arXiv:2305.01029v1 [physics.flu-dyn] 1 May 2023

使用集成卡尔曼方法推断储层岩石中的相对渗透率曲线

Xu-Hui Zhou[1], Haochen Wang[2], James McClure[3*]、Cheng Chen[4*]和Heng Xiao[5*]

[1]弗吉尼亚理工大学Kevin T. Crofton航空航天与海洋工程系，美国弗吉尼亚州布莱克斯堡，24060。[2]杜克大学Thomas Lord机械工程与材料科学系，美国北卡罗来纳州达勒姆，27708。[3*]弗吉尼亚理工大学国家安全研究所，美国弗吉尼亚州布莱克斯堡，24060。[4*]史蒂文斯理工学院土木、环境与海洋工程系，美国新泽西州霍博肯，07030。[5*]斯图加特大学斯图加特模拟科学中心，德国巴登-符腾堡州斯图加特，70569。

*通讯作者。电子邮箱：mcclurej@vt.edu；cchen6@stevens.edu；heng.xiao@simtech.uni-stuttgart.de；贡献作者：xuhuizhou@vt.edu；

摘要

多相流通过储层岩石是一种普遍且复杂的现象。相对渗透率是储层性能计算中的主要决定因素之一。准确估计相对渗透率对于储层管理和未来生产至关重要。本文提出使用集合卡尔曼方法，根据稀疏饱和度数据推断相对渗透率曲线。我们通过在指定饱和度值处设置一系列相对渗透率正增量来表示这些曲线，从而确保其在区间内具有单调性，并在0和1之间具有有界性。所提出的方法通过两项合成基准和一个由Equinor开发的场尺度模型中的推断性能进行了验证；前者由SPE设计，后者包含某些真实油田特征。结果表明，在具有可用观测数据的饱和度区间内，可以准确估计相对渗透率曲线，并凭借其中嵌入的约束，将其适当地外推至其余饱和度范围。即使井响应未被纳入观测数据，预测的井响应仍与真实值相当。本研究证明了使用集合卡尔曼方法根据饱和度数据推断相对渗透率曲线的可行性，这有助于多相流和油田生产的预测。

Key关键词： 多相流、相对渗透率曲线、储层岩石、集合卡尔曼方法

1 引言

多孔介质中的多相流广泛存在于各种工程应用中。在水处理过程中，多孔材料被用于去除供水中的细菌和有害物质 [1, 2]；在化学工程中，填充床

反应器用于促进非均相反应 [3, 4]；在缓解全球变暖方面，则将超临界二氧化碳注入多孔岩层，以进行地质碳封存 [5, 6]。这些例子及许多其他应用都表明，为了准确预测系统性能并实现高效运行，理解并建模多孔介质中的多相流至关重要。

历史上，多相流模型的开发很大程度上由石油工程行业推动，旨在更高效地从烃类油藏中采收石油和气体 [3]。在石油行业，通过注入水或气体进行二次提高采收率（EOR），使石油驱替并流向生产井 [7]。在这一过程中，相对渗透率在决定多相流的运动方面发挥着关键作用，因为它反映了在存在其他不混溶流体时某种特定流体的传输能力。对相对渗透率估计不准确，可能导致石油产量下降及其他问题 [8]。因此，准确确定相对渗透率至关重要，这有助于减少储层管理中的不确定性，并减轻估计不准对石油生产的影响。

相对渗透率曲线通常通过稳态或非稳态岩心驱替实验获得 [9–12]。稳态法具有最高的准确度，因为测量过程中能够达到毛细管平衡，从而可以利用达西定律直接计算给定饱和度下各相的有效渗透率。然而，每个饱和度的测量都需要数小时甚至数天，因此稳态法本质上耗时且成本高昂。非稳态测量更为常见，因为它不需要达到平衡，仅需数小时即可获得一组相对渗透率曲线。但其可靠性较低，通常仅被视为稳态测量的定性替代方法。这是因为相对渗透率数据是在非稳态条件下、估计饱和度对应的性质不断变化时获得的，因此测得的数值可能与先前测试结果大相径庭。由于实验室测量复杂且成本高昂，许多种类的...
...

目前，已有多种经验模型被开发出来，用于估算相对渗透率值 [8, 13–18]。其中，最为著名的是基于幂律关系的 Corey 模型 [13, 14], ，这是一种由 Burdine 方程 [19]发展而来的理论方法。其他模型，例如 Hornarpour 模型 [8], ，则更多地基于实际测量数据，并针对不同的储层条件开发而成。

实验室测量相对渗透率曲线的一大缺陷是，测量结果可能无法准确描述油田尺度油藏中的多相流 [20]。这是因为实验室测试中的岩心样本与工业油藏在空间尺度上存在巨大差异，而且两者的储层条件也不同 [8, 21]。对于油田尺度的油藏，历史拟合生产数据是估算相对渗透率曲线的一种典型方法。从数学上说，根据观测数据（生产数据）计算参数（相对渗透率）是一个逆问题，可以通过优化方法求解。例如，Reynolds 等人 [22] 采用伴随方法，分析生产数据对定义相对渗透率函数的参数的敏感性，从而估算三相流中的石油相对渗透率曲线。为推导该曲线，他们依赖两组基于 Stone 模型 II [18] 的两相相对渗透率曲线（油气和油水），并用幂律模型表示。类似地，Eydinov 等人 [23]通过历史拟合三相流生产数据，采用相同的方法估算相对渗透率曲线。不过，他们用 B 样条表示相对渗透率曲线。这种表示方法比幂律模型灵活得多，但需要对系数施加额外约束，以确保单调性。他们还通过约束曲线的导数，保证曲线可能具有的凸性。

另一种方法是基于集成的方法，近几十年来已展现出良好的应用前景，应用领域包括地球科学 [24–27]，湍流建模 [28, 29], 和医学物理 [30, 31]， 等。与基于伴随的方法不同，该方法不需要导数，而是用从集成中计算得出的协方差矩阵来替代 [32]。因此，该方法更易于实现，所需的人力也更少，尤其适用于

储层等复杂系统。 [33] Li 等人通过使用集合卡尔曼滤波（EnKF）对生产数据进行历史拟合，推断出油水相对渗透率曲线。曲线采用灵活的 B样条模型表示，并通过求解系数的线性方程组来保证单调性。尽管上述研究取得了成功，但它们仅在简单的合成示例上进行了测试，并未应用于真实油藏。其他研究已证明，EnKF 可用于推断真实油藏中的相对渗透率曲线 [34–39]。Seiler 等人 [38] 表明，在北海某复杂油田中，利用最新生产数据，EnKF 能够改善预测并快速更新相对渗透率曲线。他们采用 Corey 模型表示相对渗透率曲线，并同时推断端点饱和度。Chen 等人 [39] 将类似的表示和优化方法应用于 Brugge 油田，但在历史拟合过程中纳入了额外的渗透率向量，以辅助推断。

该领域的大多数研究旨在通过合适的表示方法对相对渗透率曲线进行建模，并使用伴随方法或集合方法，根据油田数据推断这些曲线。幂律模型具有内在的单调性，但可能缺乏实际油田所需的复杂性；B样条模型则更加灵活，但需要额外的约束。本文提出了一种简单新颖的相对渗透率曲线表示方法，并使用集合卡尔曼方法，根据稀疏的饱和度测量结果推断其中的参数。该表示方法具有物理上对油藏模拟所必需的内嵌单调性和有界性。我们通过一系列测试案例对所提出的方法进行了评估，这些案例包括两个合成基准和一个更为现实的项目。大多数通过历史拟合推断相对渗透率曲线的研究都使用油藏生产数据。近年来，永久传感器的日益广泛应用以及四维地震监测技术的发展，使得从油藏区块收集更广泛的数据成为可能 [27, 40–42]，这些数据或许有助于估计相对渗透率曲线。在本研究中，我们还探讨了仅使用生产数据进行推断的能力，并将其与基于稀疏饱和度数据的推断结果进行比较。

本文其余部分的结构如下。第2节介绍储层岩石中流体流动建模所面临的挑战以及常用的黑油模型。第3节介绍相对渗透率曲线的表示方法和基于集合的推断。第4节详细介绍三个测试案例的设置以及所提出方法的推断性能。本文在第5节作结。

2 储层岩石中的流动

储层岩石中的流体流动是一种极其复杂的现象，给油气行业带来了重大挑战。这些流动具有多相特性，加之多孔岩层的存在以及动态变化的压力和温度梯度，共同形成了一个动态且持续演变的系统，因此难以对其进行建模和预测。

这种复杂性的核心在于构成储层内流体相的石油、气体和水的混合物。这些流体各自具有不同的物理性质和流动行为。具体而言，石油可呈现多种形态，从液体到气体不等；气相既可以游离存在，也可以溶解于油相中。这可能导致多种流动行为，包括相分离、圈闭和运移。要预测储层行为，就必须对这些现象进行准确建模。此外，水相既可以是盐水，也可以是淡水，其含量也各不相同，这会进一步增加流体混合物流动行为的复杂性。这些因素与储层岩石复杂的几何结构和非均质性相结合，使得对这些环境中的流体流动进行准确建模，成为石油工程领域的一项重大挑战。

除了这些固有的复杂性之外，油气行业还必须应对从这些复杂的多相流系统中提取碳氢化合物所带来的挑战。这需要先进的建模和模拟技术，以及对储层内流体和岩层物理性质的深入理解。由于需要在产量与储层衰竭之间取得平衡，这些工作变得更加复杂，而生产

这些策略往往需要根据不断变化的储层条件持续调整。

储层模拟中最广泛使用的流体模型是黑油模型，该模型通过一组方程描述储层中石油、气体和水的行为。黑油方程根据各组分的质量守恒，并结合达西定律以及用于闭合方程组的初始和边界条件推导而来。下面简要回顾质量守恒和动量守恒的模型方程，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_{\mathrm{ref}} A_\alpha\right) + \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + q_\alpha = 0,$$
$$\mathbf{v}_\alpha = -\frac{K_{r,\alpha}}{\mu_\alpha}\mathbf{K}\left(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}\right),$$

其中，ϕ_{ref} 表示参考孔隙度，$\mathbf{K}$ 表示多孔介质的渗透率，$\mathbf{g}$ 表示重力加速度。对于组分 α，A_α 和 q_α分别表示其累积量和井流出通量密度；$K_{r,\alpha}$、μ_α和 p_α 分别表示其相对渗透率、黏度和相压力；$\mathbf{u}_\alpha$ 和$\mathbf{v}_\alpha$ 分别表示其组分速度和相速度，两者通过收缩/膨胀系数 b_α相关联。具体而言，累积项和通量的计算方式如下

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{w}} &= m_\phi b_{\mathrm{w}} S_{\mathrm{w}}, & \mathbf{u}_{\mathrm{w}} &= b_{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{\mathrm{w}},\\
A_{\mathrm{o}} &= m_\phi\left(b_{\mathrm{o}} S_{\mathrm{o}} + r_{\mathrm{og}} b_{\mathrm{g}} S_{\mathrm{g}}\right), & \mathbf{u}_{\mathrm{o}} &= b_{\mathrm{o}}\mathbf{v}_{\mathrm{o}} + r_{\mathrm{og}} b_{\mathrm{g}}\mathbf{v}_{\mathrm{g}},\\
A_{\mathrm{g}} &= m_\phi\left(b_{\mathrm{g}} S_{\mathrm{g}} + r_{\mathrm{go}} b_{\mathrm{o}} S_{\mathrm{o}}\right), & \mathbf{u}_{\mathrm{g}} &= b_{\mathrm{g}}\mathbf{v}_{\mathrm{g}} + r_{\mathrm{go}} b_{\mathrm{o}}\mathbf{v}_{\mathrm{o}},
\end{aligned}$$

其中 m_ϕ 是由压力决定的孔隙体积乘数；r_{og} 和 r_{go} 分别表示气相中汽化油与气体的比值，以及油相中溶解气与石油的比值；S_{w}、S_{o}和S_{g} 分别表示水、石油和气体的饱和度，其关系为 $S_{\mathrm{w}} + S_{\mathrm{o}} + S_{\mathrm{g}} = 1$。黑油模型方程的完整描述可参见文献 [43]。

如上所示，相对渗透率 $K_{r,\alpha}$在通过达西定律确定相通量方面发挥着关键作用，因为它描述了各流体相通过多孔介质的分流比例。缺乏可靠的相对渗透率数据，可能导致对流体行为的预测出现较大偏差。为解决这一问题，获取准确的相对渗透率曲线至关重要，因为这些曲线是建立可靠的石油储层模型以及优化生产和采收策略的基础。

3 方法

本研究旨在展示一种用于推断储层岩石中相对渗透率曲线的数据驱动框架。该推断方法需要恰当地表示相对渗透率曲线，并纳入储层中稀疏且可能含有噪声的测量数据。

我们提出用一组相对渗透率递增的控制点来表示曲线，并使用集合卡尔曼方法，根据稀疏观测数据推断其中的参数（记为 $\boldsymbol{\omega}$）。推断相对渗透率曲线的框架如图 1所示。该框架包含三个步骤：(1) 参数采样，(2) 正向模型传播，以及 (3) 根据测量值进行参数更新；这三个步骤分别见图 1a–c，下面将详细介绍。

3.1 带硬约束的相对渗透率曲线表示

相对渗透率曲线的参数化是逆问题中的关键环节。该曲线形式相当简单，仅涉及一个维度的饱和度。不过，它必须满足以下约束。

（i）该曲线是对应饱和度的递增函数。
（ii）该曲线有界，相对渗透率的下限为零，上限为一。

表示此类简单函数的一种常见方法是使用截断的切比雪夫多项式级数 [44]。通过优化多项式系数，使其拟合现有数据。然而，这种表示方法无法严格保证整个优化过程中始终满足约束。修改系数会改变整条曲线的形状，并可能导致某些区间出现非单调性，即使通过代价函数中的正则化项软性施加了单调性约束（见图1c）。非单调曲线会导致储层模拟和参数推断迅速终止。一

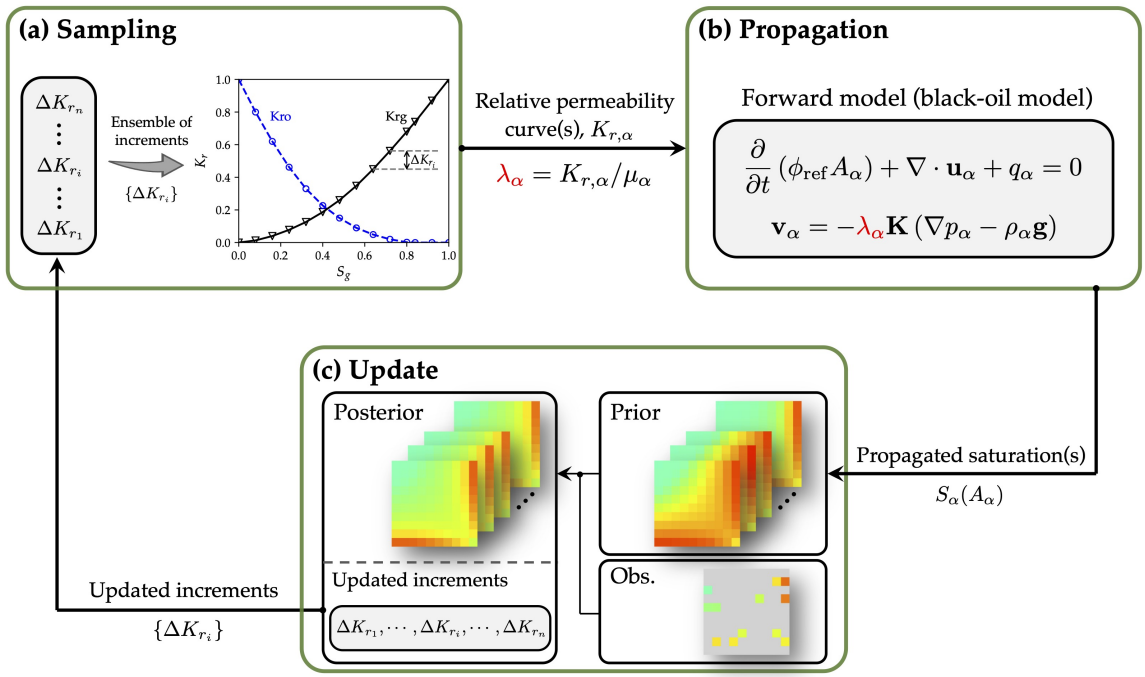


图1：利用稀疏饱和度数据推断相对渗透率曲线的示意图，包含三个主要步骤：(a) 对参数进行采样，以确定用于表示曲线的增量 $\{\Delta K_{r_i}\}$；(b) 通过求解黑油方程，将表示的曲线传播至饱和度场；(c) 通过整合稀疏观测数据更新参数。本研究中的观测数据取自某一特定时刻，这与许多采用时间序列数据的类似研究不同。

更通用的基于神经网络的表示方法也可能面临类似问题，即无法始终确保单调性。

我们提出用一组相对渗透率递增的控制点来表示相对渗透率曲线，如图所示。2具体而言，该曲线由以下参数确定： $n+1$ 个控制点，其饱和度分别为S_0，S_1，……，S_n 以及对应的相对渗透率 K_{r_0}，K_{r_1}，……，K_{r_n}。为满足有界性约束，我们分别为 $K_{r_0}=0$ 设定下界 $K_{r_n}=1$和上界 $S_0=0$，并为 $S_n=1$设定相应边界。当任意两个相邻点之间的相对渗透率增量始终为正时，即可保证单调性。为此，我们使用自然指数函数表示这些增量。例如，对于相邻饱和度 S_{i-1} 和 S_i，将相对渗透率增量设为 $\Delta K_{r_i}=\exp(\omega_i)$，其中 ω_i是待推断的参数。然而，这样确定的上界实质上是所有增量之和，即 $K_{r_n}=\sum_{i=1}^{n}\exp(\omega_i)$，而该值可能超过上述为满足有界性约束而定义的上界 1。受机器学习中特征缩放归一化方法的启发，我们将各增量除以其总和进行归一化，从而将最大相对渗透率（K_{r_n}）限制为 1。这样一来，该表示方法在对相对渗透率曲线建模时，同时嵌入了单调性和有界性，并显著降低了黑油模拟崩溃的风险。控制点确定如下：

$$K_r(S_i)=\begin{cases}0, & \text{if } i=0,\\ \sum_{m=1}^{i}\frac{\exp(\omega_m)}{\sum_{j=1}^{n}\exp(\omega_j)}, & \text{if } i=1,\ldots,n-1,\\ 1, & \text{if } i=n,\end{cases}$$

其中，i、j、m 表示参数或控制点的索引。随后，曲线由这些控制点及连接相邻点的线段表征，并对参数$\boldsymbol{\omega}=[\omega_1,\ldots,\omega_n]$进行优化，以适应观测数据。

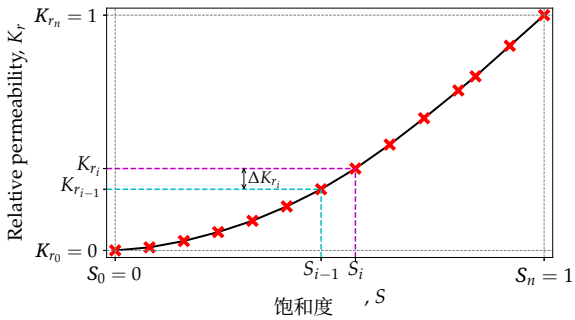


图2：使用一组控制点表示具有递增相对渗透率的相对渗透率曲线。通过任意两个相邻点之间相对渗透率的正增量（ΔK_r）保证单调性，而有界性则由起始点和终止点确保。

请注意，控制点的数量及其饱和度分布可以灵活选择。在本研究中，我们选取 $n \leq 10$ ，并使饱和度均匀分布（即 $S_i = i/n$）。

3.2 基于集合的相对渗透率曲线推断

采用适用于相对渗透率曲线的表示方法，我们使用集合卡尔曼方法基于饱和度数据推断参数 $\boldsymbol{\omega}$。集合卡尔曼方法传统上被称为一种数据同化方法，用于估计系统随时间演化时的可能状态（例如储层中的饱和度、压力和产量）。但在这里，我们推断定义相对渗透率曲线的参数，这一过程使用迭代集合卡尔曼方法完成。具体过程如下所述。

(i) 对参数进行采样 $\boldsymbol{\omega}$，依据初始先验分布，并用增量表示曲线 $\{\Delta K_{r_i}\}$（图 1a）。每个增量都是所有参数的函数。初始参数，$\boldsymbol{\omega}^0$，确定为 $\omega_i^0 = 0.1$，其中 $i = 1, \ldots, n$ 使曲线成为连接 (0，0) 和 (1，1) 的直线。通过公式 $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}^0 + \boldsymbol{\epsilon}_j$，抽取参数的随机样本，从而获得初始集合。

其中 $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0，0.5_2)$，j 表示样本的索引。每个样本 $\boldsymbol{\omega}_j$ 都对应一条不同的相对渗透率曲线，从而为储层模拟生成一组曲线。

(ii) 通过求解黑油方程，将集合中的每条相对渗透率曲线传播为饱和度场（图 1b）。通过对模拟的饱和度场进行后处理，获得预测的可观测量，例如提取储层某些位置处的石油/气体饱和度。

（iii）更新参数 $\boldsymbol{\omega}$ 依据对步骤（ii）中获得的预测可观测量进行的统计分析，以及与稀疏观测数据的比较（图1c）。

反复执行步骤 (ii) 和 (iii)，直至达到收敛准则。

步骤（iii）中使用的代价函数表示为

$$J = \left\|\boldsymbol{\omega}_j^{l+1} - \boldsymbol{\omega}_j^{l}\right\|_{\mathsf{P}}^2 + \left\|\mathsf{y}_j - \mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}_j^{l+1}]\right\|_{\mathsf{R}}^2, \quad (1)$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathsf{A}}$ 表示由协方差矩阵加权的范数A，l 为迭代索引，y 为观测，P为表示参数不确定性的模型误差协方差矩阵，R为观测误差协方差矩阵，且$\mathcal{H}$ 为观测算子。式（1）中的第一项通过惩罚与前一次迭代中参数值的偏差，对更新后的参数进行正则化。第二项描述观测与预测之间的差异。观测数据从油田中稀疏采样，并受到高斯噪声 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0，\mathsf{R})$ 的影响；而预测则通过模拟储层，并利用算子在观测位置提取数值来获得$\mathcal{H}$。迭代集合卡尔曼方法的参数更新方案写为

$$\boldsymbol{\omega}_j^{l+1} = \boldsymbol{\omega}_j^{l} + \mathsf{K}\left(\mathsf{y}_j - \mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}_j^{l}]\right),$$
$$\text{with} \quad \mathsf{K} = \mathsf{S}_\omega^l (\mathsf{S}_d^l)^\top \left[\mathsf{S}_d^l (\mathsf{S}_d^l)^\top + \mathsf{R}\right]^{-1},$$

其中，K 为卡尔曼增益矩阵，S_ω^l 和 S_d^l分别为迭代

步骤 l 中参数和数据对应的平方根矩阵。平方根矩阵的计算方式如下:

$$\mathsf{S}_{\omega}^{l} = \frac{1}{\sqrt{N_e - 1}} \left[\boldsymbol{\omega}_1^l - \bar{\boldsymbol{\omega}}^l, \ldots, \boldsymbol{\omega}_{N_e}^l - \bar{\boldsymbol{\omega}}^l \right],$$

$$\mathsf{S}_{d}^{l} = \frac{1}{\sqrt{N_e - 1}} \left[\mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}_1^l] - \mathcal{H}[\bar{\boldsymbol{\omega}}^l], \ldots, \mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}_{N_e}^l] - \mathcal{H}[\bar{\boldsymbol{\omega}}^l] \right],$$

$$\text{with} \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}^l = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \boldsymbol{\omega}_j^l,$$

其中， N_e 为样本量。

与此前采用伴随方法的研究相比，[22, 23]，基于集成的方法具有无需求导且非侵入性的优势。该方法无需计算代价函数的梯度，对源代码的改动也极少，因此能够轻松应用于真实油藏。在本研究中，前向传播（图1b）由黑油模拟器 Open Porous Media (OPM) Flow 执行，[43],而参数更新（图1c）则通过 DAFI 代码实现，[28],整个推断过程以耦合方式完成。

4 结果

我们通过一系列测试案例展示了所提方法用于推断相对渗透率曲线的可行性。前两个测试案例 SPE 1 和 SPE 3 基准测试由石油工程师学会（SPE）设计，是用于评估和基准测试各种模拟器或算法的合成项目。这些基准项目已成为石油工程领域广泛认可的重要工具，可用于测试和提升油藏模拟器的准确性和效率。第三个测试案例 Drogon 是一个场尺度模型，与真实油田模型的某些特征非常相似，因此比上述合成基准复杂得多。

对于所有测试案例，我们旨在根据稀疏的油相饱和度数据推断气相相对渗透率曲线，同时假设其他相对渗透率曲线已知。收敛后，推断得到的气相相对渗透率曲线称为集合平均曲线，并通过与相应的真实值进行比较来评估；这些真实值由 OPM Flow 示例提供，其准确性则根据与商业模拟器 ECLIPSE [43] 的一致程度进行评估。此外，基于推断得到的集合平均曲线预测的饱和度场和井响应将与使用真实曲线得到的对应结果进行比较。案例设置和结果的详情如下。

4.1 SPE 1 基准测试

第一个案例 SPE 1 是一个用于三维黑油模拟的基准项目。该项目提供了两个条件不同的示例：(1) 饱和压力恒定；(2) 不同气体饱和度下饱和压力变化。本文选择第二个示例进行推断，因为该示例曾用于验证和确认 OPM Flow 模拟器 [43]。该示例的计算域和井位如图3所示。具体而言，储层区域尺寸为 10000 英尺 $\times$ 10000 英尺 $\times$ 100 英尺，各层厚度分别为 20 英尺、30 英尺和 50 英尺。数值模拟中，计算域在空间上离散为 $10 \times 10 \times 3$ 个网格单元。第一口井（图3左下方）从顶层以 100 百万标准立方英尺/天的速率注入气体，另一口井（右上方）则从底层采出石油。有关 SPE 1 基准测试的更多详情可见文献 [43, 45]。储层初始时处于欠饱和状态，整个计算域的气体饱和度为$S_{\mathrm{g}} = 0$ 。对储层进行为期十年的模拟，时间从 2015年1月 到 2024年12月。我们使用第三年末（2017年11月）50 个网格单元的含油饱和度作为观测数据，以推断气相相对渗透率曲线。请注意，推断过程未使用最后七年的任何数据；相反，利用推断得到的气相相对渗透率曲线预测这一时期储层的状态。

推断的气相相对渗透率曲线与真实值非常吻合，如图 4a 所示。尽管初始猜测的形式截然不同，但所有样本都收敛到了推断曲线，该曲线与真实值几乎完全一致。由于存在束缚水，这些曲线终止于 $S_{\mathrm{g}} = 0.88$，其饱和度为 $S_{\mathrm{wc}} = 0.12$。储层第一层中气体饱和度的演变也体现了气相相对渗透率曲线推断的良好效果，如图 4b 所示。可以观察到，无论是预测（中排）还是

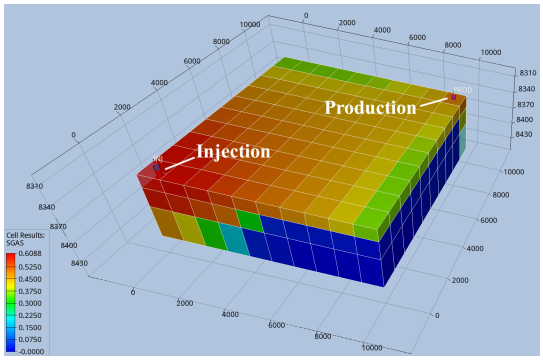


图 3：SPE 1 基准测试的计算域和井位。为便于观察，z 方向的域长放大了 35 倍。两个井分别位于对角，分别用于注入气体和开采石油。

真实值（上排），都呈现出从注入角向对侧扩散的相似过程。四个不同年份的预测气体饱和度场与真实值非常接近，仅有轻微偏差（下排）。

通过重要储层量（井响应）的一致性，进一步展示了该方法的能力，相关结果见图 5。需要注意的是，在推断相对渗透率曲线时，这些量均未用作观测数据。具体而言，我们通过将四个量随时间变化的预测与相应真实值进行比较，评估其预测结果，即：(1) 注入井井底压力，(2) 生产井井底压力，(3) 气油比，以及 (4) 石油产量。基于推断曲线得到的四项预测与真实值呈现出相近的趋势。作为比较基线，初始猜测（连接 (0, 0) 和 (1, 1) 的直线）产生了截然不同的预测。约 2500 天后，预测的气油比和石油产量仍存在偏差，这是由于在饱和度区间 $[0.5,0.7]$ 中高估了气体相对渗透率，如图 4a 所示。高估意味着在有石油存在时气体的传输能力更强，导致模拟结果中气体饱和度更高、含油饱和度更低。这种高估与气油比的高估以及石油产量的低估相一致（底排，图 5）。

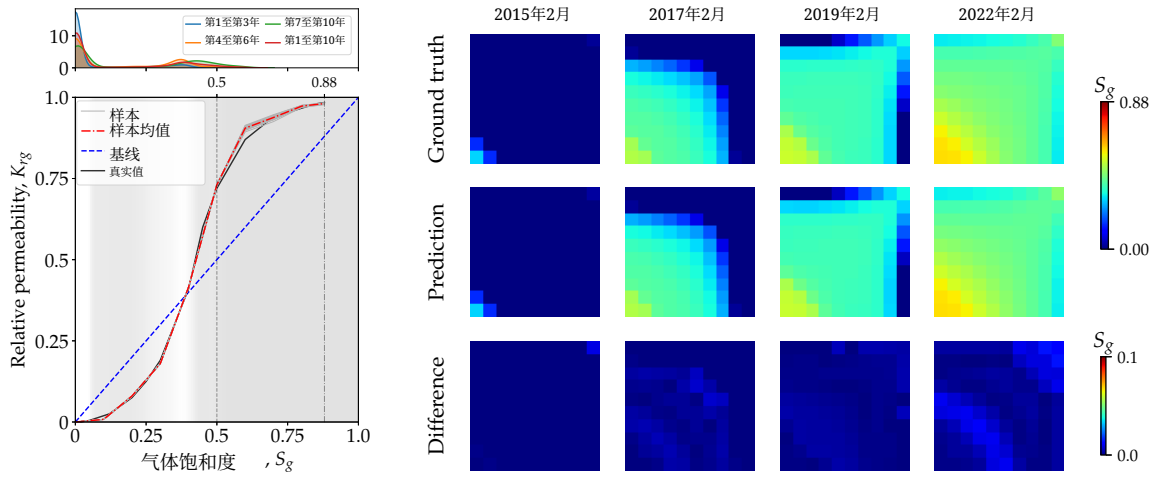
推断得到的气相相对渗透率曲线与真实值之间的差异可以由以下因素解释

图中上方面板所示的数据分布4a。我们绘制了整个储层在连续三个时间段（第1–3年、第4–6年和第7–10年）内气体饱和度的概率密度函数（PDF），但推断仅使用了第一个时间段的观测数据。第一个时间段内气体饱和度的数据分布也通过下方面板中的渐变背景表示，其中较深的背景表示数据密度较低的区间。曲线在区间 $[0, 0$ 内5] 具有较浅的背景，因此估计得较为准确；而在区间 $[0.5, 0.7]$ 内则由于观测数据稀少而出现了微小偏差。由于缺乏观测数据，不可能推断区间 [0.5,0.88] 内的曲线。然而，由于可推断的曲线部分覆盖了从0到约0.75的大部分相对渗透率范围，剩余部分的曲线在单调性和有界性约束下得到了良好的近似，因此恰好与真实值吻合。

此外，我们采用生产数据作为观测，按照许多先前研究的常见做法，推断 SPE 1 中的相对渗透率曲线。结果表明，仅使用生产数据进行推断会导致明显的病态性。更多详情请见附录 A。

4.2 SPE 3 基准测试

第二个案例 SPE 3 是一项基准测试，旨在研究凝析气油藏中的注气循环。凝析气油藏是指初始温度介于临界温度与上临界凝析温度之间的天然气系统。在本案例中，初始储层压力高于露点压力，因此储层内为单相气体系统。计算域和井位如图6所示。网格尺寸为 $9 \times 9 \times 4$，每个网格单元的水平尺寸为 293。$3\ \text{ft} \times 293.3\ \text{ft}$。前两层的厚度均为 30 ft，后两层的厚度均为 50 ft。气体注入井位于网格左上角的 (1, 1) 网格单元，并在顶部两层网格单元中射孔；生产井位于网格右下角的 (7, 7) 网格单元，并在底部两层网格单元中射孔。



(a) 推断曲线　　(b) 气体饱和度场比较

图 4：SPE 1 基准测试中推断的相对渗透率曲线评估：(a) 推断曲线与相应真实值的比较，以及不同时段气体饱和度的概率密度函数（PDF）；(b) 基于推断和真实相对渗透率曲线，对四个不同年份的预测气体饱和度场进行比较。(a) 中的渐变背景对应第一个时段的概率密度，较深的颜色表示饱和度数据密度较低。竖线 $S_{\mathrm{g}} = 0.5$ 表示观测数据的上限，而 $S_{\mathrm{g}} = 0.88$ 表示束缚水饱和度为 0.12。

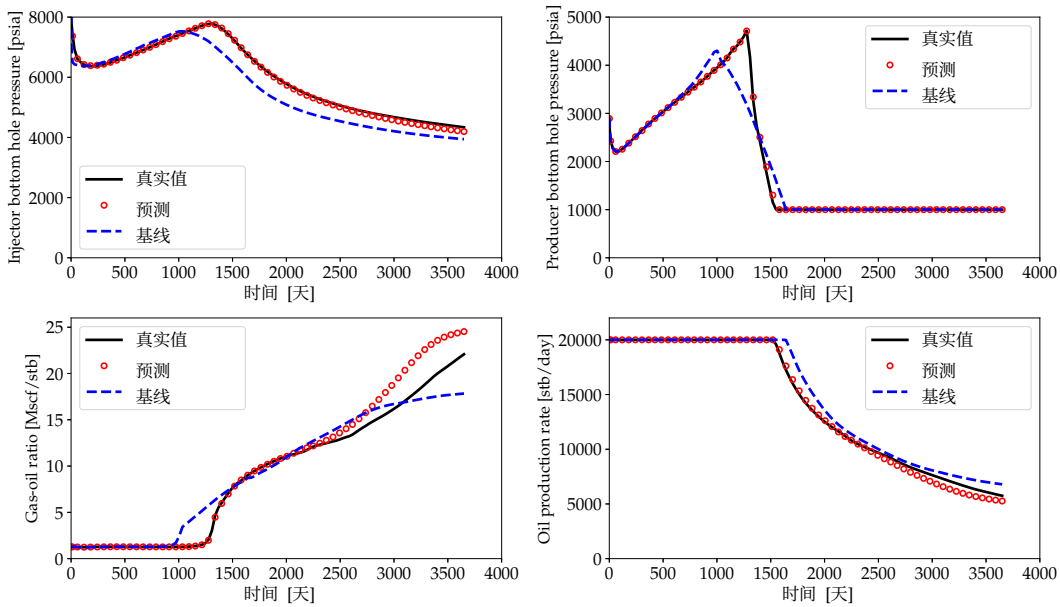


图 5：SPE 1 基准测试中预测井响应与真实值的比较。选取四个量进行比较：(1) 注入井井底压力，(2) 生产井井底压力，(3) 气油比，以及 (4) 石油产量。预测值和真实值分别基于推断的和真实的相对渗透率曲线获得，而基线则使用连接 (0, 0) 和 (1, 1) 的直线作为初始猜测。

储层最初充满气体和水，几乎不含石油，且此处假设已知束缚水饱和度 $S_{wc} = 0.16$ 。气藏模拟时间为14年，从2016年1月到2029年12月。储层前4年的注气速率为5700 千标准立方英尺/天，随后5年降至3700 千标准立方英尺/天，最后5年不注气。有关案例设置的更多详情见文献 [43, 46]。我们使用第2年末50个网格单元的含油饱和度作为观测数据来推断气相相对渗透率曲线，同时预测储层未来12年的状态。

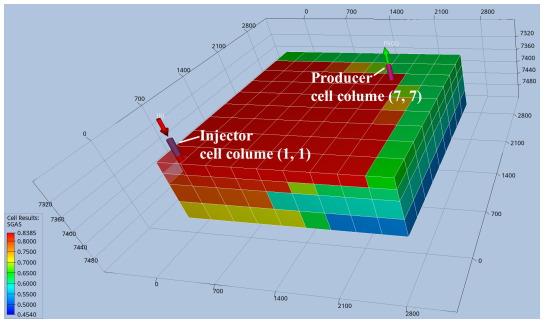


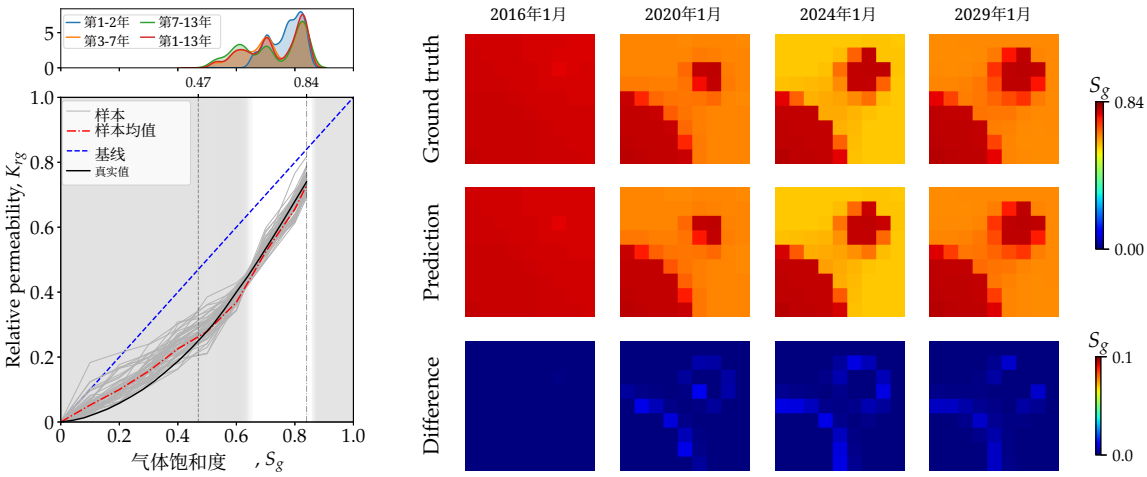
图6：SPE 3 基准测试的计算域和井位。为清晰起见，沿z 方向的域长放大了5倍。注入井贯穿最上面的两层，生产井贯穿最下面的两层，二者分别位于网格列(1, 1)和(7, 7)。

推断得到的气相相对渗透率曲线接近真实值，如图7a 所示。经过几次迭代后，样本曲线偏离初始猜测，并收敛至推断得到的相对渗透率曲线。图7b 进一步展示了该方法的性能：储层第三层中，四个不同年份的预测饱和度（中排）与相应真实值（上排）之间的差异很小（下排）。类似地，预测井响应的时间序列与根据真实曲线得到的结果几乎完全一致，如图8所示，这证明了该方法的有效性。尽管如此，根据初始猜测得到的井响应基线也与真实值相似，这表明在此情况下，井响应对相对渗透率曲线的变化并不敏感。这一结果与附录 A 中的发现一致：将饱和度作为观测数据，有助于减轻推断相对渗透率曲线时的病态性。

推断得到的相对渗透率曲线与真实值之间的差异，可由图中上方面板的数据分布解释。7a. 前两年的气体饱和度数据分布在区间 $[0.47,0.84]$, 内，这意味着无法在区间 $[0,\ 0$内$47]$推断相对渗透率曲线，这是由于缺少观测数据所致。同一区间内样本曲线明显的方差也体现了这一点。尽管区间 $[0.47,\ 0.65]$, 内存在饱和度数据，但如深色背景所示，概率密度过低，无法准确估计曲线。大部分饱和度数据分布在区间 $[0.65,\ 0.84]$, 内，因此能够可靠地估计该区间内的曲线。

4.3 Drogon案例

提出的方法还在一个称为Drogon的更复杂案例中进行了进一步评估，如图所示。9a。它是Reek油田的后续案例 [47],二者均由Equinor开发。根据概念描述 [48], , Drogon油藏位于Volantis群，其中包括三个地层：Valysar、Therys和Volon，如图9b–d所示。具体而言，Valysar组属于河流相沉积体系，具有河道体，其下边界以连续煤层为主；Therys组属于滨岸沉积体系，由临滨相渐变为滨外相，并含有方解石胶结条带；Volon组属于辫状河沉积体系，含有方解石层段。Drogon油藏的区域尺寸约为12000 ft $\times$ 15000 ft $\times$ 450 ft，并在空间上离散为 $46 \times 73 \times 31$ 个网格单元，其中有70972个活跃网格。该油藏的复杂性还体现在包含12个具有不同相对渗透率曲线的饱和度表区域（SATNUM），而前述合成案例（SPE 1和SPE 3）的整个油田均采用相同的相对渗透率曲线。两口井（A5和A6）位于.....附近



（a）推断曲线　　（b）气体饱和度场比较

图 7：SPE 3 基准测试中推断出的相对渗透率曲线评估：（a）推断的气相相对渗透率曲线与真实值的比较，以及不同时间段气体饱和度的概率密度函数；（b）基于推断曲线和真实曲线，在四个不同年份预测的气体饱和度场比较。（a）中的渐变背景对应前两年的概率密度函数，颜色越深表示饱和度数据的密度越低。竖线 $S_{\mathrm{g}} = 0.47$ 表示观测数据的下限，而 $S_{\mathrm{g}} = 0.84$ 表示束缚水饱和度为 0.16。

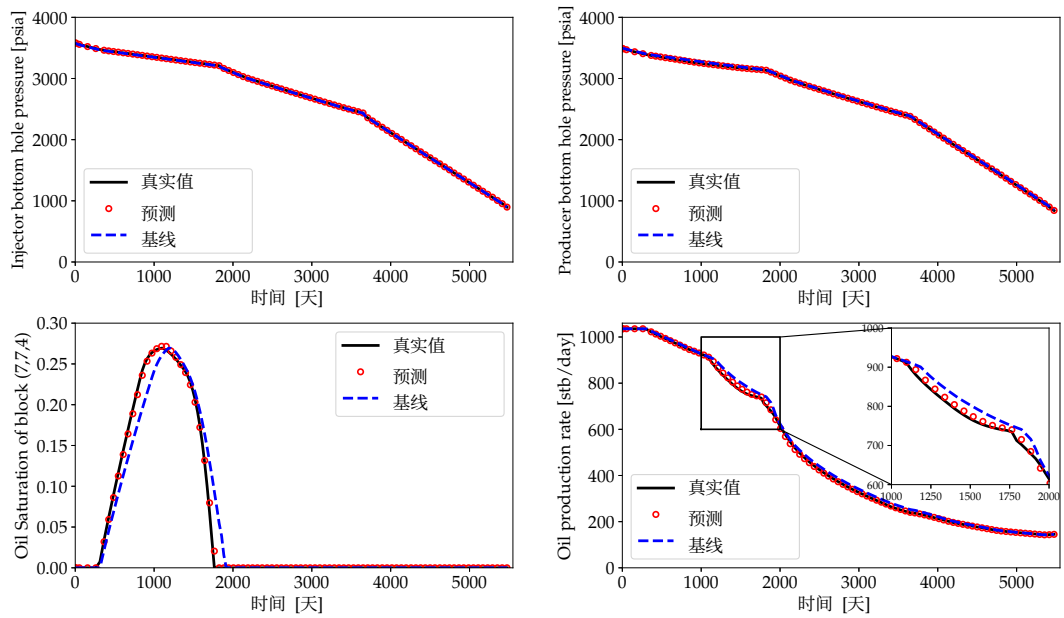


图 8：SPE 3 基准测试中预测的井响应与真实值的比较。选取了四个量进行比较：（1）注入井井底压力，（2）生产井井底压力，（3）单元格（7, 7, 4）的含油饱和度，以及（4）石油产量。预测值和真实值分别由推断曲线和真实曲线获得，而基线则由初始猜测给出，即连接（0, 0）和（1, 1）的直线。

油水界面处注入水，最大注入速率为 8000 SM^3/天；油区内的其他四口井（A1–A4）则生产石油，最大生产速率为 4000 SM^3/天。

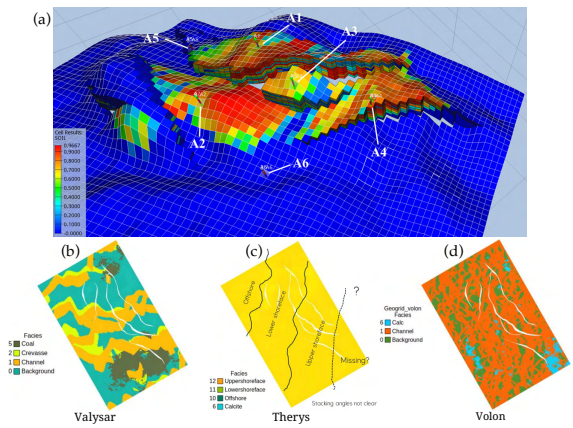


图 9：Drogon案例的图示说明：(a) 计算域和井位，(b)、(c) 和 (d) 分别表示其中设计的三种地层。为便于观察，沿 z 方向的域长放大了 10 倍。A1、A2、A3 和 A4 为石油生产井，A5 和 A6 则注水。

对Drogon油藏进行了为期两年半的模拟，时间从2018年1月到2020年7月。注入井A5和A6分别于2018年5月和2018年11月投产，并在此期间短暂停井三次；生产井A1–A4则依次投产。模拟期间，大部分饱和度变化局限于单一区域（饱和度区域编号 1），其余区域（饱和度区域编号 2–12）的变化很小。本文旨在推断饱和度区域编号 1 中的气相相对渗透率曲线，其他区域的曲线则已知。我们将最后一个月（2020年7月）85个网格单元中的含油饱和度作为观测数据进行推断，这些网格单元选自饱和度变化最大的网格单元。

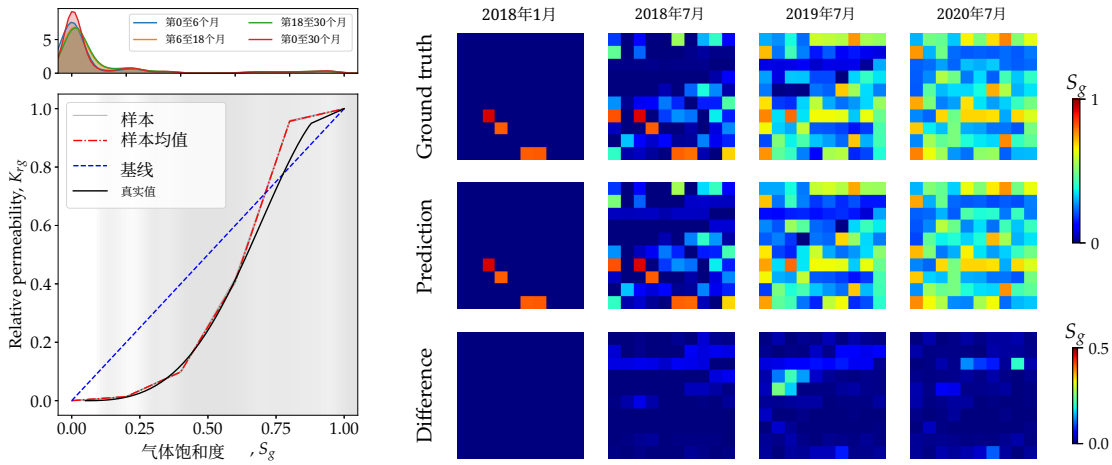
尽管在较高饱和度下存在一些偏差，但推断得到的气相相对渗透率曲线与相应的真实值形态相近，如图10a 所示。具体而言，在饱和度区间 $[0,0.6]$，内，相对渗透率曲线的估计较为准确；但在区间 $[0.6$ 内，估计值偏高，

1]。考虑到大多数网格单元中的气体饱和度值低于 0.6，这一表现是合理的，如上方面板中的概率密度函数图所示：数据分布呈偏态，大多数值集中在接近零的位置。梯度背景进一步解释了推断效果：在背景较浅的区间内，相对渗透率曲线均被正确推断；而在背景较深的区间内则存在偏差，因为该区间可用的观测数据少得多。

尽管推断曲线与真实曲线之间存在一些差异，但预测的储层状态与相应的真实值相当接近，如图10b 和11所示。在图10b 中，四个不同月份、225 个（15×15）网格单元的预测气体饱和度（中排）与根据真实曲线得到的真实值（上排）相当接近，尽管极少数位置存在差异（下排）。请注意，这 225 个网格单元并非局限于某一特定层，而是从全部 70972 个网格单元中选出饱和度变化最显著的单元。类似地，如图11所示，预测的井响应趋势与相应的真实值相当接近，但与基线不同，尤其是气油比（上排）。具体而言，我们比较了生产井 A1 和 A2 的预测气油比及石油产量与真实值和基线。预测结果与真实值吻合良好，而基线在较长时间段内均出现高估。这种高估是由于初始猜测所隐含的气体传输能力较强，其在饱和度区间$[0,\ 0$内的相对渗透率高于真实曲线。$8]$ 石油产量（下排）再次表明，其对气相相对渗透率曲线不敏感，因此需要使用饱和度数据，以缓解仅通过生产数据进行历史拟合可能导致的病态性。

5 结论

本文展示了一种基于集合的框架，用于根据稀疏饱和度数据推断相对渗透率曲线。在表示相对渗透率曲线方面，这一提出的范式有别于以往的研究。其固有的单调性和有界性



(a) 推断曲线　　(b) 气体饱和度场比较

图1 10：Drogon 案例中推断的相对渗透率曲线评估：(a) 推断曲线与真实值的比较，以及不同时间段气体饱和度数据的概率密度函数；(b) 根据推断曲线和真实曲线，对四个不同月份的预测气体饱和度场进行比较。(a) 中的渐变背景对应整个时间段的概率密度函数，颜色越深表示数据密度越低。

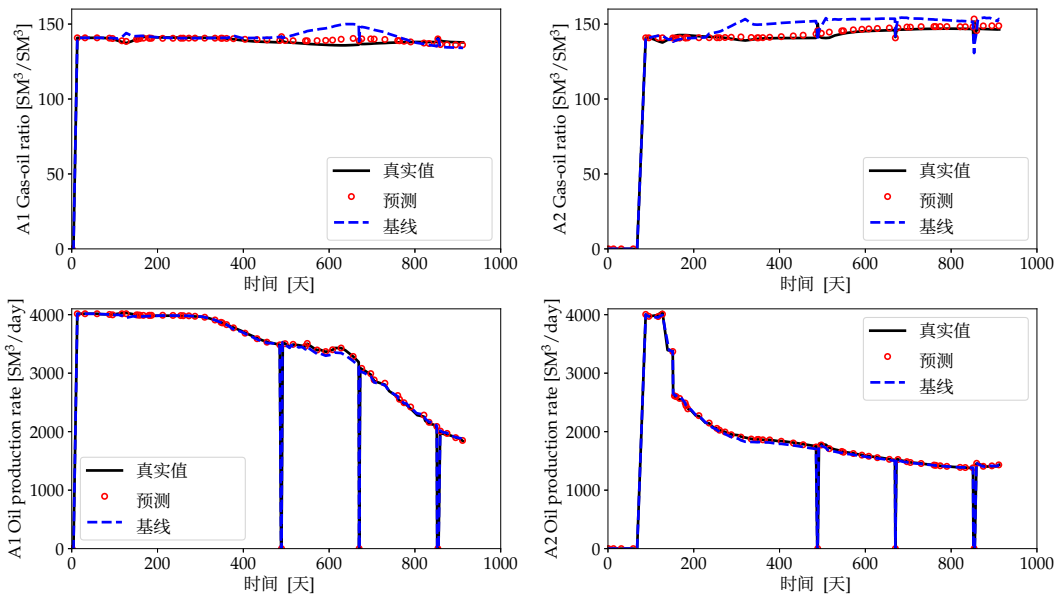


图1 11：Drogon 案例中预测井响应与真实值的比较。选取两个注入井中的四项指标进行比较：(1) A1 气油比，(2) A2 气油比，(3) A1 石油产量，(4) A2 石油产量。预测值和真实值分别根据推断曲线和真实曲线获得，基线则采用初始猜测，即连接 (0, 0) 和 (1,1) 的直线。

该表示方法无需在优化过程中施加额外约束。此外，我们尝试将稀疏饱和度数据用作观测，这不同于通常使用的生产数据，可通过地震监测获取。我们发现，与仅使用生产数据相比，纳入饱和度数据有助于减轻推断相对渗透率曲线时的病态性。

我们通过两个合成基准和一个具有某些真实油田特征的油田尺度算例，验证了该框架的能力。所有测试均表明，所提出的方法能够推断相对渗透率曲线；第三个算例则展现了该方法在真实油田中的应用潜力。对于有可用数据的饱和度范围，相对渗透率曲线能够得到准确估计，而内嵌的约束则确保曲线能够合理地外推至其他饱和度范围。

致谢。 作者感谢 Xin-Lei Zhang（中国科学院）、Hong-sheng Wang（德克萨斯大学奥斯汀分校）和 Tor Harald Sandve（NORCE挪威研究中心）提出的宝贵讨论和建议。

声明

资金支持

本研究由美国能源部国家能源技术实验室下属的化石能源研究大学联盟（UCFER）项目资助，资助编号为 DE-FE0026825，分项资助编号为 S000038-USDOE。

利益冲突

作者不存在相关的财务或非财务利益冲突。

代码可用性

代码可在 GitHub 上获取 [49],读者可使用这些代码复现结果并进一步开发。

作者贡献声明

JM、CC 和 HX 负责指导该项目。XZ、HW 和 JM 开展了研究。XZ 和 HW 撰写了稿件。JM、CC 和 HX 提供了深刻的反馈，并协助完善了研究、分析和稿件。

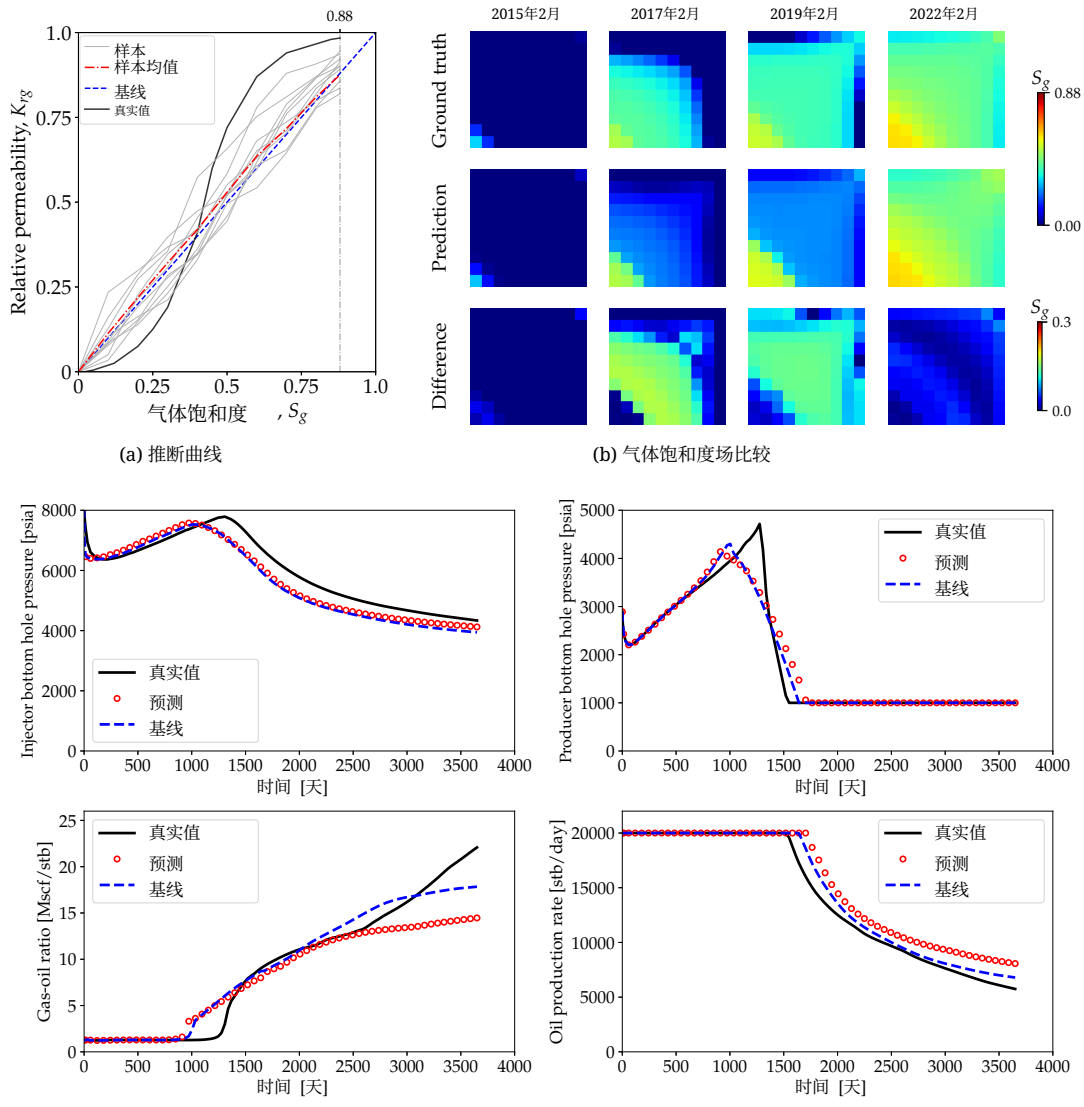
附录A 基于生产数据的推断

在本文中，我们使用 SPE 1 基准测试开展了另外两次数值实验，以强调仅使用生产数据所导致的病态性，而这在许多此类研究中是惯常做法。

在两项实验中，推断得到的气相相对渗透率曲线均与真实值显著偏离。第一项实验旨在与第 4.1 节所述实验进行公平比较。我们使用前三年的石油产量（2015年1月至2017年12月）作为观测数据来推断相对渗透率曲线。推断结果如图 A1a 所示。经过多次迭代后，样本曲线并未收敛，其均值几乎等于初始猜测。因此，预测气体饱和度场和井响应与相应真实值显著不同，如图 A1b 和 c 所示。预期会出现这种表现，因为初始猜测能够在前三年产生相同的石油产量，按定义，这使得该推断问题适定性不足。

与第一个实验相比，第二个实验使用石油产量的10年时间序列作为观测来推断相对渗透率曲线。通过使用更长时间段的数据，降低了病态性。尽管如此，推断出的相对渗透率曲线仍与真实曲线不同（图 A2a），尽管预测的石油产量与真实值一致（图 A2c）。如图 A2b 和 c 所示，预测的气体饱和度场和另外三口井的响应与对应的真实值显著不同。

从上述结果中，我们可以观察到，仅凭生产数据的时间序列可能无法唯一确定相对渗透率曲线。利用稀疏饱和度数据，可以对病态性进行正则化，从而显著改善相对渗透率曲线的估计结果。

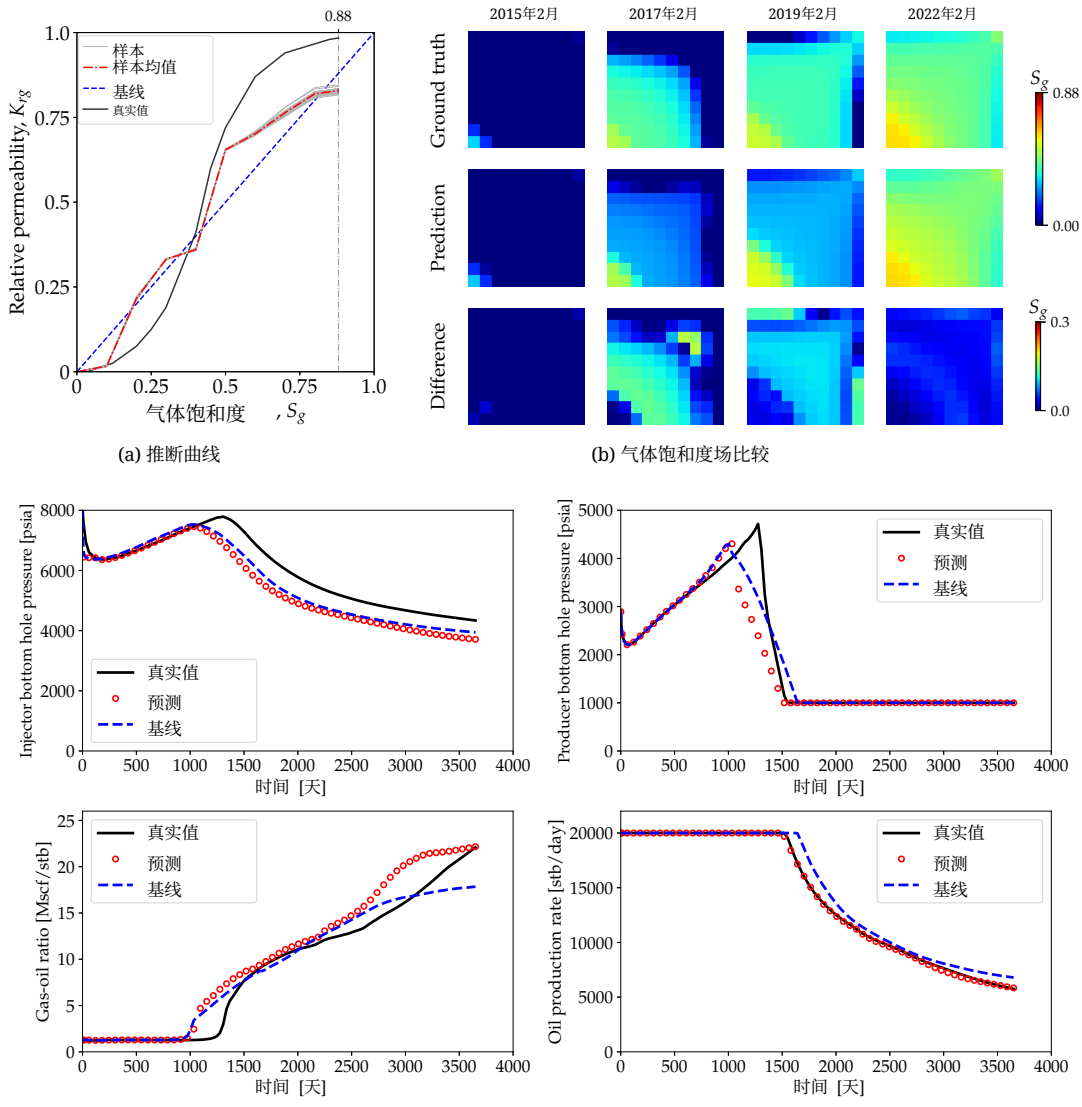


(a) 推断曲线

(b) 气体饱和度场比较

(c) 井响应对比

图 A1：SPE 1 基准测试中推断的相对渗透率曲线评估：(a) 推断曲线与真实值的比较，(b) 基于推断曲线和真实曲线的四个不同年份模拟气体饱和度场的比较，以及 (c) 基于基线、推断曲线和真实曲线的 10 年井响应时间序列比较。此处，前三年的石油产量时间序列用作观测数据。



(a) 推断曲线

(b) 气体饱和度场比较

(c) 井响应对比

图 A2：SPE 1 基准测试中推断的相对渗透率曲线评估：(a) 推断曲线与真实值的对比，(b) 基于推断曲线和真实曲线的四个不同年份模拟气体饱和度场的对比，以及 (c) 基于基线、推断曲线和真实曲线的 10 年井响应时间序列对比。此处，将全部 10 年的石油产量时间序列用作观测数据。

参考文献

[1] Zhang, W., Liu, N., Cao, Y., Lin, X., Liu, Y., Feng, L.：用于废水处理的超润湿多孔材料：从不相溶的油/水混合物到乳液分离。Advanced Materials Interfaces **4**(10), 1600029 (2017)

[2]Cheng, H., Lijie, L., Wang, B., Feng, X., Mao, Z., Vancso, G.J., Sui, X.：纤维素多孔材料在环境、能源和健康领域的多方面应用。Progressin Polymer Science**106**, 101253 (2020)

[3] Parker, J.：多孔介质中的多相流与传输。Reviews of Geophysics **27**(3), 311–328 (1989)

[4]Noorman, S., van Sint Annaland, M., Kuipers, H.：用于化学链燃烧的填充床反应器技术。Industrial & Engineering Chemistry Research**46**(12), 4212–4220（2007年）

[5] Moodie,N., Ampomah,W.,Jia,W.,McPher- son, B.：相对渗透率：多孔介质中多相流数值模拟的关键参数。Energies**14**(9), 2370（2021年）

[6]Bickle, M.J.：地质碳封存。Nature Geoscience **2**(12), 815–818（2009年）

[7] Adibifard, M.：通过拟合随时间变化的注入压力曲线，估算毛细管中驱替流体残余饱和度的新型解析解。Physics of Fluids **30**(8),082107（2018）

[8] Honarpour, M., Koederitz, L., Harvey, A.H.：石油储层相对渗透率。CRCpress（2018）

[9]Henderson, G.D., Danesh, A., Tehrani, D., Al-Shaidi, S., Peden, J.：采用稳态法测量并关联凝析气相对渗透率。SPE Reservoir Evaluation & Engineering **1**(02), 134–140 (1998)

[10] Pini, R., Benson, S.M.：通过不同流体对的岩心驱替实验同时测定毛细管压力和相对渗透率曲线。Water ResourcesResearch **49**(6), 3516–3530 (2013)

[11] Fan, M., Dalton, L.E., McClure, J., Ripepi, N., Westman, E., Crandall, D., Chen, C.：全面研究与多孔介质中多相流相关的临界无量纲数之间的相互作用。《Fuel》**252**，522–533 (2019)

[12]Fan, M., McClure, J.E., Armstrong, R.T., Shabaninejad, M., Dalton, L.E., Crandall, D., Chen, C.：黏土润湿性改变对相对渗透率的影响。Geophysical Research Letters **47**(18)，2020–088545 (2020)

[13] Corey, A.T.：气体与石油相对渗透率之间的相互关系。《Producers Monthly》，38–41 (1954)

[14]Brooks, R.H., Corey, A.T.：影响流体流动的多孔介质性质。《Journal of the Irrigation and Drainage Division》**92**(2)，61–88 (1966)

[15]Chierici, G.L.：关于排驱和吸入相对渗透率的新关系。《Society of Petroleum Engineers Journal》**24**(03), 275–276 (1984)

[16]Alpak, F.O., Lake, L.W., Embid, S.M.：验证经修正的 Carman-Kozeny方程，以模拟两相相对渗透率。载于：SPE 年度技术会议暨展览会（1999）。OnePetro

[17]Stone, H.：用于估算三相相对渗透率的概率模型。《Journal of Petroleum Technology》**22**(02), 214–218 (1970)

[18] Stone, H.：三相相对渗透率和残余油数据的估算。《Journal of Canadian Petroleum Technology》**12**(04) (1973)

[19]Burdine, N.：根据孔径分布数据计算相对渗透率。Journal of Petroleum Technology **5**(03)，71–78

(1953年)

[20]Matthews, J.D., Carter, J.N., Zimmerman, R.W.：利用钻杆测试和生产测试对储层相对渗透率进行建模。SPE Reservoir Evaluation & Engineering **11**(06)，1082–1088（2008年）

[21] Fanchi, J.R.：《应用油藏模拟原理》。爱思唯尔（2005年）

[22]Li, R., Reynolds, A., Oliver, D.S.：通过三相流生产数据的自动历史拟合，同时估计绝对渗透率和相对渗透率。在：加拿大国际石油会议（2001年）。OnePetro

[23] Eydinov, D., Gao,G., Li, G., Reynolds, A.：通过生产数据的历史拟合，同时估计相对渗透率和孔隙度/渗透率场。《Journal of Canadian Petroleum Technology》**48**(12)，13–25（2009年）

[24]Ahmed, N.、Weibull, W.W.、Quintal, B.、Grana, D.、Bhakta, T.：将频率相关AVO反演应用于基于物理的模型以研究地震衰减。《国际地球物理学杂志》**233**(1)，234–252（2023年）

[25]Wang, Y.、Counillon, F.、Barth´el´emy, S.、Barth, A.：垂直局地化对等密度坐标模型中海表温度同化的益处。《气候前沿》**4** （2022年）

[26]Fossum, K.、Alyaev, S.、Tveranger, J.、Elsheikh, A.H.：基于生成对抗网络验证用于更新地球模型的实时集合方法。《计算科学杂志》**65**，101876（2022年）

[27] Cruz, W.C., Luo, X., Petvipusit, K.R.：三维油田尺度案例研究中多种类型油田数据的联合历史拟合。Energies**15**(17)，6372（2022年）[28] Str¨ofer, C.A.M., Zhang, X.-L., Xiao, H.：DAFI：用于基于集合的数据同化和油田反演的开源框架。《计算物理通讯》**29**(5)，1583–1622（2021年）[29]Zhang, X.-L., Xiao, H., Luo, X., He, G.：利用间接观测数据学习湍流模型的集合卡尔曼方法。《流体力学杂志》**949**，26（2022年）

[30] Rørtveit, Ø.L.、Hysing, L.B.、Stordal, A.S.、Pilskog, S.：减少放射治疗中因危及器官变形导致的系统误差。《医学物理》**48**(11)，6578–6587（2021年）

[31] Nævdal, G., Rofstad, E.K., Søreide, K., Evje, S.：流体敏感迁移机制可预测转移与胰腺癌高间质液压力之间的关联。生物力学杂志**145**，111362（2022年）

[32]Kovachki, N.B., Stuart, A.M.：集合卡尔曼反演：一种用于机器学习任务的无导数技术。反问题**35**(9)，095005（2019）

[33]Li, H., Chen, S., Yang, D., Tontiwach-wuthikul, P.：使用B样条模型进行基于集合的相对渗透率估计。多孔介质中的传输**85**(3)，703–721（2010年）

[34]Skjervheim, J.-A., Evensen, G., Aanonsen, S.I., Ruud, B.O., Johansen, T.-A.：使用集合卡尔曼滤波将4D地震数据纳入油藏模拟模型。SPE期刊**12**(03)，282–292（2007年）

[35]Haugen, V., Nævdal, G., Natvik, L.-J., Evensen, G., Berg, A.M., Flornes, K.M.：使用集合卡尔曼滤波对北海油田案例进行历史拟合。SPE期刊**13**(04), 382–391 (2008年)

[36] Bianco, A., Cominelli, A., Dovera, L., Næv- dal, G., Valles, B.：利用集合卡尔曼滤波进行历史拟合和生产预测不确定性分析：实际油田应用。载于：EUROPEC/EAGE会议及展览（2007年）。OnePetro

[37] Evensen、G.、Hove、J.、Meisingset、H.、Reiso、E.、Seim、K. S.、Espelid、Ø.：使用 EnKF 对北海油田进行辅助历史拟合

油藏模型。载于：SPE油藏模拟研讨会（2007年）。OnePetro[38]Seiler, A.、Evensen, G.、Skjervheim, J.-A.、Hove, J.、Vabo, J.G.、等：采用基于EnKF的辅助历史拟合方法的先进油藏管理工作流程。载于：SPE油藏模拟研讨会（2009年）。石油工程师学会[39]Chen, Y.、Oliver, D.S.：应用于Brugge 油田的基于集合的闭环优化。《SPE Reservoir Evaluation & Engineering》**13**(01)，56–71（2010年）[40] Maleki, M.、Cirne, M.、Schiozer, D.J.、Davolio, A.、Rocha, A.：一种利用油藏模型从四维地震数据估计饱和度变化的机器学习框架。《地球物理勘探》**70**(8)，1388–1409（2022年）[41]Sengupta, M.、Ghosh, R.、Sen, A.、Maiti, S.：将四维地震反演结果映射至CPET，以预测气水系统中的饱和度。《地球物理学》**88**(2)，1–41（2022年）[42] Cˆorte, G.、Amini, H.、MacBeth, C.：四维地震数据压力和饱和度变化的贝叶斯反演：在设得兰群岛以西某油田的应用。《地球物理勘探》**71**(2)，292–321（2023年）[43]Rasmussen, A.F.、Sandve, T.H.、Bao, K.、Lauser, A.、Hove, J.、Skaflestad, B.、Kl¨ofkorn, R.、Blatt, M.、Rustad, A.B.、Sævareid, O.、等：《Open Porous Media Flow》油藏模拟器。《计算机与应用数学》**81**，159–185（2021年）[44] Zhang, X.-L.、Xiao, H.、He, G.：正则化集合卡尔曼方法对湍流量场反演的评估。《美国航空航天学会学报》**60**(1)，3–13（2022年）[45] Odeh, A.S.：三维黑油油藏模拟问题的解比较（包括相关论文9741）。《Journal of Petroleum Technology》**33**(01)，13–25（1981年）[46] Kenyon, D.：SPE第三次对比求解项目：凝析气藏的注气循环油藏。《Journal of Petroleum Technology》**39**（08），981–997（1987年）[47] Chang, Y., Evensen, G.：用于储层管理的基于集合的决策工作流。《Journal of Petroleum Science and Engineering》**217**，110858（2022年）[48]Equinor：Drogon 概念描述。https://www.ebviz-subsurface-example.azurewebsites.net/drogon-conceptual-description[49] Zhou, X.-H., Wang, H., Xiao, H.：使用 EnKF 推断相对渗透率曲线。https://github.com/xiaoh/DAFI/tutorial/relpermcurve inference