arXiv:2305.01025v1 [math.RA] 1 May 2023

关于相容 Leibniz 代数

Abdenacer Makhlouf [1*]和 Ripan Saha[2†]1. 上阿尔萨斯大学，I RIMAS-数学系，18, rue des Frères Lumière 68093 Mulhouse, France 2. 数学系，拉伊甘杰大学，Raiganj 733134, 西孟加拉邦，印度

摘要

本文研究相容 Leibniz 代数。我们用适当的微分分次李代数的 Maurer-Cartan 元素刻画相容 Leibniz 代数。我们定义了相容 Leibniz 代数的上同调理论，该理论尤其能够控制这一代数结构的单参数形式变形理论。受上同调的一项经典应用启发，我们还研究了相容 Leibniz 代数的阿贝尔扩张。

关键词：莱布尼茨代数，相容 Leibniz 代数，上同调，形式变形。

M2020 年数学主题分类：17A30、17A32、17D99、17B5 5.

1 引言

在 [18], J.-L. Loday 引入了一些新型代数及其（上）同调，并研究了相关的幺半群。莱布尼茨代数及其 Koszul 对偶 Zinbiel 代数，都是此类代数的例子。莱布尼茨代数是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配备一个双线性映射 $[\ ,\ ]$，满足以下莱布尼茨恒等式：

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y] \quad \text{for } x,\ y,\ z\in\mathfrak{g}.$$

在斜对称性的条件下，莱布尼茨恒等式会化为雅可比恒等式，因此李代数是莱布尼茨代数的一个例子。由此可见，莱布尼茨代数是李代数的一种非反对称类比。事实上，布洛赫 [3] 于 1965 年首次研究了这类代数，并将其称为 D-代数。洛代 [17] 研究了莱布尼茨代数与矩阵代数的循环同调和 Hochschild 同调性质之间的联系。莱布尼茨代数也出现在数理物理中，在相关文献中也称为洛代代数。

*电子邮箱：abdenacer.makhlouf@uha.fr

†通讯作者，电子邮箱：ripanjumaths@gmail.com

过去十年间，莱布尼茨代数及其性质得到了深入研究；然而，对于这类代数的诸多方面，我们仍知之甚少。本文提出并研究相容莱布尼茨代数这一概念。域 $\mathbb{K}$ 上的两个莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_1)$ 和 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_2)$ 若满足：对于任意$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$，下列双线性运算

$$[x, y] = \lambda_1 [x, y]_1 + \lambda_2 [x, y]_2,$$

对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，定义了 $\mathfrak{g}$ 上的莱布尼茨代数结构。事实上，括号运算的任意线性组合定义一个莱布尼茨代数，等价于括号运算之和 $[\ ,\ ]_1 + [\ ,\ ]_2$ 在 $\mathfrak{g}$ 上定义一个莱布尼茨代数结构。Golubchik 和 Sokolov [11, 12, 13] 研究了相容李代数，并指出相容李代数与李代数的 Nijenhuis 变形、经典杨–巴克斯特方程以及主手征场密切相关。Odesskii 和 Sokolov [23, 24] 研究了相容结合代数及其与结合杨–巴克斯特方程、箭图表示之间的关系，也研究了与椭圆曲线相关的相容李括号 [22]。文献 [20] 讨论了相容双代数。在几何背景下，相容泊松结构出现在双哈密顿力学的数学研究中 [19, 15, 8]。文献 [5]，从上同调视角研究了相容结合代数；在类似背景下，文献 [6] 研究了相容 Hom-结合代数。文献 [16]，研究了相容李代数和 Hom-李代数，也研究了这些代数的上同调与变形理论。文献 [7] 研究了相容李代数的同伦版本。关于各种相容代数及其应用的更多有趣研究，参见 [28, 27, 26]。

基于形式幂级数的结合代数代数变形理论由 Gerstenhaber 在 [10, 9], 中提出，并指出它与上同调群密切相关。Nijenhuis 和 Richardson 在 [21]中将单参数形式变形理论推广到李代数。此后，学者们沿着 Gerstenhaber 的思路，对其他代数结构的变形理论进行了广泛研究。要研究某类代数的变形理论，需要一种合适的上同调，称为变形上同调，它控制着相关的变形。对于结合代数，Gerstenhaber 指出变形上同调就是霍赫希尔德上同调 [14]；而对于李代数，相应的变形上同调则是 Chevalley-Eilenberg 上同调。

本文的结构安排如下：第2节回顾莱布尼茨代数的定义、例子、表示和上同调。第3节定义相容莱布尼茨代数的概念，给出一些例子，并对低维情形进行分类。此外，我们还讨论相容莱布尼茨代数的表示。第4节构造一个适当的微分分次李代数，并将相容莱布尼茨代数刻画为该分次李代数的 Maurer-Cartan 元素。第5节通过结合给定莱布尼茨代数的两类上链，为相容莱布尼茨代数定义一种上同调理论。第6节为相容莱布尼茨代数定义单参数形式变形理论，研究无穷小变形，并证明我们在第5 节定义的上同调就是变形上同调。最后，第7节研究相容莱布尼茨代数的阿贝尔扩张，并证明此类扩张的等价类与第二上同调群的元素一一对应。

2 预备知识

本节回顾本文后续所需的莱布尼茨代数基础知识。

定义 2.1. 设 $\mathbb{K}$ 是一个域。莱布尼茨代数是域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 $\mathfrak{g}$，并配备一个 $\mathbb{K}$-双线性映射（称为括号运算），该映射满足莱布尼茨恒等式：

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y] \quad \text{for all} \quad x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}.$$

任意李代数都自动是莱布尼茨代数，因为在具有反对称性的情况下，雅可比恒等式等价于莱布尼茨恒等式。因此，莱布尼茨代数是李代数的推广。

例 2.1. 设 $(\mathfrak{g}, d)$ 是一个带有李括号 $[\ ,\ ]$ 的微分李代数。那么 $\mathfrak{g}$ 继承了一个莱布尼茨代数结构，其括号运算 $[x,y]_d$ 定义为：$= [x, dy]$。$\mathfrak{g}$ 上的这个新括号称为导出括号。

例 2.2. 设 $\mathfrak{g}$ 是由 $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ 张成的三维向量空间，定义在域 $\mathbb{C}$ 上。定义双线性映射 $[\ ,\ ]$：$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$，使得 $[e_1, e_3] = e_2$ 和 $[e_3, e_3] = e_1$，其余基元素的乘积均为 0。则 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ *[2]* 上的三维莱布尼茨代数。

定义 2.2. 莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_1)$ 到 $(\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_2)$ 的态射 $\phi \quad \rightarrow$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性映射，满足

$$\phi([x,y]_1) = [\phi(x), \phi(y)]_2, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_1.$$

设 $\mathfrak{g}$ 是一个莱布尼茨代数。$\mathfrak{g}$ 的表示是一个向量空间 M，配备了 $\mathfrak{g}$ 的两个作用（左作用和右作用），

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times M \longrightarrow M \quad \text{and} \ [\ ,\ ] : M \times \mathfrak{g} \longrightarrow M \quad \text{such that}$$

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

当其中一个变量来自 M，另外两个来自 $\mathfrak{g}$ 时，等式成立 .

对于所有 $n \geq 0$，令 $CL^n(\mathfrak{g};\ M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M)$。定义

$$\delta^n : CL^n(\mathfrak{g}; M) \longrightarrow CL^{n+1}(\mathfrak{g}; M)$$

如下：

$$\begin{aligned}
&\delta^n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&:= [x_1, f(x_2, \ldots, x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}), x_i] \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

于是，$(CL^*(\mathfrak{g};\ M)\ \delta)$ 是一个上链复形，其上同调称为带有表示 M 的系数的莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 的上同调。我们用 $HL^n(\mathfrak{g};\ M)$ 表示第 n 阶上同调。任意莱布尼茨代数都是它自身上的一个表示。用 $HL^n(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的第 n 阶自身系数上同调。

若置换 $\sigma \in S_n$ 满足 $n = p+q$，且 $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$，并且 $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)$，则称其为一个 (p,q)-洗牌置换。我们将 S_{p+q} 中所有 (p,q)-洗牌置换构成的集合记为 $Sh(p,q)$。

对于 $\alpha \in CL^{p+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 和 $\beta \in CL^{q+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$，定义 $\alpha \circ \beta \in CL^{p+q+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 如下：

$$\begin{aligned}&\alpha \circ \beta(x_1, \ldots, x_{p+q+1})\\ =&\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{q(k-1)}\{\sum_{\sigma\in Sh(q,p-k+1)} sgn(\sigma)\alpha(x_1,\ldots,x_{k-1},\beta(x_k,x_{\sigma(k+1)},\ldots,x_{\sigma(k+q)}),\\ &\qquad x_{\sigma(k+q+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q+1)})\}.\end{aligned}$$

众所周知，分次上链模 $CL^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g}) = \bigoplus_p CL^p(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ 配备如下括号运算

$$[\alpha,\beta] = \alpha\circ\beta + (-1)^{pq+1}\beta\circ\alpha \quad \text{for } \alpha \in CL^{p+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g}) \quad \text{and } \beta \in CL^{q+1}(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$$

以及微分映射 d 由 $d\alpha = (-1)^{|\alpha|}\delta\alpha$ 定义，其中 $\alpha \in CL^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$，构成一个微分分次李代数。

3 相容莱布尼茨代数

在本节中，我们定义相容莱布尼茨代数的概念，讨论一些例子，并定义这类代数的表示。

定义 3.1. 域 $\mathbb{K}$ 上的两个莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1)$ 和 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_2)$ 称为相容的，如果对任意 λ_1，$\lambda_2 \in \mathbb{K}$，以下双线性运算

$$[x,y] = \lambda_1[x,y]_1 + \lambda_2[x,y]_2, \tag{3.1}$$

对于所有的 x、$y \in \mathfrak{g}$，定义了 $\mathfrak{g}$ 上的一个莱布尼茨代数结构。

如果 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1)$ 和 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_2)$ 是相容莱布尼茨代数，则我们将其记为 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1,[\ ,\ ]_2)$。

注记 3.1. 条件（*3.1*）即二元运算 $[\ ,\ ]$ 是莱布尼茨括号，等价于以下条件：

$$[x,[y,z]_1]_2 + [x,[y,z]_2]_1 = [[x,y]_1,z]_2 + [[x,y]_2,z]_1 - [[x,z]_1,y]_2 - [[x,z]_2,y]_1. \tag{3.2}$$

I鉴于上述评注，我们可以将定义 3.1 重述如下：
相容 Leibniz 代数是一个三元组 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1,[\ ,\ ]_2)$，满足

i. $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1)$ 是一个莱布尼茨代数。

ii. $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_2)$ 是一个莱布尼茨代数。

iii. $[x,[y,z]_1]_2+[x,[y,z]_2]_1 = [[x,y]_1,z]_2+[[x,y]_2,z]_1-[[x,z]_1,y]_2-[[x,z]_2,y]_1$，对所有 x、y、$z\in\mathfrak{g}$.

命题 3.2. 向量空间 $\mathfrak{g}$ 上的一对双线性映射 (m_1,m_2) 在 $\mathfrak{g}$ 上定义相容 Leibniz 代数结构，当且仅当

$$[m_1,m_1]=0,\quad [m_1,m_2]=0,\qquad and\qquad [m_2,m_2]=0.$$

证明. 根据 Maurer-Cartan 刻画，众所周知，m_1 和 m_2 在 $\mathfrak{g}$ 上定义莱布尼茨代数，当且仅当分别满足 $[m_1,m_1]=0$、$[m_2,m_2]=0$。注意，

$$(m_1\circ m_2)(x_1,x_2,x_3)=m_1(x_1,m_2(x_2,x_3))-m_1(m_2(x_1,x_2),x_3)+m_1(m_2(x_1,x_3),x_2).$$

这意味着

$$\begin{aligned}&[m_1,m_2]\\&=m_1\circ m_2+m_2\circ m_1\\&=m_1(x_1,m_2(x_2,x_3))+m_2(x_1,m_1(x_2,x_3))+m_1(m_2(x_1,x_3),x_2)+m_2(m_1(x_1,x_3),x_2)\\&-m_1(m_2(x_1,x_2),x_3)-m_2(m_1(x_1,x_2),x_3).\end{aligned}$$

因此，$(\mathfrak{g},m_1,m_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数，当且仅当

$$[m_1,m_1]=0,\ [m_1,m_2]=0,\ [m_2,m_2]=0.$$

□

例 3.3. 若莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ])$ 满足 $[x,y]=0$（对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$），则称其为阿贝尔的。任意莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 都与阿贝尔莱布尼茨代数相容。

例 3.4. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的三维向量空间，其一组基为 $\{e_1,e_2,e_3\}$。考虑两个莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1)$ 和 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_2)$，它们在基元素上的非零括号运算定义如下：

$$\begin{aligned}&[e_1,e_1]_1=e_3;\\&[e_1,e_1]_2=e_2,\ [e_2,e_1]_2=e_3.\end{aligned}$$

容易验证，这两个莱布尼茨代数彼此相容。

反例 3.5. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个三维向量空间，其基为 $\{e_1,e_2,e_3\}$。考虑两个莱布尼茨代数（$\mathfrak{g}$，$[\ ,\ ]_1$）和（$\mathfrak{g}$，$[\ ,\ ]_2$），它们在基元素上的非零括号运算定义如下

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2]_1=e_3,\ [e_2,e_1]_1=-e_3;\\&[e_1,e_1]_2=e_2,\ [e_2,e_1]_2=e_3.\end{aligned}$$

现在考虑括号运算

$$[x,y]=[x,y]_1+[x,y]_2.$$

关于上述括号运算，我们在基元素上有以下非零括号运算

$$[e_1,e_1]=e_2,\ [e_2,e_2]=e_3,\ [e_1,e_2]=e_3.$$

注意，如果（$\mathfrak{g}$, $[\ ,\ ]$）是一个莱布尼茨代数，那么我们有

$$[e_1,[e_1,e_1]]=[[e_1,e_1],e_1]-[[e_1,e_1],e_1].$$

这意味着 $e_3=0$，这是荒谬的。

定义 3.2. 设（$\mathfrak{g}$, $[\ ,\ ]_1$, $[\ ,\ ]_2$）和（$\mathfrak{g}'$, $[\ ,\ ]_1'$, $[\ ,\ ]_2'$）是两个相容 Leibniz 代数。相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 之间的态射是一个线性映射 $f:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$，满足

$$f\circ[\ ,\ ]_1=[\ ,\ ]_1'\circ(f\otimes f); \tag{3.3}$$
$$f\circ[\ ,\ ]_2=[\ ,\ ]_2'\circ(f\otimes f). \tag{3.4}$$

定义 3.3. 设（$\mathfrak{g}$, $[\ ,\ ]_1$, $[\ ,\ ]_2$）是一个相容 Leibniz 代数。一个相容 $\mathfrak{g}$-双模是一个五元组（M, l_1, r_1, l_2, r_2），其中 M 是一个向量空间，并且

$$\begin{cases} l_1:\mathfrak{g}\otimes M\to M,\\ r_1:M\otimes\mathfrak{g}\to M,\end{cases};\begin{cases} l_2:\mathfrak{g}\otimes M\to M,\\ r_2:M\otimes\mathfrak{g}\to M,\end{cases} \tag{3.5}$$

是满足以下条件的双线性映射：

i. (M,l_1,r_1) 是 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1)$ 上的双模；

ii. (M,l_2,r_2) 是 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_2)$ 上的双模；

iii. 对于所有 x、$y\in\mathfrak{g}$ 和 $m\in M$，以下相容条件成立：

(a) $r_1(x,l_2(y,m))+r_2(x,l_1(y,m))=l_1([x,y]_2,m)+l_2([x,y]_1,m)-r_1(l_2(x,m),y)-r_2(l_1(x,m),y)$；

(b) $l_1(x,r_2(m,y))+l_2(x,r_1(m,y))=r_1(l_2(x,m),y)+r_1(l_2(x,m),y)-l_1([x,y]_2,m)-l_2([x,y]_1,m)$；

(c) $r_1(m,[x,y]_2)+r_2(m,[x,y]_1)=r_1(r_2(m,x),y)+r_2(r_1(m,x),y)-r_1(r_2(m,y),x)-r_2(r_1(m,y),x)$.

例 3.6. 任意相容 Leibniz 代数 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1,[\ ,\ ]_2)$，通过考虑 $l_1=r_1=[\ ,\ ]_1$ 和 $l_2=r_2=[\ ,\ ]_2$，都是其自身上的相容双模。

例 3.7. 若 $(\mathfrak{g},[\ ,\ ]_1,[\ ,\ ]_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数，则我们知道 $(\mathfrak{g},\lambda_1[\ ,\ ]_1+\lambda_2[\ ,\ ]_2)$ 也是一个莱布尼茨代数。设 (M,l_1,r_1,l_2,r_2) 是一个相容 $\mathfrak{g}$-双模。接下来，只需例行验证 (M,l_1+l_2,r_1+r_2) 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},\lambda_1[\ ,\ ]_1+\lambda_2[\ ,\ ]_2)$ 上的一个双模。

命题 3.8. 设 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_1, [\ ,\ ]_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数，且 (M, l_1, r_1, l_2, r_2) 是一个相容 $\mathfrak{g}$-双模。则直和 $\mathfrak{g} \oplus M$ 具有相容的莱布尼茨代数结构，其二元运算如下：

$$[(x,m),(y,n)]^1 = ([x,y]_1, l_1(x,n) + r_1(m,y));$$
$$[(x,m),(y,n)]^2 = ([x,y]_2, l_2(x,n) + r_2(m,y)),$$

对所有 (x,m)、$(y,n) \in \mathfrak{g} \oplus M$。这种结构称为半直积。

3.1 低维相容莱布尼茨代数

在本小节中，我们探讨 2 维和 3 维复 Leibniz 代数的分类，以给出所有相容对。分类可参见 [25]。

3.1.1 二维相容莱布尼茨代数

有三个非幂零且两两非同构的 2 维莱布尼茨代数。相对于基 $\{e_1, e_2\}$，它们的定义如下：

L_1： $[e_1, e_2] = e_2$、$[e_2, e_1] = -e_2$（可解李代数）；

L_2： $[e_1, e_1] = e_2$ (幂零 Leibniz 代数);

L_3： $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_2$（可解 Leibniz 代数）。

命题 3.9. 在同构意义下，只有一对二维相容 Leibniz 代数。它由 (L_2, L_3) 给出。

3.1.2 三维相容莱布尼茨代数

每个非阿贝尔三维 Leibniz 代数都同构于以下代数之一，其基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$L_1(\alpha)$： $[e_1, e_3] = \alpha e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2, [e_3, e_3] = e_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$ (可解 Leibniz 代数);

L_2： $[e_3, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2$, (可解 Leibniz 代数);

L_3： $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_1] = -e_3, [e_2, e_3] = 2e_3, [e_3, e_1] = 2e_3, [e_3, e_2] = -2e_3,$ (simple Lie algebra);

$L_4(\alpha)$： $[e_1, e_3] = \alpha e_1, [e_2, e_3] = -e_2, [e_3, e_2] = e_2, [e_3, e_3] = e_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ (可解 Leibniz 代数);

L_5： $[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_3] = e_1$, (可解 Leibniz 代数);

L_6： $[e_1, e_3] = e_2$、$[e_3, e_3] = e_1$（幂零 Leibniz 代数）；

L_7： $[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = e_1, [e_3, e_2] = e_1, [e_3, e_3] = e_1,$ (solvable Leibniz algebra);

L_8： $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_2$,（可解 Leibniz 代数）；

$L_9(\alpha)$： $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \alpha e_3, [e_2, e_1] = -e_2, [e_3, e_1] = -\alpha e_3, \forall \alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ (可解 Lie 代数);

L_{10}： $[e_1, e_2] = e_2, [e_2, e_1] = -e_2$, (可解 Lie 代数);

L_{11}： $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3, [e_2, e_1] = -e_2, [e_3, e_1] = -e_2 - e_3$, (可解 Lie 代数);

$L_{12}(\alpha)$： $[e_2, e_2] = e_1, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_3] = \alpha e_1, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ (幂零 Leibniz 代数);

L_{13}： $[e_2, e_2] = e_1, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_2] = e_1$,（结合交换幂零 Leibniz 代数）；

L_{14}： $[e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_2, [e_3, e_3] = e_1$,（可解 Leibniz 代数）；

L_{15}： $[e_1, e_1] = e_2$,（结合交换幂零 Leibniz 代数）；

L_{16}： $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_3, [e_2, e_1] = -e_2, [e_3, e_1] = -e_3$,（可解 Lie 代数）；

L_{17}： $[e_1, e_2] = e_3$,（幂零李代数）。

命题 3.10。三维相容 Leibniz 代数由以下各对给出:

$$(L_1, L_2),\ (L_1, L_5),\ (L_1, L_6),\ (L_1, L_{14}),\ (L_2, L_5),\ (L_2, L_6),\ (L_2, L_{14}),$$
$$(L_4, L_{13})\ for\ \alpha = -2,\ (L_5, L_6),\ (L_5, L_{14}),\ (L_6, L_{14}),\ (L_7, L_{12})\ for\ \alpha = 0,$$
$$(L_8, L_{15}),\ (L_9, L_{10}),\ (L_9, L_{11}),\ (L_9, L_{16}),\ (L_9, L_{17}),\ (L_{10}, L_{11}),\ (L_{10}, L_{16}),$$
$$(L_{11}, L_{16}),\ (L_{11}, L_{17}),\ (L_{12}, L_{13}),\ (L_{16}, L_{17}).$$

4 相容 Leibniz 代数的 Maurer-Cartan 刻画

在本节中，我们将相容 Leibniz 代数刻画为适当的分次李代数的 Maurer-Cartan 元素。

设 $(\mathfrak{g} = \oplus_n \mathfrak{g}^n, [\ ,\ ])$ 是一个分次李代数。 $\mathfrak{g}$ 的 Maurer-Cartan 元素是满足以下条件的元素 $\alpha \in \mathfrak{g}^1$

$$[\alpha, \alpha] = 0.$$

众所周知，若 α 是一个 Maurer-Cartan 元素，则可得到一个次数为 1 的余边界映射 $d_\alpha := [\alpha, -]$，其定义在 $\mathfrak{g}$上。因此，我们得到一个微分分次李代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], d_\alpha)$。对于任意 $\alpha' \in \mathfrak{g}^1$，和 $\alpha + \alpha'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Maurer-Cartan 元素，当且仅当 α' 满足

$$\begin{aligned}
&[\alpha + \alpha', \alpha + \alpha'] = 0\\
&[\alpha, \alpha] + [\alpha, \alpha'] + [\alpha', \alpha] + [\alpha', \alpha'] = 0\\
&2[\alpha, \alpha'] + [\alpha', \alpha'] = 0\\
&d_\alpha(\alpha') + \frac{1}{2}[\alpha', \alpha'] = 0.
\end{aligned}$$

定义 4.1. 若两个 Maurer-Cartan 元素 α_1 和 α_2 满足 $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$，则称它们相容。在这种情况下，称 (α_1, α_2) 是 $\mathfrak{g}$的一个 Maurer-Cartan 元素相容对。

我们定义 $\mathfrak{g}_{com} = \oplus_{n\geq 0}(\mathfrak{g}_{com})^n$，其中

$$(\mathfrak{g}_{com})^0 = \mathfrak{g}^0 \qquad \text{and} \qquad (\mathfrak{g}_{com})^n = \underbrace{\mathfrak{g}^n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^n}_{(n+1) \text{ times}}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

令 $[\ ,\ ]_c$：$(\mathfrak{g}_{com})^m \times (\mathfrak{g}_{com})^n \to (\mathfrak{g}_{com})^{m+n}$，对于 m、$n \geq 0$，为由下式定义的 0 次括号

$$\begin{aligned}&[(h_1, \ldots, h_{m+1}), (k_1, \ldots, k_{n+1})]_c := \\ &= \big([h_1, k_1],\ [h_1, k_2] + [h_2, k_1],\ \ldots, \underbrace{[h_1, k_i] + [h_2, k_{i-1}] + \cdots + [h_i, k_1]}_{i\text{-th place}},\ \ldots, [h_{m+1}, k_{n+1}]\big),\end{aligned} \tag{4.1}$$

对于 $(h_1, \ldots, h_{m+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^m$ 以及 $(k_1, \ldots, k_{n+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^n$.

命题 4.1。（i）$(\mathfrak{g}_{com}, [\ ,\ ]_c)$ 是一个分次李代数。此外，由下式定义的映射 ψ： $\mathfrak{g}_{com} \to \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\psi(h) &= h, \quad \textit{for } h \in (\mathfrak{g}_{com})^0 = \mathfrak{g}^0, \\ \psi((h_1, \ldots, h_{n+1})) &= h_1 + \cdots + h_{n+1}, \quad \textit{for } (h_1, \ldots, h_{n+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^n\end{aligned}$$

是分次李代数同态。

(ii) $\mathfrak{g}^1$ 中的一对元素(α_1, α_2)是 $\mathfrak{g}$的Maurer-Cartan 元素相容对，当且仅当$(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathfrak{g}_{com})^1 = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^1$ 是分次李代数$(\mathfrak{g}_{com}, [\ ,\ ]_c)$中的Maurer-Cartan 元素。

证明。(i) 对于$(h_1, \ldots, h_{m+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^m$、$(k_1, \ldots, k_{n+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^n$ 以及$(l_1, \ldots, l_{p+1}) \in (\mathfrak{g}_{com})^p$ ，

$$\begin{aligned}&[(h_1, \ldots, h_{m+1}), [(k_1, \ldots, k_{n+1}), (l_1, \ldots, l_{p+1})]_c]_c \\ &= [(h_1, \ldots, h_{m+1}), \big([k_1, l_1], \ldots, \underbrace{\sum_{q+r=i+1} [k_q, l_r]}_{i\text{-th place}}, \ldots, [k_{n+1}, l_{p+1}]\big)]_c \\ &= \big([h_1, [k_1, l_1]], \ldots, \underbrace{\sum_{p+q+r=i+2} [h_p, [k_q, l_r]]}_{i\text{-th place}}, \ldots, [h_{m+1}, [k_{n+1}, l_{p+1}]]\big) \\ &= \Bigg([[h_1, k_1], l_1] + (-1)^{mn}\ [k_1, [h_1, l_1]]\ , \ldots, \underbrace{\sum_{p+q+r=i+2} [[h_p, k_q], l_r] + (-1)^{mn}\ [k_q, [h_p, l_r]]}_{i\text{-th place}}, \\ &\qquad \ldots, [[h_{m+1}, k_{n+1}], l_{p+1}] + (-1)^{mn}\ [k_{n+1}, [h_{m+1}, l_{p+1}]]\Bigg) \\ &= [[(h_1, \ldots, h_{m+1}), (k_1, \ldots, k_{n+1})]_c, (l_1, \ldots, l_{p+1})]_c\end{aligned}$$

$$+(-1)^{mn}\ [(k_1,\dots,k_{n+1}),[(h_1,\dots,h_{m+1}),(l_1,\dots,l_{n+1})]_c]_c.$$

我们还有

$$\begin{aligned}\psi[(h_1,\dots,h_{m+1}),(k_1,\dots,k_{n+1})]_c &= \sum_{i=1}^{m+n+1}\sum_{q+r=i+1}[h_q,k_r]\\ &= [h_1+\cdots+h_{m+1},\ k_1+\cdots+k_{n+1}]\\ &= [\psi(h_1,\dots,h_{m+1}),\psi(k_1,\dots,k_{n+1})],\end{aligned}$$

这就完成了第二部分。

(ii) 对于 $\mathfrak{g}^1$ 中的一对元素 (α_1,α_2)，我们有

$$[(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)]_c=([\alpha_1,\alpha_1],[\alpha_1,\alpha_2]+[\alpha_2,\alpha_1],[\alpha_2,\alpha_2])=([\alpha_1,\alpha_1],2[\alpha_1,\alpha_2],[\alpha_2,\alpha_2]).$$

因此，$(\alpha_1,\alpha_2)\in(\mathfrak{g}_{com})^1$ 是 $\mathfrak{g}_{com}$ 中的一个 Maurer-Cartan 元素，当且仅当 (α_1,α_2) 是 $\mathfrak{g}$ 中的一对相容的 Maurer–Cartan 元素。 □

因此，根据分次李括号（定义见第 2节）和上述命题，我们得到以下结论。

定理 4.2. 设 L 是一个向量空间。

(i) 那么 $C^{*+1}_{com}(L,L):=\oplus_{n\geq 0}C^{n+1}_{com}(L,L)$，其中

$$\begin{aligned}&C^1_{com}(L,L)=C^1(L,L);\\ &C^{n+1}_{com}(L,L)=\underbrace{C^{n+1}(L,L)\oplus\cdots\oplus C^{n+1}(L,L)}_{(n+1)\ times},\quad for\ n\geq 1\end{aligned}$$

是一个分次李代数，其括号由（*4.1*）给出，其中 $[\ ,\ ]$ 被替换为 $[\ ,\ ]_c$。此外，映射

$$\psi: C^{*+1}_{com}(L,l)\to C^{*+1}(L,L),\ (h_1,\dots,h_{n+1})\mapsto h_1+\cdots+h_{n+1},\ for\ n\geq 0 \tag{4.2}$$

是分次李代数同态。

(ii) 一对 $(m_1,m_2)\in C^2_{com}(L,L)=C^2(L,L)\oplus C^2(L,L)$ 在 L 上定义一个相容 Leibniz 代数结构，当且仅当 $(m_1,m_2)\in C^2_{com}(L,L)$ 是分次李代数 $(C^{*+1}_{com}(L,L)\ [\ ,\ ]_c)$ 中的 Maurer-Cartan 元素。

设 $(\mathfrak{g},m_1,m_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数。那么存在一个次数为 1 的余边界映射

$$d_{(m_1,m_2)}:=[(m_1,m_2),\ ]:C^n_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\to C^{n+1}_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),\ \text{for } n\geq 1 \tag{4.3}$$

这使得 $(C^{*+1}_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\ [\ ,\ ]_c,d_{(m_1,m_2)})$ 成为一个微分分次李代数。

5 相容莱布尼茨代数的上同调

本节中，我们介绍带有自身表示的相容 Leibniz 代数的上同调。

设 $(\mathfrak{g}, m_1, m_2)$ 为一个相容莱布尼茨代数，$M = (M, l_1, r_1, l_2, r_2)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个表示。令

$$\delta_1^n : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M),\ n \geq 0,$$

表示以 (M, l_1, r_1) 为系数的 $(\mathfrak{g}, m_1)$ 的 Leibniz 上同调的余边界算子，并且

$$\delta_2^n : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M),\ n \geq 0,$$

表示以 (M, l_2, r_2) 为系数的 $(\mathfrak{g}, m_2)$ 的 Leibniz 上同调的余边界算子。那么，我们有

$$(\delta_1)^2 = 0 \qquad \text{and} \qquad (\delta_2)^2 = 0.$$

现在，我们根据 δ_1 和 δ_2 来解释由命题 $\mathfrak{g} \oplus M$ 中给出的 3.8 个 μ_1，$\mu_2 \in C^2(\mathfrak{g} \oplus M, \mathfrak{g} \oplus M)$ 表示对应于 $\mathfrak{g} \oplus M$ 上的莱布尼茨乘积的元素。

~请注意，任何映射 $f \in C^n(\mathfrak{g}, M)$ 都可以通过以下方式提升为映射 $f \in C^n(\mathfrak{g} \oplus M, \mathfrak{g} \oplus M)$：

$$\widetilde{h}\big((x_1, m_1), \ldots, (x_n, m_n)\big) = \big(0, h(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

~对于 $(x_i,\ m_i) \in \mathfrak{g} \oplus M$ 和 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n$。此外，当且仅当 $h = 0$ 时，我们有 $h = 0$。采用上述所有记号，我们有

$$\widetilde{(\delta_1 h)} = (-1)^{n-1}\ [\mu_1, \widetilde{h}] \qquad \text{and} \qquad \widetilde{(\delta_2 h)} = (-1)^{n-1}\ [\mu_2, \widetilde{h}],$$

对于 $h \in C^n(\mathfrak{g}, M)$。

命题 5.1. 余边界算子 δ_1 和 δ_2 满足

$$\delta_1 \circ \delta_2 + \delta_2 \circ \delta_1 = 0.$$

证明：对于任意 $h \in C^n(\mathfrak{g}, M)$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\delta_1 \circ \delta_2 + \delta_2 \circ \delta_1)(h) \\
&= (-1)^n\ [\mu_1, \widetilde{\delta_2 h}]\ +\ (-1)^n\ [\mu_2, \widetilde{\delta_1 h}] \\
&= -[\mu_1, [\mu_2, \widetilde{h}]] - [\mu_2, [\mu_1, \widetilde{h}] \\
&= -[[\mu_1, \mu_2], \widetilde{h}] = 0 \qquad\qquad (\text{because } [\mu_1, \mu_2] = 0).
\end{aligned}$$

因此可得 $(\delta_1 \circ \delta_2 + \delta_1 \circ \delta_1)\ (h)\ = 0$。所以，$\delta_1 \circ \delta_2 + \delta_2 \circ \delta_1 = 0$。 □

上述命题的相容条件引出了与相容 Leibniz 代数相关、系数取值于相容表示的上同调。设 $\mathfrak{g}$ 为相容 Leibniz 代数，M 为其表示。对于 $n \geq 0$，我们将 n 阶上链群 $C^n_{com}(\mathfrak{g}, M)$ 定义为

$$\begin{aligned} C^0_{com}(\mathfrak{g}, M) &:= \{m \in M \mid x \cdot_1 m - m \cdot_1 x = x \cdot_2 m - m \cdot_2 x, \ \forall x \in \mathfrak{g}\}, \\ C^n_{com}(\mathfrak{g}, M) &:= \underbrace{C^n(\mathfrak{g}, M) \oplus \cdots \oplus C^n(\mathfrak{g}, M)}_{n \text{ copies}}, \quad \text{for } n \geq 1. \end{aligned}$$

定义映射 $\delta_c\colon\ C^n_{com}(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}_{com}(\mathfrak{g}, M)$，对 $n \geq 0$，定义为

$$\delta_c(m)(a) := x \cdot_1 m - m \cdot_1 x = x \cdot_2 m - m \cdot_2 x, \text{ for } m \in C^0_{com}(\mathfrak{g}, M) \text{ and } x \in \mathfrak{g}, \quad (5.1)$$

$$\delta_c(h_1, \ldots, h_n) := (\delta_1 h_1, \ldots, \underbrace{\delta_1 h_i + \delta_2 h_{i-1}}_{i-\text{th place}}, \ldots, \delta_2 h_n), \quad (5.2)$$

对于 $(h_1, \ldots, h_n) \in C^n_{com}(\mathfrak{g}, M)$。

命题 5.2. 映射 δ_c 是一个余边界算子，即 $(\delta_c)^2 = 0$。

证明。对于 $m \in C^0_c(\mathfrak{g}, M)$，有

$$\begin{aligned} (\delta_c)^2(m) = \delta_c(\delta_c m) &= (\delta_1 \delta_c m \ , \delta_2 \delta_c m) \\ &= (\delta_1 \delta_1 m \ , \delta_2 \delta_2 m) = 0. \end{aligned}$$

此外，对于任意 $(h_1, \ldots, h_n) \in C^n_c(\mathfrak{g}, M)$，$n \geq 1$，有

$$\begin{aligned} (\delta_c)^2(h_1, \ldots, h_n) &= \delta_c\big(\delta_1 h_1, \ldots, \delta_1 h_i + \delta_2 h_{i-1}, \ldots, \delta_2 h_n\big) \\ &= \big(\delta_1 \delta_1 h_1 \ , \delta_2 \delta_1 h_1 + \delta_1 \delta_2 h_1 + \delta_1 \delta_1 h_2 \ , \ldots , \\ &\qquad \underbrace{\delta_2 \delta_2 h_{i-2} + \delta_2 \delta_1 h_{i-1} + \delta_1 \delta_2 h_{i-1} + \delta_1 \delta_1 h_i}_{3 \leq i \leq n-1} \ , \ldots , \\ &\qquad \delta_2 \delta_2 h_{n-1} + \delta_2 \delta_1 h_n + \delta_1 \delta_2 h_n \ , \ \delta_2 \delta_2 h_n\big) \\ &= 0 \qquad (\text{from Proposition 5.1}). \end{aligned}$$

这证明了 $(\delta_c)^2 = 0$。 □

因此，我们得到一个上链复形 $\{C^*_{com}(\mathfrak{g}, M) \ \delta_c\}$。令 $Z^n_{com}(\mathfrak{g}, M)$ 表示 n-上闭链空间，$B^n_{com}(\mathfrak{g}, M)$ 表示 n-上边界空间。于是，对于 $n \geq 0$，有 $B^n_{com}(\mathfrak{g}, M) \subset Z^n_{com}(\mathfrak{g}, M)$。相应的商群

$$H^n_{com}(\mathfrak{g}, M) := \frac{Z^n_{com}(\mathfrak{g}, M)}{B^n_{com}(\mathfrak{g}, M)}, \text{ for } n \geq 0$$

称为相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 在表示 M 中的上同调。

6 相容 Leibniz 代数的形式变形理论

本节中，我们研究相容莱布尼茨代数的形式变形理论。在这项研究中，我们将紧密遵循 Gerstenhaber [10, 9] 关于结合代数的变形理论。该理论基于变量 t, $\mathbb{K}[[t]]$的形式幂级数。任何向量空间 $\mathfrak{g}$ 都可以自然地扩展为形式空间 $\mathfrak{g}[[t]] = \{\sum_{i\leq 0} a_i t_i,\ a_i \in \mathfrak{g}\}$。

定义 6.1. 设 $(\mathfrak{g}, m_1, m_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数。$(\mathfrak{g}, m_1, m_2)$ 的单参数形式变形是一个三元组 $(\mathfrak{g}[[t]], m_{1,t}, m_{2,t})$，其中

$$m_{1,t}, m_{2,t} : \mathfrak{g}[[t]] \times \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$$

是 $\mathbb{K}[[t]]$-双线性映射，其形式为

$$m_{1,t} = \sum_{i\geq 0} m_{1,i} t^i,\ \ m_{2,t} = \sum_{i\geq 0} m_{2,i} t^i,$$

使得

(i) $m_{1,\ i}$、$m_{2,\ i}$：对于所有 $i \geq 0$，$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 都是 $\mathbb{K}$-双线性映射。

(ii) $m_{1,\ 0} = m_1$,$m_{2,\ 0} = m_2$ 分别是原始括号运算。

(iii) $(\mathfrak{g}[[t]], m_{1,t})$ 和 $(\mathfrak{g}[[t]], m_{2,t})$ 都是莱布尼茨代数，也就是说，对于所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，我们有

$$m_{1,t}(x, (m_{1,t}(y, z)) = m_{1,t}(m_{1,t}(x, y), z) - m_{1,t}(m_{1,t}(x, z), y), \tag{6.1}$$
$$m_{2,t}(x, (m_{2,t}(y, z)) = m_{2,t}(m_{2,t}(x, y), z) - m_{2,t}(m_{2,t}(x, z), y). \tag{6.2}$$

(iv) $(\mathfrak{g}[[t]], m_{1,t}, m_{2,t})$ 满足以下相容条件：

$$\begin{aligned} &m_{2,t}(x, m_{1,t}(y, z)) + m_{1,t}(x, m_{2,t}(y, z)) \\ &= m_{2,t}(m_{1,t}(x, y), z) + m_{1,t}(m_{2,t}(x, y), z) - m_{2,t}(m_{1,t}(x, z), y) - m_{1,t}(m_{2,t}(x, z), y) \end{aligned} \tag{6.3}$$

对于所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$。

方程 (4.1) 和 (6.2) 等价于以下方程。对于所有 $n \geq 0$，我们有

$$\sum_{i+j=n} \big(m_{1,i}(x, (m_{1,j}(y, z)) - m_{1,i}(m_{1,j}(x, y), z) + m_{1,i}(m_{1,j}(x, z), y)\big) = 0 \tag{6.4}$$
$$\sum_{i+j=n} \big(m_{2,i}(x, (m_{2,j}(y, z)) - m_{2,i}(m_{2,j}(x, y), z) + m_{2,i}(m_{2,j}(x, z), y)\big) = 0. \tag{6.5}$$

等价地，我们可以将方程 6.4 和 6.5 写成如下形式：

$$\sum_{i+j=n}[m_{1,i},m_{1,j}]=0, \tag{6.6}$$

$$\sum_{i+j=n}[m_{2,i},m_{2,j}]=0. \tag{6.7}$$

余　　条件 6.3 等价于以下方程。对于所有 $n\geq 0$，我们有　　e

$$\sum_{i+j=n}\big(m_{2,i}(x,m_{1,j}(y,z))+m_{1,i}(x,m_{2,j}(y,z))\big) \tag{6.8}$$
$$=\sum_{i+j=n}\big(m_{2,i}(m_{1,j}(x,y),z)+m_{1,i}(m_{2,j}(x,y),z)-m_{2,i}(m_{1,j}(x,z),y)-m_{1,i}(m_{2,j}(x,z),y)\big).$$

对于所有 $n\geq 0$，我们可以将方程 6.8 改写如下：

$$\sum_{i+j=n}[m_{1,i},m_{2,j}]=0. \tag{6.9}$$

因此，利用方程 6.6、6.7和6.9，我们可以说，$(\mathfrak{g}[[t]],m_{1,\ t},m_{2,\ t})$ 是相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 的单参数形式变形，当且仅当对所有 $n\geq 0$，以及x、y、$z\in\mathfrak{g}$，它满足以下方程：

$$\sum_{i+j=n}[m_{1,i},m_{1,j}]=0,$$
$$\sum_{i+j=n}[m_{2,i},m_{2,j}]=0,$$
$$\sum_{i+j=n}[m_{1,i},m_{2,j}]=0.$$

对于 $n=0$，我们有

$$[m_{1,0},m_{1,0}]=0,\ [m_{2,0},m_{2,0}]=0,\ [m_{1,0},m_{2,0}]=0.$$

这与以下内容相同

$$[m_1,m_1]=0,\ [m_2,m_2]=0,\ [m_1,m_2]=0.$$

请注意，上述关系不过是原有的 Leibniz 恒等式和相容关系。

对于 $n=1$，我们有

$$[m_{1,1},m_{1,0}]+[m_{1,0},m_{1,1}]+[m_{1,0},m_{1,0}]=0,$$
$$[m_{2,1},m_{2,0}]+[m_{2,0},m_{2,1}]+[m_{2,0},m_{2,0}]=0,$$
$$[m_{1,1},m_{2,0}]+[m_{1,0},m_{2,1}]+[m_{1,0},m_{2,0}]=0.$$

等价地，我们有

$$
\begin{aligned}
&[m_{1,1}, m_1] + [m_1, m_{1,1}] + [m_1, m_1] = 0,\\
&[m_{2,1}, m_2] + [m_2, m_{2,1}] + [m_2, m_2] = 0,\\
&[m_{1,1}, m_2] + [m_1, m_{2,1}] + [m_1, m_2] = 0.
\end{aligned}
$$

由于 $[m_1, m_1] = 0$ 和 $[m_2, m_2] = 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&[m_{1,1}, m_1] = 0,\\
&[m_{2,1}, m_2] = 0,\\
&[m_{1,1}, m_2] + [m_1, m_{2,1}] = 0.
\end{aligned}
$$

因此，

$$\delta_c^2(m_{1,1}, m_{2,1}) = 0.$$

因此，$(m_{1,\ 1},\ m_{2,\ 1})$ 是相容莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 在其自身系数下的上同调中的一个 2-余循环。这个对 $(m_{1,\ 1},\ m_{2,\ 1})$ 称为该变形的无穷小。这意味着变形的无穷小是一个 2-余循环。更一般地，我们有如下定义。

定义 6.2. 若 $(m_{1,\ n}, m_{2,\ n})$ 是形式变形 $(m_{1,\ t}, m_{2,\ t})$ 的首个非零项，且该项位于 $(m_{1,\ 0},\ m_{2,\ 0}) = (m_1, m_2)$ 之后，则称 $(m_{1,\ n}, m_{2,\ n})$ 为该变形的 n-无穷小。

定理 6.1。 n-无穷小是一个 2-余循环。

证明过程与证明无穷小变形是一个 2-余循环类似。

6.1 等价变形与上同调

设 $\mathfrak{g}_t = (\mathfrak{g}, m_{1,t}, m_{2,t})$ 和 $\mathfrak{g}'_t = (\mathfrak{g}, m'_{1,t}, m'_{2,t})$ 是 $(\mathfrak{g}, m_1, m_2)$ 的两个单参数相容 Leibniz 代数变形，其中 $m_{1,t} = \sum_{i\geq 0} m_{1,i}t^i$，$m_{2,t} = \sum_{i\geq 0} m_{2,i}t^i$，且 $m'_{1,t} = \sum_{i\geq 0} m'_{1,i}t^i$，$m'_{2,t} = \sum_{i\geq 0} m'_{2,i}t^i$。

定义 6.3. 若存在一个形如 $\Phi_t = \sum_{i\geq 0} \phi_i t^i$ 的 $\mathbb{K}[[t]]$-线性同构 $\Phi_t : \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$，其中 $\phi_0 = id$ 和 $\phi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{K}$- 线性映射，并且满足以下关系，则称两个变形 $\mathfrak{g}_t$ 和 $\mathfrak{g}'_t$ 等价：

$$\Phi_t \circ m'_{1,t} = m_{1,t} \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t), \tag{6.10}$$

$$\Phi_t \circ m'_{2,t} = m_{2,t} \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t). \tag{6.11}$$

定义 6.4. 相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 的变形 $(m_{1,t}, m_{2,t})$ 称为平凡的，如果 $(m_{1,t}, m_{2,t})$ 等价于变形 $(m_{1,0}, m_{2,0})$，后者与未变形的情形相同。相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 称为刚性的，如果它在等价意义下只有平凡变形。

方程（6.10-6.11）可写为

$$\Phi_t(m'_{1,t}(x,y)) = m_{1,t}(\Phi_t(x),\Phi_t(y)), \tag{6.12}$$
$$\Phi_t(m'_{2,t}(x,y)) = m_{2,t}(\Phi_t(x),\Phi_t(y)), \text{ for all } x,y\in\mathfrak{g}. \tag{6.13}$$

注意，上述方程等价于以下方程。 :

$$\sum_{i\geq 0}\phi_i\Big(\sum_{j\geq 0}m'_{1,j}(x,y)t^j\Big)t^i = \sum_{i\geq 0}m_{1,i}\Big(\sum_{j\geq 0}\phi_j(x)t^j,\sum_{k\geq 0}\phi_k(y)t^k\Big)t^i, \tag{6.14}$$
$$\sum_{i\geq 0}\phi_i\Big(\sum_{j\geq 0}m'_{2,j}(x,y)t^j\Big)t^i = \sum_{i\geq 0}m_{2,i}\Big(\sum_{j\geq 0}\phi_j(x)t^j,\sum_{k\geq 0}\phi_k(y)t^k\Big)t^i. \tag{6.15}$$
$$\tag{6.16}$$

这与以下方程相同:

$$\sum_{i,j\geq 0}\phi_i(m'_{1,j}(x,y))t^{i+j} = \sum_{i,j,k\geq 0}m_{1,i}(\phi_j(x),\phi_k(y))t^{i+j+k}, \tag{6.17}$$
$$\sum_{i,j\geq 0}\phi_i(m'_{2,j}(x,y))t^{i+j} = \sum_{i,j,k\geq 0}m_{2,i}(\phi_j(x),\phi_k(y))t^{i+j+k}. \tag{6.18}$$

使用 $\phi_0 = Id$ an 并比较上述方程两边的常数项，我们有

$$m'_{1,0}(x,y) = m_1(x,y),$$
$$m'_{2,0}(x,yy) = m_2(x,y).$$

现在比较 t 的系数，我们得到

$$m'_{1,1}(x,y)+\phi_1(m'_{1,0}(x,y)) = m_{1,1}(x,y)+m_{1,0}(\phi_1(x),y)+m_{1,0}(x,\phi_1(y)), \tag{6.19}$$
$$m'_{2,1}(x,y)+\phi_1(m'_{2,0}(x,y)) = m_{2,1}(x,y)+m_{2,0}(\phi_1(x),y)+m_{2,0}(x,\phi_1(y)). \tag{6.20}$$

方程（6.19）-（6.20）与.....相同

$$m'_{1,1}(x,y)-m_{1,1}(x,y) = m_1(\phi_1(x),y)+m_1(x,\phi_1(y))-\phi_1(m_1(x,y)) = \delta_1\phi_1(x,y).$$
$$m'_{2,1}(x,y)-m_{2,1}(x,y) = m_2(\phi_1(x),y)+m_2(x,\phi_1(y))-\phi_1(m_2(x,y)) = \delta_2\phi_1(x,y).$$

因此，我们得到以下命题。

命题 6.2. 两个等价变形具有上同调无穷小。

证明。设 $\mathfrak{g}$ 的两个等价单参数形式变形分别为 $\mathfrak{g}_t = (\mathfrak{g}, m_{1,t}, m_{2,t})$ 和 $\mathfrak{g}'_t = (\mathfrak{g}, m'_{1,t}, m'_{2,t})$。设变形 $(m_{1,t},m_{2,t})$ 和 $(m'_{1,t},m'_{2,t})$ 的两个 n-无穷小变形项分别为 $(m_{1,n},m_{2,n})$ 和 $(m'_{1,n},m'_{2,n})$。利用方程 (6.17)，我们得到，

$$m'_{1,n}(x,y)+\phi_n(m'_{1,0}(x,y)) = m_{1,n}(x,y)+m_{1,0}(\phi_n(x),y)+m_{1,0}(x,\phi_n(y)),$$

$$m'_{1,n}(x,y) - m_{1,n}(x,y) = m_1(\phi_n(x),y) + m_1(x,\phi_n(y)) - \phi_n(m'_1(x,y)) = \delta_1\phi_n(x,y),$$

and

$$m'_{2,n}(x,y) + \phi_n(m'_{2,0}(x,y)) = m_{2,n}(x,y) + m_{2,0}(\phi_n(x),y) + m_{2,0}(x,\phi_n(y)),$$
$$m'_{2,n}(x,y) - m_{2,n}(x,y) = m_2(\phi_n(x),y) + m_2(x,\phi_n(y)) - \phi_n(m'_2(x,y)) = \delta_2\phi_n(x,y).$$

T因此，两个变形的无穷小变形项确定相同的上同调类。 . □

定理 6.3. 相容 Leibniz 代数的非平凡变形等价于这样一个变形：其无穷小不是余边界。

证明。设 $(m_{1,t}, m_{2,t})$ 是相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个变形，且 $(m_{1,n}, m_{2,n})$ 是该变形的 n-无穷小，其中 $n \geq 1$。根据定理（6.1），$(m_{1,n}, m_{2,n})$ 是一个 2-余循环，即 $\delta_c^2(m_{1,n}, m_{2,n}) = 0$。假设 $(m_{1,n}, m_{2,n}) = -\delta_c^1\phi_n$，其中 $\phi_n \in C_c^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，也就是说，$(m_{1,n}, m_{2,n})$ 是一个余边界。我们定义 $\mathfrak{g}[[t]]$ 的形式同构 Φ_t 如下：

$$\Phi_t(x) = x + \phi_n(x)t^n.$$

我们令

$$\bar{m_{1,t}} = \Phi_t^{-1} \circ m_{1,t} \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t),$$
$$\bar{m_{2,t}} = \Phi_t^{-1} \circ m_{2,t} \circ (\Phi_t \otimes \Phi_t).$$

因此，我们得到一个新的变形 $(\bar{m_{1,\ t}}, \bar{m_{2,\ t}})$，它与 $(m_{1,\ t}, m_{2,\ t})$ 同构。通过展开上述方程并比较 t^n 的系数，我们得到

$$\bar{m_{1,n}} - m_{1,n} = \delta^1\phi_n,$$
$$\bar{m_{2,n}} - m_{2,n} = \delta_2\phi_n.$$

因此，$\bar{m_{1,\ n}} = 0$，$\bar{m_{2,\ n}} = 0$。重复这一论证，我们可以消去任何作为余边界的无穷小变形。因此，如果变形非平凡，这一过程必定会终止。 □

推论 6.4. 设 $(\mathfrak{g}, m_1, m_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数。若 $H^2_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = 0$，则 $\mathfrak{g}$ 是刚性的。

6.2 障碍与变形上同调

本小节讨论相容 Leibniz 代数变形的可延拓性与刚性。

定义 6.5. 相容 Leibniz 代数 $\mathfrak{g}$ 的 n 阶变形由以下形式的 $\mathbb{K}[[t]]$-双线性映射 $m_{1,\ t}$：$\mathfrak{g}[[t]] \times \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$, $m_{2,\ t}$：$\mathfrak{g}[[t]] \times \mathfrak{g}[[t]] \to \mathfrak{g}[[t]]$ 构成：

$$m_{1,t} = \sum_{i=0}^{n} m_{1,i}t^i, \quad m_{1,t} = \sum_{i=0}^{n} m_{1,i}t^i,$$

使得（$m_{1,\ t}$，$m_{2,\ t}$）满足定义 6.1（$mod\ t^{n+1}$）中单参数形式变形的所有条件。

阶数为 1 的变形称为无穷小变形。我们称相容 Leibniz 代数的阶数为 n 的变形（$m_{1,\ t}$, $m_{2,\ t}$）可扩展为阶数为（$n+1$）的变形，如果存在元素 $m_{1,\ n+1}, m_{2,\ n+1} \in C_c^2$（$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}$）使得

$$\bar{m_{1,t}} = m_{1,t} + m_{1,n+1}t^{n+1},$$
$$\bar{m_{2,t}} = m_{2,t} + m_{2,n+1}t^{n+1},$$

并且（$\bar{m_{1,\ t}}$, $\bar{m_{2,\ t}}$）满足定义6.1 $(mod\ t^{n+2})$ 。

The （$\bar{m_{1,\ t}}$, $\bar{m_{2,\ t}}$）的 $n+1$ 阶变形给出以下方程。

$$\sum_{i+j=n+1} \big(m_{1,i}(x,(m_{1,j}(y,z)) - m_{1,i}(m_{1,j}(x,y),z) + m_{1,i}(m_{1,j}(x,z),y)\big) = 0. \tag{6.21}$$

$$\sum_{i+j=n+1} \big(m_{2,i}(x,(m_{2,j}(y,z)) - m_{2,i}(m_{2,j}(x,y),z) + m_{2,i}(m_{2,j}(x,z),y)\big) = 0. \tag{6.22}$$

$$\sum_{i+j=n+1} \big(m_{2,i}(x,m_{1,j}(y,z)) + m_{1,i}(x,m_{2,j}(y,z))\big) \tag{6.23}$$
$$= \sum_{i+j=n+1} \big(m_{2,i}(m_{1,j}(x,y),z) + m_{1,i}(m_{2,j}(x,y),z) - m_{2,i}(m_{1,j}(x,z),y) - m_{1,i}(m_{2,j}(x,z)\ y)\big)$$

这与以下方程相同

$$\sum_{i+j=n+1} [m_{1,i}, m_{1,j}] = 0, \tag{6.24}$$

$$\sum_{i+j=n+1} [m_{2,i}, m_{2,j}] = 0, \tag{6.25}$$

$$\sum_{i+j=n+1} [m_{1,i}, m_{2,j}] = 0. \tag{6.26}$$

等价地，我们可以将上述方程改写如下：

$$\delta_1(m_{1,n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j>0}} [m_{1,i}, m_{1,j}], \tag{6.27}$$

$$\delta_2(m_{2,n+1}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j>0}} [m_{2,i}, m_{2,j}], \tag{6.28}$$

$$\delta_2(m_{1,n+1}) + \delta_1(m_{2,n+1}) = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j>0}} [m_{1,i}, m_{2,j}]. \tag{6.29}$$

我们将把阶数为 n的 Hom-莱布尼茨代数变形扩展为阶数为 $n+1$ 的变形的第 n个障碍定义为 $\mathrm{Obs}^n=(\mathrm{O}^n_{m_1},\mathrm{O}^n_{m_1,m_2},\mathrm{Obs}^n_{m_2})$，其中

$$\mathrm{O}^n_{m_1}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j>0}}[m_{1,i},m_{1,j}], \tag{6.30}$$

$$\mathrm{O}^n_{m_2}:=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j>0}}[m_{2,i},m_{2,j}], \tag{6.31}$$

$$\mathrm{O}^n_{m_1,m_2}:=\sum_{\substack{i+j=n+1\\ i,j>0}}[m_{1,i},m_{2,j}]. \tag{6.32}$$

因此，$\mathrm{O}^n=(\mathrm{O}^n_{m_1},\mathrm{O}^n_{m_1,\ m_2},\mathrm{O}^n_{m_2})\in C^3_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 且 $(\mathrm{O}^n_{m_1},\mathrm{O}^n_{m_1,\ m_2},\mathrm{O}^n_{m_2})=\delta^2_{com}(m_{1,\ n+1},m_{2,\ n+1})$。

定理 6.5。阶为 n 的变形可延拓为阶为 $n+1$ 的变形，当且仅当 O^n 的上同调类为零。

证明。设阶为 n 的变形 $(m_{1,\ t},m_{2,\ t})$ 可延拓为阶为 $n+1$ 的变形。由障碍方程，我们有

$$\mathrm{O}^n=(\mathrm{O}^n_{m_1},\mathrm{O}^n_{m_1,m_2},\mathrm{O}^n_{m_2})=\delta^2_c(m_{1,n+1},m_{2,n+1}).$$

由 $\delta_c\circ\delta_c=0$，可得 O^n 的上同调类为零。

反过来，设 O^n 的上同调类为零，也就是说，

$$\mathrm{O}^n=\delta^2_c(m_{1,n+1},m_{2,n+1}),$$

对于某些 2-上链 $(m_{1,\ n+1},m_{2,\ n+1})$。我们定义 $(m'_{1,\ t},m'_{2,\ t})$，将阶为 n 的变形 $(m_{1,\ t},m_{2,\ t})$ 延拓如下:

$$m'_{1,t}=m_{1,t}+m_{1,n+1}t^{n+1},$$
$$m'_{2,t}=m_{2,t}+m_{2,n+1}t^{n+1}.$$

容易验证，$(m'_{1,\ t},m'_{2,\ t})$ 定义了一个 $n+1$ 阶形式变形。因此，$(m'_{1,\ t},m'_{2,\ t})$ 是一个 $n+1$ 阶变形，它扩展了 $(m_{1,\ t},m_{2,\ t})$ 的 n 阶变形。

□

推论 6.6. 若 $H^3_{com}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$，则任意无穷小变形都可扩展为 $(\mathfrak{g},m_1,m_2)$ 的单参数形式变形。

7 阿贝尔扩张与上同调

本节将说明，相容莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},m_1,m_2)$ 在相容双模 (M,l_1,r_1,l_2,r_2) 中取系数时的第二上同调群 $H^2_{com}(\mathfrak{g},M)$，可以解释为 $\mathfrak{g}$ 被 M 扩张的等价类。

设 $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g},m_1,m_2)$ 是一个相容 Leibniz 代数，M 是一个向量空间。注意，M 可以视为一个乘法平凡的相容 Leibniz 代数。

定义 7.1. $\mathfrak{g}$ 通过 M 的阿贝尔扩张是一个相容 Leibniz 代数的正合序列

$$0 \longrightarrow (M,0,0) \xrightarrow{i} (E, m_1^E, mu_2^E) \underset{s}{\overset{j}{\rightleftarrows}} (\mathfrak{g}, m_1, m_2) \longrightarrow 0$$

连同一个 $\mathbb{K}$分裂 s。

阿贝尔扩张通过作用映射，在 M 上诱导出一个相容的 $\mathfrak{g}$双模结构

$$\begin{cases} l_1(x,m) = m_1^E(s(x), i(m)) \\ r_1(m,x) = m_1^E(i(m), s(x)) \end{cases}; \begin{cases} l_2(x,m) = m_2^E(s(x), i(m)) \\ r_2(m,x) = m_2^E(i(m), s(x)). \end{cases}$$

容易验证，该作用与 s的选择无关 .

如果存在一个映射 $\phi : E \to E'$，使相容莱布尼茨代数之间的下图可交换，则称两个阿贝尔扩张等价

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (M,0,0) & \xrightarrow{i} & (E, m_1^E, m_2^E) & \underset{s}{\overset{j}{\rightleftarrows}} & (\mathfrak{g}, m_1, m_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \phi & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & (M,0,0) & \xrightarrow{i'} & (E', m_1'^E, m_2'^E) & \underset{s'}{\overset{j'}{\rightleftarrows}} & (\mathfrak{g}, m_1, m_2) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

注意，具有相同 i 和 j 但不同 s 的两个扩张总是等价的。

设 M是一个给定的 $\mathfrak{g}$双模。我们用 $\mathcal{E}xt_{com}(\mathfrak{g}, M)$表示 $\mathfrak{g}$ 被 M 扩张且诱导的 M 上的 $\mathfrak{g}$双模结构为指定结构的阿贝尔扩张的等价类。

下一个结果受到经典情形的启发。

定理 7.1. $H^2_{com}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathcal{E}xt_{com}(\mathfrak{g}, M)$.

证明。给定一个 2-余循环 $f \in C^2_{com}(\mathfrak{g}, M)$，我们考虑具有以下结构映射的 $\mathbb{K}$-模 $E = M \oplus \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \mu_1^E((m,x),(n,y)) &= (r_1(m,y) + l_1(x,n) + f(x,y),\ m_1(x,y)), \\ \mu_2^E((m,x),(n,y)) &= (r_2(m,y) + l_2(x,n) + f(x,y),\ m_2(x,y)). \end{aligned}$$

（注意，当 $f = 0$ 时，这就是半直积）。利用 f 是一个 2-余循环这一事实，可以很容易验证 (E, μ_1^E, μ_2^E) 是一个相容 Leibniz 代数。此外，$0 \to M \to E \to \mathfrak{g} \to 0$ 定义了一个具有显然分裂的阿贝尔扩张。设 $(E' = M \oplus \mathfrak{g}, \mu_1'^E, \mu_2'^E)$ 是与上同调等价的 2-余循环 $f - \delta^1_{com}(g)$ 相对应的相容 Leibniz 代数，其中某个 $g \in C^1_{com}(\mathfrak{g}, M)$。阿贝尔扩张 E 和 E' 之间的等价由 $E \to E', (m,x) \mapsto (m + g(x)\ x)$ 给出。因此，映射 $H^2_{com}(\mathfrak{g}, M) \to \mathcal{E}xt_{com}(\mathfrak{g}, M)$ 是良定义的。

反过来，给定一个带有分裂 s 的扩张 $0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} \mathfrak{g} \to 0$，我们可以考虑 $E = M \oplus \mathfrak{g}$，而 s 是映射 $s(x) = (0, x)$。关于上述分裂，映射 i 和 j 是显然的。由于 $j \circ m_1^E((0,x),(0,y)) = m_1(x,y)$,

并且 $j \circ m_2^E((0,x),(0,y)) = m_2(x,y)$，由于 j 是代数映射，我们有 $m_1^E((0,x),(0,y)) = (f(x,y)\ m_1(x,y))$，以及 $m_2^E((0,x),(0,y)) = (f(x,y)\ m_2(x,y))$，其中某个 $f \in C^2_{com}(\mathfrak{g}, M)$。$m_1^E, m_2^E$ 的莱布尼茨条件进而推出 f 是一个 2-余循环。同样可以观察到，任意两个等价的扩张都由某个映射 $E = M \oplus \mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} M \oplus \mathfrak{g} = E'$，$(m,x) \mapsto (m + g(x)\ x)$ 联系起来，其中某个 $g \in C^1_{com}(\mathfrak{g}, M)$。由于 ϕ 是代数态射，我们有

$$\phi \circ m_1^E((0,x),(0,y)) = m_1'^E(\phi(0,x), \phi(0,y)),$$
$$\phi \circ m_2^E((0,x),(0,y)) = m_2'^E(\phi(0,x), \phi(0,y)),$$

这意味着 $f'(x,y) = f(x,y) - (\delta_{com}\ g)(a,b)$。这里，$f'$ 是由扩张 E' 诱导的 2-余循环。这表明映射 $\mathcal{E}xt_{com}(\mathfrak{g}, M) \to H^2_{com}(\mathfrak{g}, M)$ 定义良好。此外，这两个映射互为逆映射。

□

致谢：。第一作者获得 IFCPAR/CEFIPRA 资助（资助编号：6201-C 2019-0071）。第二作者获得科学与工程研究委员会（SERB）、科学技术部（DST）、印度政府的资助（资助编号：CRG/2022/005332）。

参考文献

[1] D. Balavoine，二次歌剧上的代数变形，《歌剧：文艺复兴会议论文集》（哈特福德，CT/吕米尼，1995），207–234，《当代数学》，202，美国数学会，普罗维登斯，RI，1997。4[2] Sh. A. Ayupov 和 B. A. Omirov，关于若干类幂零莱布尼茨代数，《西伯利亚数学杂志》42 (1) (2001) 18–29。3[3] A. Bloch（1965）。关于李代数概念的一种推广。《苏联数学文献》165(3):471–473。1[4] A. V. Bolsinov 和 A. V. Borisov，李代数上的拉克斯表示与相容泊松括号，《数学札记》72 (2002), 11–34。[5] T. Chtioui、A. Das 和 S. Mabrouk，相容结合代数的（上）同调，arXiv:2107.09259 (2021)。2[6] T. Chtioui、R. Saha，关于相容 Hom-结合代数的变形上同调（2022），arXiv:2210.12501。2[7] A. Das，相容 L_∞ 代数，《代数杂志》，第 610 卷，2022 年，第 241–269 页。2[8] V. Dotsenko 和 A. S. Khoroshkin，两种相容括号运算的幺半群及双哈密顿歌剧的特征标公式，《函数分析及其应用》41 (2007) 1–17。2

[9] M. Gerstenhaber，结合环的上同调结构，《数学年刊》（第 2 辑）78 (1963) 267–288。2, 13[10] M. Gerstenhaber，关于环与代数的变形，《数学年刊》（第 2 辑）79 (1964) 59–103。2, 13[11] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，主手征模型类型的可积方程中的相容李括号，《函数分析及其应用》36 (2002), 172–181。2[12] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，环代数的因子分解与相容李括号，《非线性数学物理杂志》12 (2005), 343–350。2[13] I. Z. Golubchik 和 V. V. Sokolov，相容李括号与杨–巴克斯特方程，《理论与数学物理》146 (2006), 159–169。2[14] G. Hochschild，关于结合代数的上同调群，《数学年刊》46 (1) (1945) 58–67。2[15]Y. Kosmann-Schwarzbach 和 F. Magri，泊松–尼延 huis 结构，《亨利·庞加莱研究所年刊 A》53 (1990) 35–81。2[16] J. Liu、Y. Sheng 和 C. Bai，相容李代数的 Maurer–Cartan刻画及上同调，arXiv 预印本 arXiv:2102.04742 (2021)。2[17] J.-L. Loday，循环同调，《数学科学基础》丛书，第 301 卷。施普林格出版社，柏林（1992）。1[18] J.-L. Loday，双代数，《双代数及相关幺半群》，7–66，《数学讲义》，1763，施普林格出版社，柏林，2001。1[19] F. Magri 和 C. Morosi，通过泊松–尼延 huis 流形理论对可积哈密顿系统作几何刻画，Quaderno S/19，米兰，1984。2[20] S. M´arquez，相容结合双代数，《代数通讯》46 (2018) 3810–3832。2[21] A. Nijenhuis 和 R. W. Richardson，李代数结构的变形，《数学与力学杂志》17 (1967) 89–105。2[22] A. V. Odesskii 和 V. V. Sokolov，与椭圆曲线相关的相容李括号，《数学物理杂志》47，第 1 期（2006）013506。2[23] A. V. Odesskii 和 V. V. Sokolov，与相容结合代数对相关的代数结构，《国际数学研究通知》2006，第 19 期（2006），文章编号 43743。2[24] A. V. Odesskii 和 V. V. Sokolov，相容结合代数对、经典杨–巴克斯特方程与箭图表示，《数学物理通讯》278，第 1 期（2008），83–99。2

[25] I. Rakhimov I. 和 K. Mohd Atan，关于莱布尼茨代数的收缩与不变量，马来西亚数学科学学会通报，35（2012），557–565。 7[26] H. Strohmayer，相容结构的幺半群与加权分拆，纯粹与应用代数杂志 212（2008）2522–2534。 2[27] K. Uchino，泊松几何的量子类比、相关的分枝代数与 Rota-Baxter 算子，数学物理通讯 85（2008），第 2–3 期，91–109。 2[28] M. Wu，相容结合代数的双重构造，代数讨论会26，第 03 期（2019）479–494。 2