arXiv:2305.01031v1 [math.AP] 1 May 2023

加权局部有限图上的椭圆问题

MAURIZIO IMBESI、GIOVANNI MOLICA BISCI 和 DU˘SAN D. REPOV˘S

Abstract. 设 $\mathscr{G} := (V, E)$ 是一个带权局部有限图，其有限测度 μ 有正的下界。受当前文献中广泛关注的推动，本文研究一类涉及图 $\mathscr{G}$ 上μ-拉普拉斯算子的椭圆方程的经典解的存在性，其解析表达式为

$$\Delta_\mu u(x) := \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w(x,y)(u(y) - u(x)), \text{ for all } x \in V$$

其中 $w\colon V \times V \to [0, +\infty)$ 是一个对称权函数，上述表达式右侧的求和是对相邻顶点 x, $y \in V$ 进行的，即 $x \sim y$当且仅当 $w(x, y) > 0$。更确切地说，我们运用直接变分法研究具有如下简单原型的问题

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \lambda f(x, u(x)), & x \in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D} = 0, \end{cases}$$

其中，D 是 V 中的一个有界区域，满足 $D \neq \emptyset$ 和 $\partial D \neq \emptyset$，非线性项$f$: $D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足适当的结构条件，且 λ 是一个正实参数。通过应用经典 Pucci-Serrin 定理得出的一个临界点结果，以及 Ricceri 提出的可微泛函局部极小值结果，我们得以证明所研究的问题至少存在两个解。我们强调，著名的 Ambrosetti-Rabinowitz 增长条件在主定理的证明及其推论中发挥了关键作用。我们的结果改进了 Grigor'yan、Lin 和 Yang 所得到的一般结果（《微分方程杂志》261(9) (2016年), 4924-4943）。

谨以此文纪念 Edward Fadell
和 SufianHusseini

Contents

1. 引言 2 2. 带权局部有限图上的分析 6 3. 变分方法与抽象框架 9 4. 存在性与多重性结果 13 5. 图上的 Yamabe 型问题 21 参考文献 23

Key words and phrases. 图上的半线性方程、变分方法、临界点理论。2010年数学主题分类。主要分类：35R02；次要分类：35J91、35A15。1

1. Introduction

设 $\mathscr{G}:=(V,E)$ 是一个带权局部有限图， μ 是V上的正有限测度，且具有正下界。本文旨在研究以下形式的若干类非线性椭圆狄利克雷单参数问题的非平凡解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x)=\alpha(x)u(x)+\lambda f(x,u(x)) & x\in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D}=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

。其中 D 是 V 的一个有界区域，满足$D\neq\emptyset$ 且 $\partial D\neq\emptyset$ ，而 λ 是一个正实参数。此外，线性项的系数 $\alpha: V\to\mathbb{R}$ 假设在 D 上可积，而 $f: D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是非线性部分，对于每个 $x\in D$ 都连续，并且在零附近和无穷远处均满足某些增长限制。

利用 Sobolev 空间及相关的索伯列夫嵌入定理研究欧几里得区域上的非线性椭圆方程，已有一套成熟而丰富的理论。由此自然产生一个问题：如何建立恰当的框架，以处理图区域上的 (1.1)。

在这一新的框架下，自然会出现若干困难。例如，无法使用函数的标准广义导数概念，因此，需要明确图区域上微分算子（如拉普拉斯算子）的概念。更确切地说，根据第 2 节中给出的符号约定和定义， μ-拉普拉斯算子$\Delta_\mu: W^{1,20}(D)\to L^2(D)$ 已在分布意义下定义。

$$\int_D \Delta_\mu u(x)v(x)d\mu=-\int_D \Gamma(u,v)(x)d\mu,$$

对每个 $v\in W^{1,20}(D)$，其中映射 $\Gamma: W^{1,20}(D)\times W^{1,20}(D)\to\mathbb{R}^D$ 是梯度型，其解析局部表达式如下所示

$$\Gamma(u,v)(x):=\frac{1}{2\mu(x)}\sum_{y\sim x} w(x,y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x)),$$

对每个 $x\in D$。

一旦定义了拉普拉斯算子，我们便可引入希尔伯特空间结构，进而建立紧性定理，以便研究 (1.1)。

沿着这一思路，A. Grigor'yan 在 [14, 15] 以及 A. Grigor'yan、Y. Lin 和 Y. Yang 在 [17, 18] 中，通过研究定义在满足 Poincar´e 型不等式的图上的变分问题，得到了一些可应用的嵌入定理；例如，参见论文 [35]。此外， μ-拉普拉斯算子或其某些推广（如第 5 节所述）可以用来描述图上的随机游走。相关内容的全面讨论可见专著 [22]；关于相关主题，也可参见论文 [6] 和 [23, 24] 。

此外，从抛物观点出发，M. Barlow、T. Coulhon 和 A. Grigor'yan 在 [3] 中研究了非紧黎曼流形和无限图上热核长期行为的一些上界估计，这些估计仅依赖于体积增长的下界。

Set

$$\lambda_1:=\inf_{u\in C_0(D)\setminus\{0\}}\frac{\displaystyle\int_D |\nabla u|^2(x)d\mu}{\displaystyle\int_D |u(x)|^2 d\mu}. \tag{1.2}$$

本文的主要结果是下文所述的一个多重性定理。

定理 1.1. 设 $\mathscr{G}:=(V,E)$ 是一个带权局部有限图， D 是V的一个有界区域，满足 $\overset{\circ}{D}\neq\emptyset$ 和 $\partial D\neq\emptyset$，并设 $\mu\colon D\to]0,+\infty[$ 是 D上的一个测度。设 $\alpha\in L^1(D)$ 是满足以下任一条件的函数

$$\alpha(x)\le 0 \ \textit{for every}\ x\in D \tag{1.3}$$

or

$$\int_D|\alpha(x)|d\mu<\mu_0^2\lambda_1 \ \textit{with}\ \ \mu_0:=\min_{x\in D}\mu(x)>0 \tag{1.4}$$

并设 $f\colon D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的函数

$$f(x,\cdot)\ \textit{is continuous in}\ \mathbb{R}\ \textit{and}\ f(x,0)\neq 0\ \textit{for some}\ x\in D \tag{1.5}$$

以及

$$\begin{gathered}\textit{there are}\ \beta>2\ \textit{and}\ r_0>0\ \textit{such that}\\ tf(x,t)\ge\beta F(x,t)>0\ \textit{for any}\ |t|\ge r_0\ \textit{and every}\ x\in D,\end{gathered} \tag{1.6}$$

其中 F 是由下式给出的势函数

$$F(x,t):=\int_0^t f(x,s)\,ds\quad \textit{for any}\ (x,t)\in D\times\mathbb{R}\,. \tag{1.7}$$

那么，对于任意 $\varrho>0$ 以及任意

$$0<\lambda<\frac{\varrho}{2\displaystyle\max_{\substack{x\in D\\ |s|\le\kappa\sqrt{\varrho}}}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|}, \tag{1.8}$$

其中

$$\kappa:=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}} & \textit{if}\ (1.3)\ \textit{holds}\\[2ex] \dfrac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}\sqrt{1-\dfrac{1}{\mu_0^2\lambda_1}\displaystyle\int_D|\alpha(x)|d\mu}} & \textit{if}\ (1.4)\ \textit{holds},\end{cases} \tag{1.9}$$

问题 (1.1) 至少有两个非平凡解，其中一个位于其中。

$$\mathbb{B}_\varrho:=\left\{u\in W_0^{1,2}(D):\langle u,u\rangle-\int_D\alpha(x)|u(x)|^2d\mu<\varrho\right\}.$$

我们指出，定理 1.1 的结论成立的 λ 的最大区间为 $(0,\lambda^*)$，其中

$$\lambda^*:=\frac{1}{2}\sup_{\varrho>0}\frac{\varrho}{\displaystyle\max_{\substack{x\in D\\ |s|\le\kappa\sqrt{\varrho}}}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|}\in(0,+\infty] \tag{1.10}$$

其中 κ 如 (1.9) 所示。

注 1.1。我们强调，如果我们要求

$$f(x,\cdot) \text{ is continuous in } \mathbb{R} \text{ and } f(x,0)=0 \text{ for any } x\in \overset{\circ}{D}, \tag{1.11}$$

而非条件 (1.5)。

定理 1.1 给出的存在性结果是 [28, 定理 1] 和[31, 定理 6]的推论；详见下文的定理 3.1。更确切地说，我们通过证明定理 3.1 的几何结构符合我们的抽象框架，得到了主要结果：为此，我们构建了一个泛函分析框架，以便在变分表述中恰当地编码给定数据。我们强调，定理 3.1 所要求的紧性条件在图论框架中得以满足，这归功于我们所采用的泛函框架；详见第 2 节。此外，定理 1.1 改进了 [17, 定理 2] 所获得的存在性结果，并且可视为 [30, 定理4]在图论中的对应结果。

我们还注意到，当研究由拉普拉斯算子（或更一般地，由一致椭圆算子）驱动、满足齐次狄利克雷边界条件的偏微分方程时，假设 (1.6)——即 Ambrosetti-Rabinowitz 条件（简称 (AR)）——是关于 F 的标准超二次条件；相关经典论文 [1, 29, 34]等可供参阅。研究超线性椭圆边值问题时常会考虑这一条件，其重要性在于，条件 (1.6) 能保证与所研究问题相关的能量泛函的 Palais-Smale 序列有界。

定理 1.1 的一个特例如下。

定理 1.2. 设 $\mathscr{G}:=(V,E)$ 是一个带权局部有限图，D 是 V 的一个有界区域，满足 $\overset{\circ}{D}\neq\emptyset$ 和 $\partial D\neq\emptyset$，并设 $\mu: D\to]0,+\infty[$ 是 D 上的一个测度。设 $\alpha\in L^1(D)$ 满足 (1.3)，且 $f: D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个满足 (1.5) 和 (1.6) 的函数。此外，假设

存在正数 M_0 和 σ，使得

$$\max_{(x,s)\in \overset{\circ}{D}\times[-M_0,M_0]} |f(x,s)| \le \mu_0^2 \frac{M_0}{(\sigma+1)}\frac{\lambda_1}{2}, \tag{1.12}$$

其中 $\mu_0:=\min_{x\in D}\mu(x)>0$。

那么，狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x)=\alpha(x)u(x)+f(x,u(x)) & x\in \overset{\circ}{D}\\ u|_{\partial D}=0, \end{cases} \tag{1.13}$$

$admi$至少有两个非平凡解，其中一个位于开球 $\mathbb{B}_{\mu_0^2 M_0^2\lambda_1}$ 中。

鉴于注释 1.1，定理 1.2 保证问题 (1.1) 在要求条件 (1.11) 而非 (1.5) 时至少存在一个非平凡解。与 [17, 定理 2], 中所采用的方法相比，这里的主要创新在于避免对非线性项 f 在零点处施加以下条件

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{f(x,t)}{t}<\lambda_1, \tag{1.14}$$

对每个 $x \in D$ 都成立；见推论 1.1。此外，我们还强调，[17] 中的定理 1 和定理 2 可直接由定理 1.2 得出；见定理 1.3 和定理 1.4。事实上，我们来考虑条件 (1.6) 的一个较宽松版本，如下所示

$$\begin{aligned} &\text{there are } \beta > 2 \text{ and } r_0 > 0 \text{ such that} \\ &tf(x,t) \geq \beta F(x,t) > 0 \text{ for any } t \geq r_0 \text{ and every } x \in D. \end{aligned} \tag{1.15}$$

利用 (1.15)，可得以下结果；见 [17, 定理 1]。

定理 1.3. 设 $\mathscr{G} := (V, E)$ 是一个带权局部有限图，D 是V的一个有界区域，满足 $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ 和 $\partial D \neq \emptyset$，并设 $\mu : D \to]0, +\infty[$ 是 D 上的一个测度。设 $\alpha \in L^1(D)$ 满足 (1.3)，且 $f : D \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ 是一个满足 (1.11) 的函数。此外，假设 (1.14) 和 (1.15) 成立。则问题 (1.13) 至少存在一个非平凡非负解。

定理 1.3 的一个特例表述如下；见 [17,定理 2]。

定理 1.4. 设 $\mathscr{G} := (V, E)$ 是一个带权局部有限图，D 是一个有界区域 V满足 $D \neq \emptyset$且 $\partial D \neq \emptyset$，并设 $\mu : D \to]0, +\infty[$是 D上的测度。设 $\gamma, p \in \mathbb{R}$满足 $\gamma < \lambda_1$ 和 $p > 2$。则下列问题

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \gamma u(x) + |u(x)|^{p-2}u(x) & x \in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D} = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

至少存在一个正解。

假设 $h : V \to \mathbb{R}$ 是一个在 D上满足强制性条件的函数，即存在某个常数 $\delta > 0$ 使得

$$\int_D u(x)(-\Delta_\mu + h)u(x)d\mu \geq \delta \int_D |\nabla u|^2(x)d\mu, \tag{1.17}$$

对每个 $u : V \to \mathbb{R}$均成立。利用 (1.17) 和经典（AR）条件，形如

$$-\Delta_\mu u + h(x)u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad x \in D$$

的带权局部有限图上的半线性椭圆方程已在 [35, 定理 1.1]中得到研究。为完整起见，我们指出，定理 1.4 不要求像 (1.17) 中那样的任何强制性假设。

最后，下面给出定理 1.2 的一个直接且有意义的推论；更多说明和细节请参见注 4.5。

推论 1.1. 设 $\mathscr{G} := (V, E)$ 是一个带权局部有限图，且 D 是一个有界区域 V，满足 $D \neq \emptyset$ 和 $\partial D \neq \emptyset$。此外，设 $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ 是一个连续函数，且 $\mu : D \to]0, +\infty[$ 是 D 上的测度，满足

$$\mu_0 > 2\sqrt{\frac{\max\limits_{t\in[-1,1]} f(t)}{\lambda_1}}, \tag{1.18}$$

其中 $\mu_0 := \min_{x\in D} \mu(x)$。

那么，如果对于每个 $x \in D$， $f(x,0) = 0$，且 (1.15) 成立，狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = f(x,u(x)) & x \in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D} = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

至少存在一个非平凡非负解。

◦若对于某个 $x \in D$， $f(x,0) \neq 0$ 成立，且条件 (1.6) 满足，则问题 (1.19) 至少有两个非平凡解，其中一个位于开球 $\mathbb{B}_{\mu_0^2\lambda_1}$ 内。

本文组织如下。第 2 节回顾带权局部有限图的一些基本概念。随后，第 3 节介绍本文所用的变分方法和抽象框架。第 4 节证明主要的存在性与多重性结果。最后一节探讨将主要结果推广至带权局部有限图的 Yamabe 型方程，以及涉及 (m,p)-拉普拉斯算子的情形；参见定理 5.1。

为求完整起见，我们引用 A. Grigor'yan 最近出版的专著 [15]，作为本文所用基本概念的一般参考。另请参阅论文[4, 5]，其中介绍了有趣的问题和结果。

2. Analysis on weighted locally finite graphs

设 V 为一个非空集合， $E \subset V \times V$ 为一个二元关系。令

$$x \sim y \quad \text{in } V \quad \Leftrightarrow \quad xy := (x,y) \in E$$

并假设

$$xy \in E \quad \text{if and only if} \quad yx \in E.$$

称二元组 $\mathscr{G} := (V,E)$ 为一个无向图（简称图），其顶点集为 V，边集为 E。若每个 $x \in V$ 都只有有限个邻点，即

$$|\{y \in V : xy \in E\}| < +\infty,$$

则称图 $\mathscr{G}$ 为带权局部有限图。

带权局部有限图 $\mathscr{G}$ 上的权是一个函数 $w\colon V \times V \to [0,+\infty[$，满足

$$w(x,y) = w(y,x) \quad \text{and} \quad w(x,x) = 0, \text{ for all } x,y \in V.$$

在这种情况下

$$x \sim y \quad \text{in } V \quad \text{if and only if} \quad w(x,y) > 0,$$

并且，对于每个固定的 $x \in V$，其度数定义为

$$\deg(x) := \sum_{y \in V} w(x,y),$$

是有限的。

从现在起，我们将注意力限制在带权局部有限图 $\mathscr{G}$ 上，并令 $\mu\colon V \to]0,+\infty[$ 是 V 上的有限正测度。此外，定义

$$\int_V u(x)d\mu := \sum_{x \in V} \mu(x)u(x), \tag{2.1}$$

对每个 $u : V \to \mathbb{R}$。为简化记号，仍沿用勒贝格空间的经典记法。

固定 $n \in \mathbb{N}^*$， $\mathscr{G}$ 上的路径是指任意有限顶点序列（x_k）$_{k=1}^{n} \subseteq V$，满足

$$x_k x_{k+1} \in E \quad \text{for every} \quad k = 1, ..., n-1.$$

路径的长度是该路径所包含的边数。因此，若 $x, y \in V$，我们用 $P(x, y)$ 表示连接 x 与 y 的路径，即一条位于 $\mathscr{G}$ 上且满足 $x_1 = x$ 和 $x_n = y$ 的路径。最后， $\wp(x, y)$ 表示连接 x 与 y 的路径集合，而 $\ell(P(x, y))$ 是 $P(x, y) \in \wp(x, y)$ 的长度。

我们称 $\mathscr{G}$ 为连通的，如果对于任意两个顶点 $x, y \in V$，都存在一条连接它们的路径。任何连通图 $\mathscr{G}$ 都带有由度量 $d : V \times V \to [0, +\infty[$ 诱导的自然度量结构，该度量定义如下

$$d(x, y) := \begin{cases} \min\limits_{P(x,y) \in \wp(x,y)} \{\ell(P(x, y))\} & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y. \end{cases} \tag{2.2}$$

因此，连通的带权局部有限图至多有可数多个顶点。

按照惯例，给定 $\mathscr{G} := (V, E)$ 为一个带权局部有限图， $\mathscr{G}$ 的一个（真）子图 $\mathscr{H}$ 是形如 $\mathscr{H} := (D, L)$ 的图，其中 $D \subset V$ 且 $L \subset E$. 。此外，

。顶点边界 ∂D 和连通子图 $\mathscr{H} := (D, L)$ 的顶点内部 D 分别定义为

$$\partial D := \{x \in D : \exists y \notin D \text{ such that } xy \in E\},$$

。和 $D := D \setminus \partial D$. 此外，如果 D 是关于（2.2）中给出的通常顶点距离的 V的有界子集，我们称其为有界的。

对于每个函数 $u : V \to \mathbb{R}$， u 的 μ-拉普拉斯算子（简称拉普拉斯算子）定义为

$$\Delta_\mu u(x) := \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} w(x, y)(u(y) - u(x)), \tag{2.3}$$

永远 且 $x \in V$。此外，相应的梯度型具有如下表达式。

$$\Gamma(u, v)(x) := \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{y \sim x} w(x, y)(u(y) - u(x))(v(y) - v(x)), \tag{2.4}$$

对每个 $x \in V$ 都成立。因此，对每个 $x \in V$，我们记为

$$|\nabla u|(x) := \sqrt{\Gamma(u)(x)} = \left(\frac{1}{2\mu(x)} \sum_{y \sim x} w(x, y)(u(y) - u(x))^2 \right)^{1/2}, \tag{2.5}$$

函数 u 的斜率，其中 $\Gamma(u) := \Gamma(u, u)$.

利用 (2.3) 和 (2.5)，若 D 是 V 的有界连通集（简称区域）

。使得 $D \neq \emptyset$ 和 $\partial D \neq \emptyset$，与 D 相关的 Sobolev 空间可定义如下

$$W^{1,2}(D) := \{u : D \to \mathbb{R} : u \text{ is a real-valued function}\}, \tag{2.6}$$

赋予范数

$$\|u\|_{W^{1,2}(D)} := \|u\|_{L^2(D)} + \||\nabla u|\|_{L^2(D)}, \tag{2.7}$$

对每个 $u \in W^{1,2}(D)$ 都成立。因此，空间 $W^{1,2}(D)$ 与定义在区域 D. 上的所有实值函数构成的集合相同

现在很容易看出， $W^{1,2}(D)$ 具有一种自然的希尔伯特空间结构，其内积定义如下

$$\langle u,v\rangle := \int_D \Gamma(u,v)(x)d\mu + \int_D u(x)v(x)d\mu, \text{ for all } u,v\in W^{1,2}(D). \tag{2.8}$$

此外，由于 D 是一个有限集，我们强调，希尔伯特空间 $W^{1,2}(D)$ 是有限维的，而且 D 的有限性也意味着

$$\mu_0 := \min_{x\in D}\mu(x) > 0, \tag{2.9}$$

因为测度 μ 在 V.上为正

最后， $W^{1,2}_0(D)$ 是以下空间的完备化

$$C_0(D) := \{u : D\to\mathbb{R} : u = 0 \text{ on } \partial D\}, \tag{2.10}$$

关于索博列夫范数 $\|\cdot\|_{L^2(D)} + \||\nabla\cdot|\|_{L^2(D)}$，即。

$$W^{1,2}_0(D) = \overline{C_0(D)}^{\|\cdot\|_{L^2(D)}+\||\nabla\cdot|\|_{L^2(D)}}.$$

现在，某种分部积分公式成立。更确切地说

$$\begin{aligned} -\int_D (\Delta_\mu u(x))v(x)d\mu &= -\int_D \left(\frac{\sum_{y\sim x} w(x,y)(u(y)-u(x))}{\mu(x)}\right)v(x)d\mu \\ &= \int_D \frac{1}{2\mu(x)}\sum_{y\sim x} w(x,y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))d\mu, \end{aligned} \tag{2.11}$$

对每个 $v\in W^{1,2}_0(D)$；更多评论和细节见 [20] 。

令

$$\|\cdot\|_{L^\infty(D)} := \max_{x\in D}|\cdot| \quad \text{and} \quad \|\cdot\|_{L^\nu(D)} := \left(\int_D |\cdot|^\nu d\mu\right)^{1/\nu},$$

对每个 $\nu\in[1,+\infty[$ ，令 λ_1 为 $-\Delta_\mu$ 关于狄利克雷边界条件（定义见 (1.2)）的第一特征值。显然， $\lambda_1\in]0, +\infty[$, ，因为 D 是有限的，且依据 (2.1) 中给出的定义。

下面给出紧索博列夫嵌入结果。

命题 2.1. 设 $\mathscr{G} := (V,E)$ 是一个带权局部有限图， D 是 V 的一个有界区域，满足 $\overset{\circ}{D}\neq\emptyset$ 且 $\partial D\neq\emptyset$。那么，对每个 $q\in[1,+\infty]$， $W^{1,2}_0(D)$ 嵌入于 $L^q(D)$。

特别地,

$$\|u\|_{L^\infty(D)} \le \frac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_D |\nabla u|^2(x)d\mu\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

and

$$\|u\|_{L^\nu(D)} \le \frac{\mu(D)^{1/\nu}}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}}\left(\int_D |\nabla u|^2(x)d\mu\right)^{1/2}, \tag{2.13}$$

对于每个 $\nu\in[1,+\infty[$ 以及每个 $u\in W^{1,2}_0(D)$。

此外，对于每个有界序列 $(u_k)_k$ in $W^{1,2}_0(D)$，取其一个子序列后，存在$u\in L^q(D)$ 使得 $u_k\to u$ in $L^q(D)$，即嵌入

$$W^{1,2}_0(D)\hookrightarrow L^q(D)$$

在 $q \in [1, +\infty]$ 成立的条件下是紧的。

证明。由于 D 是有限集， $W^{1,\,2\,0}(D)$ 是有限维空间。因此， $W^{1,\,2\,0}(D)$ 是预紧的，也就是说，对于 $W^{1,\,2\,0}(D)$ 中的任意有界序列 $(u_k)_k$ ，存在其一个子序列以及 $u_\infty \in W^{1,\,2\,0}(D)$，使得 $u_k \to u_\infty$ 属于 $W^{1,\,2\,0}(D)$。此外

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(D)} = \left(\int_D |\nabla u|^2(x) d\mu \right)^{1/2} \tag{2.14}$$

是 $W^{1,\,2\,0}(D)$ 上与 (2.7) 等价的范数。因此，根据 (1.2)，有

$$\left(\int_D |u(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\sum_{x \in D} \mu(x) |u(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(\int_D |\nabla u|^2(x) d\mu \right)^{1/2}, \tag{2.15}$$

对于任意 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$。

现在，由 (2.15) 和 (2.9) 可得

$$\|u\|_{L^\infty(D)} \leq \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \|u\|_{W_0^{1,2}(D)}, \tag{2.16}$$

对于每个 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$。此外，不等式 (2.16) 立即推出

$$\left(\int_D |u(x)|^\nu d\mu \right)^{1/\nu} \leq \frac{\mu(D)^{1/\nu}}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \|u\|_{W_0^{1,2}(D)}, \tag{2.17}$$

对于每个 $\nu \in [1, +\infty[$, ，其中 $\mu(D) := \sum_{x \in D} \mu(x)$ 表示 D 的体积。因此， 和 (2.13) 成立。 (2.12)

最后，由于 $W^{1,2\,0}(D)$ 是预紧的，根据 (2.12) 和 (2.13)，嵌入 $W^{1,2\,0}(D) \hookrightarrow L^q(D)$ 是紧的，正如所声称的，只要 $q \in [1, +\infty]$。 □

参见 [17, 定理 7] 以了解更多评论和说明。我们还强调，由于D是一个有限集，$(W^{1,\,2\,0}(D),\ \|\cdot\|)$ 是一个有限维希尔伯特空间，其中范数

$$\|u\| := \left(\int_D |\nabla u|^2(x) d\mu \right)^{1/2} \tag{2.18}$$

在 $W^{1,2\,0}(D)$ 上，由于命题 2.1，它等价于（2.7）中给出的范数 $\|\cdot\|_{W^{1,2}(D)}$。此外，在这一有限情形下，有

$$W_0^{1,2}(D) = C_0(D),$$

其中， $C_0(D)$ 定义见 (2.10)。

3. Variational methods and abstract framework

本节的目的是证明，在对非线性项 f 作出自然假设的条件下，问题 (1.1) 存在两个非平凡的经典解。正如我们已经提到的，这将通过变分技巧来实现。

事实上，如果 $\alpha \in L^1(D)$ 且 $f\colon D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得对于每个 $x \in D$， $f(x, \cdot)$ 在$\mathbb{R}$ 中连续，那么问题 (1.1) 就具有变分性质，其能量泛函

$\mathcal{J}$: $W^{1,\,2\,0}(D) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{J}_\lambda(u) := \frac{\langle u,u\rangle}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\int_D \alpha(x)|u(x)|^2\,d\mu - \int_D F(x,u(x))d\mu, \tag{3.1}$$

对每个 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$。

直接计算可知，泛函 $\mathcal{J}_\lambda$ 在 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 处连续 Gˆâteaux 可微，且其在 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 处的 Gˆâteaux 导数形式如下

$$\langle \mathcal{J}'_\lambda(u), v\rangle = \frac{\langle u,v\rangle}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_D \alpha(x)u(x)v(x)d\mu - \int_D f(x,u(x))v(x)d\mu,$$

对任意 $v \in W^{1,\,2\,0}(D)$。通常，若函数 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 满足 $\langle \mathcal{J}'_\lambda(u)\ v\rangle = 0$，对每个 $v \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 均成立，则称其为泛函 $\mathcal{J}_\lambda$ 的临界点。

现在，固定 $\lambda > 0$ 属于 $\mathbb{R}$，若函数 $u \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 满足以下条件，则称其为问题 (1.1) 的弱解

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_D \alpha(x)u(x)v(x)d\mu - \int_D f(x,u(x))v(x)d\mu = 0, \tag{3.2}$$

对于任意 $v \in W^{1,2\,0}(D)$。

因此， $\mathcal{J}_\lambda$ 的临界点恰好是问题 (1.1) 的弱解。此外，以下结果保证每个问题 (1.1) 的弱解都是其经典解，即

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \alpha(x)u(x) + \lambda f(x,u(x)) & x \in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D} = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

命题 3.1. 设 $\alpha \in L^1(D)$ 且 f: $D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数，使得对于每个 $x \in D$， $f(x,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。如果 $u \in W^{1,2\,0}(D)$ 是问题 (1.1) 的弱解，那么 (3.3) 成立。

证明. 固定 $\lambda > 0$，取满足对每个 $v \in W^{1,2\,0}(D)$ 都成立 (3.2) 的 $u \in W^{1,2\,0}(D)$。因此，固定 $y \in D$，定义函数 $v_y \in W^{1,2\,0}(D)$ 如下

$$v_y(x) := \begin{cases} (-\Delta_\mu u(y) - \alpha(y)u(y) - \lambda f(y,u(y)))\delta_y^x & \text{if} \quad x \notin \partial D \\ 0 & \text{if} \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{3.4}$$

对每个 $x \in D$，其中按照惯例，δ_y^x 表示克罗内克δ。由于式（3.2）对每个 $v \in W^{1,\,2\,0}(D)$ 和 $v := v_y$ 都成立，根据式（ 2.8 ）并结合式（ 2.11 ），可得

$$\int_D (-\Delta_\mu u(x) - \alpha(x)u(x) - \lambda f(x,u(x))v_y(x)d\mu = 0.$$

因此，由定义（2.1）立即得到

$$\sum_{x\in D}(-\Delta_\mu u(x) - \alpha(x)u(x) - \lambda f(x,u(x))v_y(x)\mu(x) = 0,$$

即

$$-\Delta_\mu u(y) - \alpha(y)u(y) - \lambda f(y,u(y)) = 0,$$

由于（3.4）以及测度 μ 的取值范围。由于 $y \in D$ 任意，结论立即得出。□

为了陈述下面的定理 3.1，我们还回顾一下：当 C^1 泛函 $J: E \to \mathbb{R}$ 满足帕莱-斯马尔条件（简称（PS）条件）时，其中 E 是实巴拿赫空间，其拓扑对偶空间为 E^*,

$$\begin{gathered}\textit{Every sequence } (u_k)_k \textit{ in } E \textit{ such that } (J(u_k))_k \textit{ is bounded and}\\ \|J'(u_k)\|_{E^*} \to 0 \textit{ as } k \to +\infty \textit{ possesses a convergent subsequence in } E.\end{gathered}$$

本文中为证明（1.1）存在弱解而使用的抽象工具是以下定理；见 [30, 定理 6]。

定理 3.1. 设 E 为一个自反实巴拿赫空间，且设 Φ、Ψ : $E \to \mathbb{R}$ 为两个连续盖托微分泛函，使得

Φ在 E中序列弱下半连续且强制，Ψ在 E中序列弱连续。

此外，假设对于每个 $\mu > 0$，泛函 $J_\mu := \mu\Phi - \Psi$ 满足（PS）条件。那么对于每个 $\varrho >$，$\inf_E \Phi$ 以及每个

$$\mu > \inf_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,\varrho[)} \frac{\sup_{v\in\Phi^{-1}(]-\infty,\varrho[)} \Psi(v) - \Psi(u)}{\varrho - \Phi(u)},$$

以下二者必居其一：泛函 J_μ 具有一个严格全局极小值，该极小值属于 $\Phi^{-1}(]-\infty, \varrho[)$；或者 J_μ至少有两个临界点，其中一个属于 $\Phi^{-1}(]-\infty, \varrho[)$。

定理 3.1 给出的抽象结果结合了 P. Pucci 和 J. Serrin 在 [28] 中提出的著名三临界点定理，以及 B. Ricceri 在 [31]中得到并被引用的局部极小值结果。Ricceri 的变分原理的一些应用见 [25, 32, 33]。关于本文所用变分方法的相关主题，另请参见 [21]。经典概念可见 [2]。

（PS）条件是考虑临界点定理时对能量泛函所要求的主要紧性假设之一。为简化其证明，下面给出一个结果，该结果适用于 (3.1) 中的能量泛函 $\mathcal{J}_\lambda$。

命题 3.2. 设 $f: D\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$为一个函数，使得对于每个$x \in W$， $f(x,\cdot)$ 都是连续的，且 $\alpha \in L^1(D)$。此外，固定 $\lambda > 0$，设 $\mathcal{J}_\lambda$ 为 (3.1) 中定义的能量泛函。若序列 $(u_k)_k$ 在 $W^{1,2}{}_0(D)$ 中有界，并且

$$\|\mathcal{J}'_\lambda(u_k)\|_{(W_0^{1,2}(D))^*} \to 0 \quad as\ k \to +\infty,$$

那么，$(u_k)_k$ 在 $W^{1,2}{}_0(D)$ 中存在一个柯西子列，因此 $(u_k)_k$ 存在一个收敛子列。

证明。设 $(u_k)_k$ 是 $W^{1,2}{}_0(D)$ 中的有界序列，并设 $\lambda > 0$ 为固定值。由命题 2.1，存在一个子序列（仍记为 $(u_k)_k$）以及一个函数 $u_\infty \in L^\infty(D)$，使得当 $k \to +\infty$ 时，$u_k \to u_\infty$ 在 $L^\infty(D)$ 中成立。由 (2.12)，由于对每个 $|u(x)| \leqslant \frac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}}\|u\|$ 都有

$x \in D$，可得

$$\begin{aligned}
\|u_j - u_l\| &= \sup_{\|v\|\le 1} |\langle u_j - u_l, v\rangle| \\
&= \sup_{\|v\|\le 1} \Bigg| \lambda \mathcal{J}'_\lambda(u_j)(v) - \lambda \mathcal{J}'_\lambda(u_l)(v) + \\
&\qquad \int_D \alpha(x)(u_j(x) - u_l(x))v(x)d\mu - \lambda \int_D (f(x,u_j(x)) - f(x,u_l(x)))v(x)d\mu \Bigg| \\
&\le \lambda \|\mathcal{J}'_\lambda(u_j)\| + \lambda \|\mathcal{J}'_\lambda(u_l)\| \\
&\quad + \frac{\max_{x\in D} |u_j(x) - u_l(x)|}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \int_D |\alpha(x)| d\mu \\
&\quad + \frac{\lambda}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \int_D |f(x,u_j(x)) - f(x,u_l(x))| d\mu \to 0 \quad \text{as } j,l \to +\infty,
\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{J}'_\lambda(u_k) \to 0$ as $k \to +\infty$，并使用经典的勒贝格控制收敛定理。

□

在证明定理 1.1 之前，在 $W^{1,2}_0(D)$ 上定义另一个范数如下将很有用：

$$\|u\|_\alpha := \sqrt{\langle u,u\rangle - \int_D \alpha(x)|u(x)|^2 d\mu}, \tag{3.5}$$

其中，α 是满足定理 1.1 中所述假设的函数，而 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 在（2.8）中定义。容易看出，$\|\cdot\|_\alpha$ 是 $W^{1,2}_0(D)$ 上的一个范数，并且与（2.18）中给出的通常范数等价。

更确切地说，如果 α 满足条件（1.3），则有

$$\|u\|^2_\alpha = \langle u,u\rangle - \int_D \alpha(x)|u(x)|^2 d\mu \ge \langle u,u\rangle = \|u\|^2, \tag{3.6}$$

并且由（2.12）可得

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_\alpha &= \langle u,u\rangle - \int_D \alpha(x)|u(x)|^2 d\mu \\
&\le \langle u,u\rangle - \frac{1}{\mu_0^2 \lambda_1} \|u\|^2 \int_D \alpha(x) d\mu \\
&= \Big(1 + \frac{1}{\mu_0^2 \lambda_1} \int_D |\alpha(x)| d\mu\Big) \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

另一方面，如果 α 满足条件 (1.4)，则有

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_\alpha &= \langle u,u\rangle - \int_D \alpha(x)|u(x)|^2 d\mu \\
&\ge \langle u,u\rangle - \int_D |\alpha(x)||u(x)|^2 d\mu \\
&\ge \langle u,u\rangle - \frac{1}{\mu_0^2 \lambda_1} \|u\|^2 \int_D |\alpha(x)| d\mu \\
&= \Big(1 - \frac{1}{\mu_0^2 \lambda_1} \int_D |\alpha(x)| d\mu\Big) \|u\|^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}\|u\|_\alpha^2 &= \langle u,u\rangle - \int_D \alpha(x)|u(x)|^2 d\mu \\ &\le \langle u,u\rangle - \int_D |\alpha(x)||u(x)|^2 d\mu \\ &\le \langle u,u\rangle + \frac{1}{\mu_0^2\lambda_1}\|u\|^2 \int_D |\alpha(x)| d\mu \\ &\le 2\|u\|^2,\end{aligned}$$

由 (1.4) 可知。

4. Existence and multiplicity results

本节旨在证明我们的主要结果。

定理 1.1 的证明 证明思路是将定理 3.1 应用于该泛函。

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda}\Phi(u) - \Psi(u),$$

其中

$$\Phi(u) := \|u\|_\alpha^2,$$

以及

$$\Psi(u) := \int_D F(x,u(x)) d\mu,$$

对于任意 $u \in W^{1,2}_0(D)$。注意，此处我们通过取参数 $\mu = \frac{1}{2\lambda}$ 来应用定理 3.1。

首先，我们来考虑对 Φ 和 Ψ所要求的正则性假设。容易证明，泛函 Φ 在 $W^{1,2}_0(D)$ 中是序列弱下半连续且强制的。

现在，让我们证明泛函 Ψ 在 $W^{1,2}_0(D)$ 中是序列弱连续的。为此，设 $(u_k)_k$ 是 Sobolev 空间 $W^{1,2}_0(D)$ 中的一个序列，使得

$$u_k \to u_\infty \quad \text{weakly in } W_0^{1,2}(D)$$

如 $k \to +\infty$，其中 $u_\infty \in W^{1,2}_0(D)$。因此，命题 2.1 得出

$$u_k \to u_\infty \quad \text{in } L^\infty(D),$$

也就是说,

$$\|u_k - u\|_\infty \to 0 \tag{4.1}$$

如 $k \to +\infty$。现在，由 (4.1) 可知，存在一个实常数 $c > 0$，使得

$$\|u_k\|_\infty \le c \quad \text{and} \quad \|u_\infty\|_\infty \le c \text{ for any } k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

于是，由 (4.2)，并注意到对于每个 $x \in W$， $f(x,\cdot)$ 关于 $\mathbb{R}$ 连续，可得

$$\begin{aligned}
\Big|\Psi(u_k)-\Psi(u_\infty)\Big| &= \Big|\int_D F(x,u_k(x))d\mu - \int_D F(x,u_\infty(x))d\mu\Big| \\
&\le \int_D \Big|F(x,u_k(x)) - F(x,u_\infty(x))\Big|d\mu \\
&= \int_D \Big|\int_{u_k(x)}^{u_\infty(x)} f(x,t)dt\Big|d\mu \\
&\le \int_D \Big|\int_{u_k(x)}^{u_\infty(x)} |f(x,t)|dt\Big|d\mu \\
&\le \int_D \Big|\int_{u_k(x)}^{u_\infty(x)} \max_{|t|\le c}|f(x,t)|dt\Big|d\mu \\
&= \int_D \max_{|t|\le c}|f(x,t)|\ |u_k(x)-u_\infty(x)|d\mu \\
&\le \max_{\substack{x\in D\\ |t|\le c}} |f(x,t)|\ \|u_k-u_\infty\|_\infty \mu(D).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

因此，由（4.1）和（4.3）可得大小规律

$$\Big|\Psi(u_k)-\Psi(u_\infty)\Big| \to 0$$

作为 $k \to +\infty$，因此泛函 Ψ 在 $W^{1,\,2}_{\,0}(D)$ 中序列弱连续，正如所声称的那样。现在，我们观察到，

泛函 $\mathcal{J}_\lambda$ 在 $W^{1,\,2}_{\,0}(D)$ 中无下界。 (4.4)

事实上，假设 (1.6) 意味着存在两个正数 b_1 和 b_2，使得

$$F(x,t) \ge b_1|t|^\beta - b_2 \quad \text{for any } x \in D \,\text{and}\, t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

为证明 (4.5)，令 $r_0 > 0$ 如 (2.9) 所示：那么，对于每个 $x \in D$ 以及任意满足 $|t| \ge r_0 > 0$ 的 $t \in \mathbb{R}$。

$$\frac{t\,f(x,t)}{F(x,t)} \ge \beta.$$

假设 $t > r_0$。将两项都除以 t 并在 $[r_0,t]$ 中积分，我们得到

$$F(x,t) \ge \frac{F(x,r_0)}{r_0^\beta}\,|t|^\beta.$$

使用相同的论证，很容易证明如果 $t < -r_0$，那么便可得出结果。

$$F(x,t) \ge \frac{F(x,-r_0)}{r_0^\beta}\,|t|^\beta,$$

因此，对于任意满足 $|t| \ge r_0$ 的 $t \in \mathbb{R}$，我们得到

$$F(x,t) \ge m(x)\,|t|^\beta, \tag{4.6}$$

其中

$$m(x) := \frac{\min\{F(x,r_0),\,F(x,-r_0)\}}{r_0^\beta}.$$

由于函数 $t \mapsto F(\cdot, t)$ 关于 $\mathbb{R}$ 连续，根据魏尔斯特拉斯定理，对于任意满足 $|t| \le r_0$ 的 $t \in \mathbb{R}$，它都有界，例如

$$|F(x,t)| \le \widetilde{M}(x) \quad \text{in } \{|t| \le r_0\}, \tag{4.7}$$

其中

$$\widetilde{M}(x) := \max\{|F(x,t)| : |t| \le r_0\}.$$

公式 (4.5) 可由 (4.6) 和 (4.7) 得出，只需取

$$b_1 := \min_{x\in D} m(x) \quad \text{and} \quad b_2 := \max_{x\in D}(\widetilde{M}(x) + m(x) r_0^{\beta}).$$

因此，根据（4.5），对于任意 $u \in W^{1,2}_0(D)$，均有

$$\int_D F(x,u(x))d\mu \ge b_1 \int_D |u(x)|^{\beta} d\mu - b_2 \mu(D)\,. \tag{4.8}$$

令 $u_0 \in W^{1,2}_0(D)$，其中 $\int_D |u_0(x)|^{\beta} d\mu > 0$。那么由 (4.8) 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda(tu_0) &= \frac{t^2}{2\lambda}\|u_0\|_\alpha^2 - \int_D F(x, tu_0(x))d\mu \\
&\le \frac{t^2}{2\lambda}\|u_0\|_\alpha^2 - b_1|t|^{\beta}\int_D |u_0(x)|^{\beta}d\mu + b_2\mu(D) \\
&\to -\infty
\end{aligned}$$

由于 $\beta > 2$ 根据假设 (1.6) 以及 $\int_D |u_0(x)|^{\beta} d\mu > 0$，故有 $t \to +\infty$。(4.4) 的证明至此完成。

现在，剩下要证明泛函 $\mathcal{J}_\lambda$ 满足（PS）条件。为此，只需应用命题 3.2。

更确切地说，假设存在实常数 $c > 0$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $|\mathcal{J}_\lambda(u_k)| \le c$，并且当 $k \to +\infty$ 时，$\mathcal{J}'_\lambda(u_k) \to 0$。现在，由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}
c + \beta^{-1}\|u_k\| &\ge \lambda\mathcal{J}_\lambda(u_k) - \lambda\beta^{-1}\mathcal{J}'_\lambda(u_k)(u_k) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\|u_k\|^2 + \lambda\beta^{-1}\int_D (f(x,u_k(x))u_k(x) - \beta F(x,u_k(x)))d\mu \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\|u_k\|^2 \\
&\quad + \lambda\beta^{-1}\int_{\{x\in D:|u_k(x)|<r_0\}} (f(x,u_k(x))u_k(x) - \beta F(x,u_k(x)))d\mu \\
&\quad + \lambda\beta^{-1}\int_{\{x\in D:|u_k(x)|\ge r_0\}} (f(x,u_k(x))u_k(x) - \beta F(x,u_k(x)))d\mu,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

对每个充分大的 $k \in \mathbb{N}$。

由 (1.6) 可知，(4.9) 中的第三项非负，而第二项被一个与 k 无关的正常数所界定。由于 $\beta > 2$，(4.9) 蕴含 $(u_k)_k$ 在 W^1 中有界，$_2$ $_0$ (D)。因此，根据命题 3.2，能量泛函 $\mathcal{J}_\lambda$ 满足（PS）紧性条件。

此外，令 $\varrho > 0$ 和

$$\chi(\varrho) := \inf_{u \in \mathbb{B}_\varrho} \frac{\sup_{v \in \mathbb{B}_\varrho} \Psi(v) - \Psi(u)}{\varrho - \|u\|_\alpha^2},$$

其中

$$\mathbb{B}_\varrho = \left\{ v \in W_0^{1,2}(D) : \|v\|_\alpha < \sqrt{\varrho} \right\}.$$

χ 的定义表明，对于每个 $u \in \mathbb{B}_\varrho$

$$\chi(\varrho) \leq \frac{\sup_{v \in \mathbb{B}_\varrho} \Psi(v) - \Psi(u)}{\varrho - \|u\|_\alpha^2}$$

因此，由于 $0 \in \mathbb{B}_\varrho$，我们得到

$$\begin{aligned} \chi(\varrho) &\leq \frac{1}{\varrho} \sup_{v \in \mathbb{B}_\varrho} \Psi(v) \\ &\leq \frac{1}{\varrho} \sup_{v \in \overline{\mathbb{B}}_\varrho} \left| \int_D F(x, v(x)) d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{\varrho} \sup_{v \in \overline{\mathbb{B}}_\varrho} \int_D |F(x, v(x))| \, d\mu. \end{aligned} \tag{4.10}$$

现在，假设函数 α 满足假设 (1.3)。那么，如果$v \in \overline{\mathbb{B}}_\varrho$，由 (2.12) 和 (3.6) 可得

$$|v(x)| \leq \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \|v\| \leq \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \|v\|_\alpha \leq \frac{\sqrt{\varrho}}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}} \quad \text{for any } x \in D, \tag{4.11}$$

结合 F 的连续性和 D的有限性，可知对任意 $x \in D$

$$|F(x, v(x))| \leq \max_{\substack{x \in D \\ |s| \leq \frac{\sqrt{\varrho}}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}}}} \left| \int_0^s f(x, t) dt \right|. \tag{4.12}$$

因此，不等式 (4.12) 得出

$$\int_D |F(x, v(x))| \, d\mu \leq \mu(D) \max_{\substack{x \in D \\ |s| \leq \frac{\sqrt{\varrho}}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}}}} \left| \int_0^s f(x, t) dt \right| \tag{4.13}$$

对于任意 $v \in \overline{\mathbb{B}}_\varrho$。

由 (4.10) 和 (4.13) 可得

$$\chi(\varrho) \leq \frac{1}{\varrho} \max_{\substack{x \in D \\ |s| \leq \frac{\sqrt{\varrho}}{\mu_0 \sqrt{\lambda_1}}}} \left| \int_0^s f(x, t) dt \right| < \frac{1}{2\lambda},$$

满足条件 (5.7)。

另一方面，如果函数 α 满足假设 (1.4)，我们可以用同样的方法论证，只需将 (4.11) 替换为以下不等式

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \frac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}}\|v\| \\ &\leq \frac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}\sqrt{1-\frac{1}{\mu_0^2\lambda_1}\int_D|\alpha(x)|d\mu}}\|v\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu_0\sqrt{\lambda_1}\sqrt{1-\frac{1}{\mu_0^2\lambda_1}\int_D|\alpha(x)|d\mu}}\sqrt{\varrho} \end{aligned} \tag{4.14}$$

对任意 $x\in D$，并由 (3.7) 可知。

在这两种情况下，由定理 3.1，并结合 (1.5) 和 (4.4)，我们得出问题 (1.1) 至少存在两个非平凡弱解，其中一个属于 $\mathbb{B}_\varrho$。根据命题 3.1，定理 1.1 的证明至此完成。□

注 4.1. 首先，我们注意到，条件 (2.12) 在定理 1.1 的证明中起着关键作用，而在有界区域的经典情形中则使用索博列夫嵌入定理；相关文献包括 [1, 29, 34]。定理 1.1 的证明所依据的论证与 [26,定理 1] 中所用的论证相同。

注 4.2. 注意到，当且仅当 $f(\cdot,0)=0$ 时，零函数是问题 (1.1) 的弱解。因此，条件 (1.5) 保证问题 (1.1) 的所有解（若存在）都是非零的。当 $f(\cdot,0)=0$ 时，要证明 (1.1) 存在多重解，还需要对非线性项 f 作出一些额外假设。

定理 1.2 的证明 通过使用定理 1.1 得出结论。事实上，容易看出，条件 (1.12) 推出

$$\max_{(x,s)\in D\times[-M_0,M_0]}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right| \leq \mu_0^2\frac{M_0^2}{(\sigma+1)}\frac{\lambda_1}{2}. \tag{4.15}$$

因此，若设

$$\theta := \begin{cases} \dfrac{\mu_0^2M_0^2\lambda_1}{2\max\limits_{(x,s)\in D\times[-M_0,M_0]}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|} & \text{if } \max\limits_{(x,s)\in D\times[-M_0,M_0]}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|>0 \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

由 $\sigma>0$，可得

$$1<\sigma+1\leq\theta\leq\lambda^*, \tag{4.16}$$

因为 (4.15) 成立，且

$$\lambda^* := \sup_{\varrho>0}\frac{\varrho}{\max\limits_{\substack{x\in D\\ |s|\leq\kappa\sqrt{\varrho}}}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|} = \frac{1}{\kappa^2}\sup_{z>0}\frac{z^2}{\max\limits_{\substack{x\in D\\ |s|\leq z}}\left|\int_0^s f(x,t)dt\right|},$$

根据（1.10）中给出的定义。

然后，由（4.16）可知，定理 1.1 保证，对于 $\lambda = 1$ 问题（1.13），至少存在两个非平凡弱解，其中一个位于开球 $\mathbb{B}_{\mu_0^2 M_0^2 \lambda_1}$ 内。最后，命题 3.1 保证问题（1.13）的每个弱解都是经典解，由此完成定理 1.2 的证明。□

注 4.3. 我们注意到，K.J. Falconer 和 J. Hu 在研究垫片上的椭圆问题时，文献中此前曾使用过类似于 (1.12) 的条件；参见 [7,定理 3.5]。

定理 1.3 的证明 为了证明问题 (1.13) 存在一个非负解，只需引入函数

$$F_+(x,t) := \int_0^t f_+(x,\tau)d\tau,$$

with

$$f_+(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases},$$

对每个 $x \in D$。
注意，f_+ 满足条件 (1.12)，而假设 (1.6) 对 f_+ 和 F_+ 均成立，且适用于每个 $x \in D$ 以及任意 $t > r_0$。

因此，令 $\mathcal{J}_+ : W^{1,2}_0(D) \to \mathbb{R}$ 为如下定义的泛函。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+(u) &:= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_D \alpha(x)|u(x)|^2\,d\mu - \int_D F_+(x,u(x))d\mu \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_D \alpha(x)|u(x)|^2\,d\mu - \int_D F(x,u^+(x))d\mu, \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中，对于每个 $x \in D$，$u^+(x) := \max\{0, u(x)\}$。
容易看出，能量泛函 $\mathcal{J}_+$ 定义良好，并且在 $u \in W^{1,2}_0(D)$ 中 Fr´echet 可微。更准确地说

$$\langle \mathcal{J}'_+(u), v\rangle = \langle u, v\rangle - \int_D \alpha(x)u(x)v(x)d\mu - \int_D f_+(x,u(x))v(x)d\mu, \tag{4.18}$$

对于任意 $v \in W^{1,2}_0(D)$。
现在，由 (1.14) 可得

$$\text{there are positive constants } M_0 \text{ and } \sigma \text{ such that}$$
$$\max_{(x,s)\in \overset{\circ}{D}\times[-M_0,M_0]} f_+(x,s) \leq \mu_0^2 \frac{M_0}{(\sigma+1)}\frac{\lambda_1}{2}. \tag{4.19}$$

由于 (1.15) 成立，如同定理 1.2 的证明中那样，存在 $u_\infty \in W^{1,2}_0(D) \setminus \{0\}$，它是下列狄利克雷问题的经典解

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u(x) = \alpha(x)u(x) + f_+(x,u(x)) & x \in \overset{\circ}{D} \\ u|_{\partial D} = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

我们声称 u_∞ 在 D中是非负的。事实上，按照惯例，令 $u_\infty^- := \max\{-u_\infty, 0\}$ 表示 u_∞的负部。由于

$$\Gamma(u_\infty^-, u_\infty) = \Gamma(u_\infty^-) + \Gamma(u_\infty^-, u_\infty^+) \geq |\nabla u_\infty^-|^2,$$

且 $\alpha \in L^1(D)$ 满足 (1.3)，由 (2.11) 可知

$$\begin{aligned}\int_D |\nabla u_\infty^-|^2(x)d\mu &\le \int_D \Gamma(u_\infty^-)(x)d\mu + \int_D \Gamma(u_\infty^-, u_\infty^+)(x)d\mu \\ &= \int_D \Gamma(u_\infty^-, u_\infty)(x)d\mu = -\int_D u_\infty^-(x)\Delta_\mu u_\infty(x)d\mu \\ &= \int_\Omega u_\infty^-(x) f_+(x, u_\infty^+(x))dx = 0.\end{aligned}$$

这意味着 $u_\infty^- \equiv 0$，因此 $u_\infty \ge 0$ 属于 D。由于 $f^+ = f$ 属于 $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty[$，函数 $u_\infty \in W^{1,\,2\,0}(D) \setminus \{0\}$ 按经典意义满足 (1.13)，如所声称。□

注 4.4. 我们注意到，在定理 1.3 的证明过程中定义的泛函 $\mathcal{J}_+$ 满足紧性（PS）条件，因此可以通过研究问题 (4.20) 运用经典的变分论证。为此，我们注意到，仿照定理 1.1 的证明进行推理，假设 (1.15) 意味着存在两个正数 b_1 和 b_2，使得

$$F(x,t) \ge b_1 t^\beta - b_2 \quad \textit{for any } t \ge r_0 \textit{ and every } x \in D. \tag{4.21}$$

设 $c \in \mathbb{R}$，并令 $(u_k)_k$ 为 $W^{1,\,2\,0}(D)$ 中的一个序列，使得

$$\mathcal{J}_+(u_k) \to c, \tag{4.22}$$

and

$$\sup\Big\{ \big|\langle\, \mathcal{J}_+'(u_k), v\,\rangle\big| \,:\, v \in W_0^{1,2}(D)\,, \|v\| = 1 \Big\} \to 0, \tag{4.23}$$

如 $k \to +\infty$。不失一般性，我们只考虑（最终）非平凡序列的情形。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，由 (4.23) 和 (4.22) 可轻易得出存在 $\kappa > 0$，使得

$$\Big|\langle \mathcal{J}_+'(u_k), \frac{u_k}{\|u_k\|}\rangle\Big| \le \kappa\,, \tag{4.24}$$

and

$$|\mathcal{J}_+(u_k)| \le \kappa, \tag{4.25}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$。
此外，由 (1.11) 可得

$$\begin{aligned}&\Big| \int_{\{x\in D:\, 0\le u_k^+(x)\le r_0\}} \Big(F(x, u_k^+(x)) - \frac{1}{\beta} f(x, u_k^+(x))\, u_k^+(x)\Big)\, dx\Big| \\ &\qquad \le \sum_{x\in\{x\in D:\, 0\le u_k^+(x)\le r_0\}} \mu(x)\Big(F(x, u_k^+(x)) - \frac{1}{\beta} f(x, u_k^+(x))\, u_k^+(x)\Big) \\ &\qquad \le \sum_{x\in\{x\in D:\, 0\le u_k^+(x)\le r_0\}} \mu(x) \max_{(x,t)\in D\times[0,r_0]} \Big(F(x,t) - \frac{1}{\beta} f(x,t)\, t\Big) \\ &\qquad \le \mu(D) \max_{(x,t)\in D\times[0,r_0]} \Big(F(x,t) - \frac{1}{\beta} f(x,t)\, t\Big) < +\infty.\end{aligned} \tag{4.26}$$

此外，由于 (2.9) 和 (4.26)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_+(u_k) - \frac{1}{\beta}\langle \mathcal{J}'_+(u_k), u_k\rangle \\
&\qquad = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\|u_k\|^2 - \frac{1}{\beta}\int_D \Big(\beta F_+(x,u_k(x)) - f_+(x,u_k(x))\,u_k(x)\Big)\,dx \\
&\qquad \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\|u_k\|^2 \\
&\qquad\qquad - \int_{\{x\in D:\, 0\leq u_k(x)\leq r_0\}} \Big(F(x,u_k^+(x)) - \frac{1}{\beta}\,f(x,u_k^+(x))\,u_k^+(x)\Big)\,dx \\
&\qquad \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)\|u_k\|^2 - \mu(D)\max_{(x,t)\in D\times[0,r_0]}\Big(F(x,t) - \frac{1}{\beta}\,f(x,t)\,t\Big).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

由 (4.24) 和 (4.25) 可知

$$\mathcal{J}_+(u_k) - \frac{1}{\beta}\langle \mathcal{J}'_+(u_k), u_k\rangle \leq \kappa\,(1 + \|u_k\|)$$

因此，由 (4.27)，对任意 $k \in \mathbb{N}$

$$\|u_k\|^2 \leq \kappa_*\,(1 + \|u_k\|)$$

存在适当的常数 $\kappa_* > 0$。上述不等式立即推出，序列 $(u_k)_k$ 在 $W^{1,\,2\,0}(D)$ 中有界。因此，根据命题 3.2，能量泛函 $\mathcal{J}_+$满足 (PS) 条件，正如所声称的那样。

定理 1.4 的证明 由于 $p > 2$，显然有

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{|t|^{p-2}t}{t} = 0.$$

此外，很容易看出条件 (1.15) 也得到满足。因此，仿照定理 1.3 的证明进行推理，可得存在一个函数 $u_\infty \in W^{1,\,2\,0}(D)\setminus\{0\}$，使得

$$-\Delta_\mu u_\infty(x) - \gamma u_\infty(x) = (u_\infty^+(x))^{p-1} \qquad \text{in} \quad \overset{\circ}{D}. \tag{4.28}$$

下面证明 $u_\infty \geq 0$ 属于 D。为此，令 $u_\infty^-(x) := \min\{u_\infty(x)\ 0\}$ 对每个 $x \in D$都成立。由于对每个 $x \in D$，$u_\infty^-(x)u_\infty^+(x) = u_\infty^-(x)(u_\infty^+(x))^{p-1} = 0$，我们有

$$-\int_D u_\infty^-(x)\Delta_\mu u_\infty(x)d\mu - \gamma\int_D (u_\infty^-(x))^2 d\mu = 0\,.$$

由于 $u_\infty = u_\infty^+ + u_\infty^-$，上式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\lambda_1}\int_D |\nabla u_\infty^-|^2(x)d\mu &\geq \gamma\int_D (u_\infty^-(x))^2 d\mu \\
&= \int_D |\nabla u_\infty^-|^2(x)d\mu - \int_D u_\infty^-(x)\Delta_\mu u_\infty^+(x)d\mu.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

注意

$$
\begin{aligned}
-\int_D u_\infty^-(x)\Delta_\mu u_\infty^+(x)d\mu &= -\sum_{x\in\overset{\circ}{D}} u_\infty^-(x)\sum_{y\sim x} w(x,y)(u_\infty^+(y)-u_\infty^+(x)) \\
&= -\sum_{x\in\overset{\circ}{D}}\sum_{y\sim x} w(x,y)u_\infty^-(x)u_\infty^+(y) \geq 0\,.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

将 (4.30) 代入 (4.29)，并回想 $\gamma<\lambda_1$，我们得到 $\int_D |\nabla u_\infty^-|^2(x)d\mu = 0$，这意味着 $u_\infty^- \equiv 0$ in D。因此 $u_\infty \geq 0$ in D，且 (4.28) 变为

$$
\begin{cases}
-\Delta_\mu u_\infty(x) - \gamma u_\infty(x) = u_\infty(x)^{p-1} \quad x\in\overset{\circ}{D} \\
u_\infty(x)\geq 0 \quad x\in\overset{\circ}{D} \\
u_\infty|_{\partial D} = 0.
\end{cases} \tag{4.31}
$$

最后，假设 that。

$$u_\infty(x_0) = 0 = \min_{x\in D} u_\infty(x)$$

。对于某个$x_0\in D$。如果 $y\in D$ 与 x_0 相邻，则根据（4.31），$\Delta_\mu u_\infty(x_0) = 0$。$\mu$-拉普拉斯算子的定义立即给出 $u_\infty(y) = 0$。因此，我们得出结论：$u_\infty\equiv 0$ 在

。D，这是荒谬的。因此，$u_\infty > 0$ 属于D，如所声称的那样。证明至此完成。□

注 4.5. 我们注意到，条件 (1.18) 是 (1.12) 的一个特例。因此，很容易看出，定理 1.2 和 1.3 立即推出引言中给出的推论 1.1 的结论。

5. Yamabe-type problems on graphs

设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $p\in\mathbb{R}$ 满足 $p>1$.。记 $W^{m,\,0\,p}(D)$ 为该空间关于以下范数的完备化

$$C_0^m(D) := \{u : D\to\mathbb{R} : |\nabla^j u| = 0 \text{ on } \partial D, \text{ for every } j = 0,...,m-1\}$$

索博列夫范数

$$\|u\| := \sum_{k=0}^m \||\nabla^k u|\|_{L^p(D)}, \tag{5.1}$$

其中，对每个 $x\in D$

$$|\nabla^k u|(x) := \begin{cases} |\nabla\Delta^{(m-1)/2}u|(x) & \text{if } k\in 2\mathbb{N}+1 \\ |\Delta^{m/2}u|(x) & \text{if } k\in 2\mathbb{N}, \end{cases}$$

其中 $k=0$、...、m，且

$$\Delta_\mu^\ell u(x) := \begin{cases} u(x) & \text{if } \ell = 0 \\ \dfrac{1}{\mu(x)}\displaystyle\sum_{y\sim x} w(x,y)(\Delta_\mu^{\ell-1}u(y) - \Delta_\mu^{\ell-1}u(x)) & \text{if } \ell>0, \end{cases}$$

对每个 $x \in D$。根据 [17, 定理 27]，空间 $(W^{m,p}_0(D), \|u\|_{W^{m,p}_0(D)})$ 是一个有限维巴拿赫空间，其中

$$\|u\|_{W^{m,p}_0(D)} := \||\nabla^m u|\|_{L^p(D)}$$

是 $W^{m,p}_0(D)$ 上的一个范数，与(5.1)中给出的 $\|\cdot\|$ 等价。

利用上述记号，第 3 节中证明的定理 1.1 的一个一般版本可由以下 Yamabe 型问题得到

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{m,p}u(x) = \lambda f(x, u(x)) \quad x \in \overset{\circ}{D} \\ |\nabla^j u| = 0 \quad \text{on } \partial D, \text{ with } j = 0, ..., m-1, \end{cases} \tag{5.2}$$

其中，λ 是一个实正参数，$f: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个适当的连续非线性项，而 $\mathcal{L}_{m,p}: W^{m,p}_0(D) \to L^p(D)$ 表示在分布意义下定义的 (m,p)- 拉普拉斯算子，对于每个 $u \in W^{m,p}_0(D)$，其定义为

$$\mathcal{L}_{m,p}u := \begin{cases} \displaystyle\int_D |\nabla^m u|^{p-2}(x)\Gamma\left(\Delta^{(m-1)/2}u, \Delta^{(m-1)/2}v\right)(x)d\mu & \text{if } m \in 2\mathbb{N}+1 \\ \displaystyle\int_D |\nabla^m u|^{p-2}(x)\Delta^{m/2}u(x) \cdot \Delta^{m/2}v(x)d\mu & \text{if } m \in 2\mathbb{N}, \end{cases} \tag{5.3}$$

对于任意 $v \in W^{m,p}_0(D)$。

(m,p)-拉普拉斯 $\mathcal{L}_{m,p}$ 可以在 $x \in D$ 的任意点处显式计算。特别地，$\mathcal{L}_{m,2}$ 是多重拉普拉斯算子 $(-\Delta_\mu)^m$，当 $p = 2$ 时，它退化为(2.3)中定义的 μ-拉普拉斯算子。我们强调指出，图上的 p-拉普拉斯方程，以及与几何分析问题相关的方程，已在文献中得到研究；参见文献 [8, 9, 10, 11] 以及 [16, 36, 37, 38]。此外，[19] 中证明了图上非线性双调和方程解的存在性与收敛性，而图论框架中的 1 阶 Yamabe 方程也已在 [13]中得到研究。

由于 (5.3)，(5.2) 的解是能量泛函 $\mathcal{J}: W^{m,p}_0(D) \to \mathbb{R}$ 所定义的临界点。

$$\mathcal{J}_\lambda(u) := \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{m,p}_0(D)} - \lambda\int_D F(x, u(x))d\mu, \tag{5.4}$$

对于每个 $u \in W^{m,p}_0(D)$。

类似于（1.2），我们定义实常数

$$\lambda_{m,p} := \inf_{u \in C^m_0(D)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_D |\nabla^m u|^p(x)d\mu}{\displaystyle\int_D |u(x)|^p d\mu}. \tag{5.5}$$

在上述记号下，下面的结果成立。

定理 5.1。设 $\mathcal{G} := (V, E)$ 是一个带权局部有限图，D 是一个有界区域 $\overset{\circ}{D}$ 使得 V 满足 $D \neq \emptyset$ 和 $\partial D \neq \emptyset$，并令 $\mu: D \to]0, +\infty[$ 为 D上的测度。令$\mu_0 := \min_{x \in D} \mu(x) > 0$，并令 $f: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为满足 (1.5) 的函数，同时还满足

$$\begin{gathered} \textit{there are } \beta > p \textit{ and } r_0 > 0 \textit{ such that} \\ tf(x,t) \geq \beta F(x,t) > 0 \textit{ for any } |t| \geq r_0 \textit{ and every } x \in D, \end{gathered} \tag{5.6}$$

其中，F 是由式 (1.7) 给出的势函数。

那么，对于任意 $\varrho > 0$ 和任意

$$0 < \lambda < \frac{\varrho}{2 \max\limits_{\substack{x \in D \\ |s| \le \kappa_{m,p}\varrho^{1/p}}} \left| \int_0^s f(x,t)dt \right|}, \tag{5.7}$$

其中

$$\kappa_{m,p} := \frac{1}{\mu_0 \lambda_{m,p}^{1/p}}, \tag{5.8}$$

问题 (1.1) 至少有两个非平凡解，其中一个属于

$$\mathbb{B}_{\varrho}^{(m,p)} := \left\{ u \in W_0^{m,p}(D) : \|u\|_{W_0^{m,p}(D)} < \varrho^{1/p} \right\}.$$

关于无限图上的 Yamabe 方程已有多篇论文研究，也有论文在有界区域上的 Kazdan-Warner 型问题的唯一性结果中探讨了这一主题；参见论文 [12, 13, 17] ，以及最近的 [27, 推论 5.3]。

我们强调，定理 5.1 给出的存在性结果与 [27,定理 1.1]的精神相同；另见定理 1.4。

致谢。本文是在意大利大学与科研部项目“变分方法及其在数理物理和几何问题中的应用”（2015KB9WPT 009）以及斯洛文尼亚研究局资助项目（P1-0292、N1-0114、N1-0083）的支持下完成的。

References

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications* **14** 1973 349 381 ,《函数分析杂志》（），–。[2] H. Brézis, 《函数分析》，理论与应用， *Masson*, 巴黎（1983年）。[3] M. Barlow, T. Coulhon, and A. Grigor'yan, *Manifolds and graphs with slow heat kernel decay*,《数学发明》144（2001年），第3期，609–649。[4] F. Chung, A. Grigor'yan, and S.-T. Yau, *Eigenvalues and diameters for manifolds and graphs*,《清华几何与分析讲座》（新竹，1990年），国际出版社，马萨诸塞州剑桥，1997年，第79–105页。[5] F. Chung, A. Grigor'yan, and S.-T. Yau, *Higher eigenvalues and isoperimetric inequalities on Riemannian manifolds and graphs* **8** 2000 5, 969 1026 ,《分析与几何通讯》（），第–期。[6] T. Coulhon and A. Grigor'yan, *Random walks on graphs with regular volume growth*,《几何泛函分析》8（1998年），第4期，656–701。[7] K.J. Falconer and J. Hu, *Nonlinear elliptic equations on the Sierpiński gasket*,《数学分析与应用杂志》240（1999年），552–573。[8] H. Ge, *A p-th Yamabe equation on graph*,《美国数学会会刊》146（2018年），第5期，2219–2224。[9] H. Ge, *The p-th Kazdan-Warner equation on graphs* **22** 2020 6, ,《当代数学通讯》1950052, 17（），第期。[10] H. Ge, B. Hua, and W. Jiang, *A note on Liouville type equations on graphs*,《美国数学会会刊》146（2018年），第11期，4837–4842。[11] H. Ge and W. Jiang, *Kazdan-Warner equation on infinite graphs*,《韩国数学会杂志》55（2018年），第5期，1091–1101。[12] H. Ge and W. Jiang, *Yamabe equations on infinite graphs* **460** 2018 2, ,《数学分析与应用杂志》885, 890（），第–期。[13] H. Ge and W. Jiang, *The 1-Yamabe equation on graphs*,《当代数学通讯》21（2019年），第8期，1850040，10。[14] A. Grigor'yan, *Heat kernels on manifolds, graphs and fractals*,《欧洲数学大会》，第I卷（巴塞罗那，2000年），《数学进展》，第201卷，Birkhäuser，巴塞尔，2001年，第393–406页。

[15] A. Grigor'yan, *Introduction to analysis on graphs*,《大学讲座丛书》，第71卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。[16] A. Grigor'yan, Y. Lin, and Y. Yang, *Kazdan-Warner equation on graph*,《变分法与偏微分方程》，55（2016年），第4期，文章编号92，13页。[17] A. Grigor'yan, Y. Lin, and Y. Yang, *Yamabe type equations on graphs*,《微分方程杂志》261（2016年），第9期，4924–4943页。
[18] A. Grigor'yan, Y. Lin, and Y. Yang, *Existence of positive solutions to some nonlinear equations on locally finite graphs* **60** 2017 7, 1311 1324 ,《中国科学：数学》（），第–期。[19] X. Han, M. Shao, and L. Zhao, *Existence and convergence of solutions for nonlinear biharmonic equations on graphs* **268** 2020 7, 3936 3961 ,《微分方程杂志》（），第–期。[20] S. Haeseler and M. Keller, *Generalized solutions and spectrum for Dirichlet forms on graphs*, 载于[21], 181–200。[21] A. Kristály, V. Rădulescu and Cs. Varga,《数理物理、几何与经济学中的变分原理：非线性方程与单边问题的定性分析》，《数学百科全书及其应用》第136卷，*Cambridge University Press*，剑桥，2010年。[22] D. Lenz, F. Sobieczky, and W. Woess (eds.),《随机游走、边界与谱》。2009年6月29日至7月3日在奥地利格拉茨举行的边界专题研讨会以及2009年7月4日至5日在奥地利圣凯瑟琳举行的阿尔卑斯研讨会论文集。《概率论进展》第64卷。Birkh¨ äuser，巴塞尔，2011年。[23] Y. Lin and Y. Wu, *The existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation on graphs* **56** 2017 4, 102, 22 ,《变分法与偏微分方程》（），第期，论文编号。[24] S. Liu and Y. Yang, *Multiple solutions of Kazdan-Warner equation on graphs in the negative case*,《变分法与偏微分方程》59（2020年），第5期，论文编号164，15页。[25] G. Molica Bisci and D. Repovš, *Yamabe-type equations on Carnot groups*,《势分析》46（2017年），第2期，369–383页。[26] G. Molica Bisci, D. Repovš and R. Servadei, *Nonlinear problems on the Sierpinski gasket*,《数学分析与应用杂志》，第452卷，2017年，883–895页。[27] A. Pinamonti and G. Stefani, 局部有限图上某些半线性方程的存在唯一性定理，arXiv:2106.10447。[28] P. Pucci and J. Serrin, *A mountain pass theorem*,《微分方程杂志》60（1985年），142–149页。[29] P.H. Rabinowitz,《临界点理论中的极大极小方法及其在微分方程中的应用》，*CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*，第65卷，*American Mathematical Society*，普罗维登斯，罗得岛州（1986年）。[30] B. Ricceri, *On a classical existence theorem for nonlinear elliptic equations* *Esperimental construc-*，载于，*tive and nonlinar analysis* ´ 27, 2000 275 278 M. Thera 编，CMS 会议论文集，加拿大数学学会（），–。[31] B. Ricceri, *A general variational principle and some of its applications, J. Comput. Appl. Math.*,《不动点理论及其应用》专题专刊，《非线性分析》113（2000年），401–410页。[32] B. Ricceri, *Nonlinear eigenvalue problems*, 载于：D.Y. Gao、D. Motreanu（编），《非凸分析及其应用手册》，国际出版社（2010年），543–595页。[33] B. Ricceri, *A new existence and localization theorem for Dirichlet problem*,《动力系统及其应用》22（2013年），317–324页。[34] M. Struwe,《变分方法：非线性偏微分方程与哈密顿系统中的应用》，*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*，第3卷，*Springer Verlag*，柏林–海德堡（1990年）。[35] D. Zhang, *Semi-linear elliptic equations on graphs*,《偏微分方程杂志》30（2017年），第3期，221–231页。[36] X. Zhang and Y. Chang, *p-th Kazdan-Warner equation on graph in the negative case*,《数学分析与应用杂志》466（2018年），第1期，400–407页。[37] X. Zhang and A. Lin, *Positive solutions of p-th Yamabe type equations on graphs*,《中国数学前沿》13（2018年），第6期，1501–1514页。[38] X. Zhang and A. Lin, *Positive solutions of p-th Yamabe type equations on infinite graphs*,《美国数学会会刊》147（2019年），第4期，1421–1427页。

（MAURIZIO IMBESI）
Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche Scienze Fisiche e , , ,Messina, Italy Scienze della Terra Università degli Studi di Messina Viale F. Stagno d'Alcontres 31 98166

Email address: maurizio.imbesi@unime.it

（GIOVANNI MOLICA BISCI） Dipartimento di Scienze Pure e Applicate, Università degli Studi di Urbino 'Carlo Bo', Piazza della Repubblica 13, 61029 Urbino (Pesaro e Urbino), Italy*Email address*: giovanni.molicabisci@uniurb.it

(DU˘SAN D. REPOV˘S) Faculty of Education, and Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana & Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, 1000 Ljubljana,Slovenia

Email address: dusan.repovs@guest.arnes.si