inc}(U)}$ 的单项式 $\prod_{j=1}^n v_j$ 的系数均为非负数。那么猜想 *1* 成立。

因此，对于实数轴上的每个由 n 个单位区间组成的 UIO U 以及 n 的每个分拆 λ，我们定义了一个整数 $[\prod_{j=1}^{n} v_j]m_\lambda^{\mathrm{inc}(U)}$，今后将其简单记作 m_λ^U：

$$m_\lambda^U \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\prod_{j=1}^{n} v_j]m_\lambda^{\mathrm{inc}(U)}$$

我们的任务是证明，对于所有分拆，这个数都是非负的。在这篇短文中，我们将讨论长度为 2 的分拆情形。

3. 准备工作

一个关键想法出现在 [], ，其中引入了正确序列的另一种定义。为单位区间序中的序列设定以下记号将很方便。

给定实数轴上的两个单位区间 w_1、w_2，它们的相对位置有以下三种可能：

(1) w_1 与 w_2相交；(2) $w_1 \cap w_2 = \varnothing$ 和 w_1 在 w_2的左侧；(3) $w_1 \cap w_2 = \varnothing$ 和 w_1 在 w_2 的右侧。

我们将用记号 $w_1 \prec w_2$ 表示情形 (2)，用 $w_1 \succ w_2$ 表示情形 (3)，并在情形 *(1)* 或情形 *(2)* 成立时用 $w_1 \to w_2$ 表示。

设 U 是一个 UIO，即实数轴上的一组单位区间。我们将 U的元素序列称为

$$w_1 \lhd w_2 \lhd \cdots \lhd w_{l-1} \lhd w_m,$$

其中每个位置上的 $\lhd$ 都是符号 $\prec$ 或 $\to$之一，这样的序列称为逻辑序列；事实上，它是一个命题（该命题非真即假）。

因此，下面将以如下形式利用 UIOs 的结构。

引理 3.1. 设

$$w_1 \lhd w_2 \lhd \cdots \lhd w_{m-1} \lhd w_m$$

是一个逻辑序列，其中包含 r $\prec$个符号，以及满足 $r + s = m - 1$和 $r \geqslant s$的 s $\to$个符号。那么该命题为假。

非正式地，我们将称这类序列不可能。

若序列 $[w_1, w_2, \ldots, w_k]$ 由 U 中的不同元素组成，我们称其为 k-埃舍尔，如果

$$w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_k \to w_1$$

成立。我们用 ζ 表示对序列进行循环置换的操作：

$$\zeta : [w_1, w_2, \ldots, w_k] \mapsto [w_k, w_1, w_2 \ldots, w_{k-1}].$$

对一个 k-埃舍尔作用 ζ 的幂，会得到 $k-1$ 个新的 k-埃舍尔。由于由此得到的所有 k 个陈述彼此等价，有时我们会用循环 *Escher* 来表示由 ζ 关联的序列的同构类。因此，Escher 是指定了一个初始点的循环 Escher。此外，给定一个 k-埃舍尔，我们将把指标集视为模 k 约化后的整数；例如，$w_0 = w_k$。

[] 的一个关键结果是，UIO 的数量 m_n^U 与相同长度的埃舍尔数量相同。结合我们此前的结果，可得以下结论。

定理 3.2。 设 $U = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 为一个 *UIO*。那么

$$m_n^U = \#\{\textit{correct sequences of length } n \textit{ in } U\} = \#\{n\text{-}\textit{Eschers in } U\}.$$

因此，这是该猜想的第一个实例：它表明，对于所有长度为 1 的“分拆”，该命题均成立。

推论 3.3. 由于$\#\{n \text{ 是 } U\} = N \#\{$ 中的循环 n-埃舍尔，因此我们可以得出结论：m_n^U 能被 n 整除。

4. 长度为 2 的情形下的猜想

4.1. 利用埃舍尔的重新表述

固定两个正整数 $n \geqslant k$，并令 $N = n + k$。本文将证明，对于任意具有 N 个元素的 UIO U， $m_{nk}^U \geqslant 0$ 均成立。

对于正整数 m，引入如下记号

$$P_m^U = \{\text{length-}m \text{ Eschers in } U\}$$

为简单起见，假设 $n > k$。为了研究 m_{nk}^U，我们将使用公式

$$m_{nk} = p_n \cdot p_k - p_{n+k} \text{ in } \Lambda.$$

应用 Stanley 同态可得

$$m_{nk}^U = \#P_n^U \cdot \#P_k^U - \#P_{n+k}^U.$$

长度为 2 的分拆的色彩猜想将由以下命题推出。

定理 4.1. 设 $n > k$，且 U 是由 $n + k$ 个区间构成的 *UIO*。则

$$\#P_n^U \cdot \#P_k^U \geqslant \#P_{n+k}^U.$$

我们将在下文给出更精确的表述。现在，我们先进行一些准备工作。

4.2. 子埃舍尔

本段将引入一个关键概念。

引理 4.2. 设 U 是一个含有 $N = n + k$ 个元素的 *UIO*，并设 $w = [w_1, \ldots, w_N] \in P_N^U$ 是 U 中的一个埃舍尔。那么对于指标 m 的任意取值（所有指标均按模 N 理解），有 *3* 种互斥可能性：

(1) $w_{m+k} \to w_{m+1}$ 和 $w_m \to w_{m+k+1}$ *(2)*
$w_{m+k} > w_{m+1}$ 和 $w_m \to w_{m+k+1}$ *(3)*
$w_{m+k} \to w_{m+1}$ 和 $w_m > w_{m+k+1}$

证明. 事实上，最后一种剩余的可能性： $w_{m+k} > w_{m+1}$ 和 $w_m > w_{m+k+1}$ 会产生不可能的序列（参见引理 3.1）：

$$w_m \to w_{m+1} < w_{m+k} \to w_{m+k+1} < w_m.$$

□

注意，在情况 (1) 和 (3) 中，序列 $[w_{m+1}, \ldots, w_{m+k}]$ 是一个 k-埃舍尔；在情况 (1) 和 (2) 中，序列 $[w_{m+k+1}, \ldots, w_m]$ 是一个 n-埃舍尔。若情况 (1) 成立，则我们称序列 $[w_{m+1}, \ldots, w_{m+k}]$ 为 w 的一个有效 k-子埃舍尔 。

本引理的陈述可以加强如下。

引理 4.3。 假设我们处于引理 *4.2* 的情形 *(2)*，因此序列 $[w_{m+1}, w_{m+2}、\ldots\ldots、 w_{m+k}]$不是一个 k-埃舍尔。那么这三个序列

$$[w_{m+k}, w_{m+k+1}, \ldots, w_{m+k+n-1}],$$
$$[w_{m+k+1}, w_{m+k+2}, \ldots, w_{m+k+n}],$$
$$[w_{m+k+2}, w_{m+k+3}, \ldots, w_{m+k+n+1}].$$

在 U 中都是 n-埃舍尔。

证明与上文给出的证明类似，故略去。

现在假设

$$w_0 \to w_1 \to \cdots \to w_{L-1} \to w_L.$$

如果对所有 $0 < m \leqslant L - k$，引理 4.2 的情形 (2) 或 (3) 都成立（即不存在有效的 k-子埃舍尔），我们就称这样的序列为纯的 。

那么引理 4.3 有以下重要

推论 4.4。 如果 $w_0 \to w_1 \to \cdots \to w_{L-1} \to w_L$ 是纯的，那么要么对所有 $0 \leqslant m < L - k$，情形（*2*）成立；要么对所有 $0 \leqslant m < L - k$，情形（*3*）成立。

在第一种情形下，我们将该序列称为纯的$^-$；在第二种情形下，我们将其称为纯的$^+$。这些论证得出了以下关键结论。

命题 4.5。 设 U 是一个 *UIO*， $w \in P_N^U$ 是一个埃舍尔。那么存在一个指标 i，使得

$[w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots\ldots, w_{i+k}]$ 是一个有效的 k-埃舍尔，也就是说，$[w_{i+k+1}, w_{i+k+2}, \ldots\ldots, w_{i+k+n}]$ 也构成一个埃舍尔。

证明。 事实上，反设成立，则会得到一个循环的（无限）长度为-N 的纯序列。如果该序列是纯的$^-$ ，那么我们就得到一个无限逻辑序列

$$w_0 \prec w_{k-1} \prec w_{2(k-1)} \prec \ldots,$$

这显然不可能。纯的$^+$ 序列的情形类似。 □

4.3. 插入

现在我们转而讨论一个对偶概念。令 $u \in P_n^U$ 和 $v \in P_k^V$。在这种情形下，我们也有一组类似的结论。

引理 4.6。 对于每个指标 $i \in \mathbb{N}$，有三种互斥可能性：

(1) $u_i \to v_{i+1}$ 和 $v_i \to u_{i+1}$，
(2) $u_i > v_{i+1}$ 和 $v_i \to u_{i+1}$，
(3) $u_i \to v_{i+1}$ 和 $v_i > u_{i+1}$。

此外，在两个后续的类型 *(1)* 指标之间，始终只有相同类型（*(2)* 或 *(3)*）的指标。

证明。 证明与上文类似，故略去。 □

为简便起见，假设 n 和 k 互素。那么，$(u、v)$ 这一对生成了 $P_n^U \times P_k^U$ 中由 $n \cdot k$ 对组成的循环序列，这些序列通过同时旋转相互关联，并且都归约为同一对循环埃舍尔图，但分别由其在 u_i 和 v_i 处的起点加以区分，即 $i = 0、 1、 \ldots\ldots、 nk - 1$。我们将称其为一个

一对后续指标 $\kappa = (i, i+1)$ a 有效插入，当上述情形 (1) 成立时。从视觉上看，我们将其视为

$$\begin{pmatrix} \dots v_i \\ \dots u_i \end{pmatrix} \overset{\kappa}{\times} \begin{pmatrix} u_{i+1} \dots \\ v_{i+1} \dots \end{pmatrix}$$

并记为 $i < \kappa < i+1$。

5. 证明

我们固定一个含有 $N = n + k$ 个元素的 UIO U。若不会引起混淆，我们将省略记号中的指标“U”。沿用 [8]，的思路，我们将通过构造一个显式单射 $\phi = \phi_{nk} : P^U_{n+k} \hookrightarrow P^U_n \times P^U_k$ 来证明定理 4.1 的陈述。

同样，我们将把元素 $w \in P^U_m$ 视为一个循环 Escher，并将其起点标记为指标 0。特别地，所有指标都按模 $N = n + k$ 理解。我们的约定有一点微妙之处：尽管指标是循环排列的，我们仍会谈论满足某个条件的最小 指标，从某一点开始。这表示从某一点出发，然后沿正向移动，直到到达满足所需性质的指标。

映射 $\phi : P_{n+k} \to P_n \times P_k$。为简单起见，假设 $n > k$。

然后，ϕ 定义如下：令 $w \in P^U_{n+k}$；将 $0 \leqslant L \leqslant n + k - 1$ 定义为从 0 开始的最小指标 l，使得

$$[w_{l+1}, \dots, w_{l+k}]$$

是一个有效的子 Escher，即 $[w_{l+k+1}, \dots\dots, w_l]$ 也是一个 Escher。我们有时将这个指标 L 记为 $FE(w)$。这样，我们就得到了两个定义良好的循环埃舍尔图。接下来只需确定它们的初始点。我们定义

- 我们将 k-Escher 的初始点设为指标 $q \in [L+1,\ L+k]$ 使得$q = 0$ 模 k，类似地，• 我们将 n-Escher 的初始点设为指标 $q \in [L+k+1,\ L]$ 使得$q = 0$ 模 n。

注记 5.1。尽管我们有这个统一的定义，但存在两种不同的情形：

(1) 通常 情形：$0 \notin [L+1, L+k]$。(2) 特殊 情形：$0 \in [L+1, L+k]$。

“逆映射” $\psi : P_n \times P_k \to P_{n+k}$。分别取 v 和 u，它们是一个 k-埃舍尔和一个 n-埃舍尔。令 L 为满足以下条件的最小整数 $0 \leqslant l$：在 l 之后存在一次有效插入，即 $v_l \to u_{l+1}$ 和 $u_l \to v_{l+1}$（若不存在这样的 l，则任意定义该映射）。我们有时将首次有效插入的指标 L 记为 $FI(u, v)$。这样便立即得到一个循环的 $n+k$-埃舍尔，只需选取一个初始点。

(1) 通常 情形：$L < n$。此时取 u_0 为初始点。(2) 特殊 情形：$L \geqslant n$。

此时取 v_n 为初始点 t.

下面的定理是定理 4.1 的一个加强，并立即推出长度为 2 的分拆的色彩猜想。

定理 5.2。

$\psi \circ \phi$ 是恒等映射

我们先从普通情形开始： $w \in \mathrm{P}_{n+k}$ 并假设第一个 k-埃舍尔出现在 $\mathrm{FE}(w) = L < n$。显然，数对 $\phi(w) = (u, v)$ 在指标 L之后立即有一个有效插入，原则上可以恢复 w。然而，危险在于，如果 $\mathrm{FI}(u, v) < L$，也就是说，在指标 L之前，数对 (u, v) 还有其他有效插入，那么映射 ψ 就无法将 $\phi(w)$ 映回 w。因此我们需要证明$\mathrm{FI}(\phi(w)) \geqslant \mathrm{FE}(w)$。这实质上就是下面陈述的内容：

命题 5.3. 设 κ_1 和 κ_2 是对 (u, v) 的两个连续有效插入：

$$j < \kappa_1 < j+1, \ldots, j+r < \kappa_2 < j+r+1, \ldots, \quad r \leqslant n$$

那么序列

$$u_j \to u_{j+1} \to \cdots \to u_{j+r} \to v_{j+r+1} \to \cdots \to v_{j+r+k}$$

不是纯的，即含有一个有效的 k-子埃舍尔。

证明。 为了证明，我们可以令 $j = 0$，因为 j 只会使论证整体平移。因此，反设

$$u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_r \to v_{r+1} \to \cdots \to v_{r+k}$$

是纯的。

我们首先考虑该序列为纯的$^-$ 的情形。根据这些纯的$^-$ 序列的定义，我们有

$$u_1 \prec u_k \prec \cdots \prec u_{(q-1)(k-1)+1} \prec v_{q(k-1)+1} \to v_{q(k-1)+2} \to \cdots \to v_{qk} = v_0 \to u_1,$$

这是一个不可能的序列，因为它有 q $\prec$和 q $\to$ 符号。另一方面，如果该序列为纯的$^+$ ，那么根据定义，

$$u_0 \succ u_{k+1} \leftarrow u_k \succ \cdots \leftarrow u_{(q-1)k} \succ v_{qk+1} = v_1 \leftarrow u_0,$$

这再次是一个不可能的序列，其中有 q $\prec$ 和 q $\to$ 符号。

□

因此，我们证明了当 $\mathrm{FE}(w) = L < n$时 $\psi \circ \phi(w) = w$。

例外情形类似，但需要更加谨慎一些。同样容易看出，给定一个例外的 $w \in \mathrm{P}^{W}_{n+k}$，有序对 $(u、 v) = \phi(w)$ 在 $L = \mathrm{FE}(w) \geqslant n$处有一个有效插入，下面的陈述便足够了。

命题 5.4. 设 κ_1 和 κ_2 是数对 (u, v)的两个连续有效插入：

$$0 < \kappa_1 < 1, \ldots, L < \kappa_2 < L+1, \ldots, \quad \textit{where } L \geqslant n.$$

那么序列

$$v_n \to v_{n+1} \to \cdots \to v_L \to u_{L-n+1} \to \cdots \to u_L \to v_{L+1} \to \cdots \to v_{L+k}$$

不是纯的，即含有一个有效的 k-子埃舍尔。

注意，我们将起始指标设为 $j = 0$，与上文所讨论情形的证明相同。

证明。 假设序列是纯的$^-$ 和 $L > n$，我们得到以下序列：

$$v_{n+1} \prec u_k \prec \cdots \prec u_{(q-1)(k-1)+1} \prec v_{q(k-1)+1} \to \cdots$$
$$\cdots \to v_{qk} = v_0 \to u_1 = u_{n+1} \prec v_{n+k} = v_n \to v_{n+1},$$

其中含有 $q+1 \prec$和 $q+1 \to$ 个符号。当 $L = n$时，该序列退化为命题 5.3 证明中使用的序列。

假设该序列是纯的$^{+}$，会导致如下不可能的序列

$$v_n \succ u_{k+1} \leftarrow u_k \succ \cdots \leftarrow u_{(q-1)k} \succ v_{qk+1} = v_1 \leftarrow u_0 \succ v_{n+k+1} \leftarrow v_n,$$

证明至此完成。 □

参考文献

[1] A. Abreu, A. Nigro, *Hessenberg* 簇的上同调分解与色彩对称函数的 *e*-正性,arXiv:2304.10644.[2] T. Chow, 关于色彩对称函数 *e*-系数组合解释的注记,arXiv:math.co/9712230v2 (1995).[3] V. Gasharov, *(3+1)*-自由偏序集的不可比图是 *s*-正的, DiscreteMathematics (1995),157, 193-197.[4]M. Guay-Paquet, *(3+1)*-自由偏序集的色彩对称函数的模关系,arXiv:math.co/1306.2400 (2013).[5] D. Scott, P. Suppes 测量理论的基础方面, Journal of Symbolic Logic (1954),23, 113–128.[6] A. Paunov *Stanley* 色函数的正性, Genève University, (2016), available from:http://archive-ouverte.unige.ch/unige:87600[7] A. Paunov 平面图与 *Stanley* 的色函数, preprint, (2016), arXiv:1702.05787[8]A. Paunov, A. Szenes, *Stanley* 色函数 *e*-正性的新方法, arXiv:1702.05791[9] I. Siegl, *(3+1)*-自由偏序集的柱状 *P*-杨表, arXiv:2211.03953[10] R. Stanley, 图的色多项式的一个对称函数推广, AdvancesinMathematics (1995), 111, 166–194.[11] R. Stanley, 图着色及相关对称函数：思想与应用, MIT (1995).

日内瓦大学数学系电子邮件地址：
Alexandre.Rok@unige.ch
日内瓦大学数学系电子邮件地址：
Andras.Szenes@unige.ch