arXiv:2305.00996v1 [hep-ph] 1 May 2023

通过纠缠探测 Schwinger模型中的临界点

Kazuki Ikeda,[1,2,*] *Dmitri E. Kharzeev*,[1,2,3,†] *Ren´e Meyer*,[4,5,‡] 以及 *Shuzhe Shi*[2,6,§]

[1] *Co-design Center for Quantum Advantage, Stony Brook University, Stony Brook, New York 11794-3800, USA*

[2] *Center for Nuclear Theory, Department of Physics and Astronomy,Stony Brook University, Stony Brook, New York 11794-3800, USA*[3] *Department of Physics, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, USA*[4] *Institute for Theoretical Physics and Astrophysics, Julius–Maximilians–Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg, Germany*

[5] *Würzburg-Dresden Cluster of Excellence ct.qmat*[6] *Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*

我们使用经典硬件上的量子模拟，研究有限化学势 μ 下带有 a θ-项的有质量施温格模型的相图。我们发现，可以通过纠缠熵和纠缠谱检测该模型相图中的量子临界点。作为第一步，我们采用传统方法绘制相图，计算电荷和手征凝聚对费米子质量 m、耦合常数 g 和化学势 μ的依赖关系。在零密度下，Schwinger模型在 $\theta = \pi$ 和 $m/g \simeq 0.33$ 处存在一个量子临界点。我们发现，该量子临界点的位置取决于化学势。在该量子临界点附近，我们观察到纠缠熵出现尖锐的极大值。此外，我们发现，可以通过检测能隙闭合点的位置，从纠缠谱中确定量子临界点。

引言。—— Schwinger模型 [1] 是定义在（$1+1$）时空维度中的量子电动力学。该模型具有许多与量子色动力学（QCD）相同的性质，包括禁闭（在有质量的情况下）以及手征对称性破缺。对于无质量费米子的情形，Schwinger模型可以通过解析方法求解，并且等价于自由有质量玻色场的理论 [1–9]。然而，有质量施温格模型无法通过解析方法求解，因此需要采用数值方法。

量子模拟在这一目的上可能具有优势，因为希尔伯特空间会随着晶格点数量的增加而呈指数增长。近年来，人们对量子算法产生了日益浓厚的兴趣，将其作为一种高效且可能更优的方法，用于探索量子场论的动-

力学，包括 Schwinger模型 [10–58]。使用量子算法模拟量子场论的另一项优势在于，在有限化学势下不存在费米子符号问题 [59–62]。

在本研究中，我们使用经典硬件模拟有限温度和化学势下的有质量施温格模型。我们分析基态的纠缠结构，并证明纠缠可以作为一种高效的诊断工具，用于探测相变，尤其是相图中临界点的存在。

具体而言，我们发现，在临界点处，纠缠谱中存在能级交叉。此外，在临界点附近，单个空间区间的纠缠熵遵循二维共形场论的预测。众所周知，纠缠是探测拓扑序的良好工具 [63, 64]。我们的结果表明，纠缠同样可以用于探测涨落拓扑。

在 [65], 中，我们展示了临界点的存在相图中的临界点可以通过实时拓扑磁化率所反映的拓扑涨落的急剧增长来探测。在本研究中，我们通过计算拓扑磁化率以及电荷磁化率，证实了在有限化学势和趋于零的化学势条件下临界点的存在。

$1+1$维量子电动力学。——在有限化学势下，时间规范 $A_0 = 0$ 中的（1+1）维闵可夫斯基时空内，含有 θ 项的有质量施温格模型作用量为

$$H = \int dz \Big[\frac{E^2}{2} - \bar{\psi}(i\gamma^1\partial_1 - g\gamma^1 A_1 - m\,\mathrm{e}^{i\gamma_5\theta} + \mu\gamma^0)\psi \Big] . \tag{1}$$

这里，A_μ 是 U（1）规范势，$E = A_1$ 是对应的电场，ψ 是二分量费米子场，m 是费米子质量，μ 是化学势，而 γ^μ 是二维 γ矩阵，满足克利福德代数。我们采用度规约定$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1)$ 。由式（1）可知，在 $m > 0$ 处，具有正质量 $\theta = \pi$ 的有质量理论等价于在 $\theta = 0$ 处具有负质量 $-m$的理论。

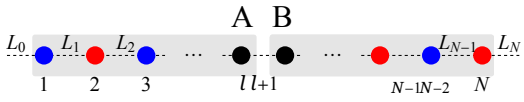

图 1：晶格设置示意图。红点表示费米子，蓝点表示反费米子。我们采用边界条件 $L_0 = -Q/2$ ，由此得到 $L_N = +Q/2$，其中 Q为总电荷。解释见正文。

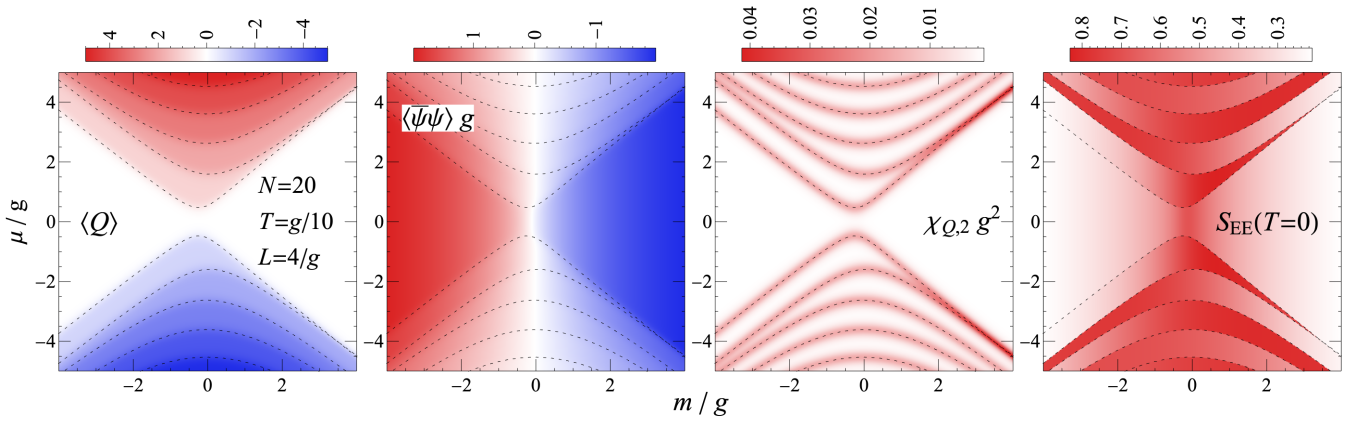

图 2：从左至右，展示了不同费米子质量和化学势下的总电荷、手征凝聚、电荷涨落和基态左右纠缠熵密度图，其中 $N = 20$、$L = 4/g$ 和 $\theta = 0$。纠缠熵对应基态，即 $T = 0$；其他各图则对应 $T = g/10$。每幅图上均叠加了一级相变线（黑色虚线等高线）。更多详情请参见正文。

我们首先对连续系统进行离散化，从而得到如下格点哈密顿量：我们将空间坐标离散化为 $z = a\,n$，其中 a 是格距，而 n 是一个整数。我们选择使用交错费米子 [66, 67], ，其中双分量狄拉克费米子 $\psi = (\psi^1,\ \psi^2)^T$ 在奇数（偶数） n时转换为 $\psi^1(\psi^2) \to \chi_n/\sqrt{a}$。我们进一步分别将 $L_n = E(an)/g$ 和$U_n = e^{-iagA_1(an)}$定义为规范场和规范链路算符，它们连接 n^{th} 与 $(n+1)^{\text{th}}$格点。我们将狄拉克矩阵定义为 $\gamma^0 = Z$、$\gamma^1 = iY$和 $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = X$，其中 X、Y和 Z 是泡利矩阵。格点哈密顿量于是写为

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{im}{2}(-1)^n \sin\theta - \frac{i}{2a}\right)\left(U_n\chi_{n+1}^\dagger\chi_n - U_n^\dagger\chi_n^\dagger\chi_{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(m(-1)^n\cos\theta - \mu\right)\chi_n^\dagger\chi_n + \frac{ag^2}{2}\sum_{n=0}^{N} L_n^2. \tag{2}$$

采用开放边界条件（$\chi_0 = \chi_{N+1} = 0$），我们可以通过规范变换消去链路场 U_n，$\chi_n \to g_n\chi_n$ 和 $U_n \to g_{n+1}U_n g_n^\dagger$，其中 $g_1 = 1$、$g_n = \prod_{m=1}^{n-1} U_m^\dagger$（例如参见 [65, 68]）。理论的规范不变性要求物理态必须满足高斯定律，

$$\partial_z E = g\,\bar\psi\gamma^0\psi. \tag{3}$$

利用（3），可得 $L_n - L_{n-1} = Q_n$，其中 $Q_n = \chi_n^\dagger\chi_n - (1-(-1)^n)/2$ 是局域电荷算符。如图 1所示，我们将边界电场设为 $L_0 = -Q/2$，其中 $Q \equiv \sum_{n=1}^{N} Q_n$ 为总电荷。这给出解

$$L_n = -\frac{Q}{2} + \sum_{m=1}^{n} Q_m\,, \tag{4}$$

在此设置中，电荷共轭（C）等价于宇称反射（P）。在 $\theta = 0$ 处，宇称被明确保留，电荷共轭也同样如此。

最后，我们使用约旦–维格纳变换 [69] $\chi_n = \frac{X_n - iY_n}{2}\prod_{m=1}^{n-1}(-iZ_m)$，随后哈密顿量变为

$$H = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{4a} - \frac{m}{4}(-1)^n\sin\theta\right)\left(X_nX_{n+1} + Y_nY_{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{m(-1)^n\cos\theta - \mu}{2}Z_n + \frac{ag^2}{2}\sum_{n=0}^{N} L_n^2. \tag{5}$$

在我们的研究中，我们对该哈密顿量进行对角化以获得本征态，并计算期望值。

相图。——可观测量 O 在有限温度下的期望值定义为 $\langle O\rangle \equiv \text{Tr}(\rho_{\text{th}}\,O)$，其中热密度矩阵

$$\rho_{\text{th}} \equiv \frac{e^{-H/T}}{\text{Tr}(e^{-H/T})} \tag{6}$$

是温度（T）、化学势和质量的函数。我们关注的可观测量包括总电荷（$\langle Q\rangle \equiv \int\langle\psi^\dagger\psi\rangle \mathrm{d}z$）、手征凝聚（$\langle\bar\psi\psi\rangle \equiv \int\langle\bar\psi\psi\rangle dz/L$）和电荷磁化率（$\chi_{Q,\,2} \equiv (\langle Q\rangle^2 - \langle Q^2\rangle)/L^2$），其中 $L = N\,a$ 为晶格大小。

特别地，我们研究两个子系统之间的纠缠熵 $A = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ 和 $B = \{\ell+1, \cdots, N\}$，见图 1，其中 $A \cap B = \emptyset$，$A \cup B = \{1, 2, \cdots, N\}$。设 ρ为整个系统 $A\cup B$的密度算符。A与B之间的纠缠熵定义为 $S_{EE,\,\ell} \equiv -\text{Tr}_A(\rho_A \log\rho_A)$，其中 ρ_A 通过对 B的希尔伯特空间取迹定义：$\rho_A = \text{Tr}_B\rho$。

纠缠谱 $\{\lambda_i\}$由 ρ_A的特征值张成。在本研究中，我们选择 ρ 作为哈密顿量 $\rho = |\psi_{gs}\rangle\langle\psi_{gs}|$的基态。

在图 2中，我们展示了不同费米子质量和化学势取值下、在 $T = g/10$和 $\theta = 0$、晶格参数为 $N = 10$、$a = 0.5/g$时，电荷、手征凝聚、电荷涨落和基态纠缠熵（$T = 0$以及 $\ell = N/2$）的热期望值结果。在 $\mu \to -\mu$电荷共轭变换下，我们确认总电荷是 C 奇的，$\langle Q\rangle \to -\langle Q\rangle$而手征凝聚、二阶电荷磁化率和纠缠熵是 C 偶的。

我们注意到，在有限化学势下，哈密顿量 (5) 可写为 $H(\mu) = H_0 - \mu Q$，其中总电荷 Q 与 $H_0 \equiv H(\mu = 0)$对易，因此是一个良好量子数。于是，我们可以用能级和电荷 $|q、n\rangle$来标记一个量子态，其中 n^{th} 表示携带 q 个单位电荷的最低能量本征态。我们还指出，$H_0|q、n\rangle = E_n^{(q)}|q、n\rangle$以及 $Q|q、n\rangle = q|q、n\rangle$。电荷共轭对称性要求 $E_n^{(-q)} = E_n^{(q)}$。在化学势为零时，我们发现，依赖于q的最低能量遵循电荷 $E_0^{(q=0)} < E_0^{(|q|=1)} < E_0^{(|q|=2)} < \cdots$的层级关系，并且相邻能级之间的间隙 $E_0^{(|q|+1)} - E_0^{(|q|)}$ 随 $|q|$增大。这是由带电费米子之间的库仑排斥相互作用引起的。在有限 μ下，能量会根据电荷发生如下偏移：$H(\mu)|q、n\rangle = (E_n^{(q)} - \mu q)|q、n\rangle$。当 μ 从下方穿过 $E_n^{(q=1)} - E_n^{(q=0)}$时，系统的基态会从 $q = 0$ 切换为 $q = 1$。通过类似的论证，我们发现，在区间 $(E_n^{(q)} - E_n^{(q-1)}) < \mu < (E_n^{(q+1)} - E_n^{(q)})$ 内，基态的电荷为 q。

这些离散能级取决于费米子质量 m，并确定相图中一阶相变的边界线。图中所有面板的黑色虚线曲线均表示这些边界。2。这些边界将不同的基态区分开来，我们观察到每种状态下的纠缠熵取值各不相同。在低温下，$T = g/10$，我们观察到跨越边界时总电荷明显跃变，且电荷磁化率也在此处达到峰值。

受 $\mu = 0$ 附近分支上纠缠熵峰值的启发，我们对化学势为零的相进行了更详细的研究。我们展示了以下位置的纠缠熵、标量凝聚，以及电荷磁化率和拓扑磁化率：

μ =见图3。拓扑磁化率定义为 $\chi_{\text{CS},\,2} = (\langle q_{\text{CS}}^2\rangle - \langle q_{\text{CS}}\rangle^2)$，其中 $q_{\text{CS}} = \partial_\mu K^\mu$ 是与陈–庞特里亚金数密度相关的量，该密度对应于陈–西蒙斯流（K^μ）的散度。在（1 + 1）维中，$K^\mu = (g/2\pi)\varepsilon^{\mu\nu}A_\nu$ 和 $q_{\text{CS}} = (g/4\pi)\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = (g/2\pi)E = (g^2/2\pi)\sum_{n=1}^{N-1} L_n/(N-1)$。

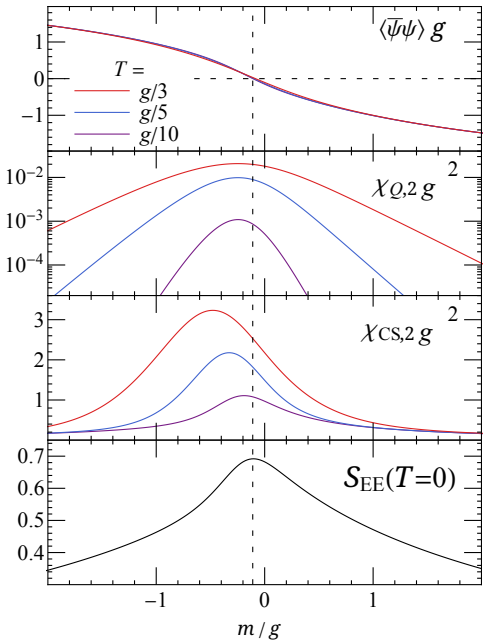

图 3：费米子质量对手征凝聚、矢量荷磁化率、手征磁化率和真空纠缠熵的影响（从上到下），其中 $\theta = 0$ 和 $\mu = 0$。上面三个面板中，红色、蓝色和紫色曲线分别表示 $T = g/3$、$g/5$ 和 $g/10$。

我们观察到，纠缠熵在$m^* \approx -0.11\,g$处达到峰值，此处手征凝聚也消失了。与此同时，在低温下，矢量荷和陈–西蒙斯数的涨落都在相同质量 m^*附近达到峰值。m^* 的数值与先前的计算 [65], 一致；该计算通过实时间拓扑磁化率来探测临界点。

在一些模型中，相图的临界点与纠缠熵峰值重合这一现象已为人所知。例如，有研究指出，纠缠度量适用于分析自旋系统中的相变 [70, 71]。然而，正如 [70], 所强调的，纠缠熵的不连续性并不总是与相图中的临界点相关。

在 $\mu \neq 0$ 图 2中相图的各个分支上，我们观察到，对于奇数电荷，纠缠熵随质量单调增加；对于偶数电荷，则单调减少。这是由于系统中部、子系统 A和 B边界处的电荷密度依赖于质量，见图 4的下方各面板。对于有限化学势，我们在图 [72–74] 中看到了4所讨论的晶体结构的迹象。

在长度为$L = aN$的有限区间上的共形场论中，一个子系统的纠缠熵与

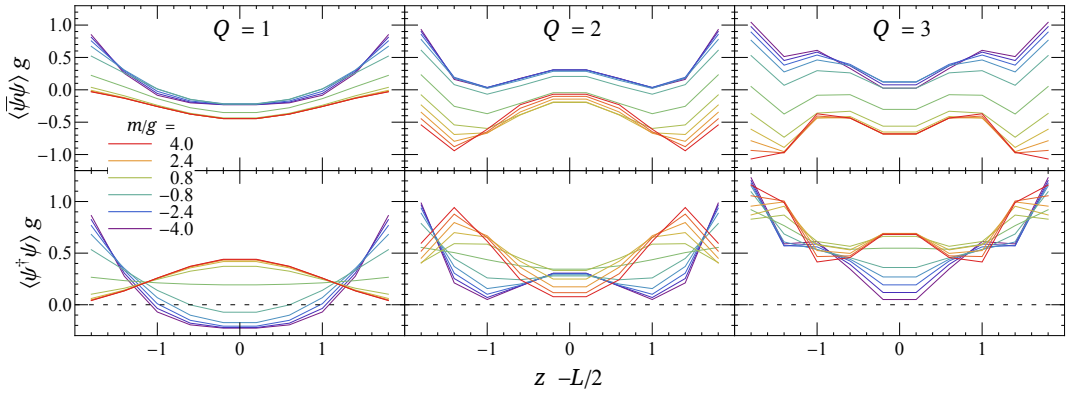

图 4： (从左到右) 对于 $Q=1$、2 3 和各状态，手征凝聚的空间分布（上图）和电荷密度（下图），并标出费米子质量值。

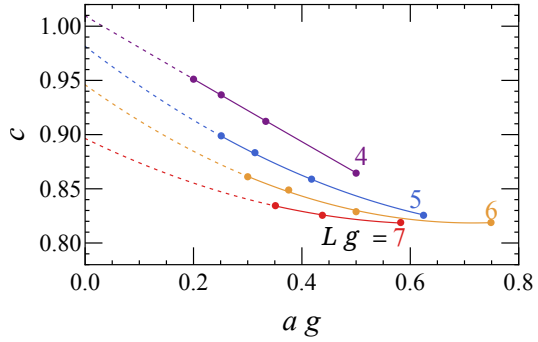

图5：中心荷随晶格间距的变化。虚线曲线为二阶多项式拟合，用于辅助观察。在连续极限 $a \to 0$ 下，它们与预期的中心荷 $c=1$ 十分接近，准确度在 15% 以内。结果是在化学势为零的条件下计算得出的。

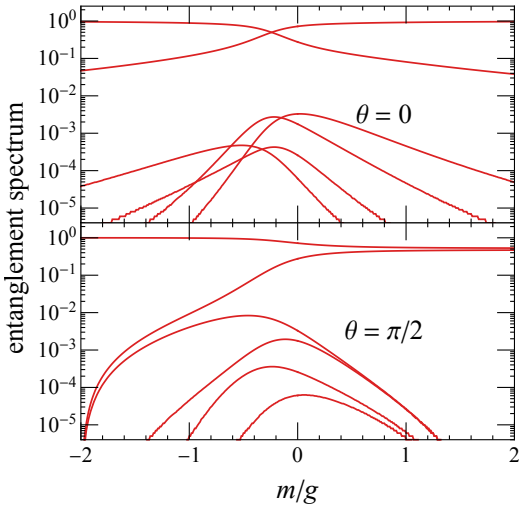

图 6： $\theta=0$ （上图）和 $\theta=\pi/2$ （下图）处的纠缠谱。其他参数设为 $N=10$、$a=0.5/g$ $\mu=0$ 和 。

长度为 $\ell = al$ 的子系统及其补集满足 [75]

$$S_{EE,l} = \frac{c}{6}\ln\left(\frac{2N}{\pi}\sin\frac{\pi\, l}{N}\right) - c', \tag{7}$$

其中 c 为中心荷。已知临界质量为 m^* 的有质量 Schwinger模型是一个共形不动点，属于经典二维伊辛模型的普适类。在该模型中，中心荷在连续极限下预期趋近于 $c=1$ 。接下来，我们研究子系统 A 与 B 之间的纠缠熵，它们如图所示定义。1，其中 A 的长度取为 ℓ。通过改变晶格间距（a）和格点数（N），我们研究纠缠熵中的有限尺寸效应。对于每一组 a 和 N，我们首先通过在 $l=N/2$ 时最大化 S_{EE} 来确定临界质量，然后计算 S_{EE}、$_l$ 在不同 l 取值下的结果。更多细节请参见补充材料中的图 7 。通过使用公式（7）拟合结果，我们得到中心荷（见图 5）。显然， l 对 S_{EE} 的依赖关系$_l$可由（7）很好地描述，相应的中心荷与 $\sim 15\%$ 的差异为 $c=1$。我们推测，与 $c=1$ 的偏差是由有限尺寸效应造成的，因为连续极限下图 5 中的 $ag \to 0$ 已超出我们的数值计算能力。这一点得到以下事实的支持：随着晶格间距减小且格点数量增加，c 似乎趋近于 1。

最后，我们研究纠缠谱。假设子系统 A 的希尔伯特空间维数不大于子系统 B 的维数：$\dim\mathcal{H}_A \le \dim\mathcal{H}_B$。量子态的格拉姆–施密特正交归一化为

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\dim\mathcal{H}_A} \xi_\alpha |\psi_\alpha^A\rangle_A |\psi_\alpha^B\rangle_B, \tag{8}$$

而系数 $\xi_\alpha (\alpha = 1, \cdots,$ 维数$\mathcal{H}_A)$ 构成纠缠谱 [64]。

我们的模拟表明，纠缠谱中的能隙在临界点处闭合，即在 $m^* \simeq -0.11g$；见图6的上图。我们给出了$\mu = 0$处的结果，但我们也在有限化学势下的纠缠谱中发现了类似的能带交叉点。如果 $\theta \neq 0, \pi$ Schwinger模型中的宇称对称性会因背景电场而破缺，从而导致纠缠谱中出现非零能隙。我们通过展示图6下图中 $\theta = \pi/2$处的纠缠谱，证实了这一点。

总之，我们在有限化学势和温度下对有质量施温格模型进行了量子模拟，并发现可以通过纠缠熵和纠缠谱确定相图中临界点的位置。纠缠熵在临界点附近达到峰值，表现出共形行为。临界点附近的纠缠谱呈现能级交叉现象。我们推测，在包括量子色动力学在内的其他更复杂的场论中，纠缠熵和纠缠谱在临界点附近也会表现出类似行为。若能在全息QCD等其他理论中证实这些发现，将会十分有趣， [76, 77], 并研究Schwinger模型中的对称性分辨纠缠 [78]是否同样能够表明临界点的存在。

致谢

我们感谢 Giuseppe Di Giulio 和 Vladimir Korepin 的有益讨论。本研究得到美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心量子优势协同设计中心（C2QA）的支持，合同编号为 DE-SC0012704（KI）；并得到美国能源部科学办公室核物理办公室的支持，资助编号为 DE-FG88ER41450（DK、SS）和 DE-SC0012704（DK）。R.M. 的工作得到德国科学基金会（DFG）通过项目 ID 258499086-SFB 1170“ ToCoTronics”以及维尔茨堡-德累斯顿卓越集群“量子物质中的复杂性与拓扑”——ct.qmat 项目 ID 390858490—EXC 2147 的支持。

*kazuki.ikeda@stonybrook.edu †
dmitri.kharzeev@stonybrook.edu ‡
rene.meyer@uni-wuerzburg.de §
shuzhe-shi@tsinghua.edu.cn

[1] J. S. Schwinger, 《规范不变性与质量》，*Phys.* ( ) – . [,151 *Rev.* **125** 1962 397 398 1962 ( )]. [2] L. Brown, 《二维模型中的规范不变性与质量》，*Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **29** 3, 1963 617 643 第 ( ) – .

[3] C. M. Sommerfield, 《一维空间场论中的流的定义与作用量原理》， *Annals of Physics* **26** 第 1 期，(1964年) 1–43. [4] B. Zumino, 《电荷守恒与光子的质量》， *Phys. Lett.* **10** 第 CERN-TH-425，(1964年) 224–226.[5] C. Hagen, 《模型场论中的流的定义与质量重整化》，*Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **51** 4, 1967 1033 1052 第 ( ) – . [6] J. Lowenstein and J. Swieca, 《二维中的量子电动力学》，*Annals of Physics* **68** 1, 1971 172 195 第 ( ) – .

[7] A. Casher, J. Kogut, and L. Susskind, 《真空极化与自由夸克的缺失》，*Physical Review D* **10** 2, 1974 732 第 ( ) . [8] S. Coleman, R. Jackiw, and L. Susskind, 《有质量施温格模型中的电荷屏蔽与夸克禁闭》， *Annals of Physics* **93** 第 1-2 期，(1975年) 267–275.[9] A. Tomiya, 《使用β变分量子本征求解器研究有限温度和密度下的Schwinger模型》， *arXiv e-prints* (2022年5月) arXiv:2205.08860, arXiv:2205.08860 [高能物理—格点]. [10] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, 《利用电路量子电动力学实现单光子与超导量子比特的强耦合》， *Nature* **431** 第 7005 期，(2004年) 162–167. [11] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, 《通过腔总线耦合超导量子比特》， *Nature* **449** 第 7161 期，(2007年) 443–447. [12] S. P. Jordan, K. S. M. Lee, and J. Preskill, 《量子场论的量子算法》， *Science* **336** (2012年) 1130–1133, arXiv:1111.3633 [quant-ph]. [13] S. P. Jordan, K. S. M. Lee, and J. Preskill, 《标量量子场论中的散射量子计算》，arXiv:1112.4833 [hep-th]. [《量子信息与计算》14,1014(2014年)]. [14] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznik, 《利用超冷原子模拟紧致量子电动力学：探测禁闭与非微扰效应》，*Phys. Rev. Lett.* **109** (2012年) 125302, arXiv:1204.6574 [quant-ph]. [15] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznik, 《用于SU(2)杨-米尔斯格点规范理论的冷原子量子模拟器》，*Phys. Rev. Lett.* **110** 第 12 期，(2013年) 125304, arXiv:1211.2241 [quant-ph]. [16] D. Banerjee, M. B¨ogli, M. Dalmonte, E. Rico, P. Stebler, U. J. Wiese, and P. Zoller, 《U(N)和SU(N)非阿贝尔格点规范理论的原子量子模拟》， *Phys. Rev. Lett.* **110** 第 12 期，(2013 125303, 1211 2242) arXiv: . [ ] cond-mat.quant-gas . [17] D. Banerjee, M. Dalmonte, M. Muller, E. Rico, P. Stebler, U. J. Wiese, and P. Zoller, 《动力学规范场与费米子物质耦合的原子量子模拟：从弦断裂到

夸克淬火后的演化，” *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012年) 175302，arXiv:1205.6366 [凝聚态物理.量子气体]。[18] U.-J. Wiese，“超冷量子气体与晶格系统：格点规范理论的量子模拟，” *Annalen Phys.* **525** (2013年) 777–796，arXiv:1305.1602 [量子物理]。[19] U.-J. Wiese，“迈向量子模拟量子色动力学，” *Nucl. Phys.* A **931** 2014 246 256, 1409 7414 ( ) – [ ] arXiv: . 高能物理. [20] S. P. Jordan、K. S. M. Lee 和 J. Preskill，“费米子量子场论的量子算法，”arXiv:1404.7115 [高能物理]。[21] L. Garc´ıa- ´Alvarez、J. Casanova、A. Mezzacapo、I. L. Egusquiza、L. Lamata、G. Romero 和 E. Solano，“超导电路中的量子场论费米子-费米子散射，” *Phys. Rev. Lett.* **114** 第 7 期，(2015年) 070502，arXiv:1404.2868 [量子物理]。[22] D. Marcos、P. Widmer、E. Rico、M. Hafezi、P. Rabl、U. J. Wiese 和 P. Zoller，“超导量子电路中的二维晶格规范理论，” *Annals Phys.* **351** (2014年) 634–654，arXiv:1407.6066 [量子物理]。[23] A. Bazavov、Y. Meurice、S.-W. Tsai、J. Unmuth-Yockey 和 J. Zhang，“光学晶格上阿贝尔希格斯模型的规范不变实现，” *Phys. Rev.* D **92** 7, 2015 076003, 1503 08354 第 ( ) 期 arXiv: . [ ] 高能物理—格点 。[24] E. Zohar、J. I. Cirac 和 B. Reznik，“利用光学晶格中的超冷原子进行格点规范理论的量子模拟，” *Rept. Prog. Phys.* **79** 第 1 期，(2016年) 014401，arXiv:1503.02312 [量子物理]。[25] A. Mezzacapo、E. Rico、C. Sab´ın、I. L. Egusquiza、L. Lamata 和 E. Solano，“超导电路中的非阿贝尔 $SU(2)$格点规范理论，” *Phys.* 第 ( ) 期 *Rev. Lett.* **115** 24, 2015 240502, arXiv:1505.04720 [量子物理]。[26] M. Dalmonte 和 S. Montangero，“量子信息时代的格点规范理论模拟，” *Contemp.* 第 ( ) 期 *Phys.* **57** 3, 2016 388 412, 1602 03776 – arXiv: .[ ] 凝聚态物理.量子气体 。[27] E. Zohar、A. Farace、B. Reznik 和 J. I. Cirac，“数字晶格规范理论，” *Phys. Rev.* A95 第 2 期，(2017年) 023604，arXiv:1607.08121 [量子物理]。[28] E. A. Martinez *et al.*，“利用少量量子比特量子计算机研究格点规范理论的实时动力学，” *Nature* **534** 2016 516 519, 1605 04570 ( ) – arXiv: . 量 [ ] 子物理 。[29] A. Bermudez、G. Aarts 和 M. M¨uller，“相互作用量子场论生成泛函的量子传感器，” *Phys. Rev.* X7 第 4 期，(2017年) 041012，arXiv:1704.02877 [量子物理]。[30] J. M. Gambetta、J. M. Chow 和 M. Steffen，“在超导量子计算系统中构建逻辑量子比特，” *npj Quantum Information* **3** 第 1 期，(2017年) 2。[31] L. Krinner、M. Stewart、A. Pazmi˜no、J. Kwon 和 D. Schneble，“可调开放量子系统中物质波的自发发射，” *Nature* **559** 第 7715 期，(2018年) 589–592。[32] A. Macridin、P. Spentzouris、J. Amundson 和 R. Harnik，“通用量子计算机上的电子-声子系统，” *Phys. Rev. Lett.* **121** 第 11 期，(2018年) 110504，arXiv:1802.07347 [量子物理]。[33] T. V. Zache、F. Hebenstreit、F. Jendrzejewski、M. K. Oberthaler、J. Berges 和 P. Hauke，“使用 Wilson 费米子对格点规范理论进行量子模拟”， *Sci. Technol.* **3** (2018) 034010，arXiv:1802.06704 [cond-mat.quant-gas]。[34] J. Zhang、J. Unmuth-Yockey、J. Zeiher、A. Bazavov、S. W. Tsai 和 Y. Meurice，“Polyakov环普适特征的量子模拟”， *Phys. Rev.* no. ( ) *Lett.* **121** 22, 2018 223201, 1803 11166 arXiv: .[ ] hep-lat 。[35] N. Klco、E. F. Dumitrescu、A. J. McCaskey、T. D. Morris、R. C. Pooser、M. Sanz、E. Solano、P. Lougovski 和 M. J. Savage，“利用量子计算机对 Schwinger模型动力学进行量子—经典计算”， *Phys. Rev.* A98 no. 3, (2018) 032331, arXiv:1803.03326 [quant-ph]。[36] N. Klco 和 M. J. Savage，“面向量子计算的标量场数字化”， *Phys. Rev.* A99 no. 5, (2019) 052335，arXiv:1808.10378 [quant-ph]。[37] H.-H. Lu *et al.*，“在量子频率处理器上模拟亚原子多体物理”， *Phys.* A no. ( ) *Rev.* **100** 1, 2019 012320, 1810 03959 arXiv: .[ ] quant-ph 。[38] N. Klco 和 M. J. Savage，“量子计算机上局域波函数的最小纠缠态制备”，arXiv:1904.10440 [quant-ph]。[39] H. Lamm 和 S. Lawrence，“在量子计算机上模拟非平衡动力学”， *Phys. Rev. Lett.* **121** no. 17, (2018) 170501，arXiv:1806.06649 [quant-ph]。[40] E. Gustafson、Y. Meurice 和 J. Unmuth-Yockey，“量子伊辛模型中散射的量子模拟”， *Phys. Rev.* D99 no. 9, (2019) 094503，arXiv:1901.05944 [hep-lat]。[41] N. Klco、J. R. Stryker 和 M. J. Savage，“数字量子计算机上一维 SU(2) 非阿贝尔规范场论”，arXiv: 1908 06935 。quant-ph 。 [ ] [42] NuQS合作组、A. Alexandru、P. F. Bedaque、H. Lamm 和 S. Lawrence，“量子计算机上的σ 模型”， *Phys. Rev. Lett.* **123** no. 9, (2019) 090501，arXiv:1903.06577 [hep-lat]。[43] NuQS 合作组、A. Alexandru、P. F. Bedaque、S. Harmalkar、H. Lamm、S. Lawrence 和 N. C. Warrington，“面向量子计算机的胶子场数字化”， *Phys. Rev.* D100 no. 11, (2019) 114501，arXiv:1906.11213 [hep-lat]。[44] N. Mueller、A. Tarasov 和 R. Venugopalan，“混合量子计算机上的深度非弹性散射结构函数”，arXiv:1908.07051 [hep-th]。[45] NuQS 合作组、H. Lamm、S. Lawrence 和 Y. Yamauchi，“量子计算机上的部分子物理”，arXiv:1908.10439 [hep-lat]。[46] G. Magnifico、M. Dalmonte、P. Facchi、S. Pascazio、F.V. Pepe 和 E. Ercolessi，“ Z_n Schwinger-Weyl 格点模型中 1+1 量子电动力学的实时动力学与禁闭”，arXiv:1909.04821 [quant-ph]。[47] B. Chakraborty、M. Honda、T. Izubuchi、Y. Kikuchi 和 A. Tomiya，“通过绝热态制备对带拓扑项的 Schwinger模型进行数字量子模拟”， arXiv:2001.00485 [hep-lat]。[48] D. E. Kharzeev 和 Y. Kikuchi，“数字量子模拟中的实时手征动力学”， *Phys.* no. ( ) *Rev. Res.* **2** 2, 2020 023342, 2001 00698 arXiv: .[ ] hep-ph 。

[49] A. F. Shaw、P. Lougovski、J. R. Stryker 和 N. Wiebe，“用于模拟格点 Schwinger 模型的量子算法”，arXiv:2002.11146 [quant-ph]。[50] B. S¸ahino˘glu 和 R. D. Somma，“低能子空间中的哈密顿量模拟”，arXiv:2006.02660 [quant-ph]。[51] D. Paulson *et al.*，“在量子计算机上模拟格点规范理论中的二维效应”，arXiv:2008.09252 [quant-ph]。[52] S. V. Mathis、G. Mazzola 和 I. Tavernelli，“面向量子计算机上格点规范理论的可扩展模拟”，*Phys. Rev. D* **102** no. 9, (2020) 094501, arXiv:2005.10271 [quant-ph]。[53] NuQS 合作组、Y. Ji、H. Lamm 和 S. Zhu，“通过群空间粗粒化实现面向量子计算机的胶子场数字化”，arXiv: 2005 14221 。hep-lat 。[54] [ ] I. Raychowdhury 和 J. R. Stryker，“SU(2) 哈密顿量格点规范理论中的环、弦与强子动力学”，*Phys. Rev. D* **101** no. 11, (2020) 114502，arXiv:1912.06133 [hep-lat]。[55] Z. Davoudi、I. Raychowdhury 和 A. Shaw，“寻找非阿贝尔格点规范理论哈密顿量模拟的高效表述”，arXiv:2009.11802 [hep-lat]。[56] R. Dasgupta 和 I. Raychowdhury，“用于非阿贝尔格点规范理论中弦与强子动力学的冷原子量子模拟器”，arXiv:2009.13969 [hep-lat]。[57] G. Magnifico、D. Vodola、E. Ercolessi、S. P. Kumar、M. M¨uller 和 A. Bermudez，“格点规范理论中的对称性保护拓扑相：拓扑量子电动力学$_2$，” *Phys. Rev. D* **99** no. 1, (2019) 014503，arXiv:1804.10568 [cond-mat.quant-gas]。[58] K. Ikeda，“量子场论相变点处量子能量隐形传态的临界性”，*Phys. Rev. D* **107** (Apr, 2023) L071502。https: // link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.L071502。[59] R. P. Feynman，“用计算机模拟物理”，*International Journal of Theoretical Physics* **21** no. 6, (Jun, 1982) 467–488。https://doi.org/10.1007/BF02650179。[60] J. Preskill，“用量子计算机模拟量子场论”，*PoS* LATTICE2018 (2018) 024，arXiv:1811.10085 [hep-lat]。[61] S. P. Jordan、K. S. M. Lee 和 J. Preskill，“量子场论的量子算法”，*Science* **336** (2012) 1130–1133，arXiv:1111.3633 [quant-ph]。[62] J. Preskill，“量子计算四十年后”，arXiv:2106.10522 [quant-ph]。[63] H.-C. Jiang、Z. Wang 和 L. Balents，“通过纠缠熵识别拓扑序”，*Nature Physics* **8** 12, 2012 902 905 no. (Dec,) – 。https://doi.org/10.1038/nphys2465。[64] F. Pollmann 、 A. M. Turner、E. Berg 和 M. Oshikawa，“一维拓扑相的纠缠谱”，*Phys. Rev. B* **81** (Feb, 2010) 064439。https: // link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.064439。[65] K. Ikeda、D. E. Kharzeev 和 Y. Kikuchi，“临界点附近 Chern-Simons 涨落的实时动力学”，*Phys. Rev. D* **103** no. 7, (2021) L071502, arXiv:2012.02926 [hep-ph]。[66] J. B. Kogut 和 L. Susskind，“哈密顿量表述

《威尔逊格点规范理论》，*Phys. Rev.* D11（1975年）395–408。[67] L. Susskind，《格点费米子》，*Phys. Rev.* D16（1977）3031–3039。[68] A. Florio、D. Frenklakh、K. Ikeda、D. Kharzeev、V. Korepin、S. Shi 和 K. Yu，《喷注产生的实时非微扰动力学：量子纠缠与真空修正》，arXiv:2301.11991 [hep-ph]。[69] P. Jordan 和 E. P. Wigner，《关于泡利不相容原理》，*Z. Phys.* **47** （1928）631–651。[70] M. Filippone、S. Dusuel 和 J. Vidal，《全连接自旋模型中的量子相变：纠缠视角》，*Phys. Rev. A* **83** （2011）022327，1101.3654。https://arxiv.org/pdf/1101.3654.pdf。[71] Y. Susa、J. F. Jadebeck 和 H. Nishimori，《量子涨落与非化学计量哈密顿量中量子退火性能提升之间的关系》，*Phys. Rev. A* **95** （2017年4月）042321。https: // link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.042321。[72] W. Fischler、J. B. Kogut 和 L. Susskind，《特殊环境中的夸克禁闭》，*Phys. Rev. D* （ ） 。 **19** 1979 1188 [73] Y.-C. Kao 和 Y.-W. Lee，《有限密度下 Schwinger模型中的非均匀手征凝聚》，*Phys. Rev. D* **50** （1994）1165–1166。[74] S. Nagy、J. Polonyi 和 K. Sailer，《带电有质量施温格模型的周期性基态》，

Phys. （ ） *Rev. D* **70** 2004 105023, 0405156 arXiv:hep-th/ 。[75] P. Calabrese 和 J. Cardy，《纠缠熵与共形场论》，*J. Phys. A* **42** （2009）504005，arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]。[76] T. Sakai 和 S. Sugimoto，《全息 QCD中的低能强子物理》，*Prog. Theor. Phys.* **113** （2005）843–882，arXiv:hep-th/0412141。[77] H.-U. Yee 和 I. Zahed，《全息二维QCD与陈-西蒙斯项》，*Journal of High Energy Physics* **2011** 7, 2011 1 19 第（ ）– 。

[78] M. Goldstein 和 E. Sela，《多体系统中的对称性分辨纠缠》，*Physical review letters* **120** 20, 2018 200602 第（ ）。

中心荷确定

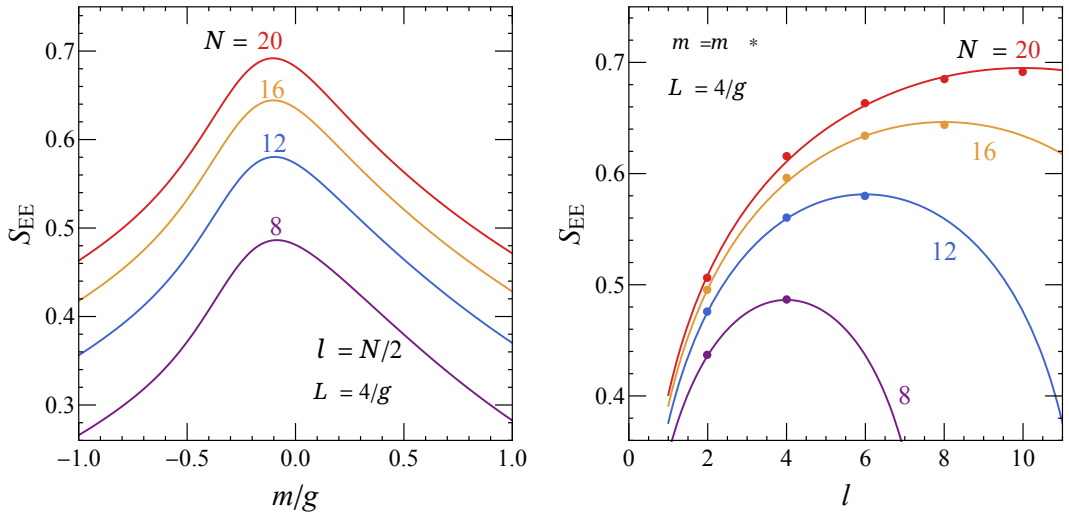

图7：纠缠熵对质量（左）和长度（右）的依赖关系。中间面板中的曲线是使用公式（ $N = 8$）进行拟合得到的结果。紫色、蓝色、橙色和红色曲线分别对应格点数为 、12、16 和 20 的情况。结果均在化学势为零时计算。

这里我们补充正文图5的更多细节，其中展示了不同晶格间距（c）和格点数（a）下中心荷（N）的结果。我们以长度为 $L = 4/g$ 的系统为例。对于每组 a 和 N的取值，我们首先通过最大化m^*来确定临界质量（ S_{EE} ），其中 $l = N/2$; 见图7 （左）。然后，我们取 $m = m^*$ 并计算S_{EE}、l 在不同 l取值下的结果，这些结果以圆点形式显示在图7 （右）中。最后，根据正文中的公式（7）拟合 ℓ 对 S_{EE} 的依赖关系，最佳拟合结果也显示在图7 （右）中。