arXiv:2305.00972v2 [math.AP] 3 Aug 2023

三维能量临界非齐次广义 Hartree 方程

CARLOS M. GUZM´AN 和 CHENGBIN XU

谨以此文纪念 Antonio Guzm´an

Abstract. 本工作的目的是研究 $3D$ 能量临界非齐次广义哈特里方程

$$i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

其中 $p = 3 + \alpha - 2b$。我们在 $\dot{H}^1$ 中证明了基态阈值以下、具有非径向初始数据时的整体适定性与散射。为此，我们利用非线性项的衰减性质，结合 Kenig-Merle 路线图，使我们能够将非径向情形视为径向情形处理。本文引入了新技术，以克服势和卷积型非局部非线性项所带来的挑战。特别地，我们还在假设数据为径向数据的条件下，证明了经典广义 Hartree 方程（$b = 0$）的散射。此外，在散焦情形下，我们证明了具有一般数据时的散射。我们相信，本文发展的思想具有稳健性，并且可以应用于其他类型的非线性 Hartree 方程。在引言中，我们讨论了一些开放问题。

数学主题分类。35A01，35QA55，35P25。

关键词。非齐次广义哈特里方程；整体适定性；散射

1. Introduction

我们考虑聚焦型非齐次广义 Hartree 方程的初值问题（IVP）（也称为非齐次 Choquard 方程）

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, $p = 3 + \alpha - 2b$。非齐次项为 $|\cdot|^{-b}$，其中某个 $b > 0$。Riesz 势定义在 $\mathbb{R}^3$ 上，定义如下：

$$I_\alpha := \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\pi^{\frac{3}{2}}2^\alpha|\cdot|^{3-\alpha}} := \frac{\mathcal{K}}{|\cdot|^{3-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 3.$$

方程（1.1）中的非线性项使该方程成为聚焦型能量临界模型。事实上，$\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 范数在标准缩放下保持不变

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{1}{2}}u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

并且 $u_\lambda(t,x)$ 也是方程（1.1）的解。此外，方程（1.1）守恒能量，该能量定义为动能与势能之和：

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u(x)|^p dx.$$

(1.1) 是更一般的非均匀非线性广义哈特里方程的一个特例，其形式如下：

$$i\partial_t u + \Delta u \pm |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u = 0,$$

对于 $0 < \alpha < N$ 和 $p \geq 2$，该方程描述了许多物理现象，其中因子 $|x|^{-b}$ 代表介质中的某种非均匀性[1]（参见 [12]）。该模型的一些特例出现在大量非相对论原子和分子的平均场极限、电磁波在等离子体中的传播等情形中。更多详情请参见 [4, 11, 28]。最近，该模型引起了数学家的关注，研究主要集中在质量-能量互临界情形。文献 [2] 借助一种改进的 Gagliardo–Nirenberg 型恒等式，证明了局部/整体适定性。随后，文献 [30], 在径向条件下沿用 [9] 的论证研究了散射理论。之后，第二作者 [35] 受 [24]启发，证明了非径向情形下的散射理论。本文研究能量临界情形。更准确地说，我们证明，在 $3D$中取一般初始数据时，(1.1) 具有全局适定性和散射性质。

定义 1.1. 我们称方程 (1.1) 的解 u 在时间上于 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中双向散射，如果存在 $u_\pm \in \dot{H}^1$ 使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t,x) - e^{it\Delta}u_\pm\|_{\dot{H}^1} = 0,$$

其中，$e^{it\Delta}$ 表示与线性方程相关联的酉群。

在极限情形 $b = 0$（齐次情形）中，能量次临界情形和质量临界区域下的局部及全局适定性已在 [5, 13] 中得到证明。[32] 中的作者研究了互临界情形下散焦整体解的能量散射。对于聚焦情形，相关结果已在 [29, 1] 中得到证明。能量临界情形也已有研究，尤其是其中被称为 Hartree 方程的 $p = 2$ 情形。[25] 讨论了散焦 Hartree 方程的整体适定性与散射。[26] 研究了聚焦情形和径向情形下解的整体存在性与散射，以及有限时爆破。随后，[23], 将散射结果推广到了非径向情形。此外，对于具有 $p > 2$ 的广义情形，H^{s_c} 下小初值的适定性问题已在 [3] 中得到研究，其中包括 $0 \leq s_c \leq 1$。因此，一个自然的问题是：在能量临界情形下，解的动力学行为如何？当考虑非齐次模型（$b \neq 0$）时，这个问题更值得关注。本文旨在证明，在一般初始数据假设下，(1.1) 的全局适定性与散射。我们只考虑三维情形，我们认为这一情形更有趣（见注 1.3）。由此，我们也证明了在散焦情形下，(1.1) 的解会发生散射。此外，我们还证明了径向初值的齐次情形下的散射。

本研究受到近期关于非齐次非线性薛定谔方程（INLS）的研究启发，即 $i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}|u|^{p-2}u = 0$。这些研究在次临界和临界情形下，假设初始数据为非径向数据，并研究散射问题（见 [6], [8], [14]）。我们旨在应对非齐次模型因平移对称性破缺而带来的挑战。以往研究通过考察径向解来避免这些挑战。本文则通过在证明中引入新方法克服了这些障碍。我们研究

[1]值得一提的是，非线性项 $-|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u$ 称为散焦情形。

在 $\dot{H}^1$ 中，假设方程（1.1）的初始数据为非径向数据，且数据低于基态。下面陈述主要结果。

定理 1.1. 设 $0 < b \le \min\{\frac{1+\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2}\}$。假设 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 满足

$$E(u_0) < E(W) \quad and \quad \|u_0\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}. \tag{1.2}$$

那么，方程 (1.1) 的解 u 全局存在且在 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中散射。这里， W 表示基态，即椭圆方程的解

$$\Delta W + (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|W|^p)|x|^{-b}|W|^{p-2}W = 0.$$

为此，我们采用 Kenig–Merle 提出的稳健方法来研究能量临界非线性薛定谔方程（NLS），并引入新的要素以证明非径向情形。更具体地说，我们将这一方法（Kenig–Merle路线图）与非线性项中的衰减因子结合起来。我们将散射问题归结为排除基态阈值以下具有某些紧性性质的非散射解。证明采用反证法。也就是说，在假设定理 1.1 不成立的情况下，我们通过线性剖面和一种新的非线性剖面（这是本文的主要创新之处，见命题 4.1），证明方程 (1.1) 存在一个最小能量爆破解（亦称临界解）。换言之，若定理 1.1 不成立，则存在方程 1.1 的临界解 u_c，其初始数据为 $u_c(0)$，使得

$$\|u_c(0)\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}, \quad E(u_c) = E_c, \quad \text{and} \quad \|u_c\|_{S(I_{\max})} = \infty,$$

其中 E_c 是一个临界值（见命题 4.2）。此外，存在一个频率尺度函数 $N\colon I_{\max} \to (0,\infty)$，使得

$$\{N(t)^{-\frac{1}{2}}u(t, N(t)^{-1}x) : t \in I_{\max}\}$$

在 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中相对紧（见命题 5.1）。

备注 1.1。限制 $b \le \min\{\frac{1+\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2}\}$ 是研究方程 (1.1) 的适定性和稳定性理论的一项非常重要的结果。值得一提的是，哈特里情形的处理方式不同于非线性薛定谔情形。具体而言，卷积型的非局部非线性项与势 $|x|^{-b}$ 相结合，在证明应用 Kenig-Merle 路线图所需的技术结果时带来了若干挑战。此外，本文所探讨的新挑战是非径向情形，这一方向近来令作者们愈发感兴趣。

备注 1.2。值得强调的是，Dodson 和 Murphy 提出了一种更简单的方法来证明一般初始数据下的散射。该方法结合了 Tao 的散射判据、Virial-Morawetz型估计以及非线性项的衰减。不过，这种方法主要适用于亚临界情形，见 [24, 35]。在临界能量情形下，Dodson 和 Murphy 的思路似乎并不充分，因为它们要求初始数据 $u_0 \in L^2$，而本文并非如此。因此，我们转而采用 Kenig 和 Merle 路线图所提供的方法。

这里，我们关注三维情形，但我们相信，大部分分析可以推广到更一般的情形， $N \ge 4$。此外，与齐次情形（$b = 0$）相比，维数为 $N = 3$、4 的情形以及非径向数据的散射结果仍是开放问题。由定理 1.1 可知，在径向初值的假设下，维数为 $N = 3$ 时散射结果成立。也就是说，

推论 1.2. 考虑与经典广义 Hartree 方程（(1.1)，其中 $b = 0$）相关的柯西问题。设径向 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 满足

$$E(u_0) < E(W) \quad and \quad \|u_0\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}. \tag{1.3}$$

那么，解 u 全局存在，并且在两个时间方向上均散射。

该证明主要基于本工作中引入的主要新思路（见命题 4.1）。下面进一步说明。对于经典的非线性薛定谔模型（非线性薛定谔方程），径向情形与非径向情形的区别在于，最小不散射解的参数中有一部分是空间中心 $x(t)$；只要对 $x(t)$ 的大小有所控制，这些参数就能排除孤子型解。径向解的情形带来了最佳情况 $x(t) \equiv 0$。对于非齐次模型，情况相同（但没有径向数据）：也就是说，由于非线性项中的衰减因子，具有 $|x(t)| \to \infty$ 的解应当表现得像线性薛定谔方程的近似解，因此会衰减并发生散射。因此，我们得到的最小不散射解必须满足 $x(t) \equiv 0$。

最后，我们得到了散焦情形下的散射结果。这也可以视为定理 1.1 的推论。这里我们去掉了条件 (1.2)，因为范数 $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ 始终有界，而且所有能量均为正，并且与动能相当；这是较容易的情形。

推论 1.3. 设 $0 < b \leq \min\{\frac{1+\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2}\}$。对于任意 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的整体解满足

$$i\partial_t u + \Delta u - |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u = 0,$$

初始数据为 u_0。此外，该整体解在两个时间方向上都散射。

为此，我们对定理 1.1 的证明做了少量修改。

注 1.3（一些开放问题）。我们以讨论一些开放问题作为引言的结尾。第一个开放问题是，在聚焦情形和散焦情形下，证明高维 ($N \geq 4$) 中方程 (1.1) 的整体适定性和散射。

在特定情形下，$b = 0$，当 $N \geq 3$ 时，非径向初值的散射问题同样尚未解决。本文在假设初值为径向数据的情况下，证明了 $3D$ 中的散射。我们认为，对于维数 $N \geq 5$，可以利用非线性薛定谔方程模型[21]中提出的思路得到这一结果。然而，当 $N = \{3, 4\}$时，非径向初值的散射结果预计会更为复杂，这与经典薛定谔方程中的情形类似。顺便一提，非线性薛定谔方程框架下的 $3D$情形是该领域的著名难题，这也是本文选择聚焦于此的原因。我们注意到，对于非齐次模型，我们得以证明三维情形下的散射结果，而齐次情形仍是一个开放问题。

本文结构如下：第 2 节介绍与方程 (1.1) 的局部与稳定性理论相关的一些记号和结果。第 3 节研究线性剖面分解，并建立一些与基态的变分刻画相关的结果。第 4 节在假设定理 1.1 不成立的前提下，通过线性剖面以及一种新的非线性剖面，证明方程 (1.1) 存在最小能量爆破解；这种新的非线性剖面是本文的核心内容（命题 4.1）。最后，第 5 节利用精细杜哈梅尔公式和莫拉维茨估计，证明最小能量爆破解的紧性，并排除紧次阈值解存在的可能性，由此推出该假设不成立，进而得到定理 1.1 成立。此外，我们还证明了相关推论。

致谢。C.M.G. 的部分研究经费由巴西国家科学技术发展委员会 CNPq 和里约热内卢州研究支持基金会 FAPERJ 提供。C.M.G. 谨以本文献给父亲 Antonio Guzmán Rodríguez，以缅怀他，并感谢他给予的无条件的爱与支持。

2. Preliminaries

本节首先介绍本文中将用到的一些记号。此外，我们将研究局部适定性以及稳定性结果。

我们用 $X \lesssim Y$ 表示 $X \leq CY$，其中 $C > 0$为某个常数。类似地， $X \lesssim_u Y$ 表示存在常数 $C := C(u)$，它依赖于 u，使得 $X \leq C(u)Y$。我们还使用大O记号 $\mathcal{O}$。例如， $A = \mathcal{O}(B)$ 表示对于常数 $C > 0$，有 $A \leq CB$ 。微分算子∇ 仅指空间变量。我们用 $L^r(\mathbb{R}^N)$表示函数$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ 所构成的巴拿赫空间，其范数

$$\|f\|_r := \|f\|_{L^r} = \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^r dx\Big)^{\frac{1}{r}}$$

有限，并在 $r = \infty$ 时作通常的修正。对于任意非负整数 k，我们用 $H^{k,r}(\mathbb{R}^3)$ 表示由光滑紧支撑函数在范数$\|f\|_{H^{k,r}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\|_r$ 下的闭包所定义的索ɱò列夫空间，并在 $r = 2$ 时将其记为 H^k。对于时间区间 I，我们用 $L^q_t(I;\ L^r_x(\mathbb{R}^3))$ 表示时空范数。

$$\|f\|_{L^q_t L^r_x(I\times\mathbb{R}^3)} = \left(\int_I \|f(t,x)\|^q_{L^r_x} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

当 q 或 r 为无穷大时，作通常的相应修改；有时为简便起见，我们使用$\|f\|_{L^q(I;L^r)}$ 或$\|f\|_{L^qL^r(I\times\mathbb{R}^3)}$。

我们还回顾伯恩斯坦不等式，以及与线性薛定谔传播子相关的一些 Strichartz 估计。设 $\psi(\xi)$ 是一个径向光滑函数，其支集包含于球 $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq \frac{11}{10}\}$ 中，并且在球 $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq 1\}$ 上等于 1。对每个数 $N > 0$，我们定义傅里叶乘子

$$\begin{aligned}
\widehat{P_{\leq N} g}(\xi) &:= \psi\left(\frac{\xi}{N}\right)\hat{g}(\xi),\\
\widehat{P_{>N} g}(\xi) &:= \left(1 - \psi\left(\frac{\xi}{N}\right)\right)\hat{g}(\xi),\\
\widehat{P_N g}(\xi) &:= \left(\psi\left(\frac{\xi}{N}\right) - \psi\left(\frac{2\xi}{N}\right)\right)\hat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

类似地，定义 $P_{<N}$ 和 $P_{\geq N}$。我们还定义

$$P_{M<\cdot\leq N} := P_{\leq N} - P_{\leq M} = \sum_{M<N'\leq N} P_{N'},$$

当 $M < N$ 时。我们通常在 M 和 N 为二进数时使用这些乘子。值得指出的是，所有关于 M 或 N 的求和都默认对二进数进行。与所有傅里叶乘子一样，利特尔伍德–佩利算子与薛定谔流 $e^{it\Delta}$ 交换。

A对于利特尔伍德–佩利理论的一些应用，我们有如下引理 .

引理 2.1（伯恩斯坦不等式）。对于任意 $1 \leq p \leq q \leq \infty$ 和 $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|P_{\geq N} g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)} &\lesssim N^{-s}\||\nabla|^s P_{\geq N} g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)} \lesssim N^{-s}\||\nabla|^s g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)},\\
\||\nabla|^s P_{\leq N} g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)} &\lesssim N^s\|P_{\leq N} g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)} \lesssim N^s\|g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)},\\
\||\nabla|^{\pm s} P_N g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^6)} &\lesssim N^{\pm s}\|P_N g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)} \lesssim N^{\pm s}\|g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)},\\
\|P_N g\|_{L^q_x(\mathbb{R}^3)} &\lesssim N^{\frac{3}{p}-\frac{3}{q}}\|P_N g\|_{L^p_x(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

其中 $|\nabla|^s$ 是经典分数阶算子。

我们定义集合 Λ_0:

$$\Lambda_0 := \left\{(q,r) \text{ is } L^2\text{-admissible}; 2 \le r \le 6\right\}.$$

接下来，我们定义以下 Strichartz 范数

$$\|u\|_{S(L^2,I)} = \sup_{(q,r)\in\Lambda_0} \|u\|_{L_t^q L_x^r(I)}$$

以及对偶 Strichartz 范数

$$\|u\|_{N(I)} = \inf_{(q,r)\in\Lambda_0} \|u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(I)}.$$

通常省略 $I = \mathbb{R}$、 I 。

现在，让我们回顾一些关于 Strichartz 估计和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的结果，参见 [5], [17], [22]。

引理 2.2。设 $0 \in I$，则下述结论成立

(i)（线性估计）

$$\|e^{it\Delta} f\|_{S(L^2)} \le C\|f\|_{L^2};$$

(ii)（非齐次估计）

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot,s)ds \right\|_{S(L^2,I)} \le C\|g\|_{N(I)}.$$

引理 2.3. 设 $0 < \alpha < N$和 $1 < r$、 $s < \infty$ 和 $(f,g) \in L^p \times L^q$。

(i) 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{\lambda}{N}$，则

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * f)(x)g(x)dx \lesssim \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

(ii) 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{\lambda}{N}$，则

$$\|(I_\alpha * f)g\|_{L^{r'}} \lesssim \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

我们以局部适定性和稳定性结果结束本节，这些结果对我们的工作非常重要。对于一个区域 $I \subset \mathbb{R}$，我们定义混合空间

$$S^1(I) := L_t^{q_0}(I, L_x^{r_1}) := L^{2p}(I, L^{\frac{6p}{p-2}}) \quad \text{and} \quad W(I) := L^{q_0}(I, L^{r_0}) := L^{2p}(I, L^{\frac{6p}{3p-2}}),$$

so,

$$\|u\|_{S^1(I)} \le C\|\nabla u\|_{W(I)}.$$

令 $S(I)$ 表示

$$\|u\|_{S(I)} := \|u\|_{S^1(I)} + \|\nabla u\|_{W(I)}.$$

在开始局部理论和稳定性结果之前，我们先给出非线性项的估计，这在证明上述结果以及散射理论中都起着重要作用。

引理 2.4（非线性估计）。令 $0 < b \le$ (1+α) 3。~~那么，~~我们有

$$\|\nabla[(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u]\|_{N(I)} \lesssim \|u\|_{S^1(I)}^{2(p-1)-2b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{1+2b}.$$

证明。根据 $N(I)$ 的定义,

$$\|\nabla[(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u]\|_{N(I)} \le \|\nabla[(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u]\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}.$$

注意到

$$\begin{aligned}|\nabla[(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u]| \lesssim & (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}|\nabla u| && (2.4)\\ & + (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b-1}|u|^{p-1} && (2.5)\\ & + (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^{p-1}|\nabla u|)|x|^{-b}|u|^{p-1} && (2.6)\\ & + (I_\alpha * |\cdot|^{-b-1}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-1}. && (2.7)\end{aligned}$$

我们估计前两项，因为其他项的处理类似。因此，结合 H¨older 不等式和关系，应用 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式（引理 2.3），

$$1+\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{r_0} + \frac{2(p-1)-2b}{r_1} + \frac{1+2b}{r_0},$$

可得

$$\begin{aligned}\|(2.4)\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \lesssim & \|(I_\alpha * (|\cdot|^{-1}|u|)^b|u|^{p-b})(|x|^{-1}u)^b|u|^{p-b-2}\nabla u\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\\ \lesssim & \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^b \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{p-b} \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^b \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{p-b-2} \|\nabla u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}\\ \lesssim & \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^{2b} \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{2(p-1)-2b} \|\nabla u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|(2.5)\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \lesssim & \|(I_\alpha * (|\cdot|^{-1}|u|)^b|u|^{p-b})(|x|^{-1}u)^{b+1}|u|^{p-b-2}\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\\ \lesssim & \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^b \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{p-b} \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^{b+1} \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{p-b-2}\\ \lesssim & \||x|^{-1}u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_0}}^{2b+1} \|u\|_{L_t^{q_0}L_x^{r_1}}^{2(p-1)-2b},\end{aligned}$$

其中我们需要 $p-b-2\ge 0$，这意味着 $b\le\frac{1+\alpha}{3}$。

另一方面，根据哈代不等式，即

$$\||x|^{-1}u\|_{L^r} \lesssim \|\nabla u\|_{L^r} \quad 1<r<3,$$

我们得到（利用以下事实 $p>2$）

$$\|(2.4)\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} + \|(2.5)\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \lesssim \|u\|_{S^1(I)}^{2(p-1)-2b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{1+2b}.$$

因此，我们完成了证明。 □

接下来的两个命题给出了柯西问题 (1.1) 的结果。我们先介绍 $\dot H^1(\mathbb{R}^3)$ 中的局部适定性。

命题 2.5（局部适定性）。对于任意 $u_0\in\dot H^1(\mathbb{R}^3)$ 和 $0<b\le\min\{\frac{1+\alpha}{3},\frac{\alpha}{2}\}$，存在 $T=T(u_0)$，以及一个满足初始数据 u_0 的唯一解 u，使得

$$u\in L_{loc}^q((-T,T),\dot H^{1,r}) \quad \forall (q,r)\in\Lambda_0.$$

特别地，存在 $\eta_0>0$，使得若

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{S^1([0,\infty))}<\eta$$

对于任意 $\eta<\eta_0$，方程 (1.1) 的解正向全局存在，且满足

$$\|u\|_{S^1([0,\infty)}\lesssim\eta.$$

类似的结论对于反向时间或在整个 $\mathbb{R}$ 上也成立。

证明。为此，我们使用压缩映射论证。固定稍后选取的 ρ、$r>0$，我们定义如下完备度量空间 $(B_{\rho,r},\ d)$：

$$B_{\rho,r}=\{u\in C(I;\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))\ :\ \|u\|_{S^1(I)}\le\rho\quad\text{and}\quad\|\nabla u\|_{W(I)}\le r\},$$
$$d(u,v):=\|\nabla(u-v)\|_{W(I)}+\|u-v\|_{S^1(I)}.$$

令 $\Gamma(u)$ 表示

$$\Gamma(u)(t)=e^{it\Delta}u_0+i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|x|^{-b}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u(s)|^p)|u(s)|^{p-2}u(s)ds. \tag{2.8}$$

接下来，我们将证明 Γ 是 $(B_{\rho,r},d)$ 上的压缩映射。首先，由 Strichartz 估计和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\Gamma(u)\|_{W(I)}\le&C\|u_0\|_{\dot{H}^1}+C\|u\|_{S^1(I)}^{2(p-1)-2b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{1+2b}\\ \le&C(\|u_0\|_{\dot{H}^1}+\rho^{2(p-1)-2b}r^{1+2b})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|\Gamma(u)\|_{S^1(I)}\le&\|e^{it\Delta}u_0\|_{S^1(I)}+C\|u\|_{S^1(I)}^{2(p-1)-2b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{1+2b}\\ \le&\|e^{it\Delta}u_0\|_{S^1(I)}+C\rho^{2(p-1)-2b}r^{1+2b}.\end{aligned}$$

选取 $r=2C\|u_0\|_{\dot{H}^1}$ 和 ρ，使得 $C\rho^{2(p-1)-2b}r^{2b}<\frac{1}{4}$，则有 $\|\nabla\Gamma(u)\|_{S(L^2;I)}\le r$。令 $\delta=\|e^{it\Delta}u_0\|_{S^1(I)}$，我们可以选取时间区间 $0\in I$，使得 $\delta=\frac{\rho}{2}$ 且 $C\rho^{2(p-1)-2b-1}r^{1+2b}<\frac{1}{4}$，于是 $\|\Gamma(u)\|_{S^1(I)}\le\rho$，这意味着 $\Gamma(u)\in B_{\rho,r}$。

为完成证明，我们证明 Γ 是 $B_{\rho,r}$ 上的压缩映射。利用斯特里卡茨估计，可得

$$d(\Gamma(u),\Gamma(v))\le 2C\|\nabla\left(F(x,u)-F(x,v)\right)\|_{N(I)}, \tag{2.9}$$

其中 $F(u)=(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u$。直接计算可得

$$\begin{aligned}&|\nabla(F(u)-F(v)|\\ \lesssim&\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}\nabla u-(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v|^p)|x|^{-b}|v|^{p-2}\nabla v\right|\\ &+\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b-1}|u|^{p-2}u-(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v|^p)|x|^{-b-1}|v|^{p-2}v\right|\\ &+\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^{p-2}\Re\overline{u}\nabla u)|x|^{-b}|u|^{p-2}u-(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v|^{p-2}\Re\overline{v}\nabla v)|x|^{-b}|v|^{p-2}v\right|\\ &+\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b-1}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u-(I_\alpha*|\cdot|^{-b-1}|v|^p)|x|^{-b}|v|^{p-2}v\right|\\ =:&\ I+II+III+IV.\end{aligned}$$

我们先估计项 I，它可以写成

$$\begin{aligned}|I|\le&C\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}(|u|^p-|v|^p)\right||x|^{-b}|v|^{p-2}|\nabla v|\\ &+(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}\left|(|u|^{p-2}-|v|^{p-2})\right||\nabla v|\\ &+(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}|\nabla(u-v)|.\end{aligned}$$

因此，应用不等式（利用事实 $\sigma\ge1$）：

$$||f|^\sigma-|g|^\sigma|\le C(|f|^{\sigma-1}+|g|^{\sigma-1})|f-g|,$$

有（使用 $\sigma=p-2\ge1$，即 $p\ge3$，这等价于 $b\le\frac{\alpha}{2}$）

$$\begin{aligned}|I|\le&C\left|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|u-v|\right||x|^{-b}|v|^{p-2}|\nabla v|\\ &+(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}\left|(|u|^{p-3}+|v|^{p-3})(u-v)\right||\nabla v|\\ &+(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}|\nabla(u-v)|.\end{aligned}$$

哈代–利特尔伍德–索博列夫不等式（引理 2.3）和引理 2.4 表明

$$\begin{aligned}\|I\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \le & C\Big((\|\nabla u\|_{W(I)}^b+\|\nabla v\|_{W(I)}^b)(\|u\|_{S^1(I)}^{p-1-b}+\|v\|_{S^1(I)}^{p-1-b})\|v\|_{S^1(I)}^{p-2-b}\|\nabla v\|_{W(I)}^{1+b}\|u-v\|_{S^1(I)}\\ &+\|u\|_{S^1(I)}^{p-b}\|\nabla u\|_{W(I)}^b\|\nabla v\|_{W(I)}\\ &\times\begin{cases}(\|u\|_{S^1(I)}^{p-3}+\|v\|_{S^1(I)}^{p-3})\|\nabla(u-v)\|_{W(I)}^b\|u-v\|_{S^1(I)}^{1-b}, & \text{if } b<1;\\ (\|u\|_{S^1(I)}^{p-2-b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{b-1}+\|v\|_{S^1(I)}^{p-2-b}\|\nabla v\|_{W(I)}^{b-1})\|\nabla(u-v)\|_{W(I)}, & \text{if } b\ge 1;\end{cases}\\ &+\|u\|_{S^1(I)}^{2(p-1)-2b}\|\nabla u\|_{W(I)}^{2b}\|\nabla(u-v)\|_{W(I)}\Big).\end{aligned}$$

因此，如果 $u,v\in B_{\rho,\ r}$，那么

$$\|I\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\le C\Big(\rho^{2p-3-2b}r^{1+2b}+\max\{\rho^{2p-3-b}r^{1+b},\rho^{2p-2-2b}r^{2b}\}+\rho^{2p-2-2b}r^{2b}\Big)d(u,v).$$

我们可以将 ρ 取得足够小，使得

$$C\Big(\rho^{2p-3-2b}r^{1+2b}+\max\{\rho^{2p-3-b}r^{1+b},\rho^{2p-2-2b}r^{2b}\}+\rho^{2p-2-2b}r^{2b}\Big)\le\frac{1}{8}.$$

因此，另一项也可以用类似的方法估计。于是，我们得到

$$d(\Gamma(u),\Gamma(v))\le\frac{1}{2}d(u,v)$$

这意味着 Γ 是一个压缩映射。因此，根据压缩映射原理， Γ 有唯一的不动点 $u\in B_{\rho,\ r}$。 □

现在，我们研究方程 (1.1) 的稳定性理论。

命题 2.6（稳定性）。设 $0<b\le\min\{\frac{1+\alpha}{3},\frac{\alpha}{2}\}$。假设 $\tilde{u}\colon I\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ 满足

$$\|\tilde{u}\|_{L_t^\infty\dot{H}_x^1}+\|\tilde{u}\|_{S^1(I)}\le E<\infty.$$

那么存在 $\epsilon_1=\epsilon_1(E)>0$，使得若

$$\begin{aligned}\|\nabla\{(i\partial_t+\Delta)\tilde{u}+|x|^{-b}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|\tilde{u}|^p)|\tilde{u}|^{p-2}\tilde{u}\}\|_{N(I)}\le\epsilon<\epsilon_1,\\ \|e^{i(t-t_0)\Delta}[u_0-\tilde{u}(t_0)]\|_{S^1(I)}\le\epsilon<\epsilon_1,\end{aligned}$$

对某个 $t_0\in I$ 以及 $u_0\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$，则存在唯一的解 $u\colon I\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$，满足$u(t_0)=u_0$，且

$$\|u-\tilde{u}\|_{S^1(I)}\lesssim\epsilon.$$

证明。不失一般性，可假设 $I=[0,a)$。对于任意充分小的 $\eta>0$，存在 $I_j=[a_j,a_{j+1})$，使得 $I=\bigcup_{j=1}^J I_j\,(J<\infty)$ 且 $\|u\|_{S^1(I)}\le\eta$。首先，利用斯特里卡茨估计、引理 2.4 以及标准的连续性论证，可得 $\|\nabla\tilde{u}\|_{W(I)}\lesssim M$.

定义 $u=\tilde{u}+w$，则 w 的方程可写为

$$\begin{cases}iw_t+\Delta w=F(\tilde{u}+w)-F(\tilde{u})+e,\\ w(0)=u_0-\tilde{u}(0),\end{cases}$$

其中 $F(u)=-(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u$ 且 $e=(i\partial_t+\Delta)\tilde{u}+|x|^{-b}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|\tilde{u}|^p)|\tilde{u}|^{p-2}\tilde{u}$。因此，对 I_j使用杜哈梅尔公式， w 满足

$$w(t)=e^{i(t-a_j)\Delta}w(a_j)-i\int_{a_j}^t e^{i(t-s)\Delta}(F(\tilde{u}+w)-F(\tilde{u}))ds-i\int_{a_j}^t e^{i(t-s)\Delta}eds.$$

命题 2.5 的证明表明，当 η 和 ϵ_1 足够小时，可以得到在 I_1 上存在唯一的解 $w(t)$，使得 $\|w\|_{S^1(I_1)} \leq 2\epsilon$ 以及 $\|\nabla w\|_{W(I_1)} \leq C_1(E, \|u_0\|_{\dot{H}^1})$。结合 Strichartz 估计，可以得到 $\|w\|_{L_{I_1}\dot{H}^1} \leq C_1'(E, \|u_0\|)$。

现在我们来估计 $\|e^{i(t-a_2)\Delta}w(a_2)\|_{S^1(I_2)}$。事实上，

$$e^{i(t-a_2)\Delta}w(a_2) = e^{it(a_2-a_0)\Delta} - i\int_{a_1}^{a_2} e^{i(t-s)\Delta}(F(\tilde{u}+w) - F(\tilde{u}))ds - i\int_{a_1}^{a_2} e^{i(t-s)\Delta}eds.$$

因此，利用斯特里卡茨估计，$\|w\|_{S^1(I_1)} \leq 2\epsilon$ 以及 $\|\nabla w\|_{W(I_1)} \leq C(E, \|u_0\|_{\dot{H}^1})$，我们得到

$$\|e^{i(t-a_2)\Delta}w(a_2)\|_{S^1(I_2)} \leq 2\epsilon.$$

重复上述论证，可得

$$\|w\|_{S^1(I_2)} \leq 4\epsilon \text{ and } \|\nabla w\|_{W(I_2)} \leq C_2(E, \|u_0\|_{\dot{H}^1}).$$

通过归纳论证，对于 $j = 1, ..., J$，我们有

$$\|w\|_{S^1(I_j)} \leq 2^j\epsilon \text{ and } \|\nabla w\|_{W(I_2)} \leq C_j(E, \|u_0\|_{\dot{H}^1}).$$

因此，将它们对所有子区间 I_j 求和，我们得到所需结果。 □

3. Profile decomposition and variational analysis

本节给出一个线性剖面分解结果。该结果对于展示本文的新要点（命题 4.1）以及证明临界解的存在性至关重要。此外，我们还研究了与本文问题相关的一些性质。首先讨论加利亚多–尼伦伯格不等式，随后讨论能量俘获。

命题 3.1（线性剖面分解）。设 u_n 是 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中的有界序列。那么，取一个子列后，有以下结论：

存在 $J^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$；剖面 $\phi^j \in \dot{H}^1 \setminus \{0\}$；尺度 $\lambda_n^j \in (0, \infty)$；空间平移参数 $x_n^j \in \mathbb{R}^3$；时间平移参数 t_n^j；以及余项 w_n^J，使得记

$$g_n^j f(x) = (\lambda_n^j)^{-\frac{1}{2}} f(\frac{x - x_n^j}{\lambda_n^j}),$$

则 $1 \leq j \leq J^*$ 有如下分解：

$$u_n = \sum_{j=1}^{J} g_n^j[e^{it_n^j\Delta}\phi^j] + W_n^J.$$

该分解满足以下条件：

- 能量解耦：记 $P(u) = \||x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^p\|_{L^1}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\{\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 - \sum_{j=1}^{J}\|\nabla\phi^j\|_{L^2}^2 - \|\nabla W_n^J\|_{L^2}^2\} = 0 \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\{P(u_n) - \sum_{j=1}^{J}P(g_n^j[e^{it_n^j\Delta}\phi^j]) - P(W_n^J)\} = 0. \tag{3.11}$$

- 余项的渐近消失：

$$\limsup_{J\to J^*}\limsup_{n\to\infty}\|e^{it\Delta}W_n^J\|_{S^1(\mathbb{R})} = 0. \tag{3.12}$$

• 参数的渐近正交性：对于 $j \neq k$,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left[\frac{\lambda_n^j}{\lambda_n^k}\right]+\frac{|x_n^j-x_n^k|^2}{\lambda_n^j\lambda_n^k}+\frac{|t_n^j(\lambda_n^j)^2-t_n^k(\lambda_n^k)^2|}{\lambda_n^j\lambda_n^k}\right\}=\infty. \tag{3.13}$$

此外，我们可以假设 $t_n^j\equiv 0$ 或 $t_n^j\to\pm\infty$，且 $x_n^j\equiv 0$ 或 $|x_n^j|\to\pm\infty$。

证明。我们只证明势能解耦 (3.11)，其他情形可用与 [18] 相同的方法证明。由归纳法，只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\big(P(u_n)-P(u_n-\phi_n^1)-P(\phi_n^1)\big)=0, \tag{3.14}$$

其中 $\phi_n^1=g_n^1(e^{it_n^1\Delta}\phi^j)$。

假设 $|t_n^1|\to\infty$。那么，利用色散估计可得 $\|e^{it_n^1\Delta}f\|_{L^p}\to 0$，对任意 $p>2$ 均成立。由 (3.14) 可得

$$\begin{aligned}
&P(u_n)-P(u_n-\phi_n^1)-P(\phi_n^1)\\
\le&\int_{\mathbb{R}^3}[I_\alpha*|\cdot|^{-b}(|u_n|^p-|u_n-\phi_n^1|^p)]|x|^{-b}|u|^p dx\\
&+\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}||u_n-\phi_n^1|^p)|x|^{-b}(|u_n|^p-|u_n-\phi_n^1|^p)dx\\
&+\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|\phi_n^1|^p)|x|^{-b}|\phi_n^1|^p dx\\
\lesssim&\||x|^{-1}u_n\|_{L^2}^{2b}\|u_n\|_{L_x^6}^{2p-1-2b}\|\phi_n^1\|_{L^6}+\||x|^{-1}\phi_n^1\|_{L_x^2}^{2b}\|\phi_n^1\|_{L^6}^{2p-2b}\\
\to&0 \text{ as } n\to\infty.
\end{aligned}$$

现在假设 $t_n^1\equiv 0$。于是我们得到 $(g_n^1)^{-1}\phi_n^1=\phi^1$，并且

$$(g_n^1)^{-1}u_n\to\phi^1 \ weakly\ in\ \dot{H}^1\ as\ n\to\infty. \tag{3.15}$$

通过缩放，我们推导出

$$\begin{aligned}
&P(u_n)-P(u_n-\phi_n^1)-P(\phi_n^1)\\
=&\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n|^p)|x-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n|^p dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n-\phi^1|^p)|x-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n-\phi^1|^p dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p)|x-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p dx\\
=&A_n+B_n+C_n+D_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n=&\int_{\mathbb{R}^3}[I_\alpha*|\cdot-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}(|(g_n^1)^{-1}u_n|^p-|(g_n^1)^{-1}u_n-\phi^1|^p)]|x-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n|^p dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|\cdot-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p)|x-x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n|^p dx.
\end{aligned}$$

$$B_n = \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b} |(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p)|x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}(|g_n^{-1}u_n|^p - |(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p)dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b} |(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p)|x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p.$$

$$C_n = -\int_{\mathbb{R}^3} [I_\alpha * |\cdot - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}(|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p + |\phi^1|^p)]|x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b} |(g_n^1)^{-1}u_n|^p)|x - x_n^1\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p dx.$$

$$D_n = 2\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|\phi^1|^p)|x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p dx.$$

应用由 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 给出的稠密性，我们假设 $\phi^1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$。按照 [7], 中的论证，我们可以得到

$$A_n, B_n, C_n \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

I只需证明 $D_n \to \infty$。如果 $\frac{|x_n^1|}{\lambda_n^1} \to \infty$，令 $\chi_n(x)$ 为记作

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x - \frac{x_n^1}{\lambda_n^1}| \geq \frac{1}{2}|\frac{x_n^1}{\lambda_n^1}| \\ 1, & |x - \frac{x_n^1}{\lambda_n^1}| < \frac{1}{4}|\frac{x_n^1}{\lambda_n^1}| \end{cases},$$

thus

$$\|\nabla(\chi_n\phi^1)\|_{L^2} \to 0 \quad as \quad n \to 0.$$

Then

$$D_n \lesssim \||x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-1}(1-\chi_n)\phi^1\|_{L_x^2}^b + \||x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-1}\chi_n\phi^1\|_{L_x^2}^b$$
$$\lesssim \frac{|x_n^1|}{\lambda_n^1} + \||x - x_n^1/\lambda_n^1|^{-1}\chi_n\phi^1\|_{L_x^2}^b \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

如果 $\frac{x_n^1}{\lambda_n^1} \to x_0$，我们假设 $\frac{x_n^1}{\lambda_n^1} \equiv 0$。由于

$$\|I_\alpha * |\cdot|^{-b}|\phi^1|^p\|_{L^{\frac{6}{3-\alpha}}} \lesssim \|\phi^1\|_{\dot{H}^1}^p,$$

我们可以选取 $\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$，使其在 $L^{\frac{6}{3-\alpha}}$ 中接近 $I_\alpha * |\cdot|^{-b}|\phi^1|^p$。根据稠密性，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^3} \beta(x)|x|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p(x)dx \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

事实上，由 H¨older 不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \beta(x)|x|^{-b}|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p(x)dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^3} \beta(x)|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1|^p(x)dx$$
$$\lesssim \|(g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1\|_{L^6}^{p-1}\|\beta((g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1)\|_{L^{\frac{6}{7-p}}}$$
$$\lesssim \|\beta((g_n^1)^{-1}u_n - \phi^1)\|_{L^{\frac{6}{7-p}}} \to 0 \quad as \quad n \to \infty,$$

其中我们利用乘法算子由 $\dot{H}^1$ 到 L^r 的紧性，其中 β 和 $1 \leq r < 6$。因此，证明完成。□

引理 3.2. 设 f_n 是 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中的一个有界序列。那么存在 $J^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$；剖面 $\phi^j \in \dot{H}^1 \setminus \{0\}$；尺度 $\lambda_n^j \in (0,\infty)$；空间平移参数 $x_n^j \in \mathbb{R}^3$，使得写作

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{J} (\lambda_n^j)^{-\frac{1}{2}} \phi^j\Big(\frac{x - x_n^j}{\lambda_n^j}\Big) + r_n^J(x), \quad 1 \le J \le J^*.$$

该分解具有以下性质：

$$\limsup_{J\to J^*} \limsup_{n\to\infty} \|r_n^J\|_{L_x^6} = 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| \|f_n\|_{\dot{H}^1}^2 - \sum_{j=1}^{J} \|\phi^j\|_{\dot{H}^1}^2 - \|r_n^J\|_{\dot{H}^1}^2 \Big| = 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \Big[\frac{|x_n^j - x_n^k|^2}{\lambda_n^j \lambda_n^k} + \log \frac{\lambda_n^k}{\lambda_n^j} \Big] = \infty, \ \forall j \neq k,$$

$$(\lambda_n^j)^{\frac{1}{2}} r_n^J(\lambda_n^j + x_n^j) \to 0, \ weakly \ in \ \dot{H}^1,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Big[P(f_n) - \sum_{j=1}^{J} P(g_n^j \phi^j) - P(r_n^J) \Big] = 0. \tag{3.16}$$

证明。按照 [15], 中的论证，只需证明 (3.16)。事实上，(3.16) 的证明可由命题 3.1 中的 (3.11) 得出。□

现在，我们证明以下锐加利亚多–尼伦伯格不等式。

命题 3.3（锐加利亚多–尼伦伯格不等式）。设 $p \ge \max\{b, 2\}$。存在正常数 C_0，使得对于任意 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^p dx \le C_0 \|u\|_{\dot{H}^1}^{2p}. \tag{3.17}$$

此外，存在一个径向非负函数 $W \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|W|^p)|x|^{-b}|W|^p dx = C_0 \|W\|_{\dot{H}^1}^{2p},$$

且 W（基态）是以下椭圆方程的解：

$$\Delta W + (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|W|^p)|x|^{-b}|W|^{p-2}W = 0. \tag{3.18}$$

*Pro*的。首先，我们证明加利亚多–尼伦伯格不等式 (3.17)。引理 2.3 表明,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^p dx \le C \| |x|^{-b}|u|^p \|_{L^{\frac{6}{3+\alpha}}}^2.$$

结合这一关系

$$\frac{3+\alpha}{6} = \frac{b}{2} + \frac{p-b}{6},$$

结合 Hölder 不等式和 Hardy 不等式，可得

$$\begin{aligned} \| |x|^{-b}|u|^p \|_{L^{\frac{6}{3+\alpha}}} &\le \| |x|^{-1} u \|_{L^2}^b \|u\|_{L^6}^{p-b} \\ &\le C \|u\|_{\dot{H}^1}^p, \end{aligned}$$

由此，我们完成了（3.17）的证明。

接下来，我们证明不等式（3.17）的锐性。对于任意的 $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$，令$P(f) := \int_{\mathbb{R}^3}($ $I_\alpha * |\cdot|^{-b}|f|^p)|x|^{-b}|f|^p dx$。在 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中定义泛函 $J(f)$:

$$J(f) = \frac{P(f)}{\|\nabla f\|_{L^2}^{2p}}. \tag{3.19}$$

由 $=$ 下缩放 $f_\lambda(x)$ 下 $f(\lambda x)$ 的 $J(f)$ 不变性，存在一个满足 $\|f_n\|_{\dot{H}^1} = 1$ 且 $\{f_n\}$ 的序列

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \sup_{f\in\dot{H}^1\setminus\{0\}} J(f) = C_0.$$

利用 Schwartz 对称重排引理，不失一般性，我们还假设 f_n 是非负径向函数。

根据引理 3.2，我们得到

$$f_n = \sum_{j=1}^{M} g_n^j[\phi^j] + r_n^M.$$

我们断言存在一个剖面，即对于 $j \geq 2$，有 $\phi^j \equiv 0$ 。事实上，由于引理 3.2 中势的渐近消失，有

$$C_0 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(g_n^j[\phi^j]) \leq C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\phi^j\|_{L^2}^{2p}.$$

另一方面，我们得到以下事实

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\phi^j\|_{L^2}^2 \leq 1.$$

如果存在多个剖面 $\phi^j \neq 0$，由于 $p > 1$ ，我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla\phi^j\|_{L^2}^{2p} < 1,$$

thus $C_0 < C_0$，这就产生了矛盾。因此，只存在一个剖面，且 $\|\nabla\phi^1\|_{L^2} = 1$.

由于 $(g_n^1)^{-1}[f_n](x) \rightharpoonup \phi^1$ 在 $\dot{H}^1$ 中弱收敛，且 $\|f_n\|_{\dot{H}^1} = \|\phi^1\|_{\dot{H}^1}$，我们推得

$$\lim_{n\to\infty} \|(g_n^1)^{-1}[f_n] - \phi^1\|_{\dot{H}^1} = 0.$$

因此， $C_0 = J(\phi^1)$。

最后，令 $\lambda = \|\phi^1\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}$，我们定义

$$W(x) = \phi^1(\lambda^{-1}x).$$

我们可以通过 $J(f)$ 的变分导数证明 W 满足椭圆方程 (3.18)（更多细节见 [31, 34] ，证明从略）。至此，我们完成了该命题的证明。□

以下引理表明，方程 (1.1) 的解在其整个存在时间内都满足阈下条件 (1.2)。

引理 3.4（能量俘获，[7, 14]）。设 $u:\ I\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ 是方程 (1.1) 的一个解，其初始数据 u_0 满足 (1.2)。那么存在 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{t\in I}\|u(t)\|_{\dot H^1}<(1-\delta)\|W\|_{\dot H}.$$

此外，

$$E(u(t))\sim\|u(t)\|_{\dot H^1}^2\sim\|u_0\|_{\dot H^1}^2\quad for\quad all\quad t\in I. \tag{3.20}$$

4. Existence of critical solution

本节中，我们沿用 Kenig–Merle [16] 的论证，证明若定理 1.1 不成立，则存在最小能量爆破解。这里的难点在于如何构造非线性剖面。

我们首先给出本文的一个关键结果。该结果证明，对于远离原点的初始数据，存在与之对应的方程 (1.1) 的散射解。这一新方法使我们能够考虑非径向情形。值得一提的是，对于齐次模型，由于非线性项没有衰减，因此无需应用这一新方法。因此，在研究 ($b=0$) 情形下的散射时，我们假设初始数据是径向的。

命题 4.1. 设 $\lambda_n\in(0,\infty)$ $x_n\in\mathbb{R}^3$，且 $t_n\in\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{\lambda_n}=\infty\quad and\quad t_n\equiv 0\quad or\quad t_n\to\pm\infty.$$

令 $\phi\in\dot H^1(\mathbb{R}^3)$，并定义

$$\phi_n(x)=g_n[e^{it_n\Delta}\phi](x)=\lambda_n^{-\frac12}[e^{it_n\Delta}\phi](\frac{x-x_n}{\lambda_n}).$$

则对于所有充分大的 n，存在一个满足 (1.1) 的全局解 v_n

$$v_n(0)=\phi_n,\ \|v_n\|_{S(\mathbb{R})}\lesssim 1,$$

其中隐含常数仅依赖于 $\|\phi\|_{\dot H^1}$。

此外，对于任意 $\epsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$，使得当 $n\ge N$ 时，有

$$\|v_n-T_n[\psi]\|_{S(\mathbb{R})}<\epsilon, \tag{4.21}$$

其中

$$T_nf(t,x)=\lambda_n^{-\frac12}f\big(\frac{t}{\lambda_n^2}+t_n,\frac{x-x_n}{\lambda_n}\big).$$

证明。设 $\theta\in(0,1)$ 是一个待在下文确定的小参数，并引入频率截断 P_n 和空间截断 χ_n，如下所示。首先，我们令

$$P_n=P_{|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{-\theta}\le\cdot\le|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{\theta}}.$$

接下来，我们取 χ_n 为一个满足以下条件的光滑函数

$$\chi_n(x)=\begin{cases}1, & |x+\frac{x_n}{\lambda_n}|\ge\frac12|\frac{x_n}{\lambda_n}|\\ 0, & |x+\frac{x_n}{\lambda_n}|<\frac14|\frac{x_n}{\lambda_n}|,\end{cases}$$

其中 $|\partial^\alpha\chi_n|\le C|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{-|\alpha|}$ 对所有多重指标 α 和 $\chi_n\to1$ 满足 $n\to\infty$。

现在，我们定义近似值 v_n, T。令

$$I_{n,T} := [a_{n,T}^-, a_{n,T}^+] := [-\lambda_n^2 t_n - \lambda_n^2 T, -\lambda_n^2 t_n + \lambda_n^2 T]$$

并且对于 $t \in I_{n,\ T}$ 定义

$$\begin{aligned} v_{n,T}(t) &= g_n[\chi_n P_n e^{i(\lambda_n^{-2} t + t_n)\Delta}\phi] \\ &= \chi_n(\frac{x - x_n}{\lambda_n}) e^{i(t+\lambda_n^2 t_n)\Delta} g_n[P_n\phi]. \end{aligned}$$

接下来，令

$$I_{n,T}^+ := (a_{n,T}^+, \infty), \quad I_{n,T}^- := (-\infty, a_{n,T}^-)$$

并设

$$v_{n,T}(t) = \begin{cases} e^{i(t-a_{n,T}^+)\Delta}[v_{n,T}(a_{n,T}^+)] & t \in I_{n,T}^+, \\ e^{i(t-a_{n,T}^-)\Delta}[v_{n,T}(a_{n,T}^-)] & t \in I_{n,T}^-. \end{cases}$$

条件 1:

$$\limsup_{T\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \{\|v_{n,T}\|_{L_t^\infty \dot{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} + \|v_{n,T}\|_{S(\mathbb{R})}\} \lesssim 1.$$

我们分别对 $I_{n,\ T}$ 和 $I_{n}^{\pm}{}_{,\ T}$ 进行估计。我们首先对 $I_{n,\ T}$ 进行估计。注意到

$$\|\chi_n\|_{L^\infty} + \|\nabla\chi_n\|_{L^3} \lesssim 1,$$

然后利用 Strichartz 和 Sobolev嵌入，我们得到

$$\|v_{n,T}\|_{L_t^\infty \dot{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)} \le C\|\nabla(P_n e^{i(\lambda_n^{-2}+t_n)\Delta}\phi)\|_{L^2} + \|P_n e^{i(\lambda_n^{-2}+t_n)\Delta}\phi\|_{L^6} \lesssim 1$$

and

$$\|v_{n,T}\|_{S(\mathbb{R})} \lesssim 1.$$

有了 $L_t^\infty \dot{H}^1$ 关于 $I_{n,T}$ 的界后，所需的界 $I_{n}^{\pm}{}_{,T}$ 可由 Sobolev 嵌入和 Strichartz 估计推出。

条件 2:

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|v_{n,T}(0) - \phi_n\|_{\dot{H}^1} = 0.$$

我们考虑以下两种情形:
(i) $t_n \equiv 0$ (于是 $0 \in I_{n,T}$),
(ii) $t_n \to \pm\infty$ (因此当 n 充分大时，$0 \in I_{n}^{\pm}{}_{,T}$)。

情形 (i)。若 $t_n \equiv 0$，则

$$\|v_{n,T}(0) - \phi_n\|_{\dot{H}^1} = \|(\chi_n P_n - 1)\phi\|_{\dot{H}^1} \to 0,\ n \to \infty.$$

情形 (ii)。若 $t_n \to \infty$，我们可以写成

$$v_{n,T}(0) = g_n e^{it_n\Delta}[e^{-itT\Delta}\chi_n P_n e^{iT\Delta}\phi].$$

由此得到

$$\begin{aligned} \|v_{n,T}(0) - \phi_n\|_{\dot{H}^1} &= \big\|[e^{-itT\Delta}\chi_n P_n e^{iT\Delta} - 1]\phi\big\|_{\dot{H}^1} \\ &= \|[\chi_n P_n - 1]e^{iT\Delta}\phi\|_{\dot{H}^1} \to 0 \end{aligned}$$

因为 $n \to \infty$。

条件3：记作

$$e_{n,T} = (i\partial_t + \Delta)v_{n,T} + |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_{n,T}|^p)|v_{n,T}|^{p-2}v_{n,T}.$$

请注意,

$$\lim_{T\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\nabla e_{n,T}\|_{N(\mathbb{R})}=0.$$

我们首先考虑区间 $I_{n,\ T}$。定义 $e_{n,\ T}=e_{n}^{lin},\ _{T}+e_{n}^{nl},\ _{T}$，其中

$$\begin{aligned}e_{n,T}^{lin}=&\Delta[\chi_n(\frac{x-x_n}{\lambda_n})]e^{i(t+\lambda_n^2t_n)\Delta}g_n[P_n\phi]\\&+2\nabla[\chi_n(\frac{x-x_n}{\lambda_n})]e^{i(t+\lambda_n^2t_n)\Delta}\nabla g_n[P_n\phi]\end{aligned}$$

and

$$e_{n,T}^{nl}=\lambda_n^{-(p-1)+\alpha}g_n\left\{|\lambda_nx+x_n|^{-b}\chi_n^{p-1}(I_\alpha*|\lambda_n\cdot+x_n|^{-b}|\chi_n\Phi_n|^p)|\Phi_n|^{p-2}\Phi_n\right\}$$

其中 $\Phi_n(t,x)=P_ne^{i(\lambda_n^{-2}t+t_n)\Delta}\phi$。

注意，关于 $e_{n}^{lin},\ _{T}$ 的梯度是以下形式各项之和

$$\partial^j[\chi_n(\frac{x-x_n}{\lambda_n})]e^{i(t+\lambda_n^2t_n)\Delta}\partial^{3-j}[g_nP_n\phi]\quad\text{for}\quad j\in\{1,2,3\}.$$

由 Hölder 不等式和伯恩斯坦不等式可得

$$\begin{aligned}&\left\|\partial^j[\chi_n(\tfrac{x-x_n}{\lambda_n})]e^{i(t+\lambda_n^2t_n)\Delta}\partial^{3-j}[g_nP_n\phi]\right\|_{L_t^1L_x^2(I_{n,T}\times\mathbb{R}^3)}\\&\lesssim|I_{n,T}|\left\|\partial^j[\chi_n(\frac{x-x_n}{\lambda_n})]\right\|_{L_x^\infty}\left\|\partial^{3-j}[g_nP_n\phi]\right\|_{L_t^\infty L_x^2(I_{n,T}\times\mathbb{R}^3)}\\&\lesssim T\left|\frac{x_n}{\lambda_n}\right|^{-j}\left\|\partial^{3-j}[g_nP_n\phi]\right\|_{L_t^\infty L_x^2(I_{n,T}\times\mathbb{R}^3)}\\&\lesssim T|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{-j}|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{|2-j|\theta}\to0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ for θ 足够小时。

为了估计 $e_{n,T}^{nl}$ 在 $I_{n,T}$上的值，我们选择 r 使得

$$1+\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2(p-1)}{r}+\frac{1}{2}.$$

H¨older 不等式给出

$$\|\nabla e_{n,T}^{nl}\|_{L_t^2L_x^{\frac{6}{5}}}\leq\lambda_n^{2b}T^{1/2}\left\|\nabla\left[|\lambda_nx+x_n|^{-b}\chi_n^{p-1}(I_\alpha*|\lambda_n\cdot+x_n|^{-b}|\chi_n\Phi_n|^p)|\Phi_n|^{p-2}\Phi_n\right]\right\|_{L_t^\infty L_x^{\frac{6}{5}}}.$$

注意到

$$\left\|\partial^j[|\lambda_nx+x_n|^{-b}\chi_n^{p-1}]\right\|_{L_x^\infty}\lesssim|\frac{x_n}{\lambda_n}|^{-j}|x_n|^{-b},\quad j\in\{0,1\}.$$

因此，应用 Hardy–littlewood–Sobolev 不等式、H¨older 不等式、Sobolev嵌入和 Bernstein 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|\nabla e_{n,T}^{nl}\|_{L_t^2L_x^{\frac{6}{5}}}\lesssim&T^{1/2}\left|\frac{x_n}{\lambda_n}\right|^{-2b}\|\nabla\Phi_n\|_{L_t^\infty L_x^r}^{2(p-1)}\sum_{j=0}^{1}\left|\frac{x_n}{\lambda_n}\right|^{-j}\|\partial^{1-j}\Phi_n\|_{L_t^\infty L_x^r}\\\lesssim&T^{1/2}\left|\frac{x_n}{\lambda_n}\right|^{-2b+\theta|5/2-3/r|}\to0\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 对 θ 充分小时。区间 $I_{n}^{\pm},\ _{T}$ 上的估计可由 Sobolev嵌入和 Strichartz 轻易得到，此处省略证明。

命题2.6表明，存在具有初始数据 ϕ_n的解 v_n ，且这些解满足以下估计

$$\|v_n\|_{S(\mathbb{R})} \leq C\|\phi\|_{\dot{H}^1} \text{ and } \limsup_{T\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|v_n - v_{n,T}\|_{S(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.22}$$

有了 (4.22)，我们可以借鉴 [19] 中的相同论证，证明可由 C_c^∞函数进行逼近。这里省略证明。□

注 4.1. 如上所述，前一个结果将使我们能够在假设初始数据为非径向的情况下证明 (1.1) 的散射。非线性项的衰减在证明中至关重要。对于齐次模型，要建立这一结果，必须假设数据为径向。

接下来，利用命题 4.1 和稳定性结果，我们可以证明：若定理 1.1 不成立，则 (1.1) 存在一个最小能量爆破解。

定义 4.1. 对每个 $0 < c < E(W)$，定义

$$L(c) := \{\phi \in \dot{H}^1 : E(\phi) < c, \|\phi\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}\}.$$

我们还定义 *critical-index* E_c，记作

$$E_c = \sup\{c : v_0 \in L(c), \|v\|_{S(I_{\max})} < \infty\}, \tag{4.23}$$

其中 v 是方程 (1.1) 的解， $I_{\max}$ 表示最大寿命。

注 4.2. 我们断言 $E_c > 0$。事实上，如果 $E(v_0) < \delta$(δ 足够小)，根据能量俘获，我们可以得到

$$\|v_0\|_{\dot{H}^1} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}}.$$

利用命题 2.5，我们得到 $v(t)$ 是全局的并且散射，且 $\|v\|_{S(\mathbb{R})} < \infty$.

注 4.3. 事实上，定理 1.1 等价于 $E_c = E(W)$。我们将通过反证法证明这一事实。

命题 4.2. 假设定理 1.1 不成立，则存在 $\phi_c \in \dot{H}^1$ 使得 $E(\phi_c) = E_c$且

$$\|\phi_c\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}.$$

设 u_c 为具有初始数据 ϕ_c的方程 (1.1) 的解，则

$$\|u_c\|_{S(I_{\max})} = \infty.$$

定义 4.2. 设 $u_0 \in \dot{H}^1$ 和 $\{t_n\}$ 是满足 $t_n \to \bar{t} \in [-\infty, \infty]$的一个序列。若存在一个满足 $\bar{t} \in I_{\max}$ 的极大区间 $I_{\max}$ ，使得 u 是 (1.1) 在 $I_{\max}$ 上的解，并且

$$\|u(t_n) - e^{it_n\Delta}u_0\|_{\dot{H}^1} \to 0$$

当 $n \to \infty$时。

注 4.4. 我们断言非线性剖面总是存在的。事实上，当 $|\bar{t}| < \infty$. 时，我们取 u 为以初始数据 $e^{i\bar{t}\Delta}u_0$ 为初值的 (1.1) 的解。若 $\bar{t} = \pm\infty$，则定义 $u(t)$ 为

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_t^{\pm\infty} e^{i(t-s)\Delta}(|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|u|^{p-2}u)(s)ds$$

其满足方程（1.1）。利用 Strichartz 估计，我们可以得到 u 在正向/反向时间上散射，即，

$$\|u(t) - e^{it\Delta}u_0\|_{\dot{H}^1} \to 0, \ as \ t \to \infty.$$

接下来，我们通过非线性剖面和稳定性来证明命题 4.2。

命题 4.2 的证明。根据 E_c 的定义，存在一个序列 $\{u_n\}$，使得$\|u_n(0)\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$, $\|u_n\|_{S(I^n_{\max})} \to \infty$ 并且

$$E(u_n) \to E_c$$

当 $n \to \infty$ 时。应用命题 3.1，可得

$$u_n(0) = \sum_{j=1}^{J} g_n^j [e^{it_n^j \Delta} \phi^j] + W_n^J \tag{4.24}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \sum_{j=1}^{J} \lim_{n\to\infty} E(e^{it_n^j \Delta}\phi^j) + \lim_{n\to\infty} E(W_n^J). \tag{4.25}$$

由于动能解耦 (3.10) 且能量非负，因此

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{it_n^j \Delta}\phi^j) \le E_c.$$

我们断言只存在一个剖面，即 $J = 1$。我们将用反证法证明这一性质。若存在多个 $\phi^j \neq 0$, 能量解耦意味着，对每个 $j \ge 1$,

$$\|\phi^j\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1} \text{ and } \lim_{n\to\infty} E(e^{it_n^j \Delta}\phi^j) < E_c. \tag{4.26}$$

固定 j，若 $|\frac{x_n^j}{\lambda_n^j}| \to \infty$（取子序列后），根据引理 4.1，存在方程 (1.1) 的一个全局解 v_n^j，其初始数据为 $g_n^j[e^{it_n^j \Delta}\phi^j]$，且 $\|v_n^j\|_{S(\mathbb{R})} < \infty$。若 $|\frac{x_n^j}{\lambda_n^j}|$ 趋于 $x_0 \in (-\infty, \infty)$，则在此情形下我们总可以假设 $x_n^j \equiv 0$。对于情形 $x_n^j \equiv 0$，按照 [16]，的论证，我们可以构造与 $(\phi^j, \{t_n^j\})$ 相对应的非线性剖面 v^j，使得

$$\|v^j(t_n^j) - e^{it_n^j \Delta}\phi^j\|_{\dot{H}^1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.27}$$

利用这一点、引理 3.4、能量守恒和 (4.26)，我们可以得到 $\sup_{t\in I^j_{\max}} \|v^j(t)\|_{\dot{H}^1} \lhd \|W\|_{\dot{H}^1}$ 和 $E(v^j(t)) < E_c$，这意味着 $\|v^j\|_{S(I^j_{\max})} < \infty$ 和 $I^j_{\max} = \mathbb{R}$。

对于设定 $x_n^j \equiv 0$，我们定义重标度函数

$$v_n^j(t,x) = g_n^j(v^j(\frac{t}{(\lambda_n^j)^2} + t_n^j, x)).$$

因此， $u_n(0)$ 可以写为

$$u_n(0) = \sum_{j=1}^{J} v_n^j(0) + \widetilde{W}_n^J, \tag{4.28}$$

其中

$$\widetilde{W}_n = \sum_{j=1}^{J} \left[g_n^j [e^{it_n^j \Delta}\phi^j] - v_n^j(0) \right] + W_n^J.$$

注意，利用斯特里卡茨估计和关系式 (3.12) - (4.27)，我们得到

$$\lim_{J\to J^*} \lim_{n\to\infty} \|e^{it\Delta}\widetilde{W}_n^J\|_{S^1(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.29}$$

令 u_n^J 表示

$$u_n^J(t) = \sum_{j=1}^{J} v_n^j(t) \tag{4.30}$$

且 $F(z) = (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|z|^p)|z|^{p-2}z$，因此 $u_n^J(t)$ 是解

$$i\partial_t u_n^J + \Delta u_n^J = -|x|^{-b}F(u_n^J) + e_n,$$

其中

$$e_n = |x|^{-b}\left[F(\sum_{j=1}^{J} v_n^j) - \sum_{j=1}^{J} F(v_n^j)\right].$$

若已证明以下三个条件，我们将利用扰动理论导出矛盾:

$$\text{上极限}_{J\to J^*} \text{上极限}_{n\to\infty} \|u_n^J\|_{S^1(\mathbb{R})} < 1, \tag{4.31}$$

$$\limsup_{J\to J^*}\limsup_{n\to\infty} \|e^{it\Delta}(u_{0,n} - u_n^J(0))\|_{S^1(\mathbb{R})} = 0 \tag{4.32}$$

$$\limsup_{J\to J^*}\limsup_{n\to\infty} \|\nabla[(i\partial_t + \Delta)u_n^J + |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u_n^J|^p)|u_n^J|^{p-2}u_n^J]\|_{N(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.33}$$

我们首先考虑第一项，并注意到

$$\Big|\sum_{j=1}^{J} v_n^j\Big|^2 = \sum_{j=1}^{J} |v_n^j|^2 + \sum_{j\neq k} v_n^j v_n^k,$$

$\underline{q_0}$ $\underline{r_1}$然后对两边取 L_t^2 L_x^2 范数，可得

$$\|u_n^J\|_{S^1(\mathbb{R})}^2 = \Big\|(\sum_{j=1}^{J} v_n^j)^2\Big\|_{L_t^{\frac{q_0}{2}}L_x^{\frac{r_1}{2}}} \le \sum_{j=1}^{J}\|v_n^j\|_{S^1(\mathbb{R})}^2 + \sum_{j\neq k}\|v_n^j v_n^k\|_{L_t^{\frac{q_0}{2}}L_x^{\frac{r_1}{2}}}. \tag{4.34}$$

性质 (4.21) 和 (3.13) 表明

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n^j v_n^k\|_{L_t^{\frac{q_0}{2}}L_x^{\frac{r_1}{2}}} = 0.$$

另一方面，利用剖面分解可得

$$\sum_{j=1}^{J}\|\phi^j\|_{\dot{H}^1}^2 + \|W_n^J\|_{\dot{H}^1}^2 = \|u_n(0)\|_{\dot{H}^1}^2 + o_n(1) < \|W\|_{\dot{H}^1}^2,$$

这意味着 $\sum_{j=1}^{\infty}\|\phi^j\|_{\dot{H}^1}^2 \le C_0$。然后我们可以选取足够大的 $J_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{j=J_0}^{\infty}\|\phi^j\|_{\dot{H}^1}^2 \le \frac{\delta}{2},$$

当 $\delta > 0$ 充分小时。因此，固定 $J > J_0$，并利用 (4.27) 可得

$$\sum_{j=J_0}^{J}\|v_n^j(0)\|_{\dot{H}^1}^2 \le \sum_{j=J_0}^{J}\left(\|v_n^j(0) - g_n^j[e^{it_n^j\Delta}\phi^j]\|_{\dot{H}^1}^2 + \|g_n^j[e^{it_n^j\Delta}\phi^j]\|_{\dot{H}^1}^2\right) \le \delta.$$

因此，根据小数据理论（命题 2.5）

$$\sum_{j=J_0}^{J}\|v_n^j\|_{S^1(\mathbb{R})}^2 \le \delta,$$

应用 (4.34) 和最后一个不等式，我们得出 $\|u_n^J\|_{S^1(\mathbb{R})}$ 有界（且与 J 无关）。

现在，我们转而证明第二项。注意到

$$u_{0,n} - u_n^J(0) = \widetilde{W}_n^J,$$

由（4.29）可得所需结果。

最后，我们转而估计（4.33）。注意到

$$(i\partial_t + \Delta)u_n^J + |x|^{-b}F(u_n^J) = |x|^{-b}[F(\sum_{j=1}^J v_n^j) - \sum_{j=1}^J F(v_n^j)]. \tag{4.35}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
(4.35) =&|x|^{-b}\left(I_\alpha * |\cdot|^{-b}\left[\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^p - \sum_{j=1}^J |v_n^j|^p\right]\right)\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j \\
&+\sum_{j=1}^j |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^j|^p)\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j - \sum_{j=1}^J |x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^j|^p)|v_n^j|^{p-2}v_n^j \\
=&\sum_{j=1}^J \Big(|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^j|^p)\Big[\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j - |v_n^j|^{p-2}v_n^j\Big]\Big) \\
&+\sum_{j=1}^J |x|^{-b}\Big(I_\alpha * |\cdot|^{-b}\left[\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^p - \sum_{j=1}^J |v_n^j|^p\right]\Big)\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j \\
=&A + B.
\end{aligned}$$

我们只估计项 A，项 B 类似。直接计算表明

$$\begin{aligned}
|\nabla A| \lesssim&|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)\left|\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J \nabla v_n^j - |v_n^k|^{p-2}\nabla v_n^k\right| \\
&+|x|^{-b-1}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)\left|\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j - |v_n^k|^{p-2}v_n^k\right| \\
&+|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^k|^{p-1}\nabla v_n^k)\left|\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j - |v_n^k|^{p-2}v_n^k\right| \\
&+|x|^{-b}(I_\alpha * |\cdot|^{-b-1}|v_n^k|^p)\left|\Big|\sum_{j=1}^J v_n^j\Big|^{p-2}\sum_{j=1}^J v_n^j - |v_n^k|^{p-2}v_n^k\right| \\
=&: I + II + III + IV,
\end{aligned}$$

其中我们省略了关于示性函数 k 的求和符号。我们只考虑第一项 I，因为其他项类似。应用引理 2.3，只需证明

$$\Big\|(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)|x|^{-b}|v_n^i||v_n^j|^{p-3}\nabla v_n^k\Big\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \to 0,\ i \neq k \tag{4.36}$$

$$\Big\|(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)|x|^{-b}|\nabla v_n^i||v_n^j|^{p-2}\Big\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}} \to 0,\ \ i \neq k \tag{4.37}$$

如 $n\to\infty$。我们首先估计（4.36）。对于 $b>1$，有

$$\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)|x|^{-b}|v_n^i||v_n^j|^{p-3}\nabla v_n^k\right\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\lesssim\left\||x|^{-1}v_n^i\nabla v_n^k\right\|_{L_t^{\frac{q_0}{2}}L_x^{\frac{r_0}{2}}},$$

由正交条件 (3.13) 和 (4.21)，可得 (4.36) 成立。如果 $b\le 1$，我们使用以下不等式

$$\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)|x|^{-b}|v_n^i||v_n^j|^{p-3}\nabla v_n^k\right\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\lesssim\left\||x|^{-b}|v_n^i|^b\nabla v_n^k\right\|_{L_t^{\frac{q_0}{1+b}}L_x^{\frac{r_0}{1+b}}},$$

我们可以得到相同的结果。

我们转而证明 (4.37)。如果 $i\neq j$，证明与上面相同。只需证明情形$i=j$。由 H¨older 不等式可得

$$\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)|x|^{-b}|\nabla v_n^i||v_n^j|^{p-2}\right\|_{L_t^{q_0'}L_x^{r_0'}}\lesssim\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|v_n^k|^p)\nabla v_n^i\right\|_{L_t^qL_x^r},$$

其中 (q,r) 满足

$$1-\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r}+\frac{b}{r_0}+\frac{p-2-b}{r_1};$$

and

$$1-\frac{1}{q_0}=\frac{1}{q}+\frac{p-2}{q_0}.$$

由稠密性和 (4.21)，我们可以假设 $v_n^k=T_n^k\phi$和 $v_n^k=T_n^i\varphi$，其中 $\phi,\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$。利用缩放和变换，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|T_n^k\phi|^p)\nabla T_n^i\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}\\
\lesssim&(\lambda_n^k)^{-1}(\lambda_n^k)^{-\frac{p-1}{2}}\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}T_n^k|\phi|^p)T_n^i\nabla\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}\\
\lesssim&(\lambda_n^k)^{-b-1}(\lambda_n^k)^{-\frac{p-1}{2}}\left\|\Big(I_\alpha*T_n^k(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\Big)T_n^i\nabla\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}\\
\lesssim&(\lambda_n^k)^{\alpha-b-1}(\lambda_n^k)^{-\frac{p-1}{2}}\left\|T_n^k\Big(I_\alpha*(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\Big)T_n^i\nabla\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}\\
\lesssim&(\lambda_n^k)^{\alpha-b-2+\frac{2}{q}+\frac{3}{r}}(\lambda_n^k)^{-\frac{p-1}{2}}\left\|\Big(I_\alpha*(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\Big)(T_n^k)^{-1}T_n^i\nabla\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}.
\end{aligned}$$

根据 (q,r) 的选取，我们有

$$\left\|(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|T_n^k\phi|^p)\nabla T_n^i\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}\lesssim\left\|\Big(I_\alpha*(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\Big)(T_n^k)^{-1}T_n^i\nabla\varphi\right\|_{L_t^qL_x^r}.$$

H¨older 不等式和 Hardy–Littlewood–Sobolev不等式给出

$$I_\alpha*(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\in L_t^{q_2}L_x^{r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

其中

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_1};\ \ \frac{1}{r}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}.$$

若 $x_n\equiv 0$，利用 $C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ 在空间 $L_t^{q_2}L_x^{r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ 中的稠密性，因而存在序列$\{\varphi_n\}\subset C_c^\infty($ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$，使得

$$\varphi_n\to I_\alpha*(|\cdot|^{-b}|\phi|^p)\text{ strongly in }L_t^{q_2}L_x^{r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

若 $\left|\frac{x_n^k}{\lambda_n^k}\right|\to\infty$，当 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ 且 n 足够大时，我们有

$$I_\alpha*(|\cdot+x_n^k/\lambda_n^k|^{-b}|\phi|^p)\lesssim I_\alpha*(|\cdot|^{-b}|\phi|^p),$$

因此，我们可以用 C_c^∞ 函数替代它。只需证明，对于任意 ϕ_0,

$$\|\phi_0(T_n^k)^{-1}T_n^i\nabla\varphi\|_{L_t^qL_x^r}\to 0$$

as $n\to\infty$。利用 ϕ_0、φ 的支撑集，结论成立。详情请参见 [33] .

到目前为止，我们只展示了一个剖面， $\phi^1\neq 0$ 和 $\phi^j=0$ 对应 $j\geq 2$。

我们断言 $x_n^1\equiv 0$。否则，若 $|\frac{x_n^1}{\lambda_n^1}|\to\infty$，则由命题 4.1 可知，对所有足够大的 n，存在一个满足 (1.1) 的全局解 v_n，使得

$$v_n(0)=\phi_n=g_n[e^{it_n\Delta}\phi] \text{ and } \|v_n\|_{S(\mathbb{R})}\lesssim 1.$$

Thus，通过长时间扰动，我们证明了 $\|u_n\|_{S(\mathbb{R})}<\infty$，这与结论矛盾 n.

现在，我们开始证明临界解的存在性。由于

$$E(e^{it_n^1\Delta}\phi^1)\to E_c$$

并且由 (4.28) 可推出 $E(v_n^1(0,x))\to E_c$，因此 $E(\widetilde{W}_n^J)\to 0$，这意味着

$$\widetilde{W}_n^J\to 0, \text{ strongly in } \dot{H}^1.$$

然后令 $u_c=v^1$ （$(\phi^1,\{t_n^j\})$ 的非线性剖面），其满足

$$\|u_c\|_{S(I_{\max})}=\infty$$

并且 $E(u_c)=E_c$。至此，证明完成。 □

5. 紧致解的排除

本节将利用最小能量爆破解的紧性和莫拉维茨估计排除临界解。命题 4.1 最终使我们能够将最小能量爆破解的构造从径向情形推广到非径向情形；此外，它还保证我们最终构造的紧致解始终局部化于原点附近，从而便于使用局部化维里论证。

按照命题 4.2 的论证，我们可以得到最小能量爆破解的紧性（更多细节见 [16, 20] ）。

命题 5.1. 设 u_c 是方程 (1.1) 的临界解。存在一个频率尺度函数 $N:\ I_{\max}\to(0,\infty)$，使得

$$\{N(t)^{-\frac{1}{2}}u(t,N(t)^{-1}x):t\in I_{\max}\}$$

在 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中相对紧。此外，我们可以假设 $N(t)\geq 1$.

5.1. 有限时爆破。 u_c 的紧性性质蕴含约化的杜哈梅尔公式。结合质量守恒，我们可以排除爆破解情形。

命题 5.2（约化的 Duhamel 公式 [20]）。对于 $t\in[0,T_{\max})$，以下结论作为 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 中的弱极限成立:

$$u(t)=i\lim_{T\to T_{\max}}\int_t^T e^{i(t-s)\Delta}(I_\alpha*|\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u(s)ds.$$

命题 5.3. 若 $T_{\max}<\infty$，则 $u\equiv 0$.

证明. 我们假设 $T_{\max} < \infty$。利用 Strichartz、Hardy–Littlewood–Sobolev不等式、伯恩斯坦不等式和哈代不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|P_N u(t)\|_{L_x^2} &\lesssim \|P_N[(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u]\|_{L_t^1 L_x^2}\\ &\lesssim N^{3(\frac{5}{6}-\frac{1}{2})}|T_{\max}-t|\|(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^{p-2}u\|_{L_t^\infty L_x^{\frac{6}{5}}}\\ &\lesssim N|T_{\max}-t|\|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^2}^{2p-1}.\end{aligned}$$

因此，伯恩斯坦不等式再次推出

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L_x^2} &\le \|P_N u(t)\|_{L_x^2} + \|(1-P_N)u(t)\|_{L_x^2}\\ &\lesssim N|T_{\max}-t| + N^{-1}.\end{aligned}$$

由质量守恒，我们推得 $\|u\|_{L^2} = 0$ ，因此 $u \equiv 0$. □

5.2. 孤子型情形。在本节中，我们假设 $T_{\max} = \infty$ ，并通过莫拉维茨估计导出矛盾。

引理 5.4（莫拉维茨恒等式 [30]）。设 a： $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个光滑权函数。定义

$$M(t) = 2\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}\nabla u \cdot \nabla a dx.$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_a(t) = &\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta\Delta a)|u|^2dx + 4\int_{\mathbb{R}^N} a_{jk}\mathrm{Re}(\partial_j\bar{u}\partial_k u)dx\\ &-\left(2-\frac{4}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\Delta a|x|^{-b}|u|^p(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)dx\\ &-\frac{4b}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla a\cdot\frac{x}{|x|^2}(I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^p dx\\ &-\frac{2\mathcal{K}(N-\alpha)}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla a(x)-\nabla a(y))\cdot\frac{x-y}{|x-y|^{N-\alpha+2}}|y|^{-b}|u|^p|x|^{-b}|u|^p dydx,\end{aligned}$$

其中，下标表示偏导数，重复指标表示求和。

引理 5.5（紧性 [14, 20]）。设 $\epsilon > 0$ 和 $p \ge b$。那么存在充分大的 $R = R(\epsilon)$，使得

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\int_{|x|>R}|\nabla u(t,x)|^2 + |x|^{-2}|u(t,x)|^2 + (I_\alpha * |\cdot|^{-b}|u|^p)|x|^{-b}|u|^p(t,x)dx < \epsilon.$$

命题 5.6。如果 $T_{\max} = \infty$，那么 $u \equiv 0$.

证明。将 weight $a(x)$ 记为

$$a(x) = \begin{cases}|x|^2 \quad for \quad |x| \le R\\ CR^2 \quad for \quad |x| > 2R,\end{cases}$$

对于某个 $C > 1$。在这个中间区域，我们可以施加

$$|D^j a| \lesssim R^{2-j} \quad for \quad R < |x| \le 2R.$$

另一方面，引理 5.4 得出

$$\frac{d}{dt}M(t) = 8\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 - (I_\alpha * |\cdot|^b |u|^p)|x|^{-b}|u|^p dx \tag{5.38}$$

$$+ \mathcal{O}\left(\int_{|x|>R} |\nabla u|^2 + |x|^{-2}|u|^2 + (I_\alpha * |\cdot|^b |u|^p)|x|^{-b}|u|^p dx\right). \tag{5.39}$$

由引理 3.4 可得

$$E(u) \lesssim \frac{R^2}{\delta T}E(u) + \epsilon.$$

选取 T 充分大，我们得到 $E(u) \lesssim \epsilon$。于是推得 $E(u) \equiv 0$，这意味着 $u \equiv 0$. □

定理 1.1 的证明。与第 4 节一样，若定理 1.1 不成立，则存在一个临界解u_c 满足方程 (1.1)。由第 5 节可得 $u_c \equiv 0$，从而导出与 $E(u_c) > 0$ 矛盾。因此，定理 1.1 得证。

□

我们以证明推论结束本节。

推论 1.2 的证明。注意到，引理 2.4 对于 $b = 0$ 也成立。我们采用相同的容许对，并取 $b = 0$。因此，本情形下的适定性与稳定性结论仍然成立。此外，定理 1.1 证明中用到的其他先前结论在此情形下也成立。证明过程与非齐次模型的情形非常相似。另一方面，若初始数据是径向的，则在线性分解结果中有 $x_n^j \equiv 0$。因此，该推论的证明可直接由定理 1.1 得出。更具体地说，在构造临界解（针对非齐次情形）时，我们证明了 $x_n \equiv 0$。与情形 $b \neq 0$ 下的结果相同。因此，证明完成。□

推论 1.3 的证明。该结果的证明也可由定理 1.1 得出。不过，关于临界解（命题 4.2），有几点变化需要说明。在聚焦情形下，我们有 $E(u_0) < c$ 且 $\|u(0)\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$。另一方面，在散焦情形下，它满足 $E(u) < c$。需要注意的是，我们此前已证明 $E_c = E(u_c)$。对于散焦情形，我们断言 $E_c = \infty$。为证明这一点，我们反设 $E_c < \infty$。由于所有能量均为正，且与动能相当，因此可以类似于聚焦情形得出结论。□

References

[1] A. K. Arora, *Scattering of radial data in the focusing NLS and generalized hartree equations.* 离散与连续动力系统, 39(11), 6643-6668(2019). [2] M. G. Alharbi and T. Saanouni, *Sharp threshold of global well-posedness vs finite time blow-up for a class of inhomogeneous Choquard equations.* 数学物理学杂志, 60, 081514 2019 ( ). [3] A. K. Arora and S. Roudenko, *Well-posedness and blow-up properties for the generalized Hartree equation*, 双曲微分方程杂志, 17(04), 727-763(2020). [4] L. Berg´e and A. Couairon, *Nonlinear propagation of self-guided ultra-shaort pulses in ionized gases.* 等离子体物理, 7, 210-230(2000). [5] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations.* 美国数学会, 2003. [6] M. Cardoso, L. Farah, C. Guzman and J. Murphy, *Scattering below the ground state for the interactical non-radial inhomogeneous NLS.* 非线性分析：现实世界应用, - ( ). 68,1468 1218 2022

[7] Y. Cho, S. Hong and K. Lee, *On the global well-posedness of focusing energy-critical inhomogeneous NLS.* 演化方程杂志, 20, 1349¨C1380(2020). [8] V. Dinh and S. Keraani, *Long Time Dynamics of Nonradial Solutions to Inhomogeneous Nonlinear Schrödinger Equation.* 4765 4811 2021 工业与应用数学学会数学分析杂志, - ( ). [9] B. Dodson and J. Murphy, *A new proof of scattering below the ground state for the 3d radial focusing cubic NLS.* 145 11 4859 4867 2017 . 美国数学会会刊, ( ), - ( ). [10] D. Fochi, *Inhomogeneous Strichartz estimate.* 双曲微分方程杂志, 2(1),1-24(2005). [11] J. Fr¨ohlich and E. Lenzmann, *Mean-field limit of quantum Bose gases and nonlinear Hartree equation*, in S´eminaire: Equations aux D´eriv´ees Partielles 2003¡§C2004, S´emin. ´Equ. D´eriv. Partielles (Ecole Polytechique, 帕莱索, 2004), Exp. No. XIX, p. 26. [12] T. S. Gill, *Optical guiding of laser beam in nonuniform plasma.* Pramana物理学杂志, 55, 835-842(2000). [13] B. Feng and X. Yuan, *On the Cauchy problem for the Schrödinger–Hartree equation.* 演化方程连续理论, 4(4), 431-445(2015). [14] C. M. Guzm´an and J. Murphy, *Scattering for the non-radial energy-critical inhomogeneous NLS.* 微分方程杂志, 295, 187-210(2021). [15] S. Jaffard, *Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddingd.* 泛函分析杂志, 161, 384- 396(1999). [16] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case.* 166 3 645 675 2006 数学发明, ( ), - ( ). [17] M. Keel and T. Tao. *Endpoint Strichartz estimates.* 美国数学杂志, 120(5), 955-980, (1998). [18] S. Keraani, *On the defect of compactness for the Strichartz estimates for the Schrödinger equations.* 微分方程杂志, 175, 353-424(2010). [19] R. Killip, C. Miao, M. Visan, J. Zhang and J. Zheng, *The energy-critical NLS with inverse-square potential.* 离散连续动力系统, 37(7), 3831-3866(2017). [20] R. Killip and M. Visan, *Nonlinear Schrödinger equations at critical regularity.* in: 演化, in: Clay Math. Proc., vol. 17, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2013, pp.325-437.[21] R. Killip and M. Visan, *The focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in dimensions five and higher.* **132** 2010 2, 361 424 Amer. J. Math. ( ), no. – . [22] E. Lieb, *Analysis, 2nd ed.*, 数学研究生教材, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, Vol 14, (2001). [23] D. Li, C. Miao and X. Zhang, *The focusing energy-critical Hartree equation*, 微分方程杂志, 246(3), 1139¨C1163(2009). [24] J. Murphy, *A simple proof of scattering for the intercritical inhomogeneous NLS.* 美国数学会会刊, 150, 1177-1186(2022). [25] C. Miao, G. Xu and L. Zhao, *Global well-posedness and scattering for the energy-critical defocusing Hartree equation for radial case.* , 泛函分析杂志, ( ), - ( ). [26] C. Miao, G. Xu and L. Zhao, *Global well-posedness and scattering for the energy-critical focusing Hartree equation in the radial case.* , 数学讨论会, - ( ). [27] C. Miao, G. Xu and L. Zhao, *The Cauchy problem of the Hartree equation.* J. PDE., 21, 22-44(2008). [28] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term.* J. Funct. A., 237, 655 674 2006- ( ). [29] T. Saanouni, *Scattering threshold for the focusing Choquard equation.* 非线性微分方程及其应用, 26(41), (2019). [30] T. Saanouni and B. Xu, *Scattering threshold for a class of radial focusing inhomogeneous Hartree equations.* 势分析, 58, 617¨C643(2023). [31] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality.* 纯粹与应用数学年刊 , 110, 353-372(1976). [32] M. Tarulli and G. Venkov, *Decay and scattering in energy space for the solution of weakly coupled Schrödinger-Choquard and Hartree-Fock equations.* 21 1149¨ 1178 2021 演化方程杂志, , C ( ). [33] M. Visan, *Dispersive equations in: Dispersive Equations and Nonlinear Waves. Generalized Korteweg- , , , in: 奥de Vries Nonlinear Schrödinger Wave and Schrödinger Maps.* 45, 伯沃尔法赫研讨会, vol. Birkh¨auser/Springer, 巴塞尔, 2014, xii+312pp. [34] M. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates.* 数学物理通讯, 87, 567-576(1982/83). [35] B. Xu, *Scattering for the non-radial focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger–Choquard equation*, arXiv:2104.09756.

Department of Mathematics, UFF, Brazil

Email address: carlos.guz.j@gmail.com

School of Mathematics and Statistics Qinghai Normal University Xining Qinghai 810008 P.R. , ,, , China.

Email address: xcbsph@163.com