改变参数后的考拉兹猜想探索

Raina Shrimali、Shouvik Ahmed Antu 和 Miranda Jones

2022年11月18日

威拉米特大学

IDS-101-32-22/FA

摘要：

探索考拉兹猜想并将表达式从3n ＋1 改为 5n ＋1后，我们在不同的数字集合中发现了规律。有些数字会减小到 1（如考拉兹猜想所述），有些可能会逃逸至无穷大，还有些则会陷入重复循环。为了进一步探索类似考拉兹表达式中的规律，我们将表达式改为 3n+5 ，并发现了 3n+1 与 3n+5之间的联系。

引言：

考拉兹猜想是一个有趣、任意且看似简单的问题。数学家卢瑟·考拉兹在 1937 年获得博士学位两年后，将这个问题介绍给了世人（O'Connor, Robertson）。此后，它一直难倒数学界，因为至今无人能够证明它是错误的还是正确的。这个猜想如下：

取任意一个自然数。如果该整数为偶数，就不断除以 2，直到它变成奇数。它变成奇数后，将其代入方程"3n ＋1"。根据考拉兹的说法，如果对从起始整数推导出的每一项都执行这两种运算，最后一项最终会达到 1。可以用以下分段函数检验这个猜想：

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & : n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2} & : n \text{ is even} \end{cases}$$, where n is a positive integer.

然而，原始的考拉兹猜想已经被研究过无数次，而要真正证明这一猜想，剩下的工作所需的资源和经验超出了我们小组的能力。迄今为止，数学家已经证明，任何小于 2^{68}、代入 3n+1表达式的数，最终都会回到一（Cooke）。Terence Tao 在 2019 年证明了大多数数字——99% 或更多——都会回到一，从而在这一问题上取得了广为人知的进展，尽管他未能证明该猜想在所有情况下都成立（Hartnett）。由于我们没有超级计算机，因此我们决定

将研究方向转向其他有趣的规律，最终选择了修改后的表达式“5n+l”，它具有一些独特而有趣的性质。我们选择将*n* 乘以五而不是三，是因为这一简单变化产生的结果偏离了考拉兹猜想。代入该方程的奇数并不会全部回到一；有些会陷入循环，有些则会无限重复。因此，我们的主要研究重点是数字循环的性质，以及哪些数字会陷入循环、原因又是什么。

数学过程：

我们对考拉兹猜想的修改版本进行的主要研究，是测试1-100的数字。之所以只测试这一有限范围内的数字，是因为整数乘以五会使数值迅速增大。起始数越大，它就越有可能（看似）逃逸至无穷大。因此，除非发现值得进一步探究的规律，否则我们只测试100个整数。例如，我们在100以下的2和5的倍数中发现了一种规律，于是测试了大于100的数字，以观察这种规律是否会继续出现。

借助我们的 Python 计算机程序，研究几乎立即让我们发现了规律。感兴趣的读者可以在**附录A**中找到代码。该程序可以显示这些数字是否会重复（无限重复，或陷入重复循环），无需手动计算方程。我们创建了一个 Google 表格，记录每个数是否会重复、每个数字循环中的位数，以及该数最终是否会达到1。记录这些信息是为了寻找规律。我们并未预先设定任何特定规律，而是留意任何异常现象，希望它最终能发展成一个可证明的猜想。

寻找规律的过程比我们最初预想的快得多。在白板上写出数字时，我们很快就在满足 $2^r * 5$ where $(r \in N)$ 的数字中发现了规律。这些数字都有重复循环，且不会回到 1。

$2^r * 5$，其中（r ∈N）	循环中的数的总数 重复循环：	数字循环：
5（基数数)	10	{26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52}
10	10	{26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52}
20	10	{26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52}
40	10	{26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52}
80	10	{26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52}

图 A：显示数字 $2^r * 5$ 的重复循环，其中 (r ∈N)。

我们发现，二和五的一些倍数具有相同的重复数字规律，其中包含 10 个不同的数字。这是因为这些数字除以二后都会变成五。每个数字被二除的次数不会影响重复数字循环。五也属于这一组，因此我们必须将这组数字命名为 $2^r * 5$ where (r ∈N)。我们的定理是：

对于分段函数，

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & when\ n\ is\ even \\ 5n + 1, & when\ n\ is\ odd \end{cases}$$

当 n 等于 $10 * 2^r$ 时，无限循环的重复循环在经过 $(1 + r)$ 次计算后开始。

得出这个定理后，我们想看看还存在其他哪些数字循环。我们发现，在 1 至 100 的数字重复循环中，数字只有两种变化形式。等我们测试更多数字后，这一发现或许会发展成一个涉及所有正整数的猜想

。一些不能被 2 和 5 整除的数，其循环中包含上表列出的相同数字；另一些则包含一组完全不同的 10 个数字：

数：	循环中的数的总数 重复循环：	数字循环：
13	10	{66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26, 13}
17	10	{86, 43, 216, 108, 54, 27, 136, 68, 34, 17}
26	10	{13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26}
27	10	{136, 68, 34, 17, 86, 43, 216, 108, 54, 27}
33	10	{166, 83, 416, 208, 104, 52, 26, 13, 66, 33}
34	10	{17, 86, 43, 216, 108, 54, 27, 136, 68, 34}
43	10	{216, 108, 54, 27, 136, 68, 34, 17, 86, 43}

图B：显示了前六个数的数字循环及其重复循环。这些数字

循环内的内容按代入 5n ＋1 时出现的顺序书写 .

=第一种循环变体（如上所示，出现在二和五的倍数中）

= 第二种循环变体

从小到大排列的数字：

13，26，33，52，66，83，104，166，208，416

17、27、34、43、54、68、86、108、136、216

按出现顺序排列的数字（从 13 和 17 开始）：

13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26

17, 86, 43, 216, 108, 54, 27, 136, 68, 34

按从最小到最大的顺序合并循环（以展示循环中数字的多样性）：

13、17、26、27、33、34、43、52、54、66、68、83、86、104、108、136、166、208、216、416

相比之下，序列中的 5 与 13 循环：

5：26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52

13：66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26

=奇数*

* 重复数字循环非常令人费解。每个奇数的末尾不是 3 就是 7。我们小组至今还没有发现这种奇怪规律背后的原因。

我们小组在试图找出数字循环中的规律时有些卡住了。为什么这两个循环会不断出现？为什么其中的数字会无限重复？是否还有我们尚未发现的其他循环，只是因为我们没能测试更大范围的数字？随着我们继续收集数据并测试数字，这些问题的答案会逐渐显现。与此同时，为了避免面对重复数字循环时感到困惑，我们提出了一条简单却有效的定理：

如果从任一循环中取一个数，m，并将其乘以 $2^r (r \in N)$，所得的数在应用分段函数时将具有与m相同的重复数字循环

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & when\ n\ is\ even \\ 5n+1, & when\ n\ is\ odd \end{cases}$$

这是因为数 (m* 2^i) 在代入方程 5n + 1 之前必须先除以二，而经过这些除法后，该数最终会回到m。该数被除以二的次数不会以任何方式影响重复循环。这个定理存在局限，因为我们还没有测试过包含四位以上数字的数。不过，就目前的目的和可用资源而言，只要我们继续测试较小的数，这个定理就适用。

在探索 5n + 1 后，我们将表达式改为 3n+5 ，因为它包含素数 3 和 5，而且生成的数字与使用 3n+1 时生成的数字相近。不过，与可能导致数字趋向无穷大的 5n + 1 不同，3n + 5 似乎只会产生重复环路。到目前为止，我们发现了四个重复循环。

数:	循环中的数的总数 重复循环:	数字循环:
1	4	8, 4, 2, 1
3	8	38, 19, 62, 31, 98, 49, 152, 76
5	3	20, 10, 5
23	8	37, 116, 58, 29, 92, 46, 23, 74

图 C：展示了迄今为止我们在计算中发现的四种不同的数字循环。左列中的数字之所以被选中，是因为它们是分别产生这四种不同数字循环的最小数字。

为 3n + 5 编写新代码后，我们小组按照探索表达式 5n + 1 时采用的相同流程，记录了 Google 表格中前 100 个自然数的数字循环。起初，重复循环似乎是随机出现的。不过，注意到一个规律后，我们提出了一个新的猜想：

5 的倍数在应用分段函数时会形成重复循环 *20, 10, 5*

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & when\ n\ is\ even \\ 3n + 5, & when\ n\ is\ odd \end{cases}$$

数：	循环中的数的总数 重复循环：	数字循环：
5	3	20、10、5
15	3	20、10、5
25	3	20，10，5
35	3	20，10，5

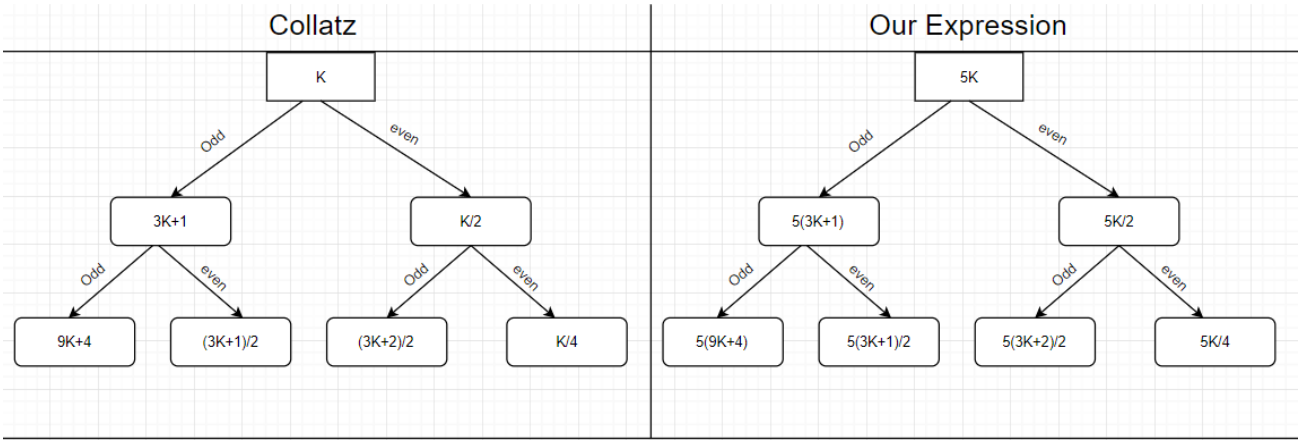
图 D：展示了前四个五的倍数及其重复循环。

数：	循环中的数的总数 重复循环：	数字循环：
225	3	20, 10, 5
17585	3	20, 10, 5

3698450	3	20，10，5

图 E：展示了三个以五或零结尾的随机数及其重复循环。这样做是为了说明，不仅两位数的五的倍数具有相同的重复循环。

现在请注意，20、10 和 5 中的数字恰好是 4、2 和 1 中数字的 5 倍。回到考拉兹猜想，所有数字都会按照 4、2 和 1 的规律递减，因此这与我们的新表达式存在直接联系。请看下图，其中展示了这两个表达式之间的关系：



我们考虑任意正整数，以及一个数可能具有的两种性质：偶数或奇数。取任意一个数，k，将其代入表示考拉兹猜想的分段函数，再将该数的 5 倍 $5k$代入新的表达式，可以看出，所得数字是考拉兹分段函数输出结果的 5 倍。

由于我们考虑了偶数和奇数这两种情况，因此已经证明：如果考拉兹猜想成立：

对于函数 X、Y 的任意正整数 K，计算结果将为*y(k)=5(x(k))*

$$X(k) = \begin{cases} k/2, \ when\ k\ is\ even \\ 3k+1, \ when\ k\ is\ odd \end{cases} \quad Y(5k) = \begin{cases} k/2, \ when\ k\ is\ even \\ 3k+5, \ when\ k\ is\ odd \end{cases},$$

因此，我们表达式 3n ＋5 的输出与科拉茨的原始表达式相对应，并具有相互关联的规律。

结论：

考拉兹猜想是一个广为人知的猜想，数十年来，许多杰出的数学家都对其进行了深入研究。我们对这一猜想稍作变体后，有了一些有趣的发现。使用 5n ＋1 时，我们发现，有些数字的行为符合考拉兹的预测，有些会进入重复环路，还有一些可能真的会逃逸至无穷大。使用 3n+ 5 时，我们注意到，似乎没有任何数字会逃逸至无穷大；它们都会进入某种重复循环。更有趣的是，将数字代入分段函数时，只会出现 4 种不同的重复规律。我们发现，3n ＋5 表达式与考拉兹的原始表达式之间存在独特的联系，为进一步探索打开了大门。

附录A：

Python 代码：*x= [*任意自然数*]*数字列表*=[ ]*当 *x !=1* 且 *len(l) != 100000* 时：如果 *x% 2==0*：*x=x/2 l.appe nd(int(x))* 否则：*x=(5*x+1) l.append(int(x))* 打印*(*数字列表*)*

参考文献：

Cooke, John D.《考拉兹猜想的怀疑论》，John D. Cook 应用数学咨询，2020年7月5日。https://www.johndcook.com/blog/2019/09/16/collatz-conjecture-skepticism/。

Hartnett, Kevin.《数学家证明了一个关于“危险”问题的重大结果》。《量子》杂志，2019年12月11日，
w
ww.quantamagazine.org/mathematician-proves-huge-result-on-dangerous-problem-20191211/。

O'Connor, J J, 和 E F Robertson。《洛塔尔·考拉兹——传记》，数学史，2006年11月。https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Collatz/。