arXiv:2305.00968v1 [math.LO] 1 May 2023

序的单子理论

SAHARON SHELAH

Abstract. 我们研究序的单子（二阶）理论。我们以统一的方式证明所有已知结果，展示一种一般的归约方法，证明更多结果，并说明拓展这些结果的局限。我们证明，在连续统假设（CH）下，实数序的单子理论是不可判定的。我们采用模型论的方法，不使用自动机理论。

这是对一篇年代久远的旧作稍作修订后的版本。

0. Introduction引言

单子逻辑是在增加了取值范围为集合的变量，并允许对这些变量进行量化后的一阶逻辑。如果可以使用配对函数，那么它本质上就是二阶逻辑。类 K of$L$-模型的单子理论是 $\{\psi : \psi$ 是单子逻辑中的一个句子，且由 $K\}$ 中的任意成员满足。

这里我们将研究成员为 K 且带有一元谓词的线性序的情形。

目录

章节

(0) 引言 ..... (1) 加性着色的 Ramsey定理... (2) 广义和的单子理论... (3) 可判定性的简单应用... (4) 良序的单子理论... (5) 从序到一致序... (6) 第5节在稠密序中的应用... (7) 实数序的单子理论的不可判定性...

让我们回顾一下这段历史。Ehrenfeucht [Ehr61] 证明了序的一阶理论的可判定性。Gurevich [Gur64] 由此推导出带有一元谓词的线性序这一情形。B¨uchi [B¨uc60] 和 Elgot[Elg61] 运用自动机理论，证明了 ω（的序）的弱单子理论（即可以对有限集进行量化）的可判定性。B¨uchi

版本 2023年5月1日。可能有更新，请参见 https://shelah.logic.at/papers/42/。*Date*: 2021年7月8日。*Key words and phrases.* 一元序，可判定性。首次打字：1975年9月。研究由美以双边科学基金会资助。出版物 sh:42。

沿着这一方向继续研究， [B¨uchi62], 证明了 ω 的单子理论（即可以对任意集合进行量化）也是可判定的；而在 [B¨uc65b] 中，他证明了序数的弱单子理论具有可判定性。在 [BS73, p. 96]中，他证明了可数序数的单子理论具有可判定性。Rabin [Rab69] 证明了一个极其有力且困难的结果，由此可推出可数序的单子理论具有可判定性。B¨uchi [BS73] 证明了 ω_1 以及 $\{\alpha : \alpha < \omega_2\}$的单子理论具有可判定性。

与此同时，La¨uchli [L¨au68], 采用 Ehrenfeucht [Ehr59] 和 Fraisse [Fra56] 的方法，并继续推进 Galvin（未发表）以及 La¨uchli 和 Leonard [LL66], 的工作，证明了序的弱单子理论的可判定性。他没有使用自动机理论。Pinus [Pin72] 在某种程度上加强了这些结果。我们的结果已在 [She73a],[She73b] 中公布。

¯按照我们的记号，La¨uchli 对 Th^n_k 仅使用了 $k = \langle 1、1、1、 \ldots \rangle$（将其改为 r 对有限集进行量化）。

注：我们在此不关注不使用选择公理的结果。参见 Siefkes [Sil70] ，其中证明了关于 ω 的结果可在 ZF 中证明。这对 $\alpha < \omega^*$也成立。Litman [Lit76] 指出了 [BS736] （不使用选择公理的定理）中的一些错误；证明了相关结果，并在 ZF 中证明了ω_1 总可以由一个句子刻画。

在第7节中，我们证明了（连续统假设）实数序的单子理论、序类的单子理论以及相关问题的不可判定性。该节可以独立阅读，并对这些问题进行了讨论。Gurevich 发现，我们的证明同样适用于带闭包运算的康托尔不连续统的子集格以及类似的空间。因此，Grzegorczy 的 [Grz51]问题得到了（在连续统假设下的）回答[1]。

我们的工作延续了 [L¨au68], ，但在处理良序时，我们采用了 B¨uchi 和 Rabin 的思想。我们在这里将某些（序的）类的单子理论的判定问题 [例如，良序；不能嵌入这些序的序 ω_1 not ω_1^*] 归约为本质上更具组合性的问题。因此，我们为可数序的可判定性给出了一个直接证明（回答了 B¨uchi 的问题 [BS73，第35] 页）。我们的证明适用于更广泛的类，从而表明可数序不能在单子理论中得到刻画，也就回答了 Rabin 的问题 [Rab69]（第12页）。此外，还存在与有理数具有相同单子理论的不可数序（例如稠密斯佩克序；关于它们的存在性，见 [Jec03] ；以及某些实数的不可数子集）。我们还证明， $\{\alpha$ 的单子理论： $\alpha < \lambda^+\}$ 在 λ的单子理论中是递归的，从而推广了 B¨uchi 关于 ω 和 ω_1 的结果。遗憾的是，即使 ω_2 的单子理论也包含一个独立于 ZFC 的陈述。对于一个序数的集合 A ，令 $F(A) = \{\alpha :$ α 是一个共尾性为$> \omega$的极限序数，$\alpha < \sup A$，而 $\alpha \cap A$ 是 $\alpha\}$的一个平稳子集。

现在 Jensen [Jen72]证明了如下结论：

[1]与此同时，Gurevich 已经证明了更多结果，并正在撰写一篇论文。

定理 0.1。（$V = L$）。正则基数 κ 是弱紧的，当且仅当对于每个平稳 $A \subseteq \kappa$，满足（$\forall \alpha \in A$）[cf(α) $= \omega$]，$F(A) \neq \varnothing$。

由于第二部分可以用序的单子理论表达，因此序的单子理论的汉夫数很高。显然，序数的单子理论也依赖于大基数公理。

现在，Baumgartner [Bau76] 证明，如果 ZFC+（存在一个弱紧基数）是一致的，那么它与 ZFC 相容，并且

（*）对于任意平稳的 $A \subseteq \omega_2$，如果（$\forall \alpha \in A$）[cf（α） $= \omega$]，那么 F（A）$\neq \varnothing$（事实上是平稳的）。

因此，ZFC 无法确定 ω_2 的单子理论。这在一定程度上回答了 [B¨uc65a]（第34–43页；第38页，问题2）提出的问题。

我们仍可希望这类理论的可能数量不多，而且每一种都可判定，但这似乎不太可能。我们也可以希望找到在 ZFC 的每个模型中都成立的句子。一个更有希望的计划是，在假设 $V = L$ 的前提下找到一个判定程序。我们证明，为此只需证明以下事实。令 D_{ω_2} 为 ω_2 的闭无界子集所构成的滤子。（Magidor 在 $V = L$ 中否定了（**），但它仍可能与 ZFC 相容。）

(**) 若 $A \subseteq \{\alpha < \omega_2 : \text{cf}(\alpha) = \omega\}, F(A) = B \cup C, A$ 是平稳的，那么存在 A_1, A_2，使得 $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \varnothing, A_1, A_2$ 都是平稳的，并且 $F(A_1) = B$(模D_{ω_2}) $F(A_2) = C$(模D_{ω_2})。

事实上，我们证明了更强的结论：ω_2 的单子理论与 $\langle \underline{P}(\omega_2)/D_{\omega_2}, \cap, \cup, F\rangle$ 的一阶理论彼此递归。

猜想 0.2.（$V = L$）。ω_2 的单子理论（甚至 ω_n）是可判定的。

猜想 0.3.（$V = L+$ 不存在弱紧基数）。良序的单子理论是可判定的。

La¨uchli 和 Leonard [LL66] 定义了一族序 $\underline{M}$，如下所示：它是由 $\{1\}$ 的闭包

（1）$M + N$，（2）$M \cdot \omega$ 和 $M \cdot \omega^*$，（3）$\sum^*_{i<n} M_i$，它是 $\sum_{a \in Q} M_a$ 且 $\{a \in Q : M_a = M_i\}$ 是有理数的稠密子集，并且每个 $M_a \in \{M_i : i < n\}$。

（关于推广，参见 Rosenstein [Ros69] 和 Rubin [Rub74] 。）

L¨auchli [L¨au68] 证明，弱单子序语言中的每个句子都有一个可数模型，当且仅当它在 $\underline{M}$中有一个模型。简单检验第 4 节可知，这一结论对单子语言也成立。另一方面，查看 $\underline{M}$的定义，我们很容易看出，对于每个 $M \in \underline{M}$，都存在一个单子句子 ψ，使得 $M \models \psi$和$\|N\| \leqq \aleph_0$、$N \models \psi$蕴含$N \cong M$。

这样，我们就得到了对 $\underline{M}$ 的直接刻画。

定理 0.4. $M \in \underline{M}$ 当且仅当 M 是可数的，并且满足某个（$\leqq \aleph_0$）范畴的的一元句子。

对于其他我们证明其可判定性的类，也能找到与 $\underline{M}$ 类似的子类。这个定理引出了以下问题:

猜想 0.5. 对于每个 $N \in \underline{M}$，都存在一个一元句子 ψ，使得$M \models \psi$ 蕴含 M 和 N 具有相同的单子理论。（只需证明有理数序的情形即可。）

相关问题还有:

猜想 0.6. 存在一个一元句子 ψ，使得 $R \models \psi$ 和 $M \models \psi$ 蕴含 M 和 R 具有相同的单子理论。[2]

猜想 0.7. 存在一个序 M，其单子理论与R相同，但它不同构于 R。[3]

猜想 0.8. 存在一些序具有相同的单子理论，但它们的完备化并不具有相同的单子理论。[4]

$\underline{M}$ 的刻画也给出了

结论 0.9. 判断序的一阶（甚至单子）理论中的一个句子是否是（$\leqq \aleph_0$）范畴的（或 $\aleph_0$ 范畴的）问题是可判定的。

一个自然的问题是，$\mathfrak{M}$ 的单子理论是否比序数的单子理论更加“复杂”（$\mathfrak{M}$ 中的序是散布型的可数并集；参见 Laver [Lav71, §3], ，其中包括 Galvin 的结果）。要回答这个问题，我们有

定义 0.10. 对于一个只有关系的模型 M，令 $M^\sharp$ 为如下模型:

(i) 它的论域是由 M 中元素构成的有限序列的集合；(i) 它的关系为 $\bar{}$ $\bar{}$(a) $<$，其中 $\bar{a} < b$ 表示 $\bar{a}$ 是 b 的初始段；(b) 对于语言 M 中的每个 n 元谓词 R， $R^{M^\sharp} = \{\langle \langle a_1, \ldots, a_{m-1}, b^1 \rangle, \langle a_1, \ldots, a_{m-1}, b^2 \rangle, \ldots, \langle a_1, \ldots, a_{m-1}, b^n \rangle \rangle : a_i, b^i$ 是 M 中的元素，并且 $M \models R[b^1, \ldots, b^n]\}$。作者提出了 Rabin 自动机的一种推广，Rabin 从[Rab69], 证明了其中较简单的部分：关于并集与交集的引理，并解决了空性问题。随后 J.Stup 详细阐述了这些证明，并证明了补运算引理。因此，对 [Rab69] 的定理与证明的推广给出

定理 0.11。 $M^\sharp$ M的单子理论在 M的单子理论中是递归的。

因此，使用 [Lav71，§3] 记号，我们得到，例如，

[2]由 Gurevich 证实[3]由 Gurevich 反驳[4]由 Gurevich 证实

结论 0.12。 $\{M$ 的单子理论： $M \in \mathfrak{M}, \|M\| \leqq \lambda\}$ 在 λ 的单子理论中是递归的。

因为根据第 2 节， $\sigma_{\lambda^+,\ \lambda^+}$ 的单子理论可递归地归约到 λ 的单子理论；根据 0.6， $\eta_{\lambda^+,\ \lambda^+}$ 的单子理论可递归地归约到 λ 的单子理论；因此我们得出结论。根据 [Lav71, 3.2(iv), 3.4] $\eta_{\lambda^+,\ \lambda^+}$ 是 $\{M \in \mathfrak{M}: \|M\| \leqq \lambda\}$ 的泛成员。

以下内容也很有用（Le Tourneau [LT68] 至少证明了部分 (1)、(2)）：[5]

定理0.13。设 L 是一个包含一个一元函数符号、等号和一元谓词的语言。

(1) L 的单子理论是可判定的。(2) 如果 L 的一个一元句子 ψ 有模型，那么它有一个基数为 $\leqq \aleph_0$的模型。(3) 在(2)中，我们可以找到 $n = n(\psi) < \aleph_0$ 和一个模型 M ，使得 $|\{b \in |M|:$ 对于任意 $a \in |M|, \ f(b) = a\}| \leqq n$。

这是因为，若 M_λ 是其论域为 λ且语言中只有等号的模型，那么在 $M_\lambda^\sharp$ 中可以解释一个通用的 L-模型（见 Rabin [Rab69]）。这意味着 (1)。注意，所有 M_λ （λ 一个无限基数）都有相同的单子理论。这证明了 (2)。对于 (3)，注意若$M_{\aleph_0} \models \psi$，那么对所有足够大的 n，都有 $M_n \models \psi$。

注 (1)：Rabin [Rab69] 证明了可数布尔代数在一阶逻辑中扩充以对理想进行量化后的可判定性。根据 Stone表示定理，每个可数布尔代数都可以表示为由某个可数序的区间生成的布尔代数。通过第 3 节的方法，我们可以证明，在单子逻辑中扩充以对这类理想进行量化后的可数线性序理论是可判定的，从而重新证明了 Rabin 的结果。（唯一需要注意的是，第 2 节的方法适用。）

猜想0.14. 基数为 $\leqq \aleph_1$ 的序的单子理论在 $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$时是可判定的。

猜想0.15。基数为 $< \lambda$ 的布尔代数理论，或扩展了一阶逻辑以允许对理想进行量化的理论，在$\lambda \leqq 2^{\aleph_0}$($\lambda = \aleph_2 \leqq 2^{\aleph_0}$)时是可判定的。

注：我们可以通过综合第 4、5 和 6 节的方法来证明结论 0.7。

[5]Le Tourneau 仅声称了这一结果。最近，Routenberg 和 Vinner 也证明了这一定理。

1. Ramsey theorem for additive coloring

集合 I 的着色是一个函数 f，它将 I 中不同元素组成的无序对集合映射到一个颜色的有限集 T。我们通常假设 $x < y$，并用 $f(x, y)$ 代替 $f(\{x, y\})$。若对于 $x_i < y_i < z_i \in I$ $(i = 1, 2)$，着色 f 是可加的。

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2); f(y_1, z_1) = f(y_2, z_2)$$

意味着 $f(x_1, z_1) = f(x_2, z_2)$。在这种情况下，在 T 上定义了一个（部分）运算 $+$，使得对于 $x < y < z \in I, f(x, z) = f(x, y) + f(y, z)$。如果存在一个 $t_0 \in T$，使得对于每个$x < y \in J, f(x, y) = t_0$，则集合$J \subseteq I$ 是（关于 f）齐性的。

Ramsey定理 [Ram29]指出，特别是，如果我们用有限集中的有限种颜色对一个无限集进行着色，那么就存在一个无限齐次子集。该定理有许多推广和应用。它曾被用于[B¨uchi62] 中，当时所采用的着色实际上是加性的。借助Rabin的一个思想，B¨uchi [BS73, 12, p.58] 提出了另一种证明（实际上使用了加性），并在 [BS73, 6.2, p.111] 中将其直接推广到 ω_1 （对于 ω_1 的结果并不适用于一般的着色）。我们给出了向任意序数的自然扩展（这一扩展是显而易见的，为保证完备性而将其纳入），以及一个适用于稠密序的平行定理。

定理 1.1. 若 δ 是一个极限序数，f 是 δ 上的加性着色（取值于由 n 个颜色组成的集合 T），则存在 δ的一个无界齐次子集 J。

注：

(1) 若 δ的共尾性为 $\geqq \omega_1$，我们可以假设：若 a、$b < c'$、f（a、c'）$=f$（b、c'），则 a、$b < c \in J$蕴含 f（a、c）$= f$（b、c）。(2) 不必假设 $|T| < \aleph_0$, 只需假设 $|T| < \mathrm{cf}(\delta)$。

结论 1.2. 在 1.1 的条件下，存在 δ的一个闭无界子集 J，以及 J_k、J^ℓ、$1 \leqq k$、$\ell \leqq |T|$和 $t^\ell_k \in T$，使得 $J = \cup_k J_k = \cup_\ell J^\ell$，这些 J_k两两不相交，这些 J^ℓ两两不相交；并且若 $a < b \in J$、$a \in J_k$、$b \in J^\ell$，则 f（a、b）$= t^\ell_k$。

定理 1.3. 若 f 是稠密集 I 到有限个 n 颜色 T 的加性着色，则 I 中存在一个区间，它含有一个稠密齐次子集。

结论 1.4. 在 1.3 的假设下，存在 I 的一个区间 (a, b)，以及 $(a, b) = \cup_{k=1}^{|T|} J_k = \cup_{\ell=1}^{|T|} J^\ell$ 和颜色 $t^\ell_k \in T$，使得对于 $x < y, x \in J_k, y \in J^\ell, f(x, y) = t^\ell_k$。

注：我们可以选取 J_0, J_k, J^ℓ，使它们能够由结构 $(\delta, <, f)$（或 $(I, <, f)$）中带参数的一阶公式定义。

定理 1.1 的证明：定义：对于 x、$y \in \delta$、$x \sim y$，如果存在一个 z 使得 x、$y < z < \delta$，且 f（x、z）$= f$（y、z）；显然，根据加性，这意味着

由 f 的加性可知，对于任意 z'、$z<z'<\delta$、$f(x、z')=f(y、z')$。容易验证，$\sim$ 是一个等价关系，并且有 $\leqq |T|$ 个等价类。因此，至少存在一个等价类 I，它是 δ 的无界子集。令 x_0 为 I 的最小元。对于 $t\in T$、$I_t=\{y$，令：$x_0\neq y\in I$、$f(x_0、y)=t\}$。显然 $I-\{x_0\}=\cup_{t\in T}I_t$，因此对于某个 s，I_s 是 δ 的无界子集。令 $\langle a_i:\ i<\mathrm{cf}(\delta)\rangle$ 为 δ 的元素组成的递增无界序列。通过对 i 使用归纳法定义元素 $y_i\in I$。如果对于所有 $j<i$（$i<\mathrm{cf}(\delta)y_j$）都已定义，则令 $y_i<\delta$ 使得 $y_i>y_j$、$y_i>a_j$、$y_i>x_0$，并且对于任意 $j<i$，$f(x_0、y_i)=f(y_j、y_i)$，以及 $y_i\in I_s$。现在 $J=\{y_i:\ i<\mathrm{cf}(\delta)\}$ 是所需的集合。显然它是无界的。如果 $y_j<y_i$（从而 $j<i$），那么

$$f(y_j,y_i)=f(x_0,y_i)=s.$$

因此，J 是齐性的。

结论 1.2 的证明：如果 δ 的共尾性是 $\aleph_0$，那么 1.1 中的 J 也是闭的（显然）。因此，假设 $\mathrm{cf}(\delta)>\aleph_0$，令 $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$，并令 J,y_j 如 1.1 的证明中所定义；再令 J^* 为 $\{y_{j+1}$ 的闭包：$j<\mathrm{cf}(\delta)\}$。那么 $J^*=\{y^j:\ j<\mathrm{cf}(\delta)\}$ 是递增的、连续的，并且 $y^{j+1}=y_{j+1}$。令$J'=\{y^j:\ j$ 是一个极限序数$\}$,

$J_k=\{y^j:\ j$是一个极限序数，$f(y^j,y^{j+1})=t_k\}$,$J^\ell=\{y^j:\ j$是一个极限序数，并且$(\forall i<j)(\exists\alpha)(i<\alpha<j\wedge f(y^{\alpha+1},y^j)=t_\ell)$，但这对任何 $\ell'<\ell\}$.都不成立。

现在显然有 $J'=\cup_kJ_k=\cup_\ell J^\ell$，并且如果 $x\in J_k,z\in J^\ell,x<z$，那么 $x=y^i$，$z=y^j,i<j,i,j$ 是极限序数，并且存在一个 $\alpha,i<\alpha<j$，使得$f(y^{\alpha+1},y^j)=t_\ell$。因此

$$\begin{aligned}f(x,z)&=f(y^i,y^j)=f(y^i,y^{i+1})+f(y^{i+1},y^{\alpha+1})+f(y^{\alpha+1},y^j)\\&=t_k+f(y_{i+1},y_{\alpha+1})+t_\ell=t_k+s+t_\ell\overset{\mathrm{def}}{=}t_k^\ell.\end{aligned}$$

显然，所有要求均已得到满足。

定理 1.3 的证明：记住，如果对于每个 x、$y\in I$、$a<x<y<b$，都存在一个 $z\in J$ 使得 $x<z<y$，那么 $J\subseteqq I$ 在区间 (a,b) 中稠密。容易看出，如果 $J\subseteqq I$ 在区间 (a,b) 中稠密且 $J=\cup_{k=1}^mJ_k(m>1)$，那么存在 k 和 a'、b'，使得 $a<a'<b'<b$、$1\leqq k\leqq m$，并且 J_k 在 (a',b') 中稠密。

定义任意 $a\in I$，$J\subseteqq I$

$$F(a,J)=\{t:t\in T,(\forall x>a)(\exists y\in J)(a<y<x\wedge f(a,y)=t)\}.$$

注意，由于 T 是有限的，对于任意 $a\in I$ 以及任意 $J\subseteqq I$，存在 b、$a<b\in I$，使得：

$$t\in F(a,J)\text{ if and only if there is a }y\in J,a<y<b,f(a,y)=t.$$

我们通过对 $m\leqq n2^n+2$ 进行归纳法，定义区间（a_m，b_m）、在（a_m，b_m）中稠密的集合 J_m，以及（对于 $m>0$）集合 $D_m\subseteqq T$。

对于 $m=0$，设 (a_0,b_0) 是 I 的任意区间，且 $J_0=\{x\in I:\ a_0<x<b_0\}$。假设 (a_m,b_m) J_m 已定义。对于任意 $D\subseteqq T$，令 $J_m(D)=\{a\in J_m:$

$F(a, J_m) = D\}$。显然 $J_m = \cup_{D\subseteqq T} J_m(D)$，并且由于可能的 D 只有有限多个（$\leqq 2^n$），因此存在区间 (a_{m+1}, b_{m+1}) 和 $D_{m+1} \subseteqq T$，使得 $J_m(D_{m+1})$ 在 (a_{m+1}, b_{m+1}) 中稠密，且 $a_m < a_{m+1} < b_{m+1} < b_m$。令 $J_{m+1} = (a_{m+1}, b_{m+1}) \cap J_m(D_{m+1})$。显然 $J_m \supseteqq J_{m+1}$，而 $m > k$ 蕴含 $J_k \supseteqq J_m$，并且 (a_m, b_m) 是 (a_k, b_k) 的子区间。

由于只有 $\leqq 2^n$ 个可能的 D_m，因此存在 $D \subseteqq T$ 和 $0 \leqq m_0 < .. < m_n \leqq n2^n + 1$，使得 $D_{m_i+1} = D$。对 $0 \leqq k \leqq n$，定义 $a^k = a_{m_k}$、$b^k = b_{m_k}$、$J^k = J_{m_k}$。[6]

容易验证，若 $0 \leqq k < l \leqq n$、$x \in J^\ell$，则 $x \in J_{m_\ell} \subseteqq J_{m_{k+1}}$，因此 $F(x、 J_k) = F(x、 J_{m_k}) = D_{m_{k+1}} = D$。显然，$J^0 \supseteqq J^1 \supseteqq \ldots \supseteqq J^n$。

选取 $x_0 \in J^n$。则存在 x_1、$x_0 < x_0 < x_1 < b^n$，使得 $x_0 < y < x_1$，$y \in J^0$ 蕴含 $f(x_0、 y) \in F(x_0、 J^0) = D$。因此，当且仅当存在 $y \in J^{n-1}$、$x_0 < y < x_1$、$f(x_0、 y) = t$时，$t \in D$；当且仅当存在$y \in J_0$、$x_0 < y < x_1$、$f(x_0、 y) = t$时。显然

$$J^n \cap (x_0, x_1) = \cup_{t\in T}\{y : y \in J^n, x_0 < y < x_1, f(x_0, y) = t\}.$$

因此存在 a、b、t_0，使得 $x_0 < a < b < x_1$ 且

$$J^* = \{y : y \in J^n, a < y < b, f(x_0, y) = t_0\}$$

在 (a, b) 中稠密。显然 $t_0 \in D$。

容易验证，对于 $t, s \in D, t + s$ 有定义，且 $\in D$，因此对于$t \in D, m \geqq 1$，$mt \in T$ 有定义。根据 m 进行归纳法可得：$1t = t, (m+1)t = mt + t$。由于 T 有 n 个元素，$1t_0, 2t_0, \ldots, (n+1)t_0$ 不可能两两不同。因此，存在 $i, j, 1 \leqq i < (i + j) \leqq n + 1$，使得 $it_0 = (i + j)t_0$。定义

$$J = \{y : a < y < b, f(x_0, y) = jt_0, y \in J^{n-j+1}\}.$$

我们将证明 J 是所需的集合。

(I) J 在(a, b)中稠密。

假设 $a < a' < b' < b$，我们将找到 $z \in J, a' < z < b'$。由于 J^* 在 (a, b) 中稠密，因此存在 $z^n \in J^* \subseteqq J^n, a' < z^n < b'$。我们通过向下归纳法定义 z^k，其中 $n--j + 1 \leqq k \leqq n$，使得 $z^k \in J^k$，$a' < z^k < b'$。对于 $k = n$，z^k 已定义。假设 z^{k+1} 已定义，那么由于 $z^{k+1} \in J^{k+1}$，可知 $F(z^{k+1}, j^k) = D$。由于 $t_0 \in D$，存在 $z^k \in J^k$，使得 $z^{k+1} < z^k < b'$ 且 $f(z^{k+1}, z^k) = t_0$。显然。

$$x < z^n < z^{n-1} < \ldots < z^{n-j+1},$$

$$f(x_0, z^n) = t_0, \quad f(z^{i+1}, z^i) = t_0.$$

因此 $f(x_0, z^{n-j+1}) = t_0 + \ldots + t_0 = jt_0$，所以 $z^{n-j+1} \in J, a' < z^{n-j+1} < b'$。

[6]事实上，$D_m(T) \supseteqq D_m(T)$，因此我们可以用 $n^2 + 2$替换 $n2^n + 2$。

(II) J 是齐性的。

假设 $a < y < z < b, y, z \in J$。那么 $y \in J^{n-j+1}$。现在通过向下归纳定义 $y^k \in J^k$，其中 $0 \leqq k \leqq i, y \leqq y^k < z$。令 $y^i = y (y^i \in J^i$，因为 $y^i = y \in J^{n-j+1}$，且由于 $i+j \leqq n+1, i \leqq n--j+1$，因此 $J^{n-j+1} \subseteqq J^i)$。如果已定义 y^{k+1}，那么 $F(y^{k+1}, J^k) = D$，因此存在 $y^k \in J^k, y^{k+1} < y^k < z$，使得 $f(y^{k+1}, y^k) = t_0$。由此可得 $x_0 < y = y^i < y^{i-1} < \ldots < y^0 < z$，并且

$$f(y^k, y^{k-1}) = t_0.$$

因此

$$f(y, y^0) = f(y^i, y^0) = it_0.$$

So

$$\begin{aligned} f(y,z) &= f(y,y^0) + f(y^0,z) = it_0 + f(y^0,z) \\ &= (i+j)t_0 + f(y^0,z) = jt_0 + it_0 + f(y^0,z) \\ &= f(x_0,y) + f(y,y^0) + f(y^0,z) = f(x_0,z) = jt_0. \end{aligned}$$

这证明了 J 的齐次性。

结论 1.4 的证明：设 (a,b) J 和 t_0 如 1.3 的证明中所述。设$T = \{t_1, \ldots, t_n\}$。令

$$J_k = \{y : y \in (a,b), t_k \in F(y,J), t_1, \ldots, t_{k-1} \notin F(y,J)\},$$

$$J^\ell = \{y : y \in (a,b), t_\ell \in F'(y,J), t_1, \ldots, t_{\ell-1} \notin F'(y,J)\}$$

其中 F' 的定义与 F 相同，只是针对反向的序。

显然 $(a,b) = \cup_k J_k = \cup_\ell J^\ell$。假设 $x < y, x \in J_k, y \in J_\ell$。那么我们可以找到 x', y' $x < x' < y' \in J$，使得 $f(x,x') = t_k, f(y',y) = t_\ell$。因此

$$f(x,y) = f(x,x') + f(x',y') + f(y',y) = t_k + t_0 + t_\ell \stackrel{\text{def}}{=} t_k^\ell.$$

2. The monadic theory of generalized sums

Feferman 和 Vaught [FV59] 证明了模型的和、积乃至广义乘积的一阶理论，只取决于这些模型的一阶理论。他们的定理还推广到了更一般的乘积（见 Olmann），以及适当的无穷语言（L_α，见 Malitz [Mal71]）。

另一方面，众所周知，对于二阶理论，即使是对和而言，这一点也不成立（当然，对于固定的有限语言，存在一个句子，它在两个模型的和中为真，当且仅当这两个模型同构）。对于模型的单子（二阶）理论，乘积的情形也不成立（存在一个句子，它在两个线性序理论模型的直积中为真，当且仅当这两个序同构）。我们在此注意到，广义和的单子理论只取决于各个加项的单子理论；还注意到已知精化结果的一种推广（参见

Fraiss´e [Fra56]）。我们可以利用埃伦费希特博弈的自然推广来证明这些结果（参见 [Ehr61]）。L¨auchli [L¨au68]将这些定理的某些特例用于弱单子理论。由于证明中没有新意，我们从略。这里只需指出，模型和的一个子集是各个加项子集的并集。 [FV59] 的结果可以直接应用，只需将 M 替换为 $(|M| \cup \underline{P}(M),\ M, \in)$。

记号 2.1。 L 将是一个具有有限个符号的一阶语言，L^M 是相应的单子语言， L（M）是与模型 M相对应的一阶语言， M的论域是 $|M|$。令 x、y、z为个体变量； X、Y、Z为集合变量； a、b、c为元素； P、Q为集合； $\underline{P}$（M）$=\{P:\ P \subseteq |M|\}$。上横线表示这是一个有限序列，例如 $\bar{a}$； ℓ（$\bar{a}$）表示其长度， $\bar{a} = \langle \ldots, a_i, \ldots \rangle_{i<\ell(\bar{a})}$，并令 $\bar{a}$（i） $= a_i$。我们用 $\bar{a} \in A$ 代替 $a_i \in A$ ，用 $\bar{a} \in M$ 代替 $\bar{a} \in |M|$。 K 是 L（K）模型的一个类（L（K）$= L$（M）对任意 $M \in K$）。令

$$K^m = \{(M, \bar{P}) : \bar{P} \in \underline{P}(M)^m\}, K^\infty = \cup_{m<\omega} K^m.$$

令 k, ℓ, m, n, p, q, r 表示自然数。

定义 2.2. 对任意 L-模型 $M, P \in \underline{P}(M)$ $\bar{a} \in |M|$， Φ 一个有限公式集 $\varphi(X_1, \ldots, x_1, \ldots) \in L$、一个自然数 n 以及一个长度为 $\geqq n$ 的 自然数序列 k ，定义

$$t = th^n_{\bar{k}}((M, \bar{P}, \bar{a}), \Phi)$$

按 n 归纳定义：

对于 $n = 0$:

$$t = \{\varphi(X_{\ell_1}, \ldots, x_{j_1}, \ldots) : \varphi(X_1, \ldots, x_1, \ldots) \in \Phi, M \models \varphi[P_{\ell_1}, \ldots, a_{j_1}, \ldots]\}.$$

对于 $n = m + 1$:

$$t = \{th^m_{\bar{k}}(M, \bar{P}, \bar{a}^\frown \bar{b}) : \bar{b} \in |M|^{\bar{k}(m)}\}.$$

定义 2.3. 对任意 L-模型 $M, P \in \underline{P}(M)$、一个有限的 Φ 公式集 $\varphi(X_1, \ldots, x_1 \ldots) \in L$、 n, k（长度为 $\geqq n+1$），按 n归纳定义 $T = Th^n_{\bar{k}}(M, P)$ Φ):

对于 $n = 0$:

$$T = th^1_{\bar{k}}((M, \bar{P}), \Phi).$$

对于 $n = m + 1$:

$$T = \{Th^m_{\bar{k}}((M, \bar{P}^\frown \bar{Q}), \Phi) : \bar{Q} \in \underline{P}(M)^{\bar{k}(n)}\}.$$

(1) 如果 Φ 是原子公式的集合，我们就省略它，并写作 $Th^n_{\bar{k}}(M, P)$。

(2) 我们总是假设 $k(i) \geqq 1$ 对于任意 $i < \ell(k)$ 都成立，并且若$R \in L(M)$ 是 m_R元的，则 $k(0) \geqq m_R$ 。

(3) 若我们将 $i \geqq \ell(k)$ 写作 $k(i)$，则其意为 1；省略 k时，则意为 $\langle \max\{m_R : R \in L(M)\}, 1, \ldots \rangle$。(4) 我们本可以混合定义 2.2 和 2.3，从而得到一个类似但更加精细的定理。

引理 2.4. (A) 对于每个公式 $\psi(\bar{X}) \in L^M(M)$，存在一个 $n$such
，使得从 $Th_{\bar{k}}^n(M,P)$ 中我们可以有效地判断 $M \models \psi[P]$。
(B) 对于每个 L、k、n、$\Phi \subseteq L$ 和 m，存在一个集合 $\Psi = \{\psi_\ell(X)\colon \ell < \ell_0(<\omega)\ \ell(\bar{X}) = m\}(\psi_\ell \in L^M)$，使得对于任意 L-模型 M、N 和 $P \in \underline{P}(M)^m$、$Q \in \underline{P}(N)^m$，以下成立：
(a) $Th_{\bar{k}}^n((N,Q)\ \Phi)$ 可以从 $\{\ell < \ell_0$ 计算得到：$N \models \psi_\ell[Q]\}$。
(b) $Th_{\bar{k}}^n((N,Q)\ \Phi) = Th_{\bar{k}}^n((M,P)\ \Phi)$ 当且仅当对于任意 $\ell < \ell_0$，$M \models \psi_\ell[P] \Leftrightarrow N\psi_\ell[Q]$。

证明：显然。在 (A) 中，只需令 n 为 ψ 的量词深度。

引理 2.5。(A) 对于给定的 L、n、m、k，每个 $Th_{\bar{k}}^n(M,P)$ 都是遗传有限的，并且我们可以计算一个 L-模型的形式上可能的 $Th_{\bar{k}}^n(M,P)$ $\ell(P) = m$。对于 Φ 也同样成立。
(B) 若 $\ell(0) \geqq k(0)$ $1 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n \leqq m$，且对于 $1 \leqq i \leqq n$，$k(i) \leqq \sum_{p_{i-1} \leqq j \leqq p_i} \ell(j)$，那么从 $Th_{\bar{\ell}}^m((M,P)\ \Phi)$ 可以有效地计算出 $Th_{\bar{k}}^n((M,P)\ \Phi)$。
(C) 对于每个 n、k、ℓ，我们都可以计算出 m，使得从 $Th_{\bar{\ell}}^m((M,P)\ \Phi)$ 可以有效地计算出 $Th_{\bar{k}}^n((M,P)\ \Phi)$。
(D) 假设我们对定义 2.3 作如下修改：将范围限制为划分 P，并令 Q 为一个细化 P 的划分，它将每个 P_i 划分为 $2^{\bar{k}(m)}$ 个部分。我们将所得结果称为 $pTh_{\bar{k}}^n((M,\bar{P})\ \Phi)$。那么，从 $pTh_{\bar{k}}^n((M,P)\ \Phi)$ 可以有效地计算出 $Th_{\bar{k}}^n((M,P)\ \Phi)$，反之亦然。
(E) 设给定 K、n、Φ。若对于每个 k，都存在一个 ℓ，使得对于每个 m、M、$N \in K^m$，$Th_{\bar{\ell}}^n(M,\Phi) = Th_{\bar{\ell}}^n(N,\Phi) \Rightarrow Th_{\bar{k}}^n(M,\Phi) = Th_{\bar{k}}^n(N,\Phi)$，那么对于每个 $k+1$，都存在一个 ℓ，使得对于任意 n'、M、$N \in K^m$

$$Th_{\bar{\ell}}^n(M,\Phi) = Th_{\bar{\ell}}^n(N,\Phi) \Rightarrow Th_{\bar{k}}^{n'}(N,\Phi) = Th_{\bar{k}}^{n'}(M,\Phi).$$

注：这与量词消去的平行版本相对应。
(F) 在 (E) 中，如果假设里 ℓ 可以从 k 有效地求得，那么在结论中，ℓ 可以从 m,k 有效地求得。进一步，如果 $\{Th_{\bar{k}}^n(M,\Phi) : M \in K^m\}$ 在 $\bar{k},m$ 中是递归的，那么 $\{Th_{\bar{k}}^p(M,\Phi) : M \in K\}$ 在 p,k 中是递归的。

证明：显然。

下面将有序集的有序和（这是我们主要关注的对象）推广为模型的广义和这一概念。（定义的（1）、（2）、（3）部分是技术性准备。）

定义 2.6。设 L_1、L_2、L_3 为一阶语言，M_i 是一个 L_1-模型（针对 $i \in |N|$），N 是一个 L_2- 模型，我们将定义 L_3- 模型 $M = \sum^{\sigma}_{i\in|N|} M_i$（相对于 σ 的 M_i 的广义和）。[7]

(1) 一个 n-条件 τ是一个三元组 $\langle E, \Phi, \Psi\rangle$，其中：(A) E是 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上的一个等价关系。(B) Φ是一个有限公式集，其形式为 $\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$，其中$j_1, \dots, j_k$是 E-等价的，且 $< n$；并且 $\varphi \in L_1$。(C) Ψ是一个有限公式集，其形式为 $\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$，其中$j_1, \dots, j_k < n, \psi \in L_2$。

(2) 如果 a_0、…、$a_{n-1} \in \bigcup_{i\in|N|} M_i$、$\tau = \langle E$、$\Phi$、$\Psi\rangle$ 是一个 n-条件，$a_\ell \in M_{i(\ell)}$，那么我们称 $\langle a_0$、…、$a_{n-1}\rangle$ 满足 τ，如果：
(A) $i(\ell) = i(m) \Leftrightarrow \ell E m$; (B) $\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in \Phi \Rightarrow M_{i(j_1)} \models \varphi[a_{j_1}, \dots, a_{j_k}]$; (C) $\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in \Psi \Rightarrow N \models \psi[i(j_i) \dots, i(j_k)]$.

(3) 规则 σ is $\langle L_1, L_2, L_3, \sigma^*\rangle$，其中 σ^* 是一个函数，其定义域为 L_3 的谓词集合；若 R 是 L_3 中的一个 n 元谓词，则 $\sigma^*(R)$ 将是一个有限的 n 条件集合。

(4) $M = \sum^{\sigma}_{i\in|N|} M_i$ 是一个 L_3模型，其论域为 $\cup_{i\in|N|}|M_i|$，并且对于每个谓词 $R \in L_3$，$R^M = \{\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ 都满足某个$\tau \in \sigma^*(R)\}$。令 $\Phi(\sigma)$（$\Psi(\sigma)$）表示出现在 $\sigma(R)$、$R \in L_3(\sigma)$和等号中的所有公式 $\varphi_j \in L_1(\sigma)$（$\psi_p \in L_2(\sigma)$）的集合。

注：
(1) 我们采用如下约定：$\sum^{\sigma}_{i\in N}(M_i, \bar{P}^i) = (\sum^{\sigma}_{i\in N} M_i, \cup_{i\in N} \bar{P}^i)$，其中对于 $\bar{P}^i = \langle P^i_1, \dots, P^i_m\rangle, \bigcup_i \bar{P}_i = \langle \bigcup_i P^i_1, \dots, \bigcup_i P^i_m\rangle$。(2) 我们本可以用更一般的方式定义这个和，允许像其他关系一样定义论域和等号。

引理2.7。对于任意 $\sigma, n, m, \bar{k}$，若对于 $\ell = 1, 2, \bar{P}^\ell_1 \in \bar{P}(M^\ell_i)^m$，并且对于每个 $i \in N$,

$$Th^n_{\bar{k}}((M^1_i, \bar{P}^1_i), \Phi(\sigma)) = Th^n_{\bar{k}}((M^2_i, \bar{P}^2_i, \bar{P}^2_i), \Phi(\sigma)),$$

then

$$Th^n_{\bar{k}}(\sum_{i\in N}^{\sigma}(M^1_i, \bar{P}^1_i)) = Th^n_{\bar{k}}(\sum_{i\in N}^{\sigma}(M^2_i, \bar{P}^2_i)),$$

定理 2.8。对于任意 σ, n, m, k，我们可以找到一个 $\bar{r}$，使得：若 $M = \sum^{\sigma}_{i\in N} M_i, t_i = Th^n_{\bar{k}}((M_i, P_i)\ \Phi(\sigma))$，且 $Q_t = \{i \in N\colon\ t_i = t\}, \ell(P_i) = m,$，那么由 $Th^n_{\bar{r}}((N, \dots, Q_t, \dots)\ \Psi(\sigma))$，我们可以有效地算出 $Th^n_{\bar{k}}(M, \bigcup_i P_i)$（它是唯一确定的）。

定义 2.9. (1) 对于一类模型 K

$$Th^n_{\bar{k}}(K, \Phi) = \{Th^n_{\bar{k}}(M, \Phi)\colon\ M \in K\}.$$

[7]当然，我们假设这些 $|M_i|$ 两两不相交。

(2) K 的单子理论是在 K中的每个模型里都为真的单元句集合。(3) 对于任意 $\bar{\sigma}$、 K_1、 K_2, 令 $C\ell^{\bar{\sigma}}(K_1, K_2)$为满足以下条件的最小类 K：(A) $K_1 \subseteqq K$; (B) 如果 $j < \ell(\bar{\sigma})$ $M_i \in K$, 则 $N \in K_2$ $\sum_{i\in|N|}^{\bar{\sigma}(i)} M_i \in K$。

¯推论2.10。设给定 $\bar{\sigma}, n, k, m$。 $L_1(\sigma_i) = L_3(\sigma_i) = L, L_2(\sigma_i) = L_2$; L, L_2是有限的, 并且每个 $\Psi(\sigma_i)$ $\Psi(\sigma_i)$都是原子公式的集合。存在一个 $\bar{r}$, 使得对每个 K_1, K_2, 从 $Th^n_{\bar{r}}(K_2^{\bar{r}(n+1)})$ $Th^n_{\bar{k}}(K_1^m)$可以有效地计算出 $Th^n_{\bar{k}}(K^m)$, 其中 $K = C\ell^{\bar{\sigma}}(K_1, K_2)$（请记住 $K_1^m =$_ _{(M, P): $M \in K_1$, $P \in \underline{P}(M)^m$）（K_1应是 L-模型的一个类, K_2是 L_2-模型的一个类）。

证明: 对于每个 $j < \ell(\bar{\sigma})$, 令 $\bar{r}^j$ 与 $\bar{\sigma}(j)$ $n, \bar{k}, m$ 的关系, 恰如 $\bar{r}$ 与 σ, n, k, m 在定理 2.8 中的关系。现在选取一个 $\bar{r}$, 使得对于每个 $\ell \leqq n, \bar{r}(\ell)$, $\geqq r^j(\ell)$。

¯令 T 为形式上可能的 $Th^n_{\bar{k}}(M, P)$ 的集合, 对于 M 和 L-模型, _$\ell(P) = m$, 并且我们可以定义 $r(n+1) = |T|$。令 $T = \{t(0) \ldots, t(p-1)\}$（因此 $p = |T| = r(n+1)$）。

显然, 根据 $\bar{r}^j$ 2 3 $M = \sum_{i\in N}^{\bar{\sigma}(j)} M_i$ $t_i = Th^n_{\bar{k}}$ M_i $\bar{P}_i$ $Q_\ell = \{i \in N$ $t_i = t$ ℓ $\}$ ℓ $\bar{P}_i$ $= m$ 的定义以及（平凡情形的）. (B), 如果 , (,) : ( ) , ( ) , 那么从 $t = Th^n_{\bar{r}}(N, \ldots, Q_1, \ldots)^{\ell<p}$出发, 我们可以有效地计算出 $Th^n_{\bar{k}}(M, \bigcup_i P_i)$, 并将其记作 $g(t)$。

现在对 ℓ、 $T_\ell \subseteqq T$ 作归纳法定义。

令 $T_0 = Th^n_{\bar{k}}(K^m_\ell)$, 并且如果已定义 T_q, 令 T_{q+1} 为 T_q 与满足以下条件的 $t \in T$ 的集合的并集:

(*) There is a $t^* \in Th^n_{\bar{r}}(K_2^{r(n+1)})$ such that $t = g(t^*)$, and if t^* implies that Q_ℓ is not empty, then $t(\ell) \in T_q$.

注: 显然, 如果 $t^* = Th^n_{\bar{r}}$(N、.....、 Q_ℓ、.....), 那么由 t^* 我们可以计算出 $Th^0_{\bar{r}}$(N、.....、 Q_ℓ、.....), 从而知道 $Q_\ell \neq \varnothing$ 是否成立。

显然 $T_0 \subseteqq T_1 \subseteqq T_2$、 $\ldots \subseteqq T$, 因此由于 $|T| = p$, 对于某个 $q \leqq p$, 有 $T_q = T_{q+1}$。现在令

$$K_* = \{M \in K : \text{ for every } \bar{P} \in (\underline{P}(|M|)^m Th^n_{\bar{k}}(M, \bar{P}) \in T_q\}.$$

显然 $Th^n_{\bar{k}}(k^m_*) \subseteqq T_q$, 并且我们可以有效地找到 T_q。现在, 如果对于 $i \in N$, $N \in K_2$、 $M_i \in K_*$, 并且 $M = \sum_{i\in N}^{\sigma(j)} M_i$, 那么对于任意 $\underline{P} \in \bar{P}(|M|)^m$、 $Th^n_{\bar{k}}(M$、 $P) \in T_{q+1} = T_q$, 根据 T_{q+1}的定义, 以及根据 K 的定义, 有 $M \in K$, 因此 $M \in K_*$。由于显然 $K_1 \subseteqq K_* \subseteqq K$, 根据 $K = C\ell^{\bar{\sigma}}(K_1$、 $K_2)$ 的定义, 必有 $K_* = K$。因此, 只需证明 $Th^n_{\bar{k}}(K^m_*) \supseteqq T_\ell$。（取 $\ell = q$。）这通过对 ℓ 作归纳法来完成。

¯引理 2.11. 如果 M是一个有限模型, 那么对于任意 Φ、 n、 k, 我们都可以根据 M 有效地计算出 $Th^n_{\bar{k}}(M, \Phi)$。

注 2.12. 自然，我们可以问，是否能在不实质改变本节结论的情况下，向单元量词中添加（或将其替换为）其他量词。很容易看出，例如，以下量词是合适的：

(1) $(\exists^f X)$——存在一个有限集 X(2) $(\exists^\lambda X)$——存在一个集合 X，$|X| < \lambda$ (λ 一个正则基数)。在处理线性序的有序和时，还有(3) $(\exists^{wo} X)$——存在一个良序集 X(4) $(\exists_\lambda X)$——存在一个集合 X，其中不存在长度为 λ (λ 一个正则基数)的递增或递减序列。

如果我们加入其中一些量词，那么在 $Th^0_n((M, \bar{P})$ $\Phi)$的定义中，应说明哪些布尔组合 P_ℓ'属于哪些量词的取值范围。例如，如果我们用$(\exists^\lambda X)$替换单子量词，就应将 P限制为基数为 $< \lambda$的集合。

另一种可能的推广是推广到广义乘积。令 $M = \prod^\sigma_{i\in N} M_i$（其中 $L(M_i)$ $= L_1(\sigma)$ $L(N) = L_2(\sigma)$ $L(M) = L_3(\sigma)$）表示：$|M| = \prod_{i\in N} |M_i|$，且如果 f_1, ..., $f_n \in M$，当且仅当 $M \models R[f_1, \ldots, f_n]$ $N \models \psi_R[\ldots, P_\ell, \ldots]$，其中

$$P_\ell = \{i \in N : M_i \models \varphi^R_\ell[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\}$$

（并且 φ_ℓ 是来自 $L_1(\sigma)$ ψ_R 的一阶句子，或者是来自$L_3(\sigma)$的一元句子）。当然，我们使用 $Th^n_{\bar{k}}(N, \underline{P})$ $th^n_{\bar{k}}(M, \bar{a})$。我们所有的定理都很容易推广，但仍然没有找到任何应用。

除非另有说明，我们将自己限制在 $K_{\rm ord}$ 序理论的模型类中（有时带有一元关系，这些关系将被记作，例如（M, P））。 $\sigma = \sigma_{\rm ord}$ 是有序集的有序和，因而被省略。因此， $\Psi(\sigma)$和 $\Phi(\sigma)$是原子公式的集合。对于两个序的和，我们写作 $M_1 + M_2$。序数、实数 R和有理数 Q 都具有其自然序。如果 $M = \sum_{i\in|N|} M_i$ 我们写作 $Th^n_{\bar{k}}(M, P)$ $= \sum_{i\in|N|} Th^n_{\bar{k}}(M_i, P_i)$，其中 $P = \bigcup_i P_i$。令 $T(n, m, k)$为形式上可能的$Th^n_{\bar{k}}(M, P)$ M一个序的 集合， $\ell(P) = m$。

推论 2.13。对于任意 n, m, k，存在 $\bar{r} = \bar{r}(n, m, k)$，使得若 $P_t = \{i \in N$：对于 $t \in T(n, m, k)$，则可从 $Th^n_{\bar{r}}(N, \ldots, P_t, \ldots)$ 有效计算出 $\sum_{i\in N} t_i$。

3. Simple application for decidability

利用第 2 节，我们将在这里证明一些定理，其中大多数是已知的。我们证明有限序、可数序数的理论的可判定性 [BS73] ，并说明可以从 λ 的单子理论有效地计算出 $K = \{\alpha$ 的单子理论： $\alpha < \lambda^+\}$ （这一点已针对$\lambda = \omega$、 $\lambda = \omega_1$ 在 [BS73] 中证明）。我们不打算证明关于可定义性和量词消去的结果。对于有限序，这可以做到，而且该方法与自动机理论中的方法类似。对于 ω、 $\{\alpha :$ $\alpha < \omega_1\}$、 ω_1，这

可以通过利用前面的情形来做到（例如，对于 ω ，利用关于有限序的结果）。我们可以用本节的方法证明 n-后继理论的弱单子理论（仅含 $\exists^f$ ）是可判定的（Doner [Don65] 已证明这一点）。如果我们能以这种方式证明 2-后继理论的单子理论是可判定的，那将非常有趣（Rabin [Rab69]已证明这一点）。

为了运用第1节，我们应当注意

引理3.1。对于任意 $m, k, (N, P)$，着色 $f^n_{\bar{k}}$在 N上是可加的，其中

$$f^n_{\bar{k}}(a,b) = Th^n_{\bar{k}}((N,\bar{P})\restriction[a,b)),$$

其中 $(N,P)\restriction[a,b)$ 是 (N,P) 的子模型，其论域为 $[a,b) = \{x \in N : a \leqq x < b\}$。

证明：由引理2.7得。

下面列出一些显然的断言。

引理3.2。（A）如果对于任意的 n、 k，我们都能有效地计算 $Th^n_{\bar{k}}$（K），那么 K 的单子理论是可判定的；反之亦然。（B）如果 K 的单子理论是可判定的，那么 K' 的单子理论也可判定，其中 K' 是以下序类：（i） K的子模型；（ii）来自 K的序的初始段；（iii）通过给 K中的序添加（删除）首（末）元素而得到的序；（iv）来自 K的序的逆序；

（v）（M、 P） $M \in K$、 $P \in \underline{P}$（M）^{m}。

证明：显然。

定理3.3。有限序类 K_{fin} 的单子理论是可判定的。

证明：设 K_n 为基数为 n的序类；在同构意义下， K_n 只有一个元素，即 n。因此，由引理 2.11，我们可以计算$Th^n_{\bar{k}}$（K_i）。因此，由推论 2.10，对于每个 n、 k，我们都能计算 $Th^n_{\bar{k}}$（K），其中 $K = C\ell$（K_1、 K_2）。但显然， K 就是有限序类。因此，根据3.2（A），证毕。

定理3.4。 ω 的单子理论是可判定的。

证明：我们将对 n进行归纳，同时计算每个 k的 $\{Th^n_{\bar{k}}(\omega, P) : P \in \underline{P}(\omega)^m\}$, m 。

对于 $n = 0$ ，这很容易。

假设我们已经对 $n-1$ 完成了这一点，现在要对 n、 m、 k进行同样的处理。根据归纳假设，我们可以计算每个 ℓ对应的 $Th^n_{\bar{\ell}}(\omega)$，尤其是对于

$\bar{r} = \bar{r}(n,m,k)$（见 2.13）。现在，对于任意 $M = (\omega, P_1, \dots, P_m)$，根据 1.1，我们可以找到一个 f^n_k-齐次集 $\{a_i : i < \omega\}(a_i < a_{i+1})$。所以令

$$t = T^n_k((\omega, \bar{P}) \restriction [0, a_0)),\ s = Th^n_k((\omega, \bar{P}) \restriction [a_i, a_j)) \text{ for } i < j;$$

我们有

$Th^n_k(\omega, \bar{P}) = Th^n_k((\omega, \bar{P}) \restriction [0, a_0)) + \sum_{i<\omega} Th^m_k((\omega, \bar{P}) \restriction [a_i, a_{i+1})) = t + \sum_{i<\omega} s.$

由于已知 $Th^n_r(\omega)$，根据 2.13，我们可以由 s、t 计算出 $Th^{\bar{n}}_k(M, P)$。现在对于任意 t，$s \in Th^n_k(K^m_{\rm fin})$ $s \neq Th^n_k(0, P)$ $P \in \underline{P}(\varnothing)^m$，存在一个 (ω, P)，使得 $Th^{\bar{n}}_k(\omega, P) = t + \sum_{i<\omega} s$。

由于根据 3.3 我们知道 $Th^n_{\bar{k}}(K^m_{\rm fin})$，并且可以轻易确定 $s \in Th^n_{\bar{k}}(K^m_{\rm fin}) - Th^n_{\bar{k}}(\{0\})$ 是否成立，故得证。

定理 3.5。（A）由 λ(λ 一个基数) 的单子理论，我们可以有效地计算出 $K = \{\alpha$ 的单子理论：$\alpha < \lambda^+\}$。

(B) 此外，每个以 $\alpha < \lambda^+$ 为模型的单子句子，也以 $\beta < \lambda^\omega$ 为模型。

(C) (i) 对于每个 $\alpha < \lambda^+$，都存在一个 $\beta < \lambda^{\omega+1} + \lambda^\omega$，使它们具有相同的单子理论。(ii) 若 $\mu \leqq \lambda$，且对于每个正则基数 $\chi \leqq \lambda$，都存在一个 $\chi' \leqq \mu$，使得 χ、χ' 具有相同的单子理论，那么我们可以选择 $\beta < \lambda^\omega \mu + \lambda^\omega$。[8] (iii) 如果我们总能找到 $\chi < \mu$，那么 $\beta < \lambda^\omega \mu$；并且如果 $\lambda = \omega$，$\beta < \lambda^\omega + \lambda^\omega$。[9] (iv) 此外，对于每个 $\alpha < \lambda^+$，都存在 $n < \omega$、λ_1、.....、$\lambda_n \leqq \lambda$，使得 α 的单子理论可递归于 λ_1、.....、λ_n 的单子理论，且 λ_i 是一个正则基数。

（D）一般而言，（B）、（C）中的界限无法改进。

注：B¨uchi [BS73] 已经证明了 $\lambda = \omega$ 的（B）、（C）以及 $\lambda + \omega_1$ 的（B）。

证明：

(A) 定义 $K_1 = K_2 = \{\alpha : \alpha \leqq \lambda\}$；由 3.2(A)(i) 和 3.2(B)，我们可以计算每个 n、k 和 $i = 1$ 对应的 $Th^n_k(K_i)$，2（当然，这是从 λ 的单子理论得出的）。因此，由 2.10 可知，我们可以计算每个满足 $K' = C\ell(K_1, K_2)$ 的 n、k 所对应的 $Th^n_k(K')$。显然，K' 的每个成员都是良序的，且基数为 $\leqq \lambda$。因此，在同构意义下，$K' \subseteq K$。现在只需证明等号成立。若不成立，设 α 为不属于 K' 的最小序数，并且 $\alpha < \lambda^+$。若 α 是后继序数，则 $\alpha - 1 \in K'$；1，$2 \in K'$ 因此 $\alpha = (\alpha - 1) + 1 \in K'$，矛盾。若 α 是极限序数，则其共尾性为 $\leqq \lambda$。令 $\alpha = \sum_{i<i_0} \alpha_i$、$i_0 \leqq \lambda$、$\alpha_i < \alpha$；于是 i_0、$\alpha_i \in K'$，故 $\alpha \in K'$，矛盾。

[8] 事实上，$\beta < M^{\omega+1} + M^\omega$。

[9] 在第一种情况下，$\beta < M$。

(B) 我们先来证明

(*) 对每个 n,k，存在 $\bar{q} = q(n,k) < \omega$，使得若 $\alpha,\beta < \lambda^+$，$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$，且 α,β 可被 λ^q 整除，则 $Th^n_{\bar{k}}(\alpha) = Th^n_{\bar{k}}(\beta)$。对于 $n=0$，这是显然的；对于 n，我们给出证明。根据鸽巢原理，存在 $1 < \ell < p \leqq 2|T(n,0,k)| + 1$，使得 $Th^n_{\bar{k}}(\lambda^\ell) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^p)$。显然，

$$\lambda^{\ell+2} = \sum_{i<\lambda}(\lambda^{\ell+1} + \lambda^\ell).$$

因此

$$\begin{aligned} Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{\ell+2}) &= Th^n_{\bar{k}}[\textstyle\sum_{i<\lambda}(\lambda^{\ell+1}+\lambda^\ell)] = \sum_{i<\lambda} Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{\ell+1}+\lambda^\ell) \\ &\quad \textstyle\sum_{i<\lambda}[Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{\ell+1}) + Th^n_{\bar{k}}(\lambda^\ell)] = \sum_{i<\lambda}[Th^n_{\bar{k}}(\lambda^p) \\ &\quad \textstyle\sum_{i<\lambda} Th^n_{\bar{k}}(\lambda^\ell) = Th^n_{\bar{k}}(\sum_{i<\lambda}\lambda^\ell) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{\ell+1}). \end{aligned}$$

因此，我们通过对 $m, \ell < m < \omega$ 归纳，证明 $Th^n_{\bar{k}}(\lambda^m) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{\ell+1})$；取 $q = q(n,\bar{k}) = \ell + 1$。设 $\alpha,\beta < \lambda^+$ 可被 λ^q 整除，且具有相同的共尾性，我们将证明 $Th^n_{\bar{k}}(\alpha) = Th^n_{\bar{k}}(\beta)$。显然，只需证明 $Th^n_{\bar{k}}(\alpha) = Th^N_{\bar{k}}(\lambda^q\mu)$，其中 $\mu = \mathrm{cf}(\alpha)$。我们对 α 进行归纳来证明，令 $\alpha = \lambda^q\gamma$。若 $\gamma = \gamma_1 + 1$，则对 $\gamma_1 = 0$ 而言显然成立，而对 $\gamma_1 > 0$

$$\begin{aligned} Th^n_{\bar{k}}(\alpha) &= Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q\gamma_1 + \lambda^q) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q\gamma_1) + Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q) \\ &= Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\lambda^q\gamma_1)] + Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{q+2}) \\ &= Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\lambda^q\gamma_1) + \lambda^{q+2}] = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^{q+2}) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q \circ \lambda) \\ &= Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\alpha)]. \end{aligned}$$

若 γ 是极限序数 $\gamma = \sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)} \gamma_i$，$\gamma_i < \gamma$ 是后继，

$$\begin{aligned} Th^n_{\bar{k}}(\alpha) &= Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q(\textstyle\sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)}\gamma_i)] = Th^n_{\bar{k}}(\sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)}\lambda^q\gamma_i) \\ &= \textstyle\sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)} Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q\gamma_i) \\ &= \textstyle\sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)} Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\lambda^q\gamma_i)] \\ &\quad \textstyle\sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)} Th^n_k(\lambda^{q+1}) = \sum_{i<\mathrm{cf}(\gamma)} Th^n_{\bar{k}}(\lambda^q) \\ &= Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\gamma)]. \end{aligned}$$

因此我们已证明 (*)。现在证明 (B)。设 $\alpha < \lambda^+$ 是句子 ψ 的一个模型。根据 2.2(A)、（或 3.2? ），选取 n、k，使得从 $Th^n_{\bar{k}}(\beta)$ 可以知道 $\beta \models \psi$ 是否成立，并令 $q = q(n,k)$，再令 $\alpha = \lambda^q\beta + \gamma, \gamma < \lambda^q$。于是

$$Th^n_{\bar{k}}(\alpha) = Th^n_{\bar{k}}[\lambda^q \circ \mathrm{cf}(\lambda^q\beta) + \gamma], \text{ and } \lambda^q \circ \mathrm{cf}(\lambda^q\beta) + \gamma < \lambda^{q+2}.$$

(C) 将 α 除以 λ^ω，使得 $\alpha = \lambda^\omega\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 < \lambda^\omega$。若 α_1 是后继，则令 α_1' 为 1，否则令其为 $\mathrm{cf}(\alpha_1)$。那么对于每个 $n,\bar{k}$，$\lambda^\omega\alpha_1, \lambda^\omega\alpha_1'$ 都能被 $\lambda^{q(n\bar{k})}$ 整除，且具有相同的共尾性。因此，根据 (B) 的证明，对于每个 n,k，$Th^n_{\bar{k}}$，$(\lambda^\omega\alpha_1) = Th^n_{\bar{k}}(\lambda^\omega\alpha_1')$。因此 $\lambda^\omega\alpha_1 + \alpha_2, \lambda^\omega\alpha_1' + \alpha_2$

具有相同的幺半理论，且 $\lambda^\omega\alpha'_1+\alpha_2 < \lambda^\omega\lambda+\lambda^\omega = \lambda^{\omega+1}+\lambda^\omega$。这证明了 (C)(i)。

如果 $\chi' \leqq \mu$ 与 α'_1 具有相同的单子理论，那么 $\lambda^\omega\alpha_1+\alpha_2$、$\lambda^\omega\alpha'_1+\alpha_2$ 和 $\lambda^\omega\chi'+\alpha_2$（即 $< \lambda^\omega\mu+\lambda^\omega$）具有相同的单子理论。如果 $\chi' < \mu$，显然 $\lambda^\omega\chi'+\alpha_2 < \lambda^\omega\mu$。

如果 $\lambda = \omega$，那么 cf($\lambda^\omega\alpha_1$) $= \omega$ 无论如何，因此 $\alpha = \omega^\omega\alpha_1+\alpha_2$，并且 $\omega^\omega+\alpha_1 < \omega^\omega+\omega^\omega$ 具有相同的单子理论。每个 $\alpha < \lambda^+$ 都可以唯一表示为

$$\alpha = \lambda^\omega\alpha' + \lambda^n\alpha_n + \ldots + \lambda^1\alpha_1 + \alpha_0; \alpha_i < \lambda.$$

α 的单子理论关于 λ、cf($\lambda^\omega\alpha'$) α_n、.....、α_0 是递归的。因此我们可以归纳地证明（C）（iv）。

（D）假设 $\lambda > \omega$，λ 是正则的，并且存在一个句子 ψ，使得 $\alpha \models \psi$ 当且仅当 $\alpha = \lambda$。那么存在句子 ψ_n，使得 $\alpha \models \psi_n$ 当且仅当 $\alpha = \lambda^n$；存在句子 φ_n，使得 $\alpha \models \varphi_n$ 当且仅当 α 可被 λ^n 整除；以及句子 φ，使得 $\alpha \models \varphi$ 当 cf(α) $= \lambda$。于是 $\lambda^{\omega+1}$ 是 $\{\varphi, \varphi_n$ 的一个模型：$n < \omega\}$。如果 α 也是 $\{\varphi, \varphi_n$ 的一个模型：$n < \omega\}$，那么对于每个 n，λ^n 都整除 α，因此 λ^ω 整除 α，所以 $\alpha = \lambda^\omega\beta$。如果 β 是一个后继，cf(α) $= \omega$，但 $\alpha \models \varphi$，所以 β 是一个极限，因而 cf(α) $=$ cf(β)，所以 cf(β) $= \lambda$，于是 $\beta \geqq \lambda$，从而 $\alpha \geqq \lambda^\omega \circ \lambda = \lambda^{\omega+1}$。同样，$\lambda^{\omega+1}+\lambda^n$ 是其单子理论的最小模型。

引理 3.6. (A) 在 3.5(A) 中，只需知道基数 $\leqq \lambda\}$ 的序的单子理论，其中 $\{\mu : \mu$。因此，如果 λ 是奇异的，只需知道 $\{\alpha : \alpha < \lambda\}$ 的序的单子理论。(

(B) 对每个句子 ψ，(1) 存在一个句子 φ（均属于序的单子理论），使得 $\alpha \models \varphi$ 当且仅当 α 是极限且 cf(α) $\models \psi$；(2) 存在一个句子刻画满足 ψ 的最小序数；(3) 对每个 $n < \omega$，存在 φ_n，使得 $\alpha \models \varphi_n$ 当且仅当 φ 是满足 ψ 的第 n^{th} 个正则基数。

(C) 存在单元句 φ_n，使得 $\alpha \models \varphi_n$ 当且仅当 $\alpha = \omega_n$。如果 $V = L$，则存在单元句 φ^1_n，使得 $\alpha \models \varphi^1_n$ 当且仅当 α 是弱紧基数中的第 n^{th} 个。

证明：

(A) 由 3.5(C)(iv) 立即得出。(B) (a) 设 φ 表示不存在最大元，并且对于任意无界 P，存在一个无界的 $Q \subseteq P$，满足 ψ（若 cf(α) $\models \neg\psi$，我们可以取 Q 为序型为 cf(α) 的集合；因此 $\alpha \models \varphi$。若 cf(α) $\models \neg\psi$，令 P 为 α 的一个子集，其序型为 cf(α)；因此，任意无界的 $Q \subseteq P$ 的序型均为 cf(α)，所以 $\alpha \models \neg\varphi$）。(b) 立即得出。

(c) 我们使用 (1) 和 (2) 归纳地定义 φ_n。令 φ_0 表示 α 是其共尾性满足 ψ 的第一个序数。令 φ_{n+1} 表示α 是其共尾性满足 $\psi\wedge\neg\varphi_0\wedge\ldots\wedge\neg\varphi_n$ 的第一个序数。(C) 对于 φ_n，使用 (B)(3) 来 ψ sating α 是一个无限序数。对于 φ_n^1，使用 (B)(3) 和 Jensen 的定理 0.1。

4. The monadic theory of well-orderings

¯若 $a\in(M,P)$，则

$$th(a,\bar{P})=\{x\in X_i:a\in P_i\}\cup\{x\notin X_i:a\notin P_i\}$$

（因此它是公式的集合）。

令 D_α 表示由 α 的闭无界子集生成的滤子，cf(α) $>\omega$。

¯引理 4.1。如果 $\alpha>\omega$ 的共尾性，则对于每个 $P\in\underline{P}(\alpha)^m$，存在 J 的一个闭无界子集 α，使得：对于每个 $\beta<\alpha$，所有模型

$$\{(\alpha,\bar{P})\restriction[\beta,\gamma):\gamma\in J,\mathrm{cf}(\gamma)=\omega,\gamma>\beta\}$$

具有相同的单子理论。

注：B¨uchi [BS73, 6.1,p.110] 用另一种方法证明了 $\alpha=\omega_1$的引理 4.1。

¯证明：对于每个 n，根据 1.1、3.1，存在一个齐性的无界 $I_k^n\subseteqq\alpha$，其着色为f_k^n，定义在(α,P)上，因此存在t_k^n，使得对于每个 $\beta<\gamma\in I_k^n$，$Th_k^n((\alpha,P)\restriction[\beta,\gamma))=t_k^n$。令$J_k^n$为$I_k^n$的聚点集合，并令$J=\bigcap_{n,\ k}J_k^n$。显然，$J$是 α的一个闭无界子集。

令 $\beta<\alpha$，并令β_k^n为I_k^n中第一个 $>\beta$序数。那么对于任意 $\gamma\in J$，$\gamma>\beta$，cf(γ) $=\omega$，并且对于每个 n，k，我们都能找到 $\gamma_\ell\in I_k^n$，$\gamma_\ell<\gamma_{\ell+1}$，$\lim_{\ell\to\omega}\gamma_\ell=\gamma$ 和 $\gamma_0=\beta_k^n$。因此

$$\begin{aligned}Th_k^n((\alpha,\bar{P})\restriction[\beta,\gamma)) &= Th_k^n((\alpha,\bar{P})\restriction[\beta,\beta_k^n))+\textstyle\sum_{\ell<\omega}Th_k^n((\alpha,\bar{P})\restriction[\gamma_\ell,\gamma_{\ell+1}))\\ &= Th_k^n((\alpha,\bar{P})\restriction[\beta,\beta_k^n))+\textstyle\sum_{\ell<\omega}t_k^n.\end{aligned}$$

¯因此，$Th_k^n((\alpha,P)\restriction[\beta,\gamma)$ 不依赖于特定的 γ。

¯定义 4.2。对于 $\beta<\alpha,\alpha$，若其为共尾性为 $>\omega$ 的极限序数，则 $ATh_k^n(\beta,(\alpha,P))$ 为 $Th_k^n((\alpha,P)\restriction[\beta,\gamma))$，对每个 $\gamma\in J,\gamma>\beta$，cf(γ) $=\omega$ 都成立；其中 J 来自引理 4.1。

注：由于 D_α 是一个滤子，因此此定义不依赖于 J 的选择。

¯定义 4.3。我们定义 $WTh_k^n(\alpha,P)$:

(1) 如果 α 是后继或具有共尾性 ω，则它是 $\varnothing$,

(2) 否则，我们对 n按归纳法定义它：

for $n=0$: $WTh^n_{\bar k}(\alpha,\bar P)=\{t:\{\beta<\alpha: th(\beta,\bar P)=t\}$ is a stationary subset of $\alpha\}$,

对于 $n+1$：令 $WTh^{n+1}_{\bar k}(\alpha,\bar P)=\{\langle S_1(\bar Q)\ S_2(\bar Q)\rangle:\ \bar Q\in \underline{P}(\alpha)^{\bar k(n+1)}\}$

其中

$S_1(Q)=WTh^n_{\bar k}(\alpha,P,Q)$

$S_2(Q)=\{\langle t,s\rangle:$ $\{\beta<\alpha:\ WTh^n_{\bar k}((\alpha,P,Q)\restriction\beta)=t, th(\beta,P^\frown Q)=s\}$是 $\alpha\}$的平稳子集。

注：显然，如果我们将 (α,P) 替换为一个论域是 α 的闭无界子集的子模型，那么(α,P) 不会改变。当然，$WTh^n_{\bar k}(M)$ 对每个良序模型都有良好定义。

定义 4.4。令 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega, M=\alpha,P)$，并定义模型 $g^n_{\bar k}(M)=(\alpha,g^n_{\bar k}(P))$。

Let

$$(g^n_{\bar k}(\bar P))_s=\{\beta<\alpha: s=ATh^n_{\bar k}(\beta,M)\}$$

以及（当 $m=\ell(P)$ 时）

$$g^n_{\bar k}(\bar P)=\langle\ldots,(g^n_{\bar k}(\bar P))_s,\ldots\rangle_{s\in T(n,m,\bar k)}.$$

注：

(1) 在 $g^n_{\bar k}(P)$ 中，我们不恰当地省略了 α，但不会造成混淆。

(2) 请记住，$T(n,m,k)$ 是形式上可能的 $Th^n_{\bar k}(M,P)$ $\ell(P)=m$ 的集合。

引理 4.5。（A）$g^n_{\bar k}(P)$ 是 α 的一个划分。

（B）$g^n_{\bar k}(P^\frown Q)$ 是 $g^n_{\bar k}(P)$ 的一个细化，并且我们可以有效地关联各个部分。（C） $g^{n+1}_{\bar k}(\bar P)$ 是 $g^n_{\bar k}(\bar P)$ 的一个细化，并且我们可以有效地关联各个部分。（D）引理 2.5 关于 Th,pTh 的平行版本，同样适用于 $WTh,pWTh$。

证明：显然。

定理 4.6。对于每个 n,m,k，我们都可以有效地求出 $\bar r=\bar r_1(n,m,k)$，使得：若 $\mathrm{cf}(\alpha^i)>\omega, M_i=(\alpha^i,\bar P^i)$ $\ell(\bar P^i)=m$ 对于 $i=1,2$ 成立，且 $ATh^n_{\bar k}(0,M_1)=ATh^n_{\bar k}(0,M_2)$，并且 $WTh^n_{\bar r}(g^n_{\bar k}(M_1))=WTh^n_{\bar r}(g^n_{\bar k}(M_2))$，那么 $Th^n_{\bar k}(M_1)=Th^n_{\bar k}(M_2)$。

证明：我们对 n 使用归纳法进行证明。

对于 $n=0$，很容易验证 $Th^n_{\bar k}(M_i)=ATh^n_{\bar k}(0,M_i)$，因此该定理显然成立。

假设我们已经证明了 n 的定理，现在要证明 $n+1$ 的定理。假设 $\bar Q^1\in \underline{P}(\alpha^1)^{\bar k(n+1)}$，我们将求出 $\bar Q^2\in \underline{P}(\alpha^2)^{\bar k(n+1)}$，使得 $Th^n_{\bar k}(\alpha^1,\bar P^1,\bar Q^1)=Th^n_{\bar k}(\alpha^2,\bar P^2,\bar Q^2)$；这就是假设中的对称性

这就足够了。令 $g^n_{\bar{k}}(\bar{P}^1{}^\frown\bar{Q}^1) = \bar{Q}^{*1}, g^{n+1}_{\bar{k}}(\bar{P}^1) = \bar{P}^{*1}, g^{n+1}_{\bar{k}}(\bar{P}^2) = \bar{P}^{*2}$。定义 $\bar{r}(n+1) = \ell(g^n_{\bar{k}}(\bar{P}^1{}^\frown\bar{Q}^{-1})) = \ell(\bar{Q}^{*1})$ 和 $\bar{r}\restriction(n+1) = r_1(n, m+\ell(\bar{P}^1)\ \bar{k})$。

根据假设和定义 4.3，存在 $\bar{Q}^{*2} \in \underline{P}(\alpha^2)^{\bar{k}(n+1)}$，使得（对于我们的 n、$\bar{r}$ 和 α^2、$\bar{P}^{*2}$；α^1、$\bar{P}^{*1}$），$S_\ell(\bar{Q}^{*1}) = S_\ell(\bar{Q}^{*2})$ 对于 $\ell = 1, 2$。（记号并不准确，但应该是清楚的。）因此，对于 $\ell = 1$，我们得到$WTh^n_{\bar{r}}(\alpha^1, \bar{P}^{*1}, \bar{Q}^{*1}) = WTh^n_{\bar{r}}(\alpha^2, \bar{P}^{*2}, \bar{Q}^{*2})$，且不失一般性地有$0 \in Q^{*1}_s \leftrightarrow 0 \in Q^{*2}_s$。（从现在起，我们可以用 $\bar{r}\restriction(n+1)$ 替换 $\bar{r}$。）因此，根据引理 4.3，对于 $\ell = 1, 2$，$\bar{Q}^{*\ell}$ 是 α^ℓ 的一个细化 $\bar{P}^{*\ell}$ 的划分，因此对于每个$\beta < \alpha^\ell$，存在唯一的 $s_\ell(\beta)$，使得 $\beta \in Q^{*\ell}_{s_\ell(\beta)}$。

现在，对于 $\ell = 1, 2$，选择 α^ℓ 的一个闭无界子集 J_ℓ，使得：

(0) J_ℓ 中不是 J_ℓ 的聚点的每个成员，都具有 ω 的共尾性，(1) 对任意 s，如果 $Q^{*\ell}_s$ 不是 α^ℓ 的平稳子集，则 $Q^*_s \cap J_\ell = \varnothing$，(2) 如果 $\beta < \gamma < \alpha^\ell$；$\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$ 则$Th^{n+1}_{\bar{k}}((\alpha^\ell, \bar{P}^\ell)\restriction[\beta,\gamma)) = ATh^{n+1}_{\bar{k}}(\beta, (\alpha^\ell, \bar{P}^\ell))$（使用引理 4.1），(3) 对每个 $\gamma \in J_\ell$，$\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$，如果 $Q^{*\ell}_s \cap J_\ell \neq \varnothing$，$\beta \in J_\ell$则存在 $\gamma \in J_\ell, \gamma > \beta, s_\ell(\gamma) = s$ 使得 $\{\xi \in J_\ell : \beta \leqq \xi \leqq \gamma\}$ 是有限的，(5) 对任意 s, t, ℓ 如果 $\{\beta < \alpha^\ell : Th^{n+1}_{\bar{k}}((\alpha^\ell, \bar{P}^\ell)\restriction[0,\gamma)), ATh^{n+1}_{\bar{k}}(0, (\alpha^\ell, \bar{P}^\ell)), WTh^n_{\bar{r}}(\alpha^\ell, \bar{Q}^{*\ell})\restriction\beta)\ s = Th^{n+1}_{\bar{k}}(\beta, \bar{Q}^{*\ell})\}$ 不是 J_ℓ 的平稳子集，则它与 J_ℓ 不相交。(4)

注：注意，(5)只是对(1)的加强。

现在我们分步定义 $\bar{Q}^2$。也就是说，对于每个 $\beta < \gamma \in J_2 \cup \{0\}$，如果 γ 是 J_2 中 β 的后继，我们定义 $\bar{Q}^2\restriction[\beta,\gamma)$，使得

$$s_2(\beta) = Th^n_{\bar{k}}((\alpha^2, \bar{P}^2{}^\frown\bar{Q}^2)\restriction[\beta,\gamma)).$$

根据 $s_2(\beta)\beta \in Q^{*2}_{s_\ell(\beta)}$的定义，这是可行的，因此

$$s_i(\beta) \in ATh^{n+1}_{\bar{k}}(\beta, (\alpha^2, \bar{P}^2)).$$

现在我们证明

(*) if $\beta < \gamma \in J_2 \cup \{0\}, \mathrm{cf}(\gamma) = \omega$, then

$$s_2(\beta) = Th^n_{\bar{k}}((\alpha^2, \bar{P}^2, \bar{Q}^2)\restriction[\beta,\gamma)).$$

我们对所有 β，通过关于 γ 的归纳法证明它。

(i) 根据 (0)，第一个 $\gamma > \beta_1, \gamma \in J_2$ 的共尾性为 ω，并且根据 $\bar{Q}^2$ 的定义，满足 $*$。(ii) 设 $\beta < \xi < \gamma, \xi \in J_2$，对于任意 $\zeta \in J_2, \xi < \zeta < \gamma$，其共尾性为 ω。那么根据归纳假设 $Th^n_{\bar{k}}((\alpha^2, \bar{P}_2, \bar{Q}^2)\restriction[\beta,\xi)) = s_2(\beta)$，并且

$$Th^n_{\bar{k}}((\alpha^2, \bar{P}^2, \bar{Q}^2)\restriction[\xi,\gamma)) = s(\xi).$$

现在我们应证明 $s_2(\beta) + s_2(\xi) = s_2(\beta)$。因此，只需找到 $\beta' < \xi' < \gamma' \in J_1, s_1(\beta') = s_2(\beta)$，使得 $\mathrm{cf}(\xi') = \omega = \mathrm{cf}(\gamma')$ $s_1(\xi') = s_2(\xi')$；根据 α^2 的定义，$Q^{*1}_{s_2(\beta)}$ 是 α^1 的一个平稳子集，因此存在某个 $\beta' \in J_1, \beta' \in Q^{*1}_{s_2(\beta)}$，从而 $s_2(\beta') = s_2(\beta)$。由于 $\xi \in J_2$，

$$\{\zeta \in Q^{*2}_{s_2(\xi)} : WTh^n_{\bar r}(\alpha^2, \bar P^{*2}, \bar Q^{*2}) = \varnothing\}$$

是平稳的，因此我们可以找到 $\xi' \in J_1, ch(\xi') = \omega, s_2(xi') = s_2(\xi)$】【。

(iii) 如果 γ 是 J_2 的聚点，则证明与 (ii) 的证明类似。选取 ξ_m、$m < \omega$、$\beta < \xi_m < \xi_{m+1} < \gamma$、$\lim_m \xi_m = \gamma$、$\mathrm{cf}(\xi_m) = \omega$，以及 $s_2(\xi_m) = s_2(\xi_{m+1})$（使用 (4)）。于是

$$\begin{aligned} Th^n_{\bar k}(\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2){\restriction}[\beta, \gamma)) &= Th^n_{\bar k}((\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2){\restriction}[\beta, \xi^0)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{m<\omega} Th^n_{\bar k}((\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2){\restriction}[\xi_m, \xi_{m+1})) \\ &= s_2(\beta) + \textstyle\sum_{m<\omega} s_2(\xi_0). \end{aligned}$$

我们应证明这个和为 $s_2(\beta)$，这可按照 (ii) 中的方法完成。

(iv) 在 J_2 中，ξ 的后继是 $\xi \in J$、$\beta < \xi < \gamma$、γ，并且 $\mathrm{cf}(\xi) > \omega$。如前所述，我们可以找到 $\beta' < \xi' < \gamma' \in J_1, s_1(\beta') = s_2(\beta)$ $WTh^n_{\bar r}((\alpha^1, \bar P^{1*}){\restriction}\xi') = WTh^n_{\bar r}((\alpha^2, \bar P^{*2}){\restriction}\xi)$ $s_1(\xi') = s_2(\xi)$, 参见 $(\xi') > \omega$，$\mathrm{cf}(\gamma') = \omega$。因此显然

$$Th^n_{\bar k}((\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2){\restriction}[\xi, \gamma)) = s_2(\xi) = s_2(\xi') = Th^n_{\bar k}((\alpha^1, \bar P^2.\bar Q^1){\restriction}[\xi', \gamma')).$$

现在也

$$Th^n_k((\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2){\restriction}[\beta, \xi)) = Th^n_{\bar k}((\alpha^1, \bar P^1, \bar Q^1){\restriction}[\beta', \xi'))$$

根据关于 n 和 γ 的归纳假设。

因此我们已经证明了 (*) 和 $g^n_{\bar k}((\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2)) = (\alpha^2, \bar Q^{*2})$.

现在根据关于 n 的归纳假设，可以推出 $Th^n_{\bar k}(\alpha^1, \bar P^1, \bar Q^1) = Th^n_{\bar k}(\alpha^2, \bar P^2, \bar Q^2)$.

定理 4.7. 如果 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$,

$$t_1 = WTh^n_r(g^n_{\bar k}(\bar P)), t_2 = ATh^n_{\bar k}(0, (\alpha, \bar P)),\ \bar r = \bar r_1(n, \ell(\bar P), \bar k),$$

那么我们可以有效地计算 $Th^n_{\bar k}(\alpha, P)$，形式为 t_1, t_2。

证明：证明过程与 4.4 的类似。

结论 4.8。如果 λ 是一个正则基数，并且我们知道 $ATh^n_{\bar k}(0, \lambda)$ $WTh^n_{\bar r}(\lambda)$、($\bar r = r_1(n, 0, k)$)，那么我们可以计算 $Th^n_{\bar k}(\lambda)$。

引理 4.9. 若 λ 是正则基数 $> \omega, \bar r = r(n, 0, k)$，那么令 $T_1 = \{Th^n_{\bar r}(\mu) : \omega < \mu < \lambda, \mu$ 为正则基数 $\}, T_2 = \{Th^n_{\bar r}(\alpha) : \alpha < \lambda\}$，我们可以从 T_1 有效地计算出 $ATh^n_{\bar k}(0, \lambda)$；并且可以从 T_2 有效地计算出 T_1。

¯证明：令 $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$，若 $t_i=Th^n_r(\mu)$，则令 $t'_i=Th^n_{\bar{k}}(\mu^q)$ $q=q(n,k)$，（我们可以有效地计算它：定义见 3.5(B) 的证明中_$q(n,k)$ 的定义），并令 $t=t'_1+\ldots+t'_\ell$，那么

$$\sum_{m<\omega} t = t\omega = ATh^n_{\bar{k}}(0,\lambda).^{10}$$

结论 4.10. 设 λ 是一个正则基数。如果给定 $\{\alpha$:_$\alpha<\lambda\}$ 的单子理论，以及 $\{WTh^n_{\bar{k}}(\lambda): n,k\}$，那么我们就能有效地计算出 λ 的单子理论。

引理 4.11. 对于正则的 $\lambda,\{WTh^n(\lambda): n<\omega\}$，以及 $M^\lambda=(\underline{P}(\lambda)/D_\lambda,\cup,\cap,-,\varnothing,1,\ldots,R^\lambda_t,\ldots)$ 的一阶理论，它们彼此递归，其中 $R^\lambda_t(P,\bar{Q})$ 成立当且仅当

$$\{\beta<\lambda: \beta\in P，且对于某个\ n,t=WTh^n((\lambda,\bar{Q})\restriction\beta)\}\neq\varnothing(\mathrm{mod}\ D_\lambda).$$

注：请注意，对于每个 t，至多存在一个可能的 n。

证明：显然，与引理 2.4 的证明类似。

结论 4.12. 如果 $\{\alpha:\alpha<\lambda\}$ 的单子理论和 M^λ 的一阶理论都是可判定的，那么 λ 的单子理论也可判定。

利用 4.12，我们可以尝试对 λ 使用归纳法，证明 λ 的单子理论的可判定性。

对于 $\lambda=\omega$，根据 3.4，我们知道这一点。

对于 $\lambda=\omega_1$，$R^{\omega_1}_t$ 都是平凡的，（因为每个 $\beta<\omega_1$ 都是后继，或者 $\mathrm{cf}(\beta)=\aleph_0$，因此根据定义 4.4(1)，$R^{\aleph_1}_t(P,\bar{Q})$ 成立当且仅当 $t=\varnothing$）。因此，只需证明 $(\underline{P}(\omega_1)/D_{\omega_1},\cap,\cup,-,\varnothing,1)$ 的可判定性。但根据乌拉姆 [Ula30]，这是一个无原子布尔代数，因此其理论是可判定的。由此我们重新证明了 B¨uchi [BS73] 的定理。

结论 4.13。ω_1 的单子理论是可判定的。

现在我们可以继续讨论 $\lambda=\omega_2$。仔细考察_ω_1的证明，可以看出，$WTh^n_{\bar{k}}(\omega_1,P)$可以由布尔代数中原子的集合计算得出，该布尔代数由 P_i 生成，而这些原子都是 ω_1的平稳子集；并且我们可以用任何共尾性为 ω_1的序数替换 ω_1。因此，所有$R^{\omega_2}_t$都可以由函数 F/D_{ω_2}定义，

$$F(I)=\{\alpha<\omega_2:\mathrm{cf}(\alpha)=\omega_1,\alpha\backslash I\cap\omega_2\notin D_\alpha\}.$$

结论 4.14。以下一阶理论

$$M^{\omega_2}_1=(\underline{P}(\omega_2)/D_{\omega_2},\cap,\cup,-,\varnothing,1,F/D_{\omega_2})$$

是可判定的，当且仅当 ω_2 的单子理论是可判定的。

注意到 $F(I\cup J)=F(I)\cup F(J)$，并且对于 $M^{\omega_2}_1$而言，要拥有一个可判定理论，只需它具有量词消去性质。为此，只需满足

[10]第二个短语由 3.6(3) 立即得出。

(*) 对任意平稳 $A \subseteq \{\alpha < \omega_2 : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ 和 B, C 使得$F(A) = B \cup C$ 存在平稳的 A'、B'、$A = A' \cup B'$、$A' \cap B' = \emptyset$, $F(A') = A$(模D_{ω_2}), 以及 $F(B') = B$(模D_{ω_2})。

猜想 4.15. (*) 与 ZFC 一致。

5. From orders to uniform orders

有序集 N 上的等价关系 E 是凸的，当 xEy, $x < z < y \in N$ 时，推出 xEy，也就是说，每个等价类都是凸的。在 $N/E = \{\alpha/E$ 上：定义了一个自然序。如果 J 是模型(M, P)的凸子集，那么 $th(J, P)$ 是 $\langle \ell, s_1, s_2 \rangle$，使得如果$J, s_2 = 1$ ($s_1 = 1$)中没有最后（第一个）元素，如果 b是最后（第一个）元素，则 $s_2 = th(b, P)$（$s_1 = th(b, P)$）（定义见第 4 节开头），并且 $\ell = \min(|J|, 2)$。

定义 5.1。(1) $\kappa(M)$ 是首个基数 κ，使得 κ和 κ^* 均不能嵌入 M。(2) $\kappa(K)$ 是 l.u.b. $\{\kappa(M) : M \in K\}$。

定义 5.2。我们对每个 n、k定义类 $U^n_{\bar{k}}$以及 $UTh^n_{\bar{k}}((M, P))$，用于 $M \in U^n_{\bar{k}}$

(1) $U^n_{\bar{k}} = \{(M, P) :$ M是一个稠密序，没有首元也没有最大元，并且存在 t_0 和一个稠密的 $I \subseteq |M|$，使得对每个 $a < b \in I$:

$$t_0 = Th^n_{\bar{k}}((M, \bar{P}) \restriction (a, b)) \text{ and } th(a, \bar{P}) = th(b, \bar{P})\}.$$

现在我们通过对 n作归纳法来定义 $UTh^n_{\bar{k}}(M, P)$。

(2) $UTh^0_{\bar{k}}(M, \bar{P}) = Th^0_{\bar{k}}(M, \bar{P})$。(3) $UTh^{n+1}_{\bar{k}}(M, \bar{P}) = \langle S_1, S_2, \mathrm{com} \rangle$ 其中 (A) $S_1 = \{UTh^n_{\bar{k}}(M, \bar{P}, \bar{Q}) : \bar{Q} \in \underline{P}(M)^{\bar{k}(n+1)}, (M, \bar{P}, \bar{Q}) \in U^n_{\bar{k}}\}$, (B) 在定义 S_2之前，我们先作一些约定：(α) $T_1(T_2)$ 是形式上可能的 $th(J, \bar{P}^1)$ $J \neq \emptyset$ 的集合，而 $\ell(\bar{P}^1) = \ell(\bar{P}), (\ell(\bar{P}^1) = \ell(\bar{P}) + \bar{k}(n+1))$; ($\beta$) $T_3 = \{\langle \ell, s_1, t, s_2 \rangle : \langle \ell, s_1, s_2 \rangle \in T_2$, $t \in T(n, \ell(P) + k(n+1)\ k)$ 并且 $\ell = 1$ 当且仅当 t 是空模型的“理论”}; (γ) 若 $\langle \ell, s_1, s_2 \rangle \in T_1, \langle \ell', s'_1, t, s'_2 \rangle \in T_3$，则 $\langle \ell, s_1, s_2 \rangle \leqq \langle \ell', s'_1, t, s'_2 \rangle$，条件为：$\ell = \ell'$ 和 $s_1 = 1 \Leftrightarrow s'_1 = 1, s_2 = 1 \Leftrightarrow s'_2 = 1$ 以及$s_1 \neq 1 \to s_1 \subseteq s'_1, s_2 \neq 1 \to s_2 \subseteq s'_2$; ($\delta$) 最后，令 $\bar{r} = \bar{r}(n, \ell(P)\ k)$ 取自 2.13，$S_2 = \{UTh^n_{\bar{r}}(M/E, P^*, Q^*) :$ E 是 $|M|$ 上的一个非平凡凸等价关系，$(M/E, P^*, Q^*) \in U^n_{\bar{r}}, P^* = \langle \ldots, P^*_t, \ldots \rangle_{t \in T_1}$，其中 $P^*_t = \{a/E : a \in |M|, th(a/E, P) = t\}$，并且 $Q^* = \langle \ldots, Q^*_t, \ldots \rangle_{t \in T_3}$ 是 $|M|/E$ 的一个分划，它细化 P^*，且 $\emptyset \neq Q^*_{t(1)} \subseteq P^*_t$ 蕴含 $t(1) \leqq t\}$。

(C) 当 M 是一个完备序时，Com 为 $+$，并且 $--$ 否则。

引理 5.3。 (A) 从 $Th_{\bar{k}}^{n+2}(M,\bar{P})$ 我们可以检查 $(M,\bar{P}) \in U_{\bar{k}}^{n}$并计算 $UTh_{\bar{k}}^{n}(M,P)$。 (B) 2.3 的平行版本也成立。

引理 5.4. 对于每个稠密的 $N \in K, \|N\| > 1, n, k$，都存在 N 的一个凸子模型 M，它属于 $U_{\bar{k}}^{n}, \|M\| > 2$。
证明：根据定理 1.3 和 2.7

引理 5.5. 假设 N 是一个稠密序， $\kappa(N) \leqq \aleph_1$； $I \subseteqq |N|$ 是一个稠密子集，并且对于每个 $a < b \in I$， $t_0 = Th_{\bar{k}}^{n}((N,P)\restriction[a,b))$。那么存在 t_1 使得

(1) 对于每个 $a < b \in |N|, t_1 = Th_{\bar{k}}^{n}((N,P)\restriction(a,b))$。（2）此外，对于每个没有最小元也没有最大元的凸 $J \subseteqq |N|$， $t_1 = Th_{\bar{k}}^{n}((N,P)\restriction J)$】【。

证明：显然，只需证明 (2)。取 $a_0 \in J \cap I$。现在定义$a_n, 0 < n < \omega$，使得 $a_n \in J \cap I, a_n < a_{n+1}$，并且 $\{a_n : n < \omega\}$在 J 中无界（这是可能的，因为 $\kappa(N) \leqq \aleph_1$）。现在类似地定义$a_n \in J \cap I, n$，取一个负整数，使得 $a_{n-1} < a_n < a_0$ 且 $\{a_n : n$ 是一个负整数，$\}$ 在 J 中向下无界。

因此，令 Z 为整数，

$$Th_{\bar{k}}^{n}((N,\bar{P})\restriction J) = \sum_{n\in Z} Th_{\bar{k}}^{n}((N,\bar{P})\restriction[a_n,a_{n+1})) = \sum_{n\in Z} t_0 \stackrel{def}{=} t_1.$$

定理 5.6。设 M 是一个序， $\kappa(M) \leqq \aleph_1$。

(A) 已知 t 且 $t = UTh_{\bar{k}}^{n}(M,P)$， $(M,P) \in U_{\bar{k}}^{n}$，我们可以有效地计算 $F(t) = Th_{\bar{k}}^{n}(M,P)$。(B) 如果 $(M^i, barP^i) \in U_{\bar{k}}^{n}$ 对于 $i = 1$、2，且 $UTh_{\bar{k}}^{n}(M^1,\bar{P}^1) = UTh_{\bar{k}}^{n}(M^2,\bar{P}^2)$，那么 $Th_{\bar{k}}^{n}(M^1,\bar{P}^1) = Th_{\bar{k}}^{n}(M^2,\bar{P}^2)$。

证明：显然，(A) 蕴含 (B)。因此，我们对 n 使用归纳法来证明 (A)。

对于 $n = 0$，这是显然的。

假设我们已经证明了定理对 n 成立，现在要证明它对 $n+1$ 成立。设 $UTh_{\bar{k}}^{n+1}(M,\bar{P}) = \langle S_1, S_2, \mathsf{com}\rangle$。我们应当找到

$$T = \{Th_{\bar{k}}^{n}(M,\bar{P},\bar{Q}) : \bar{Q} \in \underline{P}(M)^{\bar{k}(n+1)}\}.$$

如果 $t \in S_1$，那么对某个 $\bar{Q} \in \underline{P}(M)^{\bar{k}(n+1)}$，有 $(M,\bar{P},\bar{Q}) \in U_{\bar{k}}^{n}$，并且 $t = UTh_{\bar{k}}^{n}(M,P,Q)$，因此，根据归纳假设， $F(t) = Th_{\bar{k}}^{n}(M,P,Q)$，所以 $F(t) \in T$。由此可得 $T' = \{F(t) : T \in S_1\} \subseteqq T$。

现在，如果 $t^* \in S_2$，那么在 M 上存在一个凸等价关系 E，使得 $t^* = UTh_{\bar{r}}^{n}(M/E, P^*, Q^*)$，其中满足 S_2 的条件。如果$Q^*_{\langle \ell,\ s_1,\ t,\ s_2\rangle} \neq \varnothing$，且 $\ell > 1$ 蕴含 $t \in T$，那么我们可以定义 $Q \in \underline{P}(M)$，使得对于 $a/E \in Q^*_{\langle \ell,\ s_1,\ t,\ s_2\rangle}$:

(1) $UTh^n_{\bar k}((M,\bar P,\bar Q)\restriction \mathrm{int}(a/E)) = t$,
(2) $th(a/E,\bar Q) = \langle \ell, s_1, s_2\rangle$.

注：(1) 可以这样做，因为根据引理 5.5(2)，如果 $\mathrm{int}(a/E) \neq \varnothing$，那么

$$Th^{n+1}_{\bar k}((M,\bar P)\restriction \mathrm{Int}(a/E)) = Th^{n+1}_{\bar k}(M,\bar P) = T.$$

现在显然，已知 t^*，我们可以计算

$$S(t^*) = \{t : Q^*_{\langle \ell, s_1, t, s_2\rangle} \neq \varnothing, t \neq Th^n_{\bar k}(\varnothing), \text{ for some } s_1, s_2\}$$

其中 Q^* 是一个上方。我们还可以计算 $G(t) = Th^n_{\bar k}(M,P,Q)$。我们知道，$t \in S_2, S(t) \subseteq T$，意味着 $G(t) \in T$。

我们还知道，如果

(i) 对于某个 $a \in M$，$t = Th^n_{\bar k}((M,P)\restriction\{a\})$，并且

ii) $t_1, t_2 \in T$，

那么：$\sum_{0\leq n}(t_1 + t) \in T$ 和 $\sum_{\substack{n<0\\ n\in Z}}(t + t_2) \in T$，$t_1 + t + t_2 \in T$ 并且如果 com 是 $-$，$t_1 + t_2 \in T$（其中 Z 是整数的集合）（我们使用了以下事实：M 是稠密的，$\kappa(M) \leq \aleph_1$）。

现在令 T^* 为 $T(n, \ell(P)\ k)$ 的极小子集，使得

(a) $T^* \supseteq T'$，(b) $t \in S_2, S(t) \subseteq T^*$ 蕴含 $G(t) \in T^*$，(c) 若 $t_1, t_2 \in T^*, t = Th^n_{\bar k}((M,P)\restriction\{a\})$，则 $t_1 + t + t_2 \in T^*$；(d) 若对某个 $a \in M$，$t_2 \in T^*, t_1 = Th^n_{\bar k}((M < P)\restriction\{a\})$，则

$$\sum_{0\leq n<\omega}(t_2 + t_1) \in T^*, \sum_{\substack{n\leq 0\\ n\in Z}}(t_1 + t_2) \in T^*;$$

(e) 若 $t_1, t_2 \in T_2$, com 为 $--$，则 $t_1 + t_2 \in T^*$。

很容易看出，给定 S_1, S_2，且 $T(n, \ell(P)\ k)$ 是（遗传）有限且已知的，我们就能有效地计算出 T^*。因此，只需证明 $T = T^*$；但显然 $T^* \subseteq T$，所以只需证明：

$$t \in T \Rightarrow t \in T^*.$$

由于 $t \in T$，存在 $\bar Q \in \underline{P}(M)^{\bar k(n+1)}$ 使得 $t = Th^n_{\bar k}(M,\bar P,\bar Q)$。在 M 上定义等价关系 E：当且仅当 $a = b$ 时，aEb；或者，不失一般性，我们假设 $a < b$，对每个 $a', b' \in M, a \leq a' < b' \leq b, Th^n_{\bar k}(M,P,Q)\restriction(a',b')) \in T^*$。容易验证，$E$ 是 M 上的凸等价关系。现在我们将证明，若 $a \in M$，$\mathrm{int}(A/E) \neq \varnothing$，则 $Th^n_{\bar k}((M,P,Q)\restriction \mathrm{int}(a/E))$ 属于 T^*。取 $a_0 \in a/E$，然后定义 a_n，$n \geq 0$，使得 $a_n < a_{n+1}, \{a_n : 0 \leq n < \omega\}$ 在 $\mathrm{int}(a/E)$ 中无界。不失一般性，对每个 $n > 0$，$th(a_n, P^\frown Q) = s_0$。因此

$$\begin{aligned} &Th^n_{\bar k}((M,\bar P^\frown \bar Q)\restriction\{x \in \mathrm{int}(a/E) : a_0 < x\}) \\ &= \textstyle\sum_{0\leq n<\omega}[Th^n_{\bar k}((M,\bar P,\bar Q)\restriction(a_n, a_{n+1})) + Th^n_{\bar k}((M,\bar P,\bar Q)\restriction\{a_{n+1}\})]. \end{aligned}$$

根据 E的定义，$Th^n_{\bar{k}}((M,P,Q)\restriction(a_n,a_{n+1}))\in T^*$，因此由 (d) 可得，

$$Th^n_{\bar{k}}((M,\bar{P},\bar{Q})\restriction\{x\in \mathrm{int}(a/E):a_0<x\})\in T^*.$$

同样，

$$Th^n_{\bar{k}}((M,\bar{P},\bar{Q})\restriction\{x\in \mathrm{int}(a/E):x<a_0\})\in T^*.$$

因此由 (c)，

$$Th^n_{\bar{k}}(M,\bar{P},\bar{Q})\restriction \mathrm{int}(a/E))\in T^*.$$

同样，由 (c)、(e)，M/E 中不存在两个相邻的元素，所以 M/E是一个稠密序。

定义 $P^*=\langle\ldots,P_{\langle \ell,\ s_1,\ s_2\rangle},\ldots\rangle,\bar{Q}^*=\langle\ldots,Q^*_{\langle \ell,\ s_1,\ t,\ s_2\rangle},\ldots\rangle$ 使得

(1) $a/E\in P_{\langle \ell,\ s_1,\ s_2\rangle}$ 当且仅当 $th(a/E,P)=\langle \ell,s_1,s_2\rangle$，(2) $a/E\in Q^*_{\langle \ell,\ s_1,\ t,\ s_2\rangle}$ 当且仅当 $Th^n_{\bar{k}}((M,P,Q)\restriction \mathrm{int}(a/E))=t$; 且 $th(a/E,P^\frown Q)=\langle \ell,s_1,s_2\rangle$。

由引理 5.2 可知，$(M/E,P^*,Q^*)$ 要么只有一个元素，要么有一个区间 $(a/E,b/E)\neq\varnothing$ 使得 $(M/E,P^*,Q^*)\restriction(a/E,b/E)\in U^n_{\bar{r}}$。

现在我们证明 aEb，从而说明这个情形不会出现，并且 E 只有一个等价关系，因此$Th^n_{\bar{k}}(M,P,Q)\in T^*$，这样我们就完成了证明。

令 $a\leqq a'<b'\leqq b$，再令

$$\begin{aligned}J_2&=\{c\in M:a'/E<c/E<b'/E\},\\ J_1&=\{c\in M:a'<c\in \mathrm{int}(a'/E)\},\\ J_3&=\{c\in M:b'>c\in \mathrm{int}(b'/E)\}.\end{aligned}$$

根据(b)，$Th^n_{\bar{k}}((M,P,Q)\restriction J_2)\in T^*$; 根据(d)，$Th^n_{\bar{k}}((M,P,Q)\restriction J_i)\in T^*$对于 $i=1$，3。因此根据(c)和(e)，$Th^n_{\bar{k}}((M,P,Q)\restriction(a',b'))\in T^*$。所以 aEb，证明完毕。

定理5.7。(A) 如果 $\kappa(K)\leqq\aleph_1$，并且对于每个 $M\in K$，都存在一个 $N\in K\cap U^{n+1}$扩张 M的对象，那么根据$UTh^{n+1}_{\bar{k}}(K)=\{UTh^{n+1}_{\bar{k}}(M):M\in K\cap U^{n+1}_{\bar{k}}\}$，我们可以计算出$Th^n_{\bar{r}}(K)$。因此，如果 $UTh^n(K)$在 n中是递归的，那么 K 的单子理论是可判定的。(B) 假设 $\kappa(K)\leqq\aleph_1$，K在 $M+N$下封闭，$\sum_{n<\omega}M$、$\sum_{n\in Z\atop n\leqq 0}M_n$、$\sum_{i\in Q}M_i$是凸子模型，并且可以对凸等价关系作除法。那么根据 $UTh^n_{\bar{r}}(K)$ $(\bar{r}=r(n,0,k))$，我们可以计算出 $Th^n_{\bar{k}}(K)$。因此，如果 $UTh^n(K)$在 n中是递归的，那么 K的单子理论是可判定的。

证明：

（A）显然。（B）本质上与 5.4 的证明相同。

注：当然，(B) 还有其他版本，例如针对完全序类的版本。

6. Applications of Section 5 to dense orders

定义6.1. K_S 是满足以下条件的序类 M： M的任何子模型都不同构于 ω_1 、 ω_1^* 或实数集的不可数子集[11]

引理6.2. (A) K_S 满足5.7(B)的假设。Alsono K_S 的成员均完备，有限的除外。

(B) K_S 含有不可数多个元素，但 $M \in K_S$ 蕴含 $\|M\| \leqq \aleph_1$。

证明：

(A) 显然。(B) Specker 序。关于其存在性，参见例如 [Jec71][12] 。

定理6.3. (A) K_S 的单子理论是可判定的。

(B) 所有来自 K_S 的稠密序，既没有最小元也没有最大元，均具有相同的单子理论。

证明：我们将证明，对于 $(M, \bar{P}) \in U^0(K)$ $\bar{P}$一个划分， $pUTh^1(M, \bar{P})$ 可以由 $pUTh^0(M, \bar{P})$ 计算得到（因此前者唯一确定后者）。于是，根据引理2.5 的平行版本，条件 (B) 立即成立，而 (A) 则由 5.7(B) 得出。

因此给定 $t = pUTh^0(M, \bar{P})$；也就是说，我们知道 $\bar{P}$是 M 到稠密或空子集的一个划分， $M \in U^0$，因此 M 是稠密的，且没有第一元和最大元， $M \in K$，并且我们知道 $\{i : P_i \neq \varnothing\}$。因此不失一般性。对于每个 i ， $P_i \neq \varnothing$ ，并且 $M \neq \varnothing$， P_i 是稠密的。令$pTh^1(M, \bar{P}) = \langle S_1, S_2, \mathrm{com}\rangle$，因此我们应计算 com， S_1， S_2。

第（1）部分 com：由于 $M \in K$，并且显然有理数序可嵌入 e 在 M 中， M 不可能是完备的。

第（2）部分 S_1：只需证明， M 的任意稠密子集 P 都可以划分为 M 的两个互不相交的稠密子集。

因此我们将证明一个更强的结论。

（*）如果 M 是稠密序， $I \subseteqq |M|$ 是一个稠密子集，那么我们可以将 I 划分为 M 的两个稠密子集。也就是说，存在 J_1、 J_2、 $I = J_1 \cup J_2$，并且 $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ 和 J_1、 J_2 是 M 的稠密子集。

我们在 I 上定义一个等价关系 E：若 aEb ，则 $a = b$ ；或者存在 $a_0 < a$、 $b < b_0$ ，且 $a_0 < a' < b' < b_0$ 蕴含 $|\{c \in: a' < c < b'\}| = |\{c \in I : a < c < b\}|$ （根据假设，它们是无限的）。现在，对每个含有多个元素的 E-等价类 a/E ，令 $\lambda = |\{a \in I :$ 对每个 $b' \leqq c' \in a/E$， $b' < a < c'\}|$ 。

情形 I： $|a/E| = \lambda > 0$。

然后令 $\{\langle b_i, c_i\rangle : i < \lambda\}$ 是所有满足b、 $c \in a/E$、 $b < c$的有序对 $\langle b$、 $c\rangle$ 的枚举。对 $i < \lambda$、 a_i^1、 $a_i^2 \in a/E$进行归纳定义。如果我们已经为 $\{\langle b_i, c_i\rangle$ 定义了它们，则选择

[11]那些是 Specker 序；我们从 Aronszajn 树中得到它们。[12]在 S_1 和 S_2 之间存在一些重叠。

已为 $j < i$定义它们，选择

$$a_i^1 \in \{d \in I : b_i < d < c_i\} \backslash \{a_j^2 : j < i\},$$

$$a_i^2 \in \{d \in I : b_i < d < c_i\} \backslash \{a_j^1 : j \leqq i\}.$$

根据基数方面的考虑，这是可行的。定义 $J_1(a/E) = \{a_i^1 : i < \lambda\}$。

情况 II: $\lambda < |a/E|$。

那么显然 $|a/E| = \lambda^+$，我们可以将 a/E 划分为 λ^+ 个凸子集A_i、$i < \lambda^+$，每个子集的势为 λ。因此，在每个子集上，我们都可以定义 $J_1(A_1)$，使得$J_1(A_i)$ $A_i \backslash J_1(A_i)$ 是 A_i 的稠密子集。令 $J_1(a/E) = \bigcup_{i<\lambda^+} J_1(A_i)$。

情形 III: $\lambda = 0$，因此 $|a/E| = 1$。

令 $J_1(a/E) = \varnothing$。令 $J_1 = \bigcup_{a\in I} J_1(a/E)$ $J_2 = I \backslash J_1$。

很容易验证， J_1、J_2 是所需的子集。

（3）部分 S_2: 由（2）可知，只需找到可能的 $UTh^0(M/E, \bar{P}^*)$，其中 $\bar{P}^* = \langle \ldots, P^*_{\langle \ell, s_1, s_2\rangle}, \ldots \rangle$, $P^*_{\langle \ell, s_1, s_2\rangle} = \{a/E : th(a/E, P) = \langle \ell, s_1, s_2\rangle\}$，且 $(M/E, \bar{P}^*) \in U^0(K)$；因此 $W_E = \{\langle \ell, s_1, s_2\rangle : P^*_{\langle \ell, s_1, s_2\rangle} \neq \varnothing\}$ 包含所有相关信息。显然 $W_E \neq \varnothing$ 且 $\langle \ell, s_1, s_2\rangle \in W_E \Rightarrow \ell > 0$，并且我们也可以舍弃 $\langle \ell, s_1, s_2\rangle \in W_E \Rightarrow \ell = 1$这种情况。此外，若 $\langle \ell, s_1, s_2\rangle \in W_E$，则 $\langle \ell, s_1, s_2\rangle$ 在形式上是可能的。

假设 W 满足所有这些条件，我们将找到一个合适的 E，使得 $W_E = W$。令 $W = \{\langle \ell^i, s_1^i, s_2^i\rangle : i < q < \omega\}$。选择一个 $J \subseteqq |M|$，它自身可数稠密，在 M 中从上方和下方均无界，并且每个 $P_j \cap J$都是 J的稠密子集，同时对于任何 $a \in |M| \backslash J$，在 $\{b \in J$中都不存在第一个（最后一个）元素: $b > a\}$（$\{b \in J;\ b < a\}$）。 J定义了 $2^{\aleph_0}$ 个戴德金分割，但由于 $M \in K$，其中只有 $\leqq \aleph_0$ 个得以实现。令 $\{a_n : n < \omega\}$ 为这些分割中选取的一组代表元（即，对于每个 $a \in |M| \backslash J$，都存在 $n < \omega$，使得 $[a, a_n]$ 或 $[a_n, a]$ 与 J不相交）。令 $J = \{b_n : n < \omega)$。现在，我们通过对 n 进行归纳法，定义一个由 M的凸且两两不相交的子集组成的集合 H_n，使得:

(a) $H_n \subseteqq H_{n+1}$; H_n 是有限的。(b) 若 $I_1 \neq I_2 \in H_n$，则 $I_1 < I_2$ 或 $I_2 < I_1$，且它们之间有 J的无穷多个元素。(c) 若 $I \in H_n$, I没有最大元，则对于每个 $a \in |M| \backslash J$, $a > I$，都有 $b \in J$, $I < b < a$，并且 $J \cap I$ 在 I中也是无界的。(d) 对偶序也有同样的结论。(e) 若 $I_1 < I_2 \in H_n$, $i < q$，则有 $I \in H_{n+1}$, $th(I, \bar{P}) = \langle \ell^i, s_1^i, s_2^i\rangle$。[13] (f) a_n, $b_n \in \bigcup\{I : I \in H_n\}$。(g) 若 $I \in H_n$ 有最小元（最大元），则该元素属于 J。定义 H_n并不难。显然 $\bigcup_n \bigcup_{I\in H_n} I = |M|$。因此定义 E 如下: aEb 当且仅当 $a = b$，或者存在某个 $n < \omega$, $I \in H_n$, a, $b \in I$.

[13]此外, $I_1 < I < I_2$, 且 $I_0 \in H_n$ 蕴含 $th(I_0, \bar{P}) \in W$。

不难验证 $W_E = W$。至此，证明完成。沿着类似的思路，我们可以证明

定理 6.4. 假设 M 是一个没有首元或末元的稠密序，M 是实数的一个子模型，并且对于每个实数的完美集 P， $P \cap |M|$都是可数的，甚至是 $< 2^{\aleph_0}$。那么 M 的单子理论就是有理数的单子理论。

注 1：我们可以综合 6.3 和 6.4 的结果。总有某个 M 满足 6.4 的假设。若 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$，则任意稠密的 $M \subseteq R$、$|M| < 2^{\aleph_0}$；若 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$，则可以证明其存在。

注 2：在 6.4 中，我们可以对 $|M|$提出更弱的要求：对于所有可数、互不相交且稠密的集合 Y_1、$\dots Y_n$（$n < \omega$），都存在一个实数的完美集 P，使得对于 $1 \leqq i \leqq n$， Y_i 在 P 中稠密，且 $P \cap |M|$ 是 $< 2^{\aleph_0}$ （定义见第 7 节）。

5.4 的证明很容易应用于实数的单子理论。（我们只需注意到 R 是完备的。）

结论 6.5。如果我们能计算 $UTh^n(R)$ 的 $n < \omega$，那么实数序的单子理论是可判定的。

注：如果我们在单元量词中添加（或用其替换）$(\exists^{<\aleph_1} X)$（即，存在一个可数的 X），也能得到类似的结论。请注意，如果 E 是 R 上的凸等价关系，那么 $\{a/E : |a/E| > 1\}$ 是可数的。

Grzegorczk [Grz51] 曾询问，带有闭包运算的实数子集格是否具有可判定理论。Rabin[Rab69] 的推论之一是，对实数进行量化、对闭集进行量化以及对 F_σ 集合进行量化的理论是可判定的。

通过我们的方法，我们可以轻易证明

定理 6.6. 实数序上对可数集进行量化的理论是可判定的。（我们可以将“X 可数”替换为“$|X| < 2^{\aleph_0}$”或“$(\forall P)$ (P闭处处不稠密 $\to |P \cap X| < 2^{\aleph_0}$)”。）

由于每个闭集都是某个可数集的闭包，这再次证明了 Rabin [Rab69]关于 Grzegorczk 问题的结果。我们也可以用我们的方法证明 Rabin 更强的结果，但会遇到更多技术困难。

7. Undecidability of the monadic theory of the real order

这里的主要定理是

定理 7.1. (A) (连续统假设) 实数序的单子理论是不可判定的。(B) (连续统假设) 序的单子理论是不可判定的。

定理 7.2。（连续统假设） $K_n = \{(R, Q_1, \dots, Q_n) : Q_i \subseteq R\}$ 的单子理论，其中集合量词的取值范围是可数集合， $1 \leqq n$，是不可判定的。（事实上，我们甚至可以只考虑有理数的集合。）

令 $2^{\leqq\omega}$ 为长度为 $\leqq\omega$ 的由 1 和 0 组成的序列集合；令 $\leqq$ 为 $2^{\leqq\omega}$ 上的偏序，即初始段序，$\prec$ 为字典序。

定理 7.3。（A）连续统假设下，$(2^{\leqq\omega}, \leqq, \prec)$ 的单子理论是不可判定的。

（B）在连续统假设下，$K_n = \{(2^{\leqq\omega}, \leqq, \prec, Q_1, \ldots, Q_n) : Q_i \subseteq 2^{\leqq\omega}\}$ 的单子理论是不可判定的，其中集合量词的论域为集合 $1 \leqq n$。（我们甚至可以只考虑 $2^{<\omega}$ 的子集。）

我们可以只假设以下条件，而不必假设连续统假设：

（*）“第一纲集合的并集不 R”。这是马丁公理的推论（见 [Jec03]），因此比连续统假设弱；但其否定也是相容的（见 Hechler [Hec73]、Mathias [Mat74] 和 Solovay [Sol70]）。除了可数集之外，我们只需使用一个由实数的任意良序构造出来的集合。请记住，根据 Rabin [Rab69]，对闭集和 F_σ 集合进行量化，得到的理论仍然是可判定的。

猜想 7A：$(2^{\leqq\omega}, \leqq, \prec)$ 的单子理论，其中集合量词仅遍历博orel集，是可判定的。

这应当与关于博雷尔确定性的猜想有关（参见 Davis [Dav64], Martin [Mar70] 和 Paris [Par72]）。[14] 该猜想蕴含

猜想 7B：实数的单子理论，其中集合量词遍历博orel集，是可判定的（由 Rabin [Rab69]）。

猜想 7C：我们可以在 ZFC 中证明 7.1-7.3。

定理 7.1(A)、(B) 和 7.3(A) 回答了众所周知的问题（参见例如 B¨uchi[BS73，第 38 页，问题 1、2a、2b、4a]）。定理 7.3(B) 回答了 Rabin 和作者提出的一个问题。

除非另有说明，我们将使用连续统假设（CH）或（*）。

记号：R 表示实数。完美集是实数中的闭且处处不稠密的集合，其中没有孤立点，且至少包含两个点（这是一个稍显反常的定义）。我们用 P 表示完美集。若 x，且对于每个 $\epsilon > 0$，$(x--\epsilon, x) \cap P \neq \varnothing$、$(x, x+\epsilon) \cap P \neq \varnothing$，则称 x 是 P的内点。若对于 P的每个内点 $x < y$，都存在一个内部的 $z \in P \cap D, x < z < y$，则称 $D \subseteq\subseteq R$ 在 P 中稠密。注意，若 D在 P中稠密，则 P是$P \cap D$的闭包。实区间记作(a, b)，其中 $a < b$；或者记作 I；若此外 a, b在 P时是内点，则(a, b)是 P的一个区间。

引理 7.4. 设 J 是一个指标集，R 的 $D_i\,(i \in J)$ 个可数稠密子集为 $D = \bigcup_{i\in J} D_i$；并且对每个 P，$|D \cap P| < 2^{\aleph_0}$。那么存在 $Q \subseteq R\backslash D$，$Q = Q\{D_i : i \in J\}$，使得

[14]与此同时，Martin [Mar75] 证明了博雷尔确定性。

(A) 若 $P\cap D\subseteqq D_i (i\in J)$ 且 D_i 在 P 中稠密（当然，P 是完美的），则 $|P\cap Q|<2^{\aleph_0}$；(B) 若 P 的任何（区间） I 都不满足 $i\in J$，$P\cap D\cap I\subseteqq D_i$，但 D 在 P 中稠密，则 $P\cap Q\neq\varnothing$。

证明：令 $\{P_\alpha:\ 0<\alpha<2^{\aleph_0}\}$ 为完美集的任意枚举。我们通过对 α 使用归纳法定义 x_α、$\alpha<2^{\aleph_0}$。

对于 $\alpha=0$，$x_\alpha\in R$ 是任意的。

对于任意 $\alpha>0$，如果 P_α 不满足 (B) 的假设，则令$x_\alpha=x_0$；如果 P_α 满足 (B) 的假设，则令 $x_\alpha\in P_\alpha\backslash\bigcup\{P_\beta:\ \beta<\alpha, (\exists i\in J)(P_\beta\cap D\subseteqq D_i$且 D在 P_β 中稠密)$\}=D$。

这是可能的，因为对于任意 β、i，如果 $P_\beta\cap D\subseteqq D_i$、$D$ 在 P_β、$P_\beta\cap$中稠密，那么 P_α 是 P_α 的闭处处不稠密子集。否则，对于某个 P_α 的区间 I，$P_\beta\cap P_\alpha$ 在 P_α 中稠密，因此由 $P_\beta\cap P_\alpha$、$P_\beta\cap P_\alpha\cap I=P_\alpha\cap I$ 的闭性可知；所以

$$D_i\supseteqq P_\beta\cap D\supseteqq P_\alpha\cap I\cap D,$$

这与关于 P_α 的假设相矛盾。因此，根据 (*) 和假设$|P_\alpha\cap D|<2^{\aleph_0}$，存在这样一个 x_α。

现在设 $Q=\{x_\alpha:\alpha<2^{\aleph_0}\}$。若 P 满足 (A) 的假设，则$P\in\{P_\alpha:0<\alpha<2^{\aleph_0}\}$。因此对于某个 $\alpha, P=P_\alpha$，从而 $P\cap D\subseteqq\{x_\beta:\beta<\alpha\}$，所以$|P\cap D|<2^{\aleph_0}$。若 $P=P_\alpha$ 满足 (B) 的假设，则$x_\alpha\in P_\alpha, x_\alpha\in Q$，从而 $P_\alpha\cap Q\neq\varnothing$。因此我们已经证明了该引理。

引理 7.5. 存在一个稠密的 $D\subseteqq R$和 $\{D_i:\ i\in J\}$，$|J|=2^{\aleph_0}$ 使得

(1) $|D\cap P|<2^{\aleph_0}$ 对于每个完美的 P。(

2) The D_i 两两不相交。(3) $D_i\subseteqq D$，

D_i 是稠密的。

证明：令 $\{P_\alpha:\alpha<2^{\aleph_0}\}$ 枚举 R 的完美子集，并令$\{I_n:\ n<\omega\}$ 枚举 R 的有理区间；若 $\alpha=\delta+n(n<\omega,\delta$是一个极限序数)，则选取 $x_\alpha\in I_n\backslash\bigcup_{\beta<\alpha}P_\beta\backslash\{x_\beta:\ \beta<\alpha\}$，并令$D=\{x_\beta:\beta<2^{\aleph_0})$ $D_\alpha=\{x_{\omega\alpha+n}:\ n<\omega\}$。

记号：　J将是一个指标集；$[J]^n=\{U:\ U\subseteqq J, |U|=n\}$，若 D_i 对 $i\in J$ 有定义，则令 $D_U=\bigcup_{i\in U}D_i$。$[J]^n$ 的子集，即 J 上对称的 n 元关系，记作 S；若已知 $\{D_i:\ i\in J\}$，则 Q_S 将由 7.4 得到，即$Q\{D_U:\ U\in S\cup[J]^{n-1}\}$。

定义 7.6. 令 $\varphi_n(X, D, Q, I^*)$ 表示如下的一元公式：

(A) X 在 I^* 和 $X\subseteqq D$ 中是稠密集。(B) 对每个区间 $I\subseteqq I^*$ 以及集合 Y_i, $\ldots, i=1, n+1$，若 $Y_i\cap I\subseteqq X$ 与 Y_i 两两不相交，且每个 Y_i 在 I 中稠密，则存在一个完美集 $P, P\cap Q=\varnothing$，并且每个 $Y_i\cap I$ 在 P 中稠密。

注：我们可以将区间 I_0 表示为凸集。

引理 7.7. 设 D、$\{D_i\colon\ i\in J\}$ 如 7.5 中所述，I^* 为一个区间，$S\subseteqq]J]^n$、$Q_S=Q\{D_U\colon\ U\in S\cup[J]^{n-1}\}$ 如 7.4 中所述。那么对于任意集合 $X\subseteqq R$、$R\models\varphi_n[X,D,Q_S,I^*]$，当且仅当

(A) X 在 I^*中稠密；(B) 对任意区间 $I\subseteqq I^*$，都存在一个子区间 I_1 和 $U\in S\cup[J]^{n-1}$，使得 $X\cap I_1\subseteq D_U$。

证明：(I) 假设 $R\models\varphi_n[X,D,Q_S,I^*]$。那么根据定义 7.6 中的 (A)，$X$ 在 I^*中稠密，$X\subseteqq D$，因此这里的 (A) 成立。为证明 (B)，令$I\subseteqq I^*$ 为一个区间，并假设不存在 I 的子区间 I_1，也不存在$U\in S\cup[J]^{n-1}$使得 $X\cap I_1\subseteqq D_U$ 成立；由此我们将得到矛盾。现在，我们通过对 ℓ进行归纳，定义互不相同的 $i(\ell)\in J$ 和区间 I^ℓ、$0\leqq\ell\leqq n$，使得 $I^0=I$、$I^{\ell+1}\subseteqq I^\ell$，并且 $X\cap D_{i(\ell)}\cap I^\ell$ 在 I^ℓ中稠密。

如果我们成功了，在定义 7.6(B) 中，令 I^{n+1} 为 I，令 $X\cap D_{i(\ell)}\cap I^{n+1}$ 为 Y^ℓ。因此，根据 φ_n 的定义，必然存在一个完美的 P，使得 $X\cap D_{i(\ell)}\cap I^{\ell+1}$ 在 P 中对 $\ell=1$、$n+1$ 和 $P\cap Q_S=\varnothing$ 稠密。但根据 Q_S 的定义，这与引理 7.4(B) 矛盾。因此，对于某个 $\ell<n+1$，我们找不到合适的 $i(\ell+1)$ $I^{\ell+1}$。所以，如果令 $Y=(X-\bigcup_{k\leqq\ell}D_{i(k)})\cap I^\ell$，那么对于任何 $I^+\subseteqq I^\ell$ 和任何 $i\in J$，$Y\cap D_i\cap I^+$ 都不稠密；也就是说，对于每个 $i\in J$，$Y\cap D_i$ 都处处不稠密。

如果 $\ell=n$，但 $\{i(1)\ldots,\ i(n)\}\notin S$令 $D_{i(n)}\cap X\cap I^\ell=Y_n^1\cup Y_{n+1}^1$，其中 Y_n^1、Y_{n+1}^1 是 I^ℓ 和 $Y_k^1=X\cap D_{i(k)}\cap I^\ell$ 的稠密子集，我们便像之前一样得到矛盾。

如果 Y在 I^ℓ中不稠密，它就与某个 $I^+\subseteqq I^\ell$, $X\cap I^+$不相交，因此 $X\cap I^+\subseteqq\bigcup_{k<\ell}D_{i(k)}$。于是 $U=\{i(0)\ldots,i(\ell)\in S\cup[J]^{n-1}$, $X\cap I^+\subseteqq D_U$，这与我们在证明开头所作的假设矛盾。因此，Y 在I^ℓ中稠密。

由于 $(\forall i\in J)Y\cap D_i$处处不稠密，对每个有限的 $Ussu\subseteqq J$，$Y\cap D_U$也处处不稠密。因此，我们可以归纳地选取互不相同的 $i_m\in J$ 和互不相同的$x_m\in Y\cap D_{i_m}$，使得 $\{x_{(n+3)m+k}\colon\ m<\omega\}$ 是 I^ℓ的稠密子集，其中$0\leqq k<n+2$。令 $Y_k^2=\{x_{(n+3)m+k}\colon\ m<\omega\}$，其中 $k\leqq n+1$。根据定义 7.6，存在一个完美的 P，使得 Y_k^2在 P中稠密，$P\cap Q=\varnothing$；由 7.4(B) 以及对这些 x_m的选取可得矛盾。

由于所有方法都会导致矛盾，我们完成了一个方向的证明。

（II）现在我们要证明，在假设另一方成立的情况下，$R\models\varphi_n[X,D,Q,I^*]$

显然 $X\subseteqq D$，并且 X 在 I^* 中稠密（根据引理 7.7 的条件 (A)）。因此，定义 7.6 中的条件 (A) 成立。对于该定义的条件 (B)，设 $I\subseteqq I^*$ 是一个区间，$Y_k\cap I\subseteqq X$、Y_k 在 I 中稠密，分别对应 $k=1$、.....、$n+1$ 和 $k\neq\ell\Rightarrow Y_k\cap Y_\ell=\varnothing$。我们应当找到一个完美的 P，使得 $P\cap Y_k$ 在 P 和 $P\cap Q=\varnothing$ 中稠密。我们可以选取一个 $U\in S\cup[J]^{n-1}$ 和一个 $I_1\subseteqq I$，使得 $X\cap I_1\subseteqq D_U$（根据假设）。选取一个完美的 P，使得每个 Y_k 在 P 中稠密。由于 D 如 7.4 中所述，两种情况都得到 $|P\cap D|<2^{\aleph_0}$。

(*) 现在我们可以找到完美的 $P_\alpha (\alpha < 2^{\aleph_0})$，使得每个 Y_k $(1 \leqq k \leqq n+1)$ 在 P_α 中都是稠密的，并且 $\alpha \neq \beta$ 蕴含 $P_\alpha \cap P_\beta \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} Y_k$。

（*）的证明：对于 η 一个由 1 和 0 组成的有限序列 X_η 将是由端点属于 $\bigcup_{k=1}^{n+1} Y_k$的开闭区间和单点集构成的集合，并且这些区间和单点集两两不相交。我们通过对 $\ell(\eta)$ 进行归纳法来定义 X_η。令 $X_{\langle\rangle} = \{[a,b)\}$，其中 a、$b \in Y_1$，并且如果定义了 X_η，则对每个区间 $[a,b) \in X_\eta$，选取一个递减序列 x_i^a $(i < \omega)$，其极限为 a，并且 $x_0^a < b$ 与 $x_i^a \in Y_k$ 当且仅当 $\ell(\eta)$ 模 $n+1$等于 $= k$、$1 \leqq k \leqq n+1$。令，对于 $m = 0, 1$:

$$X_{\eta^\frown\langle m\rangle} = \{(x_{i+1}^1, x_i^a) : \text{ for some } b, [a,b) \in X_\eta \text{ and } i = m \bmod 2\}$$
$$\cup \{\{a\} : \text{ for some } b, [a,b) \in X_\eta, \text{ or } \{a\} \in X_\eta\}$$

对于 η一个长度为 ω的由 1 和 0 组成的序列，$P_\eta = \bigcap_{\ell<\omega} (\bigcup X_{\eta\restriction n})$。

因为对于某个 α，$|P \cap D| < 2^{\aleph_0}$ $P_\alpha \cap D \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} Y_k$；所以根据 7.4（以及所选的 Q），$|P_\alpha \cap Q_S| < 2^{\aleph_0}$。我们可以找到 P_α^β $(\beta < 2^{\aleph_0})$，使得每个 Y_k在 P_α^β中都是稠密的，并且 $\beta \neq \gamma \Rightarrow P_\alpha^\beta \cap P_\alpha^\gamma \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} Y_k$。因此，对某个 β，$P_\alpha^\beta \cap Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} Y_k \subseteq D$，但 $Q \subseteq R \backslash D$，故 $P_\alpha^\beta \cap Q = \varnothing$，证毕。

定义 7.8. 设 $\psi_n(X, D, Q, I^*)$ 为表示.....的一元公式。

(A) $\varphi_n(X, D, Q, I^*)$, (B) 对于任意区间 $I_1 \subseteq I^*$，若 Y 与 X 不相交且在 I_1 中稠密，则 $\neg\varphi_n(X \cup Y, D, Q, I_1)$。

引理 7.9. 设 D, J, D_i, S, Q_S 如 7.7 中所述。那么对于任意 $X \subseteq R, R \models \psi_n[X, D, Q_S, I^*]$，当且仅当

(A) X 在 I^*中是稠密的，$X \subseteq D$，（B）对于任意区间 $I \subseteq I^*$，存在一个子区间 I_1 以及 $U \in S \cup \{V \in [J]^{n-1} : (\forall i \in J)(V \cup \{i\} \notin S)\}$，使得 $X \cap I_1 = D_U \cap I_1$。

证明：

(I) 假设 $R \models \psi_n[X, D, Q_S, I^*]$，则显然条件 (A) 成立。对于条件 (B)，设 $I \subseteq I^*$ 是一个区间。根据定义 7.8(A)，$R \models \varphi_n[X, D, Q_S, I^*]$，因此由引理 7.7(B)，$I$ 有一个子区间 I_0，使得 $X \cap I_0 \subseteq D_U$，其中 $U \in S \cup [J]^{n-1}$。如果 $(D_U \backslash X) \cap I_0$ 在某处稠密，设它在 $I_1 \subseteq I_0$ 中稠密，并令 $Y = (D_U \backslash X) \cap I_1$，这就与定义 7.8(B) 矛盾。如果 $U \in [J]^{n-1}$，且对于某个 $i \in J$，$V = U \cup \{i\} \in S$，我们也可以通过在区间 I_0 中 $Y = (D_V \backslash X) \cap I_0$ 得到类似的矛盾（因为 $D_i \subseteq D_V \backslash X$，$Y$ 是稠密的）。由此可得：$U \in S$ 或 $U \in [J]^{n-1}$，并且对于每个 $i \in J$，$U \cup \{i\} \notin S$，且 $(D_U \backslash X) \cap I_0$ 处处不稠密。因此，对于某个 $I_1 \subseteq I_0$，$(D_U \backslash X) \cap I_1 = \varnothing$，于是 $X \cap I_1 = D_U \cap I_1$。

（II）现在假设条件（A）、（B）成立；根据引理 7.7，很容易看出 $R \models \psi_n[X, D, Q_S, I^*]$。

定义 7.10。令 $\chi_1(D,Q,I^*)$ 表示以下一元公式：

(A) D 在 I^*中稠密，I^* 是一个区间；(B)

如果 $I \subseteq I^*$、X、Y 在 I 中稠密，并且

$$R \models \psi_1[X,D,Q,I] \wedge \psi_1[Y,D,Q,I]$$

那么对于某个 $I_1 \subseteq I$，

$$X \cap Y \cap I = \varnothing \text{ or } X \cap I_1 = Y \cap I_1.$$

引理 7.11。（A）如果 D、$\{D_i : i \in J\}$如 7.5 中所述，那么对于任意区间I^*，$R \models \chi_1[D,Q_J,I^*]$。

（B）如果 $R \models \chi_1[D,Q,I^*]$，那么我们可以找到 $I \subseteqq I^*$以及 X_i、$i < \alpha_0$，使得（a）每个 X_i都是 I和 $R \models \psi_1[X_i,D,Q,I]$的稠密子集；

（b）如果 $I_0 \subseteqq I$，且 $X \subseteqq I_0$在 I_0和 $R \models \psi_1[X,D,Q,I_0]$中稠密，那么存在 $i < \alpha$ 和 $I_1 \subseteqq I_0$，使得 $X \cap I_1 = X_i \cap I_1$。

(C) 在 (B) 中，$|\alpha_0|$由 D、Q、I唯一确定。

证明：

(A) 由 7.9 可立即得出。(B) 令 $\{X_i : i < \alpha\}$ 是满足关于$I = I^*$的 (1) 和 (2) 的一个极大族。如果对于某个区间 I，不存在子区间 I^1 和稠密的$X^* \subseteqq X \cap I^1$，使得 $(\forall i < \alpha_0)$（$X_i \cap X^*$处处不稠密）[15]，则结论成立。否则，我们可以对 n 归纳地选取区间 $I^n \subseteqq I^*$，它们与 $\bigcup_{\ell<n} I^\ell$ 和 $X^*_n \subseteqq X \cap I^n$ 不相交，且满足 $(\forall i < \alpha_0)$ $X_i \cap X^*_n$处处不稠密[16]，，并且 $\bigcup_{n<\omega} I^n$ 在 I中稠密。这样我们就可以定义$X_{\alpha_0} = \bigcup_{n<\omega} D^*_n$，矛盾。

(C) 显然。

定义 7.12. 令 $\chi^n(Q_1,D,Q,I^*)$ 表示以下一元公式

(A) D 在 I^* 中稠密，而 I^* 是一个区间。(B) 假设 $I_0 \subseteqq I^*, X_\ell \subseteqq I_0 (\ell < n)$ 且 $R \models \bigwedge_{\ell<n} \psi_1(X_\ell,D,Q,I_0)$。那么存在 $I_1 \subseteqq I_0$，使得对所有 $I_2 \subseteqq I_1$

$$R \models \psi_n(\bigcup_{\ell<n} X_\ell, D, Q_1, I_1) \equiv \psi_n(\bigcup_{\ell<n} X_\ell, D, Q_1, I_2).$$

引理 7.13. 若 $D, \{D_i : i \in J\}$ 如引理 7.5 中所述，$S \subseteqq [J]^n$ 那么对于任意区间 $I^*, R \models \chi^n[Q_S,D,Q,I^*]$。

证明：显然。

定理 7.14。集合 A_r 在序的单子理论中是递归的；其中 $A_r = \{\theta : \theta$ 是一个一阶句子，它有一个 ω-模型，即一个满足 $(|M|, R_1)$ 同构于 $(\omega, x+1=y)\}$ 的模型 M。

[15] and $R \models \psi_1[X^*,D,Q,I^1]$.

[16] and $R \models \psi_1[X^*,D,Q,I^n]$.

结论 7.15。真一阶算术在序的单子理论中是递归的。

证明：只需对每个一阶句子 θ 定义一个一元句子$G(\theta)$，使得 $R \models G(\theta)$ 当且仅当 θ 有一个 ω- 模型。

通过使用 Skolem 函数，再将它们编码为关系，我们可以有效地定义句子 $G_1(\theta)$，使得 θ 有一个 ω-模型，当且仅当 $G_1(\theta)$ 有一个 ω-模型，并且

$$G_1(\theta) = (\forall x_1, \dots, x_{n(0)})(\exists x_{n(0)+1}, \dots, x_{n(1)})(\bigvee_i \bigwedge_j \theta_{ij}),$$

θ_{ij} 是原子公式或原子公式的否定；其中只出现关系R_0、. . .、 $R_{n(2)}$； R_0 是等号；并且 R_i 有 $m(i)$ 元关系。

定义如下（其中 X、Y、D、Q 是取值于集合的变量， I 是取值于区间的变量，而 x、y 是个体变量）：

(0) $G_2(X_k = X_\ell) = (\forall I^1 \subseteqq I^*)(\exists I^2 \subseteqq I^1)(X_k \cap I^2 = X_\ell \cap I^2)$,

(1) $G_2[G_\ell(X_{k(1)}, \dots, X_{k(m(\ell))})] = (\exists Y)(Y \subseteqq D \backslash D^* wedge \bigwedge_{i=1}^{m(\ell)} \psi_2(X_{k(i)} \cup Y, D, Q^\ell_i, I^*)$ (for $\ell < 0$),

(2) $G_2(\theta) = (\forall X_1, \dots, X_{n(0)})(\exists X_{n(0)+1}, \dots, X_{n(1)})$
$(\forall I^0 \subseteqq I)(\exists I^* \subseteqq I^0)[\bigwedge_{\ell=1}^{n(0)} \psi_1(X_\ell, D, Q^*, I^*) \bigwedge \bigwedge_{\ell=1}^{n(0)} X_\ell \subseteqq D^*$
$\rightarrow \bigwedge_{\ell=n(0)+1}^{n(1)} X_\ell \subseteqq D^* \cap \bigwedge_{\ell=n(0)+1}^{n(1)} \psi_1(X_\ell, D, Q^*, I^*) \wedge \bigwedge_i \bigvee_j G_2(\theta_{ij})]$.

(4) 令 χ^* 为以下公式的合取：(α) D、 D^*是 I中的稠密 $D^* \subseteqq D$, (β) $\chi_1(D$、 Q^*、 $I)$, (γ) $\chi^2(Q^i_\ell$、 D、 Q^*、 $I)$。我们将 $\tilde{R}_1(X$、 Y、 Q^1_1、 Q^2_1、 $I') = (X \subseteqq D^* \wedge Y \subseteqq D^* \wedge X \cap Y = \varnothing \wedge \psi_1(X$、 D、 Q^*、 $I') \wedge \psi_1(Y$、 D、 $Q^* \wedge$、 $I') \wedge (\exists Z)[Z \subseteqq D \backslash D^* \wedge \psi_1(Z$、 D、 Q^*、 $I') \wedge \psi_2(X \cup Z$、 D、 Q^1_1、 $I') \wedge \psi_2(Y \cup Z$、 D、 Q^2_1、 $I')]$以及 (δ) $\psi_1(X_0$、 D、 Q^*、 $I)$ $\wedge X_0 \subseteqq D^* \wedge (\forall Y)[\psi_1(Y$、 D、 Q^*、 $I) \wedge Y \subseteqq D^* \rightarrow (\exists Y_1)\ \tilde{R}_1(Y$、 $Y_1)] \wedge (\forall I' \subseteqq I)(\forall Y) \neg \tilde{R}_1(Y$、 X_0、 Q^1_1、 Q^2_1、 $I') \wedge (\forall Y_1 Y_2 Y_3)(\forall I^0 \subseteqq I)[\tilde{R}_1(Y_1$、 Y_2、 Q^1_1、 Q^2_1、 $I^0) \wedge \tilde{R}_1(Y_1$、 Y_3、 Q^1_1、 Q^2_1、 $I^0) \rightarrow (\forall I^1 \subseteqq I^0)(\exists I^2 \subseteqq I^1)$ $Y_2 \cap I^2 = Y_3 \cap I^2]$.($\epsilon$)记作。该公式表明：如果在分别用$\tilde{Q}^1_1$、 $\tilde{Q}^2_1$替换 Q^1_1、 Q^2_1 时，(δ)成立，那么$(\forall X)(\forall Y)(\forall I' \subseteqq I)[\tilde{R}_1(X$、 Y、 Q^1_1、 $I') \rightarrow \tilde{R}_1(X$、 Y、 $\tilde{Q}^1_1$、 $\tilde{Q}^2_1$、 $I')]$.(5) $G(\theta) = (\exists Q^*$、 D、 D^*、 X_0、.....、 Q^i_ℓ、 .....$)(\forall I)$ $[\chi^* \wedge G_3(\theta)]$。现在我们只需证明， θ 具有一个 ω-模型，当且仅当$R \models G(\theta)$。

(I) 假设 M 是一个 ω-模型，当且仅当 $R \vdash G(\theta)$。令 $J = \omega + \omega$、$D_i (i < \omega + \omega)$为 R的可数、两两不相交的稠密子集。选择 $\omega + \omega$ 上的对称且自反关系S^i_ℓ，使得

$$M \models R_\ell(x_1, \ldots, x_{k(\ell)}) \Leftrightarrow (\exists y \in \omega + \omega) \bigwedge_{i=1}^{k(\ell)} \langle y, x_i \rangle \in S^i_\ell \wedge y \notin \omega).$$

为证明 $R \models G(\theta)$，令 $D = \bigcup_{i<\omega+\omega} D_i, D^* = \bigcup_{i<\omega} D, Q^i_\ell = Q_{(S^i_\ell)}$ $X_0 = D_0$，并令 $Q^* = Q_{\omega+\omega}$。令 I 为任意区间。不难检查，在这些赋值下 $R \models x^* \wedge G_3(\theta)$。

（II）现在假设 $R \models G(\theta)$。令 $Q^*, D, D^*, X_0, Q^i_\ell$ 满足$R \models (\forall I)(\chi^* \wedge G_3(\theta))$。根据 (4) ($\beta$)，显然 $R \models (\forall I)\chi_1(D, Q^*, I)$。因此，由引理 7.11(B)，存在 I 和 $D_i, i < \alpha$，满足 7.11(B) 中的 (1)、(2)、(3)。由于 $R \models (\forall I)(\chi^* \cap G_3(\theta))$，于是特别有 $R \models \chi^* \wedge G_3(\theta)$。根据 (4)($\delta$)，$R \models \psi_1(X_0, D, Q^*, I)$，因此我们可以选取 $D_0 = X_0$。（参见 7.11 的证明。）根据 (4)(δ)，我们还可以假设，对于 $n < \omega$，$R \models R_1(D_n, D_{n+1})$。根据 (4)($\epsilon$)，必然有 $D_i \subseteqq D^* \Leftrightarrow i < \omega$。

令 $\{j_\ell : \ell < \omega\}$ 枚举所有自然数序列 $j = \langle j(1) \ldots, j(n(0)) \rangle$。由于对于每个 $\bar{j}_\ell$ 都有 $R \models G_3(\theta)$，我们可以选择 $X_i = D_{j_\ell(i)}$，因此存在一个赋值 $X_i \to D^{\ell,i}$，使得对于 $n(0) < i \leqq n(1)$，有 $R \models G_3(\theta)$。所以，我们可以通过对 $n < \omega$ 作归纳法来定义区间 I_n，使得：$I_{n+1} \subseteqq I_n, I_0 \subseteqq I$，并且对于每个$n(0) < i \leqq n(1)$，存在某个 $j_n(i)$，使得 $< \alpha_0, D^{\ell,i} \cap I_{n+1} = D_{j_n(i)} \cap I_{n+1}$。现在我们定义一个模型 M：$|M| = \omega$，以及 $M \models R_\ell[j(1) \ldots, j(m(\ell$

对于某些 $n, R \models (\exists Y)[Y \subseteqq D \backslash D^* \wedge \bigwedge_{i=1}^{m(\ell)} \psi_2(D_{j(i)} \cap Y, D, Q^i, I^n_n)]$ $))] \Leftrightarrow$.

容易验证，$R \models \theta$。

注：经过一些展开，我们还可以在 A_r 的定义中加入以下要求。

"R_2 is a well-founded two-place relation"

（对不可数结构也如此）。因此，例如，存在句子 θ_n，使得马丁公理蕴含：$R \models \theta$ 当且仅当 $2^{\aleph_0} = \aleph_n$。

定理 7.16。存在模型的一阶句子集合，在单子理论 $\{(R, Q) : Q \subseteqq R\}$ 中是递归的，其中集合变量的取值范围为有理数的子集。

注：请注意，对满足 D 在 P 中稠密这一条件的 P 进行量化，可以解释为对 $P \cap D$ 进行量化，因为"x 属于 X 的闭包"这一性质是一阶的。因此，φ_n、ψ_n 属于我们受限的单子理论。

根据 7.14、7.15，定理 7.1、7.2 和 7.3 实际上都是显而易见的。定理 7.1(B) 也可以通过 Litman 的以下观察来证明 [Lit76],这与 3.6(B)(1) 类似：

引理 7.17。实数序的单子理论可在序的单子理论中递归。

证明：对于每个一元句子 θ 令 $G(\theta)$ 为这样的一元句子，其表述为：
“如果集合 X 是完全有序、稠密且没有首元或末元的，那么存在某个 $Y \subseteqq X$ 也具有这些性质，并且 $(Y, <) \models \theta$。”

由于每个完备稠密序都包含一个与 R 同构的子集，并且任何没有最小元也没有最大元的完备稠密序 $\subseteqq R$ 都与 R 同构，显然 $R \models G(\theta)$ 当且仅当所有序都满足 θ，因此我们的结果显而易见。

猜想 7D： R 的单子理论与 $2^{\aleph_0}$ 的（纯）二阶理论彼此递归。[17]

猜想 7E： $\{R, Q$的单子理论（其中集合量词的取值范围为有理数的子集）；以及 $\aleph_0$ 的（纯）二阶理论，二者可以相互递归。Gurevich 指出，如果 $V = L$，则 7D 和 7E 的交集成立。

猜想 7F：序的单子理论与（纯）二阶理论彼此递归。

在猜想 7D、E、F 中，如有必要，使用 (*) 或连续统假设。

猜想 7G：如果 D_ℓ 是 R 的稠密子集，并且对于每个 P、$|P \cap D_\ell| < 2^{\aleph_0}$，对于 $\ell = 1$，2 则 (R, D_1)、(R, D_2) 具有相同的单子理论。[18]

References

[Bau76] 詹姆斯·E·鲍姆加特纳， *A new class of order types*，《数学年刊》9（1976），187–222。[BS73] J·理查德·布希和迪克·西夫克斯， *Axiomatization of the monadic second or-der theory of* ω_1，《所有可数序数的一元二阶理论（可判定理论，II）》，1973年，第129–217页。《数学讲义》，第328卷。MR 0479997[B¨uc60] J·理查德·布希， *Weak second-order arithmetic and finite automata*，Z. Math. Logik Grundlagen Math.

6 1960 66 92 125010 ( )，–。MR Buc a，，《美国数学

[¨ 65] _____ *Decision methods in the theory of ordinals*

会通报》71（1965），767–770。MR 189997[B¨uc65b] *Transfinite automata recursions and weak second order theory of ordinals* 1964 ，《逻辑、方法论与科学哲学》（国际大会论文集），北荷兰出版社，阿姆斯特丹，

1965， 3 23 0210593 第–页。MR Buchi J. Richard Buchi，

[¨ 62] ¨ *On a decision method in restricted second order arithmetic*，《逻辑、方法论与科学哲学》（1960年国际大会论文集），斯坦福大学出版社，加利福尼亚州斯坦福，1962年，第1–11页。MR 0183636[Dav64] 莫顿·戴维斯， *Infinite games of perfect information*，《博弈论进展》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，

1964， 85 101 0170727 第–页。MR

[65] *Decidability of the weak second-order theory of two successors*

Don J·E·多纳，，《美国数学会通告》12（1965），819。[Ehr59] A·埃伦福伊希特， *Decidability of the theory of one linear ordering relation*，《美国数学会通告》6（1959），第3期，268–269。

[17] Gurevich 在 $V - L$ 时证明了它。

[18] Gurevich 推翻了它。

[Ehr61] ———, *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Fund. Math. **49** (1960/61), 129–141, MR 126370 (23 #A2677).

Elg Calvin C. Elgot, *Decision problems of finite automata design and related arithmetics*, Trans. Amer. Math. Soc. **98** (1961), 21–51, MR 139530 (25 #2962).

[Fra56] Roland Fraïssé, *Étude de certains opérateurs dans les classes de relations, définis à partir d'isomorphismes restreints*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **2** (1956), 59–75, MR 81855 (18, 558e).

FV S. Feferman and R.L. Vaught, *The first order properties of products of algebraic systems*, Fund. Math. **47** (1959), 57–103, MR 0104389 (21 #1081).

[Grz51] Andrzej Grzegorczyk, *Undecidability of some topological theories*, Fund. Math. **38** (1951), 137–152, MR 47583 (19, 1044a).

Gur Ju. ˇS. Gurevi ˇc, *Elementary properties of ordered Abelian groups*, Algebra i Logika Sem. **3** (1964), no. 1, 5–39, MR 0161800 (28 #5004).

Hec S. H. Hechler, *Independence results concerning the number of nowhere dense sets necessary to cover the real line*, Acta Math. **24** (1973), 269–277, MR 0317886 (47 #6435).

[Jec71] Thomas J. Jech, *Trees*, J. Symbolic Logic 36 (1971), 1–14. MR 284331

[Jec03] Thomas Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 柏林, 2003, 第三个千年版, 修订并扩充。

[Jen72] Ronald B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Annals of Math. Logic 4 (1972), 229–308.

[L¨au68] H. L¨auchli, *A decision procedure for the weak second order theory of linear order*, Contributions to Math. Logic (Colloquium, 汉诺威, 1966), North-Holland, 阿姆斯特丹, 1968, 第189–197页。MR 0244026

[Lav71] Richard Laver, *On fraissé's order type conjecture*, Annals of Mathematics 93 (1971), 89–111.

[Lit76] Ami Litman, *On the monadic theory of ω_1 without $A.C$*, Israel J. Math 23 (1976), 第 3-4 期 , 251–266.

[LL66] H. L¨auchli and J. Leonard, *On the elementary theory of linear order*, Fund. Math. 59 (1966), 109–116. MR 199108

[LT68] John Joseph Le Tourneau, *Decision problems related to the concept of operation*, ProQuest LLC, 安娜堡, MI, 1968, 博士论文（Ph.D.）–加州大学伯克利分校。MR 2617886 (71 #2)

Mal Jerome Malitz, *Infinitary analogs of theorems from first order model theory*, J. Symbolic Logic **36** (1971), 216–228, MR 290943 (45 #36).

Mar Donald A. Martin, *Measurable cardinals and analytic games*, Fundamenta Math. 66 (1970), 287–291.

[Mar75] , *Borel determinacy*, Annals of Mathematics 102 (1975), 363–371.

[Mat74] A. R. D. Mathias, *The order extension principle*, 公理化集合论 (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), 1974, 179–183, MR 0360267 (50 #12717).

Par J. B. Paris, $ZF \vdash \sum^0_4$ *determinateness*, J. Symbolic Logic 37 (1972), 661–667. MR 363904

[Pin72] A. G. Pinus, *The theory of convex subsets*, Sibirsk. Mat. ˇZ. 13 (1972), 218–224, MR 0294132

[Rab69] Michael O. Rabin, *Decidability of second-order theories and automata on infinite trees*, Trans. Amer. Math. Soc. **141** (1969), 1–35, MR 246760 (39 #7065).

Ram F. P. Ramsey, *On a Problem of Formal Logic*, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 4, 264–286, MR 1576401.

Ros Joseph G. Rosenstein, $\aleph_0$*-categoricity of linear orderings*, Fund. Math. 64 (1969), 1–5, MR 242652 (39 #4978).

Rub Matatyahu Rubin, *Theories of linear order*, Israel J. Math. 17 (1974), 392–443. MR 349377.

[She73a] Saharon Shelah, *On the monadic (second order) theory of order*, 美国数学学会会刊 19 (1973年), A–22。[She73b] , *On the monadic theory of order II*, 美国数学学会会刊 19 (1973年), A–282。[Sil70] Jack Silver, *A large cardinal in the constructible universe*, 《数学基础》69 (1970年), 93–100。[Sol70] Robert M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is lebesgue measurable* **92** 1970 1 56 , 《数学年刊》 (), –。[Ula30] Stanis law Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, 《数学基础》16 (1930年), 第1期, 140–150。

Institute of Mathematics The Hebrew University of Jerusalem Jerusalem91904, Israel and Department of Mathematics Rutgers University New Brunswick, NJ 08854, USA*Email address*: shelah@math.huji.ac.il