arXiv:2305.01037v1 [math.AP] 1 May 2023

参数各向异性 Neumann (p,q)-方程的全局重数

NIKOLAOS S. PAPAGEORGIOU - VICENT¸IU D. R ˘ADULESCU - DU˘
SAN D. REPOV˘S

Abstract. 我们考虑一个由各向异性 (p,q)-拉普拉斯算子和参数势项驱动的 Neumann 边值问题。反应项是"超线性"的。我们证明了一个关于正解的全局（相对于参数）重数结果。此外，我们证明了最小正解的存在性，并最终构造出一个节点解。

1. 引言

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个具有 C^2-边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。本文研究以下参数各向异性 Neumann (p,q)-方程：

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p(z)}u - \Delta_{q(z)}u + \lambda|u|^{p(z)-2}u = f(z,u) \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

给定满足 $1 < \min_\Omega r$ 的 $r \in C(\Omega)$，我们用 $\Delta_{r(z)}$ 表示由下式定义的各向异性 r-拉普拉斯微分算子

$$\Delta_{r(z)}u = \operatorname{div}\left(|Du|^{r(z)-2}Du\right) \text{ for all } u \in W^{1,r(z)}(\Omega).$$

与各向同性的 r-拉普拉斯算子（即 $r(\cdot)$ 为常数时）不同，各向异性算子不是齐次的，这给各向异性问题的研究带来了困难。方程（P_λ）由两个这样的算子之和驱动。因此，即使指数是常函数（各向同性算子），问题的微分算子也不是齐次的。此外还有一个参数势项 $u \mapsto \lambda|u|^{p(z)-2}u$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为参数。注意，λ 不必为正，因此微分算子通常并非强制的。在反应项（问题（P_λ）的右端）中，我们有一个 Carath´eodory 函数 $f(z,x)$（也就是说，对所有 $x \in \mathbb{R}$，映射 $z \mapsto f(z,x)$ 都是可测的；且对几乎处处的 $z \in \Omega$，函数 $x \mapsto f(z,x)$ 都是连续的），当 $x \to \pm\infty$ 趋于 $p_+ = \max p$ 时，它具有 $(p_+ - 1)$-超线性增长（这里，$p \in C^{0,1}(\Omega)$）。不过，我们不采用 Ambrosetti-Rabinowitz条件（简称 AR-条件）；在处理"超线性"问题时，文献中通常会用到这一条件。我们对 $f(z,\cdot)$ 的条件限制较少，也使我们的框架能够涵盖在 $\pm\infty$ 附近增长较"缓慢"的超线性非线性项。

我们的目标是研究参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 在实轴上变化时正解集合的变化。我们证明了一个全局多重性结果（即关于

2020 *Mathematics Subject Classification.*主要分类：35A16，35J20；次要分类：03H05，35J70，47J30，58E05。*Key words and phrases.* 各向异性算子；超线性反应；正解与节点解；临界群。

参数较大取值的分岔型结果）。更确切地说，我们证明了存在一个临界参数值 $\lambda_* > -\infty$，使得

- 对所有 $\lambda > \lambda_*$，问题 (P_λ) 至少有两个正光滑解 ;
- 对于 $\lambda = \lambda_*$，问题 (P_λ) 至少有一个正光滑解;
- 对于 $\lambda \in (0, \lambda_*)$，问题 (P_λ) 没有正解。

我们还证明，对于所有 $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$，问题 (P_λ) 都有一个最小正解。最后，利用极端定号解构造一个节点（变号）解。

Fan 与 Deng [4] 以及 Deng 与 Wang[1]证明了类似的分岔型结果，描述各向异性诺伊曼问题中正解集合的变化。他们研究由 $p(z)$-拉普拉斯算子驱动的问题，并对反应项 $f(z, \cdot)$施加严格的正性和单调性条件；此外，他们还采用 AR-条件来表达反应项的超线性。我们还提及 Papageorgiou 与 Zhang [16] 关于带参数边界条件的最新各向同性研究。最后，更多存在性与多重性结果可见 [5, 6, 9, 10] 及其中的参考文献。

2. 数学背景和假设

问题（P_λ）的分析需要使用变指数函数空间。Diening、Harjulehto、H¨asto 和 Ruzi˘cka 的著作 [2] 对这些空间的理论进行了全面介绍。关于处理变指数问题时所使用的基本变分方法和拓扑方法，我们还可参阅 R˘adulescu 和 Repov˘s 的专著 [17] 。

设 $M(\Omega)$ 为所有可测函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 构成的向量空间。按照通常的约定，将在 Ω 的某个勒贝格零测子集之外相等的两个此类函数视为同一个函数。给定 $r \in C(\overline{\Omega})$，定义

$$r_- = \min_{\overline{\Omega}} r \text{ and } r_+ = \max_{\overline{\Omega}} r.$$

考虑集合

$$E_1 = \{r \in C(\overline{\Omega}) : 1 < r_-\}.$$

Then 对于 $r \in E_1$，我们将变指数勒贝格空间 $L^{r(z)}(\Omega)$ 定义如下

$$L^{r(z)}(\Omega) = \{u \in M(\Omega) : \rho_r(u) < \infty\},$$

其中，$\rho_r(\cdot)$ 是由下式定义的模函数

$$\rho_r(u) = \int_\Omega |u|^{r(z)} dz.$$

W我们用如下定义的所谓“卢森堡范数”赋予空间 $L^{r(z)}(\Omega)$ 范数。

$$\|u\|_{r(z)} = \inf \left\{ \vartheta : \rho_r \left(\frac{u}{\vartheta} \right) \leq 1 \right\}.$$

于是，$L^{r(z)}(\Omega)$ 成为一个可分且自反的巴拿赫空间（事实上是一致凸的）。对于 $r \in E_1$，我们定义与 $r(\cdot)$ 对应的共轭可变指数 $r'(\cdot)$ 如下：

$$r'(z) = \frac{r(z)}{r(z) - 1} \text{ for all } z \in \overline{\Omega}.$$

显然，对于所有 $z \in \Omega$， $r' \in E_1$ 和 $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r'(z)} = 1$。我们知道， $L^{r(z)}(\Omega)^* = L^{r'(z)}(\Omega)$，且以下 H¨older 不等式成立：

$$\int_\Omega |uv| dz \leq \left(\frac{1}{r_-} + \frac{1}{r'_-} \right) \|u\|_{r(z)} \|v\|_{r'(z)}$$

对所有 $u \in L^{r(z)}(\Omega)$，以及所有 $v \in L^{r'(z)}(\Omega)$。

有了变指数 Lebesgue 空间，我们便可定义相应的变指数 Sobolev 空间。因此，若 $r \in E_1$，则定义

$$W^{1,r(z)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{r(z)}(\Omega) : |Du| \in L^{r(z)}(\Omega) \right\},$$

其中 Du 是 $u(\cdot)$ 的弱梯度。我们在此空间上赋予如下范数

$$\|u\|_{1,r(z)} = \|u\|_{r(z)} + \|Du\|_{r(z)} \text{ for all } u \in W^{1,r(z)}(\Omega)$$

其中 $\|Du\|_{r(z)} = \||Du|\|_{r(z)}$。由此可知， $W^{1,r(z)}(\Omega)$ 是一个可分且自反的巴拿赫空间（事实上，一致凸）。

对于 $r \in E_1$，我们引入相应的临界 Sobolev 变指数 $r^*(\cdot)$，定义为

$$r^*(z) = \begin{cases} \frac{Nr(z)}{N - r(z)}, & \text{if } r(z) < N \\ +\infty, & \text{if } N \leq r(z) \end{cases} \quad \text{for all } z \in \overline{\Omega}.$$

假设 $r \in C^{0,1}(\Omega) \cap E_1$ 且 $\tau \in C(\Omega)$，其中 $1 \leq \tau_-$。我们有以下嵌入（各向异性 Sobolev 嵌入定理）。

命题 2.1. (a) $W^{1,r(z)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\tau(z)}(\Omega)$ 在 $\tau(z) \leq r^*(z)$ 对所有 $z \in \Omega$ 成立时连续嵌入。(b) $W^{1,r(z)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\tau(z)}(\Omega)$ 在 $\tau(z) < r^*(z)$ 对所有 $z \in \Omega$ 成立时紧嵌入。

若 $u \in W^{1,r(z)}(\Omega)$，则记作 $\rho_r(Du) = \rho_r(|Du|)$。范数 $\|\cdot\|_{r(z)}$ 与模函数 $\rho_r(\cdot)$ 之间存在密切关系。

命题 2.2. 若 $r \in E_1$ 且 $\{u_n, u\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^{r(z)}(\Omega)$，则

(a) $\|u\|_{r(z)} = \vartheta \Leftrightarrow \rho_r\left(\frac{u}{\vartheta}\right) = 1.$
(b) $\|u\|_{r(z)} < 1$ *(resp.* $= 1, > 1$*)* $\Leftrightarrow \rho_r(u) < 1$ *(resp.* $= 1, > 1$*).*
(c) $\|u\|_{r(z)} < 1 \Rightarrow \|u\|^{r_+}_{r(z)} \leq \rho_r(u) \leq \|u\|^{r_-}_{r(z)}.$
(d) $\|u\|_{r(z)} > 1 \Rightarrow \|u\|^{r_-}_{r(z)} \leq \rho_r(u) \leq \|u\|^{r_+}_{r(z)}.$
(e) $\|u_n\|_{r(z)} \to 0 \Leftrightarrow \rho_r(u_n) \to 0.$
(f) $\|u_n\|_{r(z)} \to \infty \Leftrightarrow \rho_r(u_n) \to +\infty.$

令 $A_r : W^{1,r(z)}(\Omega) \to W^{1,r(z)}(\Omega)^*$ 为如下定义的非线性算子

$$\langle A_r(u), h \rangle = \int_\Omega |Du|^{r(z)-2} (Du, Dh)_{\mathbb{R}^N} dz$$

对所有 $u, h \in W^{1,r(z)}(\Omega)$。该算子具有以下性质，参见 Gasinski 和 Papa- georgiou [7]以及 R˘adulescu 和 Repov˘s [17, 第 40] 页。

命题 2.3。算子 $A_r: W^{1,r(z)}(\Omega) \to W^{1,r(z)}(\Omega)^*$ 是有界的（即将有界集映射为有界集）、连续、单调（因此也是极大单调的），且属于类型 $(S)_+$，也就是说，

$$\text{“}u_n \overset{w}{\to} u \text{ in } W^{1,r(z)}(\Omega) \text{ and } \limsup_{n\to\infty}\langle A_r(u_n), u_n - u\rangle \le 0$$
$$\text{imply that}$$
$$u_n \to u \text{ in } W^{1,r(z)}(\Omega)\text{”}.$$

现在我们回顾一下魏尔斯特拉斯-托内利定理，后文将会用到它。为方便读者，我们也附上证明。

定理 2.4. 若 X 是自反巴拿赫空间，且 $\phi: X \to \mathbb{R}$ 是序列弱下半连续且强制的，则存在 $\hat{u} \in X$ 使得

$$\phi(\hat{u}) = \inf\{\phi(u): u \in X\}.$$

证明. ϕ 的强制性意味着，当 $R > 0$ 足够大时，有

$$\inf_X \varphi = \inf_{\overline{B}_R} \phi,$$

其中 $\overline{B}_R = \{u \in X: \|u\|_X \le R\}$。

由于 X 的自反性以及埃伯莱因-施穆利安定理，$\overline{B}_R$ 是序列弱紧的。由于 $\varphi(\cdot)$ 是序列弱下半连续的，我们得出存在 $\hat{u} \in X$ 使得

$$\phi(\hat{u}) = \inf_X \phi.$$

证明现已完成。 □

鉴于各向异性正则性理论（参见 [3, 定理 1.3] 和 [19, 推论 3.1]），我们还将使用巴拿赫空间 $C^1(\Omega)$。这是一个具有正锥的有序巴拿赫空间。

$$C_+ = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u(z) \ge 0 \text{ for all } z \in \overline{\Omega}\}.$$

该锥具有非空内部，具体为

$$\operatorname{int} C_+ = \{u \in C_+ : u(z) > 0 \text{ for all } z \in \overline{\Omega}\}.$$

我们还将在 $C^1(\Omega)$ 中使用另一个开锥，其定义为

$$D_+ = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u(z) > 0 \text{ for all } z \in \Omega, \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega\cap u^{-1}(0)} < 0\right\}.$$

回忆一下，$\dfrac{\partial u}{\partial n} = (Du, n)_{\mathbb{R}^N}$，其中 $n(\cdot)$ 是 Ω 上的外单位法向量。如果 $h_1, h_2 \in M(\Omega)$ 且 $h_1 \le h_2$，那么我们定义

$$[h_1, h_2] = \{u \in W^{1,r(z)}(\Omega) : h_1(z) \le u(z) \le h_2(z) \text{ for a.a. } z \in \Omega\},$$
$$[h_1) = \{u \in W^{1,r(z)}(\Omega) : h_1(z) \le u(z) \text{ for a.a. } z \in \Omega\},$$
$$\operatorname{int}_{C^1(\Omega)}[h_1, h_2] = \text{ the interior in } C^1(\overline{\Omega}) \text{ of } [h_1, h_2] \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

假设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\varphi \in C^1(X)$。我们引入以下集合。

$$K_\varphi = \{u \in X : \varphi'(u) = 0\} \text{ (the critical set of } \varphi),$$
$$\varphi^c = \{x \in X : \varphi(u) \le c\} \text{ for all } c \in \mathbb{R}.$$

我们称 $\varphi(\cdot)$ 满足“C-条件”，如果它具有以下性质：“每个满足 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 使得 $\{\varphi(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ 有界且 $(1+\|u_n\|)\varphi'(u_n) \to 0$ 在X^* 中的序列都存在一个强收敛子序列”。

这是泛函 $\varphi(\cdot)$ 的一种紧性条件，用以弥补环境空间 X 通常并非局部紧（因为它是无限维的）这一事实。文献中提出了多种技术，以便在不同情形下恢复紧性。我们提及 Tang 和 Cheng [21]，他们提出了一种恢复 Palais-Smale 序列紧性的新方法；还提及 Tang 和 Chen [20]，他们引入了一种恢复极小化序列紧性的原创方法。

若 $Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq X$，则根据 $H_k(Y_1, Y_2)$（对于 $k \in \mathbb{N}_0$），我们用 k^{th} 表示具有整数系数的相对奇异同调群。若 $u \in K_\varphi$ 是孤立的，则 k^{th} 表示 φ 在 u 处的临界群，其定义为

$$C_k(\varphi, u) = H_k(\varphi^c \cap U, (\varphi^c \cap U) \setminus \{u\}) \text{ for all } k \in \mathbb{N}_0,$$

其中 $c = \varphi(u)$，且 U 是 u 的一个邻域，使得 $\varphi^c \cap K_\varphi \cap U = \{u\}$。奇异同调的切除性质表明，该概念定义良好，即与隔离邻域 U 的选取无关（见 [13]）。

如果 $u \in M(\Omega)$，我们设

$$u^+(z) = \max\{u(z), 0\},\ u^-(z) = \max\{-u(z), 0\},\ \text{for all } z \in \Omega.$$

那么，如果 $u \in W^{1,\,r(z)}(\Omega)$，我们知道

$$u^\pm \in W^{1,r(z)}(\Omega),\ u = u^+ - u^-,\ |u| = u^+ - u^-.$$

给定一个 Carath´eodory 函数 $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们用 $N_g(\cdot)$ 表示相应的 Nemytski 算子，即

$$N_g(u)(\cdot) = g(\cdot, u(\cdot)) \text{ for all } u \in M(\Omega).$$

由于 Carath´eodory 函数是联合可测的，因此 $N_g(u) \in M(\Omega)$。

用 $|\cdot|_N$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上的 Lebesgue 测度，并用 $\|\cdot\|$ 表示 Sobolev 空间 $W^{1,\,p(z)}(\Omega)$ 的范数。

现在我们将介绍问题（P_λ）中数据所满足的假设。

H_0： $p, q \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ 且 $1 < q(z) < p(z)$ 对所有 $z \in \Omega$】飞。

H_1: $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Carathéodory 函数，使得 $f(z,0) = 0$ 对几乎处处的 $z \in \Omega$ 成立。 d

(i) $|f(z,x)| \le a(z)\left[1 + x^{r(z)-1}\right]$ 对于几乎所有 $z \in \Omega$、所有 $x \ge 0$，其中 $a \in L^\infty(\Omega)$、 $r \in C(\overline{\Omega})$，$p_+ < r(z) < p^*(z)$ 对所有 $z \in \Omega$ 成立；(ii) 若 $F(z,x) = \int_0^x f(z,s)ds$，则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{F}{(z,x)\, x^{p_+}} = +\infty$ 对几乎处处的 $z \in \Omega$ 一致成立；(iii) 若 $e(z,x) = f(z,x)x - p_+F(z,x)$，则存在 $\mu \in L^1(\Omega)$，使得

$$e(z,x) \le e(z,y) + \mu(z) \text{ for a.a. } z \in \Omega,\ \text{all } 0 \le x \le y;$$

(iv) 存在 $\tau \in C(\overline{\Omega})$ 和 $C_0, \delta_0, C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &1 < \tau_+ < q_-, \\ &C_0 x^{\tau(z)-1} \le f(z,x) \text{ for a.a. } z \in \Omega,\ \text{all } 0 \le x \le \delta_0, \\ &-\hat{C}x^{p(z)-1} \le f(z,x) \text{ for a.a. } z \in \Omega,\ \text{all } x \ge 0; \end{aligned}$$

(v) 对于每个 $\rho > 0$，都存在 $\xi_\rho > 0$，使得对于几乎处处的 $z \in \Omega$，函数 $x \mapsto f(z,x) + \xi_\rho x^{p(z)-1}$ 在 $[0, \rho]$上单调不减。

注 2.5. 由于我们寻求正解，且上述所有假设均涉及正半轴 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$，因此不失一般性，我们假设

$$f(z, x) = 0 \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \leq 0. \tag{2.1}$$

假设 $H_1(ii)$、(iii) 表明，对于几乎处处的 $z \in \Omega$，映射 $f(z, \cdot)$ 当 $x \to +\infty$ 时是（$p_+ - r$）-超线性的。然而，这一超线性条件并未通过 AR-条件来表述。我们回顾一下，AR-条件（根据 (2.1) 的单边版本）指出，存在 $\vartheta > p_+$ 和 $M > 0$，使得

$$\begin{aligned} &0 < \vartheta F(z, x) \leq f(z, x)x \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \geq M, \\ &0 < \operatorname*{essinf}_{\Omega} F(\cdot, M). \end{aligned}$$

˜这些条件意味着存在 $C > 0$，使得

$$\tilde{C} x^{\vartheta - 1} \leq f(z, x) \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \geq M.$$

因此，AR条件要求 $f(z, \cdot)$至少具有$(\vartheta - 1)$阶多项式增长。假设$H_1(ii)$,(iii)的限制较少，并且在我们的框架中允许增长速度较“慢”的超线性非线性项，例如 $x \to +\infty$(见下文示例)。此外，我们强调，与先前的研究 [1], [4], 相比，我们不假设 $f \geq 0$，也不假设 $f(z, \cdot)$是非递减的。这些假设曾被 Fan 与 Deng [4] 以及 Deng 与 Wang [1]采用。此外，在上述研究中，作者还对 $f(z, \cdot)$假设了 AR条件。最后，值得注意的是，与先前的研究相比，我们也不假设参数 λ 严格为正。在这里，$\lambda \in \mathbb{R}$，因此问题(P_λ)的微分算子（左端）一般而言并非强制的。

例 2.6. 考虑函数

$$f(z, x) = \begin{cases} \vartheta (x^+)^{\tau(z) - 1} - \hat{C}_0 (x^+)^{\gamma(z) - 1}, & \text{if } x \leq 1 \\ x^{p_+ - 1} \ln x + (\vartheta - \hat{C}_0) x^{\eta(z) - 1}, & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

其中 $\tau, \gamma, \eta \in C(\overline{\Omega})$, $\tau_+ < q_-$, $1 < \tau(z) < \gamma(z)$, $1 < \eta(z) < p(z)$ 对所有满足 $\hat{C}_0 > \vartheta > 0$的 $z \in \Omega$ 均成立。则此函数满足上述假设 H_1，但不满足 [1], [4] 的假设（AR-条件不成立，且 $f(z, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty$ 上不是单调的）。

我们引入以下集合

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ problem } (P_\lambda) \text{ has a positive solution}\}, \\ &S_\lambda^+ = \text{ the set of positive solutions of } (P_\lambda). \end{aligned}$$

3. 正解

我们首先证明 $\mathcal{L}^+$ 非空。为此，令 $\eta > 0$，并考虑以下辅助各向异性 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p(z)} u - \Delta_{q(z)} u + u^{p(z) - 1} = \eta \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ u \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

命题 3.1. 若假设 H_0 成立，则问题 (3.1) 有唯一正解

$$\overline{u}_\eta \in \operatorname{int} C_+$$

且 $\overline{u}_\eta \to 0$ 属于 $C^1(\overline{\Omega})$, 其中 $\eta \to 0^+$。

证明。令 $K_p: L^{p(z)}(\Omega) \to L^{p'(z)}(\Omega)$ 为如下定义的非线性算子:

$$K_p(u)(\cdot) = |u(\cdot)|^{p(\cdot)-2}u(\cdot) \text{ for all } u \in L^{p(z)}(\Omega).$$

该算子也是连续且严格单调的（见 [13, p.117]）。然后我们引入V: $W^{1,p(z)}(\Omega) \to W^{1,p(z)}(\Omega)^*$定义为

$$V(u) = A_p(u) + A_q(u) + K_p(u) \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega).$$

那么, $V(\cdot)$ 是极大单调的（参见 [13, 第 135] 页）、严格单调的, 并且

$$\begin{aligned} &\langle V(u), u\rangle \geq \rho_p(Du) + \rho_p(u) \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega),\\ \Rightarrow\ &V(\cdot) \text{ is coercive (see Proposition 2.2).}\end{aligned}$$

然后, [13, 第135] 页的推论2.8.7表明, $V(\cdot)$是满射。因此, 我们可以找到 $\overline{u}_\eta \in W^{1,p(z)}(\Omega)$使得

$$V(\overline{u}_\eta) = \eta.$$

由于 $V(\cdot)$ 严格单调, 该解是唯一的。与 $-\overline{u}_\eta^- \in W^{1,p(z)}(\Omega)$ 取对偶配对, 得到

$$\begin{aligned} &\rho_p(D\overline{u}_\eta^-) + \rho_p(\overline{u}_\eta^-) \leq \int_\Omega \eta(-\overline{u}_\eta^-)dz \leq 0,\\ \Rightarrow\ &\overline{u}_\eta \geq 0,\ \overline{u}_\eta \neq 0 \text{ (see Proposition 2.2 and recall that } \eta > 0).\end{aligned}$$

我们有

$$-\Delta_{p(z)}\overline{u}_\eta - \Delta_{q(z)}\overline{u}_\eta + \overline{u}_\eta^{p(z)-1} = \eta \text{ in } \Omega,\ \frac{\partial \overline{u}_\eta}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{3.2}$$

根据 Winkert 和 Zacher [22] （另见 Papageorgiou、Rˇadulescu 和 Zhang [15, 命题 A1]），我们有 $\overline{u}_\eta \in L^\infty(\Omega)$。那么，根据各向异性正则性理论（见 Fan [3] 和 Tan 与 Fang [19]），我们有 $\overline{u}_\eta \in C_+ \setminus \{0\}$。由 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} &\Delta_{p(z)}\overline{u}_\eta + \Delta_{q(z)}\overline{u}_\eta \leq \overline{u}_\eta^{p(z)-1} \text{ in } \Omega,\\ \Rightarrow\ &\overline{u}_\eta \in \operatorname{int} C_+\\ &\text{(see Papageorgiou, Qin \& Rădulescu [11, Proposition 4]).}\end{aligned}$$

现在令 $\eta_n \to 0^+$, 并令 $\overline{u}_n = \overline{u}_{\eta_n} \in \operatorname{int} C_+$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。各向异性正则性理论（见 [3], [19]）蕴含存在 $\alpha \in (0,1)$ 和 $C_1 > 0$, 使得

$$u_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

$C^{1,\alpha}(\Omega)$ 到 $C^1(\Omega)$ 的紧嵌入意味着, 至少对一个子序列, 我们有

$$\overline{u}_n \to \overline{u} \text{ in } C^1(\overline{\Omega}) \text{ as } n \to \infty. \tag{3.4}$$

回忆一下

$$A_p(\overline{u}_n) + A_q(\overline{u}_n) + K_p(\overline{u}_n) = \eta_n \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

也就是说,

$$\langle A_p(\overline{u}_n), h\rangle + \langle A_q(\overline{u}_n), h\rangle + \int_\Omega |\overline{u}_n|^{p(z)-2}\overline{u}_n h dz = \int_\Omega \eta_n h dz \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega).$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限。由 (3.4) 和命题 2.3 可得

$$A_p(\overline{u}_n) \to A_p(\overline{u}),\ A_q(\overline{u}_n) \to A_q(\overline{u}) \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega)$$

and

$$\int_\Omega |\overline{u}_n|^{p(z)-2}\overline{u}_n h dz \to \int_\Omega |\overline{u}|^{p(z)-2}\overline{u} h dz.$$

因此，在极限情况下有

$$\begin{aligned} & A_p(\overline{u}) + A_q(\overline{u}) + K_p(\overline{u}) = 0, \\ \Rightarrow \quad & \overline{u} = 0. \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\overline{u}_\eta \to 0 \text{ in } C^1(\overline{\Omega}) \text{ as } \eta \to 0^+ \text{ (see (3.4))}.$$

证明完成。 □

利用命题 3.1，我们看到当 $\eta \in (0,1)$ 足够小时，我们有

$$0 \le \overline{u}_\eta(z) \le 1 \text{ for all } z \in \overline{\Omega}. \tag{3.5}$$

对于这样的 $\eta \in (0,1)$，令 $m_\eta = \min_{\overline{\Omega}} \overline{u}_\eta > 0$（回顾一下 $\overline{u}_\eta \in \operatorname{int} C_+$）。然后令

$$\hat{\lambda} = \frac{\|N_f(\overline{u}_\eta)\|_\infty}{m_\eta^{p_+-1}} + 1 > 0 \tag{3.6}$$

(see hypothesis $H_1(i)$).

我们将证明$\hat{\lambda} \in \mathcal{L}^+$，从而证明 $\mathcal{L}^+ \neq \emptyset$。

命题 3.2. 若假设 H_0, H_1 成立，则对于每个$\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^+ \neq \emptyset$ 且 $S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+$ 。

$\hat{}$ 证明。令 $\overline{u}_\eta \in \operatorname{int} C_+$，并令 $\lambda > 0$ 如上所述。我们有

$$\begin{aligned} & -\Delta_{p(z)}\overline{u}_\eta - \Delta_{q(z)}\overline{u}_\eta + \hat{\lambda}\overline{u}_\eta^{p(z)-1} \\ \ge \quad & -\Delta_{p(z)}\overline{u}_\eta - \Delta_{q(z)}\overline{u}_\eta + \frac{f(z,\overline{u}_\eta(z))}{m_\eta^{p_+-1}}\overline{u}_\eta^{p_+-1} + \overline{u}_\eta^{p(z)-1} \text{ (see (3.5), (3.6))} \\ \ge \quad & \eta + f(z,\overline{u}_\eta) \text{ (see Proposition 3.1)} \\ \ge \quad & f(z,\overline{u}_\eta) \text{ 属于 } \Omega。 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$\hat{}$ 我们引入 Carath´eodory 函数 $f(z,x)$，定义如下：

$$\hat{f}(z,x) = \begin{cases} f(z,x^+), & \text{if } x \le \overline{u}_\eta(z) \\ f(z,\overline{u}_\eta(z)), & \text{if } \overline{u}_\eta(z) < x. \end{cases} \tag{3.8}$$

我们令 $\hat{F}(z,x) = \int_0^x \hat{f}(z,s)ds$，并考虑 C^1-泛函 $\hat{\varphi}: W^{1,p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(u) \quad = \quad & \int_\Omega \frac{1}{p(z)}|Du|^{p(z)}dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)}|Du|^{q(z)}dz + \hat{\lambda}\int_\Omega \frac{1}{p(z)}|u|^{p(z)}dz \\ - \quad & \int_\Omega \hat{F}(z,u)dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega). \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} & \hat{\varphi}(u) \ge \frac{1}{p_+}\left[\rho_p(Du) + \hat{\lambda}\rho_p(u)\right] - \int_\Omega \hat{F}(z,u)dz, \\ \Rightarrow \quad & \hat{\varphi}(\cdot) \text{ is coercive (see (3.8) and Proposition 2.2).} \end{aligned}$$

此外，利用命题 2.1（各向异性 Sobolev 嵌入定理），我们可知 $\hat{\varphi}(\cdot)$ 是序列弱下半连续的。因此，根据魏尔斯特拉斯-托内利定理，我们可以找到 $\hat{u} \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\hat{\varphi}(\hat{u}) = \inf\left\{\hat{\varphi}(u) : u \in W^{1,p(z)}(\Omega)\right\}. \tag{3.9}$$

令 $u \in \operatorname{int} C_+$，并选择足够小的 $t \in (0,1)$，使得

$$0 < tu(z) \leq \min\{\delta_0, \min_{\overline{\Omega}} \overline{u}_\eta\} \text{ for all } z \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

这里 $\delta_0 > 0$ 与假设 $H_1(iv)$ 中相同，并回忆一下 $\overline{u}_\eta \in \operatorname{int} C_+$，因此 $\min_{\overline{\Omega}} \overline{u}_\eta > 0$。我们有

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(tu) &\leq \frac{t^{q_-}}{q_-}\left[\rho_p(Du) + \rho_q(Du) + \hat{\lambda}\rho_p(u)\right] - \frac{C_0 t^{\tau_+}}{\tau_+}\rho_\tau(u) \\
&\quad \text{(see (3.10), hypothesis } H_1(iv) \text{ and recall that } t \in (0,1)) \\
&= C_2 t^{q_-} - C_3 t^{\tau_+} \text{ for some } C_2, C_3 > 0.
\end{aligned}$$

回忆一下 $\tau_+ < q_-$（见假设 $H_1(iv)$）。因此，如有必要，进一步选择更小的 $t \in (0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}(tu) < 0, \\
\Rightarrow\ &\hat{\varphi}(\hat{u}) < 0 = \hat{\varphi}(0) \text{ (see (3.9))}, \\
\Rightarrow\ &\hat{u} \neq 0.
\end{aligned}$$

由 (3.9) 可得

$$\hat{\varphi}'(\hat{u}) = 0,$$

$$\Rightarrow \langle A_p(\hat{u}), h\rangle + \langle A_q(\hat{u}), h\rangle + \hat{\lambda}\int_\Omega |\hat{u}|^{p(z)-2}\hat{u}h\,dz = \int_\Omega \hat{f}(z,\hat{u})h\,dz \tag{3.11}$$

for 所有 $h \in W^{1,p(z)}(\Omega)$。在 (3.11) 中，我们首先选择 $h = -\hat{u}^- \in W^{1,p(z)}$。然后我们有

$$\begin{aligned}
&\rho_p(D\hat{u}^-) + \rho_q(D\hat{u}^-) + \hat{\lambda}\rho_p(\hat{u}^-) = 0 \text{ (see (3.8), (2.1))}, \\
\Rightarrow\ &\hat{u} \geq 0,\ \hat{u} \neq 0.
\end{aligned}$$

接下来，在 (3.11) 中，我们取 $h = (\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+ \in W^{1,p(z)}(\Omega)$。于是

$$\begin{aligned}
&\langle A_p(\hat{u}), (\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+\rangle + \langle A_q(\hat{u}), (\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+\rangle + \hat{\lambda}\int_\Omega \hat{u}^{p(z)-1}(\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+ dz \\
&= \int_\Omega f(z, \overline{u}_\eta)(\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+ dz \text{ (see (3.8))} \\
&\leq \langle A_q(\overline{u}_\eta), (\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+\rangle + \langle A_q(\overline{u}_\eta), (\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+\rangle + \hat{\lambda}\int_\Omega \overline{u}_\eta^{p(z)-1}(\hat{u} - \overline{u}_\eta)^+ dz \\
&\quad \text{(see (3.7))}, \\
\Rightarrow\ &\hat{u} \leq \overline{u}_\eta \text{ (see Proposition 2.3)}.
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明

$$\hat{u} \in [0, \overline{u}_\eta],\ \hat{u} \neq 0. \tag{3.12}$$

由 (3.11)、(3.12) 和 (3.8) 可得

$$\hat{u} \in S^+_\lambda \text{ and so } \hat{\lambda} \in \mathcal{L}^+ \neq \emptyset.$$

此外，与前面一样，各向异性正则性理论（见 [3], [19]）和各向异性最大值原理（见 [11]）表明

$$S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+ \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}.$$

证明现已完成。 □

接下来，我们证明 $\mathcal{L}^+$ 是连通的，更确切地说， $\mathcal{L}^+$ 是一个上半直线。

Pr命题 3.3. 若假设 H_0、 H_1 成立，且 $\lambda \in \mathcal{L}$ 和 $\lambda < \mu < \infty$，则 $\mu \in \mathcal{L}$ $^+$.

Pr证明。由于根据假设 $\lambda \in \mathcal{L}^+$，我们可以找到 $u_\lambda \in S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+$。于是有

$$\begin{aligned} & -\Delta_{p(z)} u_\lambda - \Delta_{q(z)} u_\lambda + \mu u_\lambda^{p(z)-1} \\ \geq\ & -\Delta_{p(z)} u_\lambda - \Delta_{q(z)} u_\lambda + \lambda u_\lambda^{p(z)-1} = f(z, u_\lambda) \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{3.13}$$

设 $\vartheta > -\mu$，并考虑由下式定义的 Carath´eodory 函数 $k(z,x)$

$$k(z,x) = \begin{cases} f(z, x^+) + \vartheta (x^+)^{p(z)-1}, & \text{if } x \leq u_\lambda(z) \\ f(z, u_\lambda(z)) + \vartheta u_\lambda(z)^{p(z)-1}, & \text{if } u_\lambda(z) < x. \end{cases} \tag{3.14}$$

令 $K(z,x) = \int_0^x k(z,s)ds$，并考虑由下式定义的 C^1-泛函 $\hat{\varphi}_\mu : W^{1,\ p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\mu(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)} |Du|^{p(z)} dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)} |Du|^{q(z)} dz + \int_\Omega \frac{\vartheta + \mu}{p(z)} |u|^{p(z)} dz \\ &- \int_\Omega K(z,u) dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega). \end{aligned}$$

由 (3.14) 中的 $\vartheta + \mu > 0$ 以及命题 2.2 可知

$$\hat{\varphi}_\mu(\cdot) \text{ is coercive.}$$

此外，利用命题 2.1（各向异性 Sobolev 嵌入定理），我们推得

$$\hat{\varphi}_\mu(\cdot) \text{ is sequentially weakly lower semicontinuous.}$$

因此，我们可以找到 $u_\mu \in W^{1,\ p(z)}(\Omega)$，使得

$$\hat{\varphi}_\mu(u_\mu) = \inf \left\{ \hat{\varphi}_\mu(u) :\ u \in W^{1,p(z)}(\Omega) \right\}. \tag{3.15}$$

如命题 3.2 的证明中一样，通过假设 $H_1(iv)$，我们证明

$$\begin{aligned} & \hat{\varphi}_\mu(u_\mu) < 0 = \hat{\varphi}_\mu(0), \\ \Rightarrow\ & u_\mu \neq 0. \end{aligned}$$

由 (3.15) 可得

$$\langle \hat{\varphi}'_\mu(u_\mu), h \rangle = 0 \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega). \tag{3.16}$$

与前面一样（参见命题 3.2 的证明），在 (3.16) 中选择 $h = -u_\mu^- \in W^{1,p(z)}(\Omega)$ 和 $h = (u_\mu - u_\lambda)^+ \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，我们得到

$$u_\mu \in [0, \mu_\lambda],\ u_\mu \neq 0,\ u_\mu \neq u_\lambda \text{ (since } \lambda < \mu). \tag{3.17}$$

由 (3.16)、(3.17) 和 (3.14)，我们推得

$$u_\mu \in S_\mu^+ \subseteq \operatorname{int} C_+ \text{ and so } \mu \in \mathcal{L}^+.$$

证明至此完成。 □

上述证明的一个有趣推论如下。

推论 3.4. 若假设 H_0、 H_1 成立， $\lambda \in \mathcal{L}^+$、 $u_\lambda \in S_\lambda^+$ 以及 $\lambda < \mu < \infty$，则 $\mu \in \mathcal{L}^+$，并且我们可以找到 $u_\mu \in S_\mu^+$，使得

$$u_\mu \leq u_\lambda.$$

我们可以如下改进该推论的结论。

命题 3.5. 若假设 H_0、 H_1 成立， $\lambda \in \mathcal{L}^+$、 $u_\lambda \in S_\lambda^+$ 以及 $\lambda < \mu < \infty$，则 $\mu \in \mathcal{L}^+$，并且我们可以找到 $u_\mu \in S_\mu^+$，使得

$$u_\lambda - u_\mu \in D_+.$$

证明. 根据推论 3.4，我们已经知道 $\mu \in \mathcal{L}^+$，并且可以找到 $u_\mu \in S_\mu^+ \subseteq \in C_+$，使得

$$0 \leq u_\mu \leq u_\lambda. \tag{3.18}$$

ˆ 设 $\rho = \|u_\lambda\|_\infty$，并令 $\xi_\rho > 0$ 为假设 $H_1(v)$ 所规定的对象。我们有

$$\begin{aligned}
& -\Delta_{p(z)}u_\lambda - \Delta_{q(z)}u_\lambda + [\lambda + \hat{\xi}_\rho]u_\lambda^{p(z)-1} \\
= \;& f(z,u_\lambda) + \hat{\xi}_\rho u_\lambda^{p(z)-1} \\
\geq \;& f(z,u_\mu) + \hat{\xi}_\rho u_\mu^{p(z)-1} \text{ (see (3.18) and hypothesis } H_1(v)) \\
= \;& -\Delta_{p(z)}u_\mu - \Delta_{q(z)}u_\mu + \left[\mu + \hat{\xi}_\rho\right] u_\mu^{p(z)-1} \text{ (since } u_\mu \in S_\mu^+) \\
= \;& -\Delta_{p(z)}u_\mu - \Delta_{q(z)}u_\mu + [\lambda + \hat{\xi}_\rho]u_\mu^{p(z)-1} + (\mu - \lambda)u_\mu^{p(z)-1} \\
\geq \;& -\Delta_{p(z)}u_\mu - \Delta_{q(z)}u_\mu + [\lambda + \hat{\xi}_\rho]u_\mu^{p(z)-} \text{因为 } \lambda < \mu \text{。)} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

我们知道 $u_\mu \in \text{int } C_+$。因此， $0 < m_\mu = \min_{\overline{\Omega}} u_\mu$。设 ˆ$m_\mu = \min\{m_\mu, 1\} > 0$。于是

$$0 < [\mu - \lambda]\hat{m}_\mu^{p_+ - 1} \leq [\mu - \lambda]u_\mu^{p(z)-1} \text{ for all } z \in \overline{\Omega}.$$

于是，由 (3.19) 及 Papageorgiou、Qin 和 Rˇadulescu 的命题 5 [11], 我们推得$u_\lambda - u_\mu \in D_+$。证明至此完成。□

设 $\lambda_* = \inf \mathcal{L}^+$。

命题 3.6. 若假设 H_0, H_1 成立，则 $\lambda_* > -\infty$。

证明。设 $\lambda > \lambda_*$。那么，根据命题 3.3，我们有 $\lambda \in \mathcal{L}^+$。因此，我们可以找到$u \in S_\lambda^+ \subseteq \text{int}\, C_+$，并且有

$$\langle A_p(u), h\rangle + \langle A_q(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega u^{p(z)-1}h\,dz = \int_\Omega f(z,u)h\,dz \tag{3.20}$$

对所有 $h \in W^{1,\,p(z)}(\Omega)$。

在（3.20）中，我们选择 $h \equiv 1 \in W^{1,\,p(z)}(\Omega)$。然后

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_\Omega u^{p(z)-1}dz = \int_\Omega f(z,u)dz \geq -\hat{C}\int_\Omega u^{p(z)-1}dz \\
\Rightarrow \;& (\lambda + \hat{C})\int_\Omega u^{p(z)-1}dz \geq 0 \\
\Rightarrow \;& \lambda + \hat{C} \geq 0 \text{ and so } \lambda \geq -\hat{C}.
\end{aligned}$$

ˆ 因此，我们得出结论： $\lambda_* \geq -C > -\infty$。 □

通过对 $f(z,\cdot)$ 施加符号条件，我们可以得到 $\mathcal{L}^+ \subseteq \mathbb{R}_+ = [0,+\infty]$，也就是说，$\lambda_* \geq 0$。

关于反应项 $f(z,x)$ 的新条件如下。

H_1'： $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Carath´eodory 函数，满足对几乎处处的 $z \in \Omega$，$f(z,0) = 0$；假设 $H_1'(i)$、(ii)、(iii)、(v)与相应的假设 $H_1(i)$、(ii)、(iii)、(v)相同，并且

(iv) 存在 $\tau \in C(\Omega)$ 以及 C_0、$\delta_0 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & 1 < \tau_+ < q_- \\ & C_0 x^{\tau(z)-1} \leq f(z,x) \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } 0 \leq x \leq \delta_0 \\ \text{and} \quad & 0 \leq f(z,x) \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \geq 0. \end{aligned}$$

注释 3.7。因此，$f(z,\cdot)\Big|_{\mathbb{R}_+}$ 非负（不能变号）。Fan 与 Deng [4] 以及 Deng 与 Wang [1] 的研究中，反应项也符合这种情形。

在反应项 $f(z,\cdot)$ 满足上述更强条件时，我们可以证明，可容许参数集合 $\mathcal{L}^+$ 是 $\mathbb{R}_+$ 的子集。

命题 3.8. 若假设 H_0, H_1' 成立，则 $\lambda_* \geq 0$。

证明. 令 $\lambda > \lambda_*$。我们知道 $\lambda \in \mathcal{L}^+$，因此存在 $u \in S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+$。由 $h \equiv 1 \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，(3.20)，可得

$$\begin{aligned} & \lambda \int_\Omega u^{p(z)-1} dz = \int_\Omega f(z,u) dz \geq 0 \text{ (see } H_1'(iv)), \\ \Rightarrow \quad & \lambda \geq 0 \text{ and so } \lambda_* \geq 0. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

根据假设 $H_1(i)$, (iv)，我们可找到 $C_4 > 0$ 使得

$$f(z,x) \geq C_0 x^{\tau(z)-1} - C_4 x^{r(z)-1} \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \geq 0. \tag{3.21}$$

令 $\eta > 0$，并令 $\hat{\lambda}_\eta = \lambda_* + \eta$。显然，$\hat{\lambda}_\eta \in \mathcal{L}^+$（见推论 3.4）。(3.21) 中的单边增长条件导出以下辅助各向异性 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p(z)} u - \Delta_{q(z)} u + \hat{\lambda}_\eta |u|^{p(z)-1} = C_0 u^{\tau(z)-1} - C_4 u^{r(z)-1} \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ u \geq 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

命题 3.9. 若假设 H_0 成立，则问题 (3.22) 在 C_+intC_+ 中有唯一的正解$u_\eta^* \in$ 。

证明。令 $\lambda \in (\lambda_*, \hat{\lambda}_\eta]$。我们知道 $\lambda \in \mathcal{L}^+$（见命题 3.3），因此可以找到$u \in S_\lambda^+ \subseteq$ int C_+。令 $\vartheta > -\hat{\lambda}_\eta$ 并考虑卡拉泰奥多里´函数

$$\beta(z,x) = \begin{cases} C_0 (x^+)^{\tau(z)-1} - C_4 (x^+)^{r(z)-1} + \vartheta (x^+)^{p(z)-1}, & \text{if } x \leq u(z) \\ C_0 u(z)^{\tau(z)-1} - C_4 u(z)^{r(z)-1} + \vartheta u(z)^{p(z)-1}, & \text{if } u(z) < x. \end{cases} \tag{3.23}$$

我们设 $B(z,x)=\int_0^x \beta(z,s)ds$，并考虑 C^1-泛函 $\Psi: W^{1,p(z)}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)}|Du|^{p(z)}dz+\int_\Omega \frac{1}{q(z)}|Du|^{q(z)}dz+\int_\Omega \frac{\vartheta+\hat{\lambda}_\eta}{p(z)}|u|^{p(z)}dz\\ &- \int_\Omega B(z,u)dz \text{ for all } u\in W^{1,p(z)}(\Omega).\end{aligned}$$

由 (3.23) 可知，且由于 $\vartheta>-\lambda_\eta$，我们看到 $\Psi(\cdot)$ 是强制的。此外，它还是序列弱下半连续的。因此，根据魏尔斯特拉斯-托内利定理，我们可以找到 $u_\eta^*\in W^{1,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\Psi(u_\eta^*)=\inf\left\{\Psi(u): u\in W^{1,p(z)}(\Omega)\right\}. \tag{3.24}$$

由于 $\tau_+<q_-<p_+<r_-$，如果 $v\in \operatorname{int}C_+$ 且 $t\in(0,1)$ 足够小（至少小到使得对所有 $z\in\Omega$，都有 $tv(z)\le u(z)$），那么

$$\begin{aligned}&\Psi(tv)<0,\\ \Rightarrow\ &\Psi(u_\eta^*)<0=\Psi(0) \text{ (see (3.24))},\\ \Rightarrow\ &u_\eta^*\neq 0.\end{aligned}$$

由 (3.24) 我们有

$$\begin{aligned}&\Psi'(u_\eta^*)=0,\\ \Rightarrow\ &\langle A_p(u_\eta^*),h\rangle+\langle A_q(u_\eta^*),h\rangle+(\vartheta+\hat{\lambda}_\eta)\int_\Omega |u_\eta^*|^{p(z)-2}u_\eta^*hdz\\ &= \int_\Omega \beta(z,u_\eta^*)hdz \text{ for all } h\in W^{1,p(z)}(\Omega).\end{aligned} \tag{3.25}$$

在 (3.25) 中，我们先选取 $h=-(u_\eta^*)^-\in W^{1,p(z)}(\Omega)$。利用 (3.23)，可得

$$\begin{aligned}&\rho_p(D(u_\eta^*)^-)+\rho_q((u_\eta^*)^-)+[\vartheta+\hat{\lambda}_\eta]\rho_p((u_\eta^*)^-)=0,\\ \Rightarrow\ &u_\eta^*\ge 0,\ u_\eta^*\neq 0 \text{ (recall that } \vartheta>-\hat{\lambda}_\eta).\end{aligned}$$

接着，在 (3.25) 中，我们选取 $(u_\eta^*-u)^+\in W^{1,p(z)}(\Omega)$。于是有

$$\begin{aligned}&\langle A_p(u_\eta^*),(u_\eta^*-u)^+\rangle+\langle A_q(u_\eta^*),(u_\eta^*-u)^+\rangle+(\vartheta+\hat{\lambda}_\eta)\int_\Omega |u_\eta^*|^{p(z)-2}u_\eta^*hdz\\ =\ &\int_\Omega \left[C_0u^{\tau(z)-1}-C_4u^{r(z)-1}+\vartheta u^{p(z)-1}\right](u_\eta^*-u)^+ \text{ (see (3.23))}\\ \le\ &\int_\Omega \left[f(z,u)+\vartheta u^{p(z)-1}\right](u_\eta^*-u)^+dz \text{ (see (3.21))}\\ \le\ &\langle A_p(u),(u_\eta^*-u)^+\rangle+\langle A_q(u),(u_\eta^*-u)^+\rangle+(\vartheta+\hat{\lambda}_\eta)\int_\Omega u^{p(z)-1}(u_\eta^*-u)^+dz\\ &\text{(since } u\in S_\lambda \text{ and } \lambda\le\hat{\lambda}_\eta),\\ \Rightarrow\ &u_\eta^*\le u \text{ (see Proposition 2.3)}.\end{aligned}$$

因此，我们已经证明了

$$u_\eta^*\in[0,u],\ u_\eta^*\neq 0. \tag{3.26}$$

由 (3.25)、(3.26) 和 (3.23) 可知,

$$u_\eta^* \text{ is a positive solution of problem (3.22).}$$

与前文一样，各向异性正则性理论（[3], [19]）和各向异性最大值原理（见 [11]）表明,

$$u_\eta^* \in \operatorname{int} C_+.$$

接下来，我们证明 (3.22) 的这个正解是唯一的。为此，我们考虑积分泛函 $j: L^1(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$j(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(z)} \left|Du^{1/q_-}\right|^{p(z)} dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)} \left|Du^{1/q_-}\right|^{q(z)} dz, \\ \left(\text{if } u \geq 0,\ u^{1/q_-} \in W^{1,p(z)}(\Omega) \right). \\ +\infty, \left(\text{otherwise} \right). \end{cases}$$

根据 Taka˘c 和 Giacomoni 的定理 2.2 [18], ，我们知道 $j(\cdot)$ 是凸的。令 $\operatorname{dom} j = \{u \in L^1(\Omega): j(u) < \infty\}$ （ $j(\cdot)$ 的有效定义域）。设 y_η^* 是问题 (3.22) 的另一个正解。同样有 $y_\eta^* \in \operatorname{int} C_+$。根据 Papageorgiou、R˘adulescu 和 Repov˘s 的命题 4.1.22 [13, ，第 274], 页，我们有

$$\frac{u_\eta^*}{y_\eta^*} \in L^\infty(\Omega) \text{ and } \frac{y_\eta^*}{u_\eta^*} \in L^\infty(\Omega). \tag{3.27}$$

令 $h = (u_\eta^*)^{q_-} - (y_\eta^*)^{q_-}$。由（3.27）可知，当 $|t| < 1$ 足够小时，我们有

$$(u_\eta^*) + th \in \operatorname{dom} j,\ (y_\eta^*)^{q_-} + th \in \operatorname{dom} j.$$

利用 $j(\cdot)$ 的凸性并使用链式法则，我们看到 $j(\cdot)$ 在 $(u_\eta^*)^{q_-}$ 处以及在 $(y_\eta^*)^{q_-}$ 处沿方向 h 具有盖托导数。此外，通过格林恒等式，我们有

$$\begin{aligned} j'\left((u_\eta^*)^{q_-}\right)(h) &= \frac{1}{q_-} \int_\Omega \frac{-\Delta_{p(z)} u_\eta^* - \Delta_{q(z)} u_\eta^*}{(u_\eta^*)^{q_- - 1}} h dz \\ &= \frac{1}{q_-} \int_\Omega \left[\frac{C_0}{(u_\eta^*)^{q_- - \tau(z)}} - C_4 (u_\eta^*)^{r(z) - q_-} - \hat{\lambda}_\eta (u_\eta^*)^{p(z) - q_-} \right] h dz, \\ j'\left((y_\eta^*)^{q_-}\right)(h) &= \frac{1}{q_-} \int_\Omega \frac{-\Delta_{p(z)} y_\eta^* - \Delta_{q(z)} y_\eta^*}{(y_\eta^*)^{q_- - 1}} h dz \\ &= \frac{1}{q_-} \int_\Omega \left[\frac{C_0}{(y_\eta^*)^{q_- - \tau(z)}} - C_4 (y_\eta^*)^{r(z) - q_-} - \hat{\lambda}_\eta (y_\eta^*)^{p(z) - q_-} \right] h dz. \end{aligned}$$

$j(\cdot)$ 的凸性意味着 $j'(\cdot)$ 是单调的。然后

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega C_0 \left[\frac{1}{(u_\eta^*)^{q_- - \tau(z)}} - \frac{1}{(y_\eta^*)^{q_- - \tau(z)}} \right] h dz \\ &\quad - \int_\Omega C_4 \left[(u_\eta^*)^{r(z) - q_-} - (y_\eta^*)^{r(z) - q_-} \right] h dz \\ &\quad - \hat{\lambda}_\eta \int_\Omega \left[(u_\eta^*)^{p(z) - q_-} - (y_n^*)^{p(z) - q_-} \right] h dz \\ &\leq 0, \\ &\Rightarrow u_\eta^* = y_\eta^* \text{ (recall that } \tau_+ < q_- < p_-). \end{aligned}$$

这证明了问题 (3.22) 的正解 $u_\eta^* \in \operatorname{int} C_+$ 的唯一性。 □

问题 (3.22) 的这个唯一正解为 S_λ^+ 在 $\lambda > \lambda_*$ 中局部地提供了下界。

ˆ 命题 3.10. 若假设 H_0, H_1 成立，且 $\eta > 0$ 和 $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_\eta = \lambda_* + \eta]$，则对所有 $u \in S_\lambda^+$，$u_\eta^* \le u$。

证明. 设 $u \in S_\lambda^+$，$\vartheta > -\hat{\lambda}_\eta$，并考虑由下式定义的 Carath´eodory 函数 $k(z,x)$

$$k(z,x) = \begin{cases} C_0(x^+)^{\tau(z)-1} - C_4(x^+)^{r(z)-1} + \vartheta(x^+)^{p(z)-1}, & \text{if } x \le u(z) \\ C_0 u(z)^{\tau(z)-1} - C_4 u(z)^{r(z)-1} + \vartheta u(z)^{p(z)-1}, & \text{if } u(z) < x. \end{cases} \tag{3.28}$$

令 $K(z,x) = \int_0^x k(z,s)ds$，并考虑由下式定义的 C^1-泛函 $\sigma : W^{1,p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)} |Du|^{p(z)} dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)} |Du|^{q(z)} dz + \int_\Omega \frac{\vartheta + \hat{\lambda}_\eta}{p(z)} |u|^{p(z)} dz \\ &- \int_\Omega K(z,u)dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega). \end{aligned}$$

ˆ 由 (3.28) 及 $\vartheta > -\lambda_\eta$ 可知，$\sigma(\cdot)$ 是强制的。此外，利用各向异性 Sobolev 嵌入定理（见命题 2.1），可知 $\sigma(\cdot)$ 是序列弱下半连续的。因此，根据魏尔斯特拉斯-托内利定理，可找到 ˆ$u_\eta^* \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\sigma(\hat{u}_\eta^*) = \min\left\{\sigma(u) : u \in W^{1,p(z)}(\Omega)\right\}. \tag{3.29}$$

由于对所有 $z \in \Omega$ 都有 $\tau_+ < q_- \le q(z) < \overline{p}(z)$，因此我们可以看出，若 $v \in \operatorname{int} C_+$ 且 $t \in (0,1)$ 足够小（至少要满足 $tv \le u$），则有

$$\begin{aligned} & \sigma(tv) < 0, \\ \Rightarrow\ & \sigma(\hat{u}_\eta^*) < 0 = \sigma(0) \text{ (see (3.29))}, \\ \Rightarrow\ & \hat{u}_\eta^* \ne 0. \end{aligned}$$

由（3.29）可得 $\sigma'(u_\eta^*) = 0$，因此

$$\begin{aligned} &\langle A_p(\hat{u}_\eta^*), h\rangle + \langle A_q(\hat{u}_\eta^*), h\rangle + \int_\Omega (\vartheta + \hat{\lambda}_\eta) |\hat{u}_\eta^*|^{p(z)-2} \hat{u}_\eta^* h dz \\ &= \int_\Omega k(z, \hat{u}_\eta^*) h dz \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.30}$$

在式 (3.30) 中，首先我们选取 $h = -(\hat{u}_\eta^*)^- \in W^{1,p(z)}(\Omega)$。利用式 (3.28)，我们得到

$$\begin{aligned} & \rho_p(D(\hat{u}_\eta^*)^-) + \rho_q(D(\hat{u}_\eta^*)^-) + \int_\Omega (\vartheta + \hat{\lambda}_\eta) \left((\hat{u}_\eta^*)^-\right)^{p(z)} dz = 0 \\ \Rightarrow\ & \hat{u}_\eta^* \ge 0,\ \hat{u}_\eta^* \ne 0 \text{ (recall that } \vartheta > -\hat{\lambda}_\eta). \end{aligned}$$

接下来，在式 (3.30) 中我们选取 $h = (\hat{u}_\eta^* - u)^+ \in W^{1,p(z)}(\Omega)$。我们有

$$\begin{aligned}
&\langle A_p(\hat{u}_\eta^*), (\hat{u}_\eta^* - u)^+\rangle + \langle A_q(\hat{u}_\eta^*), (\hat{u}_\eta^* - u)^+\rangle + \int_\Omega (\vartheta + \hat{\lambda}_\eta)(\hat{u}_\eta^*)^{p(z)-1}(\hat{u}_\eta^* - u)^+ dz \\
= &\int_\Omega \left[C_0 u^{\tau(z)-1} - C_4 u^{r(z)-1} + \vartheta u^{p(z)-1}\right](\hat{u}_\eta^* - u)^+ dz \ (\text{see (3.28)}) \\
\leq &\int_\Omega \left[f(z,u) + \vartheta u^{p(z)-1}\right](\hat{u}_\eta^* - u)^+ dz \ (\text{see (3.21)}) \\
\leq &\langle A_p(u), (\hat{u}_\eta^* - u)^+\rangle + \langle A_q(u), (\hat{u}_\eta^* - u)^+\rangle + \int_\Omega (\vartheta + \hat{\lambda}_\eta) u^{p(z)-1}(\hat{u}_\eta^* - u)^+ dz \\
&(\text{since } u \in S_\lambda^+,\ \lambda \leq \hat{\lambda}_\eta), \\
\Rightarrow \quad &\hat{u}_\eta^* \leq u.
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明了】【。

$$\hat{u}_\eta^* \in [0,u],\ \hat{u}_\eta^* \neq 0. \tag{3.31}$$

由（3.30）、（3.31）、（3.28）和命题 3.9，我们得出

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_\eta^* = u_\eta^*, \\
\Rightarrow \quad &u_\eta^* \leq u \text{ for all } u \in S_\lambda^+, \text{ all } \lambda \in (\lambda_*, \hat{\lambda}_\eta = \lambda_* + \eta].
\end{aligned}$$

证明现已完成。 □

注 3.11. 该命题揭示了，如果假设 H_1' 成立，那么 $\lambda_* > 0$。

接下来，我们证明对于所有 $\lambda > \lambda_*$，至少有两个正解。

命题 3.12. 若假设 H_0, H_1 成立且满足 $\lambda > \lambda_*$，则问题 (P_λ) 至少有两个正解 $u_0, \hat{u} \in$，属于 C_+, $u_0 \neq \hat{u}$。

证明. 令 $\eta, \mu \in (\lambda_*, \infty)$，使得 $\lambda_* < \eta < \lambda < \mu$。我们知道 $\eta, \mu \in \mathcal{L}^+$（见命题 3.3）。此外，根据命题 3.5，我们可以找到 $u_\eta \in S_\eta^+$, $u_0 \in S_\lambda^+$ 和 $u_\mu \in S_\mu^+$，使得

$$\begin{aligned}
&u_\eta - u_0 \in D_+ \text{ and } u_0 - u_\mu \in D_+, \\
\Rightarrow \quad &u_0 \in \operatorname{int}_{C^1(\overline{\Omega})}[u_\mu, u_\eta].
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Let $\vartheta > -\lambda$ 并考虑 Carath´eodory 函数 $\hat{g}(z,x)$ 和 $g(z,x)$，其定义为 y

$$\hat{g}(z,x) = \begin{cases} f(z, u_\mu(z)) + \vartheta u_\mu(z)^{p(z)-1}, \\ f(z,x) + \vartheta x^{p(z)-1}, \\ f(z, u_\eta(z)) + \vartheta u_\eta(z)^{p(z)-1}, \end{cases} \tag{3.33}$$

and

$$g(z,x) = \begin{cases} f(z, u_\mu(z)) + \vartheta u_\mu(z)^{p(z)-1}, & \text{if } x < u_\mu(z) \\ f(z,x) + \vartheta x^{p(z)-1}, & \text{if } u_\mu(z) \leq x. \end{cases} \tag{3.34}$$

我们设 $\hat{G}(z,x) = \int_0^x \hat{g}(z,s)ds$, $G(z,x) = \int_0^x g(z,s)ds$，并考虑由下式定义的 C^1-泛函 $\hat{\gamma}_\lambda, \gamma_\lambda : W^{1,p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)}|Du|^{p(z)}dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)}|Du|^{q(z)}dz + \int_\Omega \frac{\vartheta+\lambda}{p(z)}|u|^{p(z)}dz \\ &- \int_\Omega \hat{G}(z,u)dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)}|Du|^{p(z)}dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)}|Du|^{q(z)}dz + \int_\Omega \frac{\vartheta+\lambda}{p(z)}|u|^{p(z)}dz \\ &- \int_\Omega G(z,u)dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega).\end{aligned}$$

利用 (3.33) 和 (3.34)，我们很容易证明

$$K_{\hat{\gamma}_\lambda} \subseteq [u_\mu, u_\eta] \cap \operatorname{int} C_+ \text{ and } K_{\gamma_\lambda} \subseteq [u_\mu) \cap \operatorname{int} C_+. \tag{3.35}$$

由 (3.33) 和 (3.34) 可知

$$\gamma_\lambda\Big|_{[u_\mu,u_\eta]} = \hat{\gamma}_\lambda\Big|_{[u_\mu,u_\eta]}. \tag{3.36}$$

因此，由 (3.35) 和 (3.36) 可知，我们可以假设

$$K_{\hat{\gamma}_\lambda} = \{u_0\}. \tag{3.37}$$

否则，我们已经得到问题 (P_λ) 的第二个正解，因此结论成立。由 (3.33) 且由于 $\vartheta > -\lambda$，可知 $\hat{}\gamma(\cdot)$ 是强制的。此外，它还是序列弱下半连续的。因此，根据 (3.37)，$\hat{}\gamma_\lambda(\cdot)$ 存在一个全局极小值点，该全局极小值点为 u_0。由 (3.32) 和 (3.36) 可得

$$\begin{aligned}&u_0 \text{ is a local } C^1(\overline{\Omega})\text{-minimizer of } \gamma_\lambda(\cdot), \\ \Rightarrow\ &u_0 \text{ is a local } W^{1,p(z)}(\Omega)\text{-minimizer of } \gamma_\lambda(\cdot) \\ &\text{(see Gasinski \& Papageorgiou [7])}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

由 (3.35) 和 (3.34) 可知，我们可以假设 K_{γ_λ} 是有限的，否则我们已经得到问题 (P_λ) 的一列互不相同的正光滑解，因此结论成立。接着，由 (3.38) 以及 Papageorgiou、R$\breve{}$adulescu 和 Repov$\breve{}$s 的定理 5.7.6 [13, p.367]，可知，存在一个足够小的 $\rho \in (0,1)$，使得

$$\gamma_\lambda(u_0) < \inf\{\gamma_\lambda(u) : \|u-u_0\| = \rho\} = m_\lambda. \tag{3.39}$$

注意，若 $u \in \operatorname{int} C_+$，则根据假设 $H_1(ii)$，我们有

$$\gamma_\lambda(tu) \to -\infty \text{ as } t \to +\infty. \tag{3.40}$$

断言：$\gamma_\lambda(\cdot)$ 满足 C-条件。

考虑一个序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,\,p(z)}(\Omega)$，使得

$$|\gamma_\lambda(u_n)| \le C_5 \text{ for some } C_5 > 0, \text{ all } n \in \mathbb{N} \tag{3.41}$$

$$(1+\|u_n\|)\gamma'_\lambda(u_n) \to 0 \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega)^* \text{ as } n \to \infty. \tag{3.42}$$

由（3.42），我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\langle A_p(u_n), h\rangle + \langle A_q(u_n), h\rangle + \int_\Omega (\vartheta+\lambda)|u_n|^{p(z)-2}u_n h dz - \int_\Omega g(z,u_n)h dz\Big| \\ &\le \frac{\varepsilon_n\|h\|}{1+\|u_n\|} \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ and with } \varepsilon_n \to 0^+.\end{aligned} \tag{3.43}$$

在（3.43）中，我们取 $h=-u_n^-\in W^{1,\,p(z)}(\Omega)$。于是

$$\begin{aligned}&\rho_p(Du_n^-)+\rho_q(Du_n^-)+[\vartheta+\lambda]\rho_q(u_n^-)\le C_6\|u_n^-\|\\&\text{for some } C_6>0,\text{ all } n\in\mathbb{N}\ \text{(see (3.34))},\\\Rightarrow\ &\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W^{1,p(z)}(\Omega)\text{ is bounded}\\&\text{(see Proposition 2.2 and recall that } \vartheta>-\lambda).\end{aligned}\tag{3.44}$$

为了证明 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W^{1,p(z)}(\Omega)$ 有界，我们需要证明 $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W^{1,p(z)}(\Omega)$ 有界（见(3.44)）。通过反证法，假设至少对于一个子序列，我们有

$$\|u_n^+\|\to\infty\tag{3.45}$$

设 $v_n=\frac{u_n^+}{\|u_n^+\|}$，其中 $n\in\mathbb{N}$。则对于所有 $n\in\mathbb{N}$，有 $\|v_n\|=1$、$v_n\ge 0$。因此，我们可以假设 that

$$v_n\xrightarrow{w}v\text{ in }W^{1,p(z)}(\Omega),\ v_n\to v\text{ in }L^{r(z)}(\Omega),\ v\ge 0.\tag{3.46}$$

令 $\Omega_+=\{z\in\Omega:\ v(z)>0\}$。首先，我们假设 $|\Omega_+|_N>0$（即 $v\ne 0$）。于是我们有

$$\begin{aligned}&u_n^+\to+\infty\text{ for a.a. } z\in\Omega_+\\\Rightarrow\ &\frac{F(z,u_n^+(z))}{u_n^+(z)^{p_+}}\to\infty\text{ for a.a. } z\in\Omega_+\\&\text{(see hypothesis } H_1(ii)),\\\Rightarrow\ &\int_{\Omega_+}\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz\to+\infty\text{ (by Fatou's lemma).}\end{aligned}\tag{3.47}$$

注意，假设 $H_1(i)$、(ii) 意味着

$$-C_7\le F(z,x)\text{ for a.a. } z\in\Omega,\text{ all } x\ge 0,\text{ some } C_7>0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz&=\int_{\Omega_+}\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz+\int_{\Omega\setminus\Omega_+}\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz\\&\ge\int_{\Omega_+}\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz-\frac{C_7|\Omega|_N}{\|u_N^+\|^{p_+}},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int_\Omega\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz\to+\infty\text{ (see (3.47) and (3.45)).}\tag{3.48}$$

另一方面，由 (3.34)、(3.42) 和 (3.44)，我们可以得出

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{q_-}\Big[\int_\Omega\frac{1}{\|u_n^+\|^{p_+-p(z)}}|Dv_n|^{p(z)}dz+\int_\Omega\frac{1}{\|u_n^+\|^{p_+-q(z)}}|Dv_n|^{q(z)}dz\\&+\int_\Omega\frac{\vartheta+\lambda}{\|u_n^+\|^{p_+-p(z)}}|v_n|^{p(z)}dz+\int_\Omega\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz\le C_8\\&\text{for some } C_8>0,\text{ all } n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int_\Omega\frac{F(z,u_n^+)}{\|u_n^+\|^{p_+}}dz\le C_9\text{ for some } C_9>0,\text{ all } n\in\mathbb{N}.\tag{3.49}$$

比较 (3.49) 和 (3.47)，可得矛盾。

接下来，假设 $|\Omega_+|_N = 0$，（即 $v \equiv 0$）。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $t_n \in [0,1]$ 满足

$$\gamma_\lambda(t_n u_n^+) = \max\left\{\gamma_\lambda(t u_n^+) :\ 0 \le t \le 1\right\}. \tag{3.50}$$

对于 $\xi > 1$，令 $y_n = \xi^{1/p_-} v_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。则

$$y_n \overset{w}{\to} 0 \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega).$$

由此可得

$$\int_\Omega \frac{\vartheta+\lambda}{p(z)} y_n^{p(z)} dz \to 0, \int_\Omega G(z, y_n) dz \to 0. \tag{3.51}$$

根据 (3.45)，我们可以找到 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\xi^{1/p_-}}{\|u_n^+\|} \in (0,1] \text{ for all } n \ge n_0. \tag{3.52}$$

那么对于 $n \ge n_0$，我们有

$$\begin{aligned}
\gamma_\lambda(t_n u_n^+) &= \gamma_\lambda(y_n) \text{ (see (3.52), (3.50))} \\
&= \int_\Omega \frac{1}{p(z)} \xi^{p(z)/p_-} |Dv_n|^{p(z)} dz \\
&+ \int_\Omega \frac{\vartheta+\lambda}{p(z)} \xi^{p(z)/p_-} v_n^{p(z)} dz - \int_\Omega G(z, y_n) dz \\
&\ge \frac{\xi}{p_+} \left[\rho_p(Dv_n) + (\vartheta+\lambda)\rho_p(v_n)\right] - \int_\Omega G(z, y_n) dz \\
&\quad \text{(recall that } \xi > 1), \\
\Rightarrow \quad & \gamma_\lambda(t_n u_n^+) \ge \frac{C_{10}\xi}{2p_+} \\
&\quad \text{for some } C_{10} > 0, \text{ all } n \ge n_1 \ge n_0 \text{ (see (3.51))}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

由于 $\xi > 1$ 是任意的，由（3.53）可推得

$$\gamma_\lambda(t_n u_n^+) \to +\infty \text{ as } n \to \infty. \tag{3.54}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\gamma_\lambda(0) = 0 \text{ and } \gamma_\lambda(u_n^+) \le C_{11} \\
&\text{for some } C_{11} > 0, \text{ all } n \in \mathbb{N} \text{ (see (3.34), (3.41))}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

由 (3.54) 和 (3.55) 可知，我们可以找到 $n_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}
& t_n \in (0,1) \text{ for all } n \ge n_2, \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dt} \gamma_\lambda(t u_n^+)\Big|_{t=t_1} = 0 \text{ (see (3.50))}, \\
\Rightarrow \quad & \langle \gamma_\lambda'(t_n u_n^+), t_n u_n^+ \rangle = 0 \text{ for all } n \ge n_2 \\
& \text{(by the chain rule)}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

那么对于 $n \geq n_2$，我们有

$$\begin{aligned}
& \gamma_\lambda(t_n u_n^+) \\
= \ & \gamma_\lambda(t_n u_n^+) - \frac{1}{p_+}\langle \gamma'_\lambda(t_n u_n^+), t_n u_n^+\rangle \text{ (see (3.56))} \\
\leq \ & \int_\Omega \left[\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{p_+}\right] |Du_n^+|^{p(z)} dz + \int_\Omega \left[\frac{1}{q(z)} - \frac{1}{p_+}\right] |Du_n^+|^{q(z)} dz \\
+ \ & \frac{1}{p_+}\int_\Omega \left[g(z, t_n u_n^+)(t_n u_n^+) - p_+ G(z, t_n u_n^+)\right] dz \\
& (\text{since } t_n \in (0,1)) \\
\leq \ & \int_\Omega \left[\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{p_+}\right] |Du_n^+|^{p(z)} + \int_\Omega \left[\frac{1}{q(z)} - \frac{1}{p_+}\right] |Du_n^+|^{q(z)} dz \\
+ \ & \frac{1}{p_+}\int_\Omega \left[g(z, u_n^+)u_n^+ - p_+ G(z, u_n^+)\right] dz + C_{12} \\
& \text{for some } C_{12} > 0 \text{ (see } H_1(iii) \text{ and (3.34))} \\
= \ & \gamma_\lambda(u_n^+) - \frac{1}{p_+}\langle \gamma'_\lambda(u_n^+), u_n^+\rangle + C_{12} \\
\leq \ & C_{13} \text{ for some } C_{13} > 0, \text{ all } n \in \mathbb{N} \text{ (see (3.41), (3.42), (3.44)).} \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

比较（3.57）和（3.54），我们得到一个矛盾。因此，$\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,\,p(z)}(\Omega)$ 是有界的，故

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ is bounded (see (3.44)).}$$

我们可以假设,

$$u_n \xrightarrow{w} u \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ and } u_n \to u \text{ in } L^{r(z)}(\Omega). \qquad (3.58)$$

在（3.43）中，我们取 $h = u_n - u \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，令 $n \to \infty$ 趋于极限并使用（3.58）。然后

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \left[\langle A_p(u_n), u_n - u\rangle + \langle A_q(u_n), u_n - u\rangle\right] = 0, \\
\Rightarrow \ & \limsup_{n\to\infty} \left[\langle A_p(u_n), u_n - u\rangle + \langle A_q(u), u_n - u\rangle\right] \leq 0 \\
& (\text{since } A_q(\cdot) \text{ is monotone}), \\
\Rightarrow \ & \limsup_{n\to\infty} \langle A_p(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \text{ (see (3.58))}, \\
\Rightarrow \ & u_n \to u \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ (see Proposition 2.3).}
\end{aligned}$$

因此，$\gamma_\lambda(\cdot)$ 满足 C-条件，我们证明了该断言。于是，(3.39)、(3.40) 和该断言使得我们可以应用山路定理。因此，我们可以找到 $\hat{u} \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} \hat{u} \in K_{\gamma_\lambda} \subseteq [u_\mu) \cap \operatorname{int} C_+ \text{ (see (3.35))} \\ m_\lambda \leq \gamma_\lambda(\hat{u}) \text{ (see (3.39)).} \end{cases} \qquad (3.59)$$

由（3.59）、（3.34）和（3.39），我们推断出

$$\hat{u} \in S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+ \text{ and } \hat{u} \neq u_0 \text{ (for } \lambda \in (\lambda_*, +\infty)).$$

证明完成。 □

我们必须确定临界参数 λ_* 的情况。我们证明 λ_* 也是可接受的，因此 $\mathcal{L}^+ = [\lambda_*, +\infty)$。

命题 3.13. 如果假设 H_0, H_1' 成立，则 $\lambda_* \in \mathcal{L}^+$。

证明. 令 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^+$ 使得 $\lambda_n \downarrow \lambda_*$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\eta \in (\lambda_*, \lambda_n)$。由命题 3.3 可知 $\eta \in \mathcal{L}^+$，因此我们可以找到 $u_\eta \in S^+_\eta \subseteq \operatorname{int} C_+$。由推论 3.4 可知，我们可以找到 $u_n = u_{\lambda_n} \in S^+_{\lambda_n} \subseteq \operatorname{int} C_+$，使得 $u_\eta - u_n \in D_+$。

考虑泛函 $\varphi_\lambda : W^{1,p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$，对于问题 (P_λ)，定义为

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)}|Du|^{p(z)}dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)}|Du|^{q(z)}dz + \int_\Omega \frac{\lambda}{p(z)}|u|^{p(z)}dz \\ &- \int_\Omega F(z,u)dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega).\end{aligned}$$

我们知道 $\varphi_\lambda \in C^1\left(W^{1,p(z)}(\Omega)\right)$，并且根据证明的第一部分（另见命题 3.3 的证明），我们有

$$\varphi_{\lambda_n}(u_n) < \varphi_{\lambda_n}(0) = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad &\int_\Omega \frac{p_+}{p(z)}|Du_n|^{p(z)}dz + \int_\Omega \frac{p_+}{q(z)}|Du_n|^{q(z)}dz + \int_\Omega \frac{\lambda_n p_+}{p(z)}|u_n|^{p(z)}dz \\ - \quad &\int_\Omega p_+ F(z,u_n)dz \le 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \qquad (3.60)\end{aligned}$$

另一方面，由于对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $u_n \in S^+_n$，我们得到

$$\varphi'_{\lambda_n}(u_n) = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

$$\Rightarrow \quad \rho_p(Du_n) + \rho_q(Du_n) + \lambda_n\rho_p(u_n) = \int_\Omega f(z,u_n)u_n dz \qquad (3.61)$$
$$\text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

由 (3.60) 和 (3.61)，如命题 3.12 的证明中所示（见断言），通过反证法，我们证明

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ is bounded.}$$

我们可以假设

$$u_n \xrightarrow{w} u_* \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega),\ u_n \to u_* \text{ in } L^{r(z)}(\Omega). \qquad (3.62)$$

我们知道

$$\langle \varphi'_{\lambda_n}(u_n), h\rangle = 0 \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega),\ \text{all } n \in \mathbb{N}.$$

选择 $h = u_n - u_* \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，令 $n \to \infty$ 趋于极限并使用 (3.62)，如前所述（参见命题 2.3 的证明），利用 $A_p(\cdot)$ 的 $(S)_+$-性质（参见命题 2.3），我们得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle A_{p(z)}(u_n), u_n - u_*\rangle \le 0, \\ \Rightarrow \quad &u_n \to u_* \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega). \qquad (3.63)\end{aligned}$$

令 $\mu > \lambda_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。则 $\mu \in \mathcal{L}^+$，并利用命题 3.10，我们可以找到 $u^*_\mu \in \operatorname{int} C_+$，使得

$$\begin{aligned} & u^*_\mu \leq u_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow \quad & u^*_\mu \leq u_*. \end{aligned} \tag{3.64}$$

由（3.63）可得THOOK

$$\begin{aligned} & \langle \varphi'_\lambda(u_*), h\rangle = 0 \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega), \\ \Rightarrow \quad & u_* \in S^+_\lambda \text{ and so } \lambda_* \in \mathcal{L}^+ \text{ (see (3.64))}. \end{aligned}$$

证明现已完成。 □

因此，我们已经证明了】【。

$$\mathcal{L} = [\lambda_*, \infty).$$

综上，我们可以陈述问题（P_λ）的以下全局（关于参数 $\lambda \in \mathbb{R}$）多重性定理（分岔型定理）。

定理 3.14. 如果假设 H_0, H_1 成立，那么存在 $\lambda_* \in \mathbb{R}$，使得

(a) 对所有 $\lambda > \lambda_*$，问题（P_λ）至少有两个正解 u_0、$\hat{u} \in \operatorname{int} C_+$、$u_0 \neq \hat{u}$；(b) 对于 $\lambda = \lambda_*$，问题（P_λ）至少有一个正解 $u_* \in \operatorname{int} C_+$；(c) 如果 $\lambda < \lambda_*$，问题（P_λ）没有正解。

4. 最小正解

在本节中，我们证明对于每个 $\lambda \in \mathcal{L}^+ = [\lambda_*, \infty)$，问题（$P_\lambda$）都有一个最小正解。

命题 4.1. 如果假设 H_0、H_1 成立且 $\lambda \in \mathcal{L}^+ = [\lambda_*, +\infty)$，那么问题（$P_\lambda$）有一个最小正解 $\hat{u}^*_\lambda$（即，对于所有 $u \in S^+_\lambda$，都有 $\hat{u}^*_\lambda \in S^+_\lambda$ 和 $\hat{u}^*_\lambda \leq u$）。

证明。根据 Papageorgiou、R˘adulescu 和 Repov˘s [14, 命题 7]，我们知道 S^+_λ 是向下有向的（也就是说，如果 u_1、$u_2 \in S^+_\lambda$，那么我们可以找到 $u \in S^+_\lambda$，使得 $u \leq u_1$、$u \leq u_2$）。利用 Hu 和 Papageorgiou [8, 第 178], 页的引理 3.10，我们可以找到递减的 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^+_\lambda$，使得

$$\inf S^+_\lambda = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

我们有

$$\langle \varphi'_\lambda(u_n), h\rangle = 0 \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega), \text{ all } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

选择 $h = u_n \in W^{1,\,p(z)}(\Omega)$，我们得到

$$\begin{aligned} \rho_p(Du_n) + \rho_q(Du_n) + \lambda\rho_p(u_n) &= \int_\Omega f(z,u_n)u_n dz \\ &\leq \int_\Omega |f(z,u_n)|u_1 dz \\ &\quad (\text{since } 0 \leq u_n \leq u_1 \text{ for all } n \in \mathbb{N}) \\ &\leq C_{14} \text{ for some } C_{14} > 0, \text{ all } n \in \mathbb{N} \\ &\quad (\text{see hypothesis } H_1(i)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p(z)}(\Omega) \quad \text{is bounded (see Proposition 2.2).}$$

我们可以假设

$$u_n \xrightarrow{w} \hat{u}_\lambda^* \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega),\ u_n \to \hat{u}_\lambda^* \text{ in } L^{r(z)}(\Omega). \tag{4.2}$$

在 (4.1) 中选择 $h = u_n - \hat{u}_\lambda^* \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，令 $n \to \infty$ 趋于极限，并利用 (4.2) 以及 $A_p(\cdot)$ 的 $(S)_+$-性质，我们得到

$$\begin{aligned} &u_n \to \hat{u}_\lambda^* \text{ in } W^{1,p(z)}(\Omega), \\ \Rightarrow\ &\langle \varphi'(\hat{u}_\lambda^*), h\rangle = 0 \text{ for all } h \in W^{1,p(z)}(\Omega) \text{ (see (4.1))}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

此外，如果 $\mu > \lambda$，那么我们有

$$u_\mu^* \le \hat{u}_\lambda^* \text{ (see Proposition 3.10)}. \tag{4.4}$$

由（4.3）和（4.4）可知,

$$\hat{u}_\lambda^* \in S_\lambda^+ \subseteq \operatorname{int} C_+,\ \hat{u}_\lambda^* = \inf S_\lambda^+.$$

至此证明完成。 □

第5卷. 节点解

本节证明问题（P_λ）存在一个节点解（变号解）。

如果关于 $f(z,\cdot)$ 的条件是双边的（也就是说，这些条件对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，而不只是像 H_1 中那样对 $x \ge 0$ 成立），那么对于（P_λ）的负解，我们也可以得到类似结果。因此，现在我们对 $f(z,\cdot)$ 施加以下条件:

H_1'': $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Carathéodory 函数，使得对于几乎处处的 $z \in \Omega$，$f(z,0) = 0$，并且

(i) 对于几乎处处的 $z \in \Omega$ 及所有满足 $a \in L^\infty(\Omega)$、$r \in C(\Omega)$ 的 $x \in \mathbb{R}$，$|f(z,x)| \le a(z)\big[1 + |x|^{r(z)-1}\big]$；对于所有 $z \in \Omega$，$p_+ \prec r(z) < p^*(z)$；(ii) 若 $F(z,x) = \int_0^x f(z,s)ds$，则 $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(z,x)}{x^{p_+}} = +\infty$ 对几乎处处的 $z \in \Omega$ 一致成立；(iii) 若 $e(z,x) = f(z,x)x - p_+F(z,x)$，则存在 $\mu \in L^1(\Omega)$，使得

$$e(z,x) \le e(z,y) + \mu(z)$$

对于几乎处处的 $z \in \Omega$，所有 $0 \le x \le y$ 和 $y \le x \le 0$;

（iv）存在 $\tau \in C(\Omega)$ 以及 C_0、δ_0, $\hat{C} > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &1 < \tau_+ < q_-, \\ &C_0|x|^{\tau(z)} \le f(z,x)x \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } |x| \le \delta_0, \\ &-\hat{C}|x|^{p(z)} \le f(z,x)x \text{ for a.a. } z \in \Omega, \text{ all } x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

（v）对于每个 $\rho > 0$，存在 $\hat{\xi}_\rho > 0$，使得对于几乎处处的 $z \in \Omega$，函数

$$x \mapsto f(z,x) + \hat{\xi}_\rho |x|^{p(z)-2}x$$

在 $[-\rho,\rho]$ 上是非递减的。

令 $\mathcal{L}^-$ 为负解的可容许参数集合，令 S_λ^- 为负解集合。然后，如第3节所述，我们可以证明存在一个临界参数值 $\lambda^* > -\infty$，使得

$$\mathcal{L}^- = [\lambda^*, +\infty) \text{ and } \emptyset \ne S_\lambda^- \subseteq -\operatorname{int} C_+ \text{ for all } \lambda \in \mathcal{L}^-.$$

我们得到了关于负解的全局多重性结果（见定理 3.14）。此外，对于每个 $\lambda \in \mathcal{L}^- = [\lambda_*, +\infty)$，存在一个极大负解 $\hat{v}_\lambda^* \in S_\lambda^- \subseteq$ 属于 C_+（即，对于所有 $v \in S_\lambda^-$，$\hat{v}_\lambda^* \leq v$）。

˜ ˜我们设定 $\lambda_0 = \max\{\lambda_*, \lambda^*\}$。对于每个 $\lambda \geq \lambda_0$，该问题都存在极端定号解。

$$\hat{u}_\lambda^* \in S_\lambda^* \subseteq \operatorname{int} C_+, \ \hat{v}_\lambda^* \subseteq -\operatorname{int} C_+.$$

˜ ˆ$\geq \lambda_0$ 和 $\vartheta > -\lambda$。我们引入 Carath´eodory 函数 $k(z,x)$，令 λ 定义为

$$\hat{k}(z,x) = \begin{cases} f(z, \hat{v}_\lambda^*(z)) + \vartheta |\hat{v}_\lambda^*(z)|^{p(z)-2} \hat{v}_\lambda^*(z), & \text{if } x < \hat{v}_\lambda^*(z) \\ f(z,x) + \vartheta |x|^{p(z)-2} x, & \text{if } \hat{v}_\lambda^*(z) \leq x \leq \hat{u}_\lambda^*(z) \\ f(z, \hat{u}_\lambda^*(z)) + \vartheta \hat{u}_\lambda^*(z)^{p(z)-1}, & \text{if } \hat{u}_\lambda^*(z) < x. \end{cases} \tag{5.1}$$

ˆ 我们还考虑 $k(z,\cdot)$ 的正截断和负截断，即 Carath´eodory 函数

$$\hat{k}_\pm(z,x) = \hat{k}(z, \pm x^\pm). \tag{5.2}$$

我们设定

$$\hat{K}(z,x) = \int_0^x \hat{k}(z,s)ds \text{ and } \hat{K}_\pm(z,x) = \int_0^x \hat{k}_\pm(z,s)ds$$

并引入 C^1-泛函 $\hat{w}_\lambda, \hat{w}_\lambda^\pm : W^{1,p(z)}(\Omega) \to \mathbb{R}$，定义如下

$$\begin{aligned} \hat{w}_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)} |Du|^{p(z)} dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)} |Du|^{q(z)} dz + \int_\Omega \frac{\vartheta + \lambda}{p(z)} |u|^{p(z)} dz \\ &- \int_\Omega \hat{K}(z,u) dz \\ \hat{w}_\lambda^\pm(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(z)} |Du|^{p(z)} dz + \int_\Omega \frac{1}{q(z)} |Du|^{q(z)} dz + \int_\Omega \frac{\vartheta + \lambda}{p(z)} |u|^{p(z)} dz \\ &- \int_\Omega \hat{K}_\pm(z,u) dz \text{ for all } u \in W^{1,p(z)}(\Omega). \end{aligned}$$

利用 (5.1) 和 (5.2)，我们可以很容易地证明

$$\begin{aligned} &K_{\hat{w}_\lambda} \subseteq [\hat{v}_\lambda^*, \hat{u}_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega}), \\ &K_{\hat{w}_\lambda^+} \subseteq [0, \hat{u}_\lambda^*] \cap C_+, \ K_{\hat{w}_\lambda^-} \subseteq [\hat{v}_\lambda^*, 0] \cap (-C_+). \end{aligned}$$

$\hat{u}_\lambda^*, \hat{v}_\lambda^*$ 的极值性蕴含

$$K_{\hat{w}_\lambda} \subseteq [\hat{v}_\lambda^*, \hat{u}_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega}), \ K_{\hat{w}_\lambda^+} = \{0, \hat{u}_\lambda^*\}, \ K_{\hat{w}_\lambda^-} = \{0, \hat{v}_\lambda^*\}. \tag{5.3}$$

利用这些泛函，我们构造出一个节点（变号）解。

˜命题 5.1. 若假设 H_0, H_1' 成立且 $\lambda \geq \lambda_0$，则问题 (P_λ) 存在一个节点解

$$y_0 \in [\hat{v}_\lambda^*, \hat{u}_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

证明。首先，我们证明$\hat{u}_\lambda^* \in \operatorname{int} C_+$ 和$\hat{v}_\lambda^* \in -\operatorname{int} C_+$ 是泛函$\hat{w}_\lambda(\cdot)$的局部极小点。由（5.1）和（5.2）可知，$\hat{w}_\lambda^+$ 是强制的。此外，它还是序列弱下半连续的。因此，我们可以找到 $\overline{u}_\lambda^* \in W^{1,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\hat{w}_\lambda^+(\overline{u}_\lambda^*) = \inf \left\{ \hat{w}_\lambda^+(u) : \ u \in W^{1,p(z)}(\Omega) \right\}. \tag{5.4}$$

如果 $u \in \operatorname{int} C_+$，并且我们选择足够小的 $t \in (0,1)$，从而至少有 $tu \leq \hat{u}_\lambda^*$（回想一下，$\hat{u}_\lambda^* \in \operatorname{int} C_+$）。那么根据假设 $H_1''(iv)$，并且由于 $\tau_+ < q_-$，当 $t \in (0,1)$取得更小的值时，我们有

$$\begin{aligned} & \hat{w}_\lambda^+(tu) < 0, \\ \Rightarrow \quad & \hat{w}_\lambda^+(\overline{u}_\lambda^*) < 0 = \hat{w}_\lambda^+(0) \text{ (see (5.4))}, \\ \Rightarrow \quad & \overline{u}_\lambda^* \neq 0. \end{aligned}$$

由于 $\overline{u}_\lambda^* \in K_{w_\lambda^+}$（见 (5.4)），由 (5.3) 可推知

$$\overline{u}_\lambda^* = \hat{u}_\lambda^* \in \operatorname{int} C_+.$$

由 (5.1) 和 (5.2) 显然可知

$$\begin{aligned} & \hat{w}_\lambda\Big|_{C_+} = \hat{w}_\lambda^+\Big|_{C_+}, \\ \Rightarrow \quad & \hat{u}_\lambda^* \text{ is a local } C^1(\overline{\Omega})\text{-minimizer of } w_\lambda(\cdot), \\ \Rightarrow \quad & \hat{u}_\lambda^* \text{ is a local } W^{1,p(z)}(\Omega)\text{-minimizer of } w_\lambda(\cdot) \\ & \text{(see Gasinski \& Papageorgiou [7])}. \end{aligned}$$

类似地，我们证明 $\hat{v}_\lambda^* \in -\operatorname{int} C_+$ 是 $\hat{w}(\cdot)$ 的一个局部极小点。这次我们对 $\hat{w}_\lambda^-(\cdot)$ 进行处理。我们可以假设

$$K_{\hat{w}_\lambda} \text{ is finite.} \tag{5.5}$$

否则，考虑到 (5.3) 以及 $\hat{u}_\lambda^*$ 和 $\hat{v}_\lambda^*$ 的极值性，我们得到一列互不相同的节点解，因此结论成立。我们可以假设

$$\hat{w}_\lambda(\hat{v}_\lambda^*) \leq \hat{w}_\lambda(\hat{u}_\lambda^*).$$

若相反的不等式成立，论证类似。由 $\hat{u}_\lambda^*$ 是 $w_\lambda(\cdot)$ 的局部极小点这一事实，结合 (5.5)，并利用 Papageorgiou、R$\breve{\text{a}}$dulescu 和 Repov$\breve{\text{s}}$ 的定理 5.7.6（第 449, 页），我们可以找到一个足够小的 $\rho \in (0,1)$，使得

$$\begin{cases} \hat{w}_\lambda(\hat{v}_\lambda^*) \leq \hat{w}_\lambda(\hat{u}_\lambda^*) < \inf\{\hat{w}(u) : \|u - \hat{u}_\lambda^*\| = \rho\} = \hat{m}_\lambda, \\ \|\hat{v}_\lambda^* - \hat{u}_\lambda^*\| > \rho. \end{cases} \tag{5.6}$$

显然，泛函 $\hat{w}_\lambda(\cdot)$ 是强制的（见 (5.1)，并回忆 $\vartheta > -\lambda$）。因此，它满足 C 条件（见 [13, 第 369] 页的命题 5.1.15）。再结合 (5.6)，我们可以应用山路定理，得到 $y_0 \in W^{1,\,p(z)}(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned} & y_0 \in K_{w_\lambda} \subseteq [\hat{v}_\lambda^*, \hat{u}_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega}) \text{ (see (5.3))}, \\ & \hat{w}_\lambda(\hat{v}_\lambda^*) \leq \hat{w}_\lambda(\hat{u}_\lambda^*) < \hat{m}_\lambda \leq \hat{w}_\lambda(y_0) \text{ (see (5.6))}. \end{aligned}$$

由上可知

$$y_0 \notin \{\hat{u}_\lambda^*, \hat{v}_\lambda^*\}.$$

由 [13, 第 527] 页的定理 6.5.8 可得

$$C_1(\hat{w}_\lambda, y_0) \neq 0. \tag{5.7}$$

另一方面，假设 $H_1(iv)$ 和 Papageorgiou &R$\breve{\text{a}}$dulescu[12], 的命题 3.7 表明

$$C_k(\hat{w}_\lambda, 0) = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.8}$$

比较（第5.7）式和（第5.8）式，我们得出结论：

$$\begin{aligned} & y_0 \neq 0, \\ (5.9) \qquad & \Rightarrow \quad y_0 \notin \{0, \hat{u}_\lambda^*, \hat{v}_\lambda^*\}. \end{aligned}$$

由于 $y_0 \in [\hat{v}_\lambda^*, \hat{u}_\lambda^*] \cap C^1(\overline{\Omega})$，$\hat{u}_\lambda^*$、$\hat{v}_\lambda^*$ 的极值性以及 (5.9) 可推出 $y_0 \in C^1(\Omega)$ 是 (P_λ) 的节点解。□

因此，我们可以陈述关于该问题的以下多重性定理。

T 定理 5.2. 若假设 H_0, H_1' 成立，则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使得

(a) 对于 $\lambda = \lambda_0$，问题 (P_λ) 至少有三个非平凡解

$$\begin{aligned} & u_0 \in \operatorname{int} C_+, \ v_0 \in -\operatorname{int} C_+ \\ & y_0 \in [v_0, u_0] \cap C^1(\overline{\Omega}) \ \textit{nodal.} \end{aligned}$$

(b) 对所有 $\lambda > \lambda_0$，问题 (P_λ) 至少有五个非平凡解

$$\begin{aligned} & u_0, \hat{u} \in \operatorname{int} C_+, \ u_0 \leq \hat{u}, \ u_0 \neq \hat{u}, \\ & v_0, \hat{v} \in -\operatorname{int} C_+, \ \hat{v} \leq v_0, \ v_0 \neq \hat{v}, \\ & y_0 \in [v_0, u_0] \cap C^1(\overline{\Omega}) \ \textit{nodal.} \end{aligned}$$

致谢。作者谨向审稿人致以感谢，感谢其提出的意见和评论。本研究得到斯洛文尼亚研究机构项目 P1-0292 的支持。Vicent¸iu D. Rˇadulescu 的研究得到罗马尼亚研究、创新与数字化部的资助，该资助由 CNCS/CCCDI–UEFISCDI 提供，项目编号为 PCE 137/2021，隶属于 PNCDI III。

参考文献

[1] S.G. Deng, and Q. Wang, *Nonexistence, existence and multiplicity of positive solutions to the p(x) Laplacian nonlinear Neumann boundary value problems* **73** 2010 2170 2183 , 非线性分析（ ），-.

[2] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästo, and M. Ruzička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents* 2017, 2011 , 数学讲义，第 卷。

Springer，海德堡，。[3] X. Fan, *Global $C^{1+\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form*,《微分方程杂志》235 (2007), 397-417. [4] X. Fan, and S.G. Deng, *Multiplicity of positive solutions for a class of inhomogeneous Neumann problems involving the p x -Laplacian* **14** 2009 255 271 ( ), 非线性微分方程及其应用（ ），-.[5] X. Fan, and X. Han, *Existence and multiplicity of solutions for p(x)-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$*, 非线性分析 59 (2004), no. 1-2, 173-188. [6] M. Galewski, *On a Dirichlet problem with p x -Laplacian* **337** 2008 1, ( ),《数学分析及其应用杂志》（ ），no. -.[7] L. Gasinski, and N.S. Papageorgiou, *Anisotropic nonlinear Neumann problems*,《变分法》42 (2011), 323-354. [8] S. Hu, and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis. Volume I: Theory*, Kluwer 学术出版社，荷兰多德雷赫特，1997. [9] K. Kefi, *On the Robin problem with indefinite weight in Sobolev spaces with variable exponents*, Z. Anal. Anwend. 37 (2018), no. 1, 25-38. [10] G. Mingione, and V.D. Rădulescu, *Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity* **501** 2021 1, 125197, 41 ,《数学分析及其应用杂志》（ ），no. 论文编号 页。[11] N.S. Papageorgiou, D. Qin, and V.D. Rădulescu, *Anisotropic double-phase problems with indefinite potential* 2020 10 63 , 数学与物理分析（ ），：。

[12] N.S. Papageorgiou, and V.D. Rădulescu, *Coercive and noncoercive nonlinear Neumann problems with indefinite potential* **28** 2016 545 571 , 数学论坛（ ），-.

[13] N.S. Papageorgiou, V.D. Rădulescu, and D.D. Repovš, *Nonlinear Analysis–Theory and Methods*, Springer 数学专著丛书, Springer, Cham, 2019年。[14] N.S. Papageorgiou, V.D. Rădulescu, and D.D. Repovš, *Positive solutions for perturbations of the Robin eigenvalue problem plus an indefinite potential* **37** 2017 2589 2618 , 离散与连续动力系统（）, -.

[15] N.S. Papageorgiou, V.D. Rădulescu, and Y. Zhang, *Anisotropic singular double phase Dirichlet problems* **14** 2021 4465 4502 , 离散与连续动力系统：S辑（）, -.

[16] N.S. Papageorgiou, and Y. Zhang, *Constant sign and nodal solutions for superlinear p q -equations with indefinite potential and a concave boundary term* **10** 2020 76 101 (,), 《高级非线性分析》（）, -.

[17] V.D. Rădulescu, and D.D. Repovš, *Partial Differential Equations with Variable Exponents: Variational Methods and Qualitative Analysis*, 数学专著与研究札记丛书, CRC 出版社, 博卡拉顿, 佛罗里达州, 2015年。[18] P. Takač, and J. Giacomoni, *A p x -Laplacian extension of the Diaz-Saa inequality and some applications* **150** 2020 205 232 (), 爱丁堡皇家学会会刊（）, -.[19] Z. Tan, and F. Fang, *Orlicz-Sobolev versus Hölder local minimizers and multiplicity results for quasilinear elliptic equations* **402** 2013 348 370 , 《数学分析及其应用杂志》（）, -.

[20] X.H. Tang, and S.T. Chen, *Ground state solutions of Nehari-Pohozaev type for Kirchhoff-type problems with general potentials* **56** 2017 110 , 《变分法与偏微分方程》（）, 。[21] X.H. Tang, and B.T. Cheng, *Ground state sign-changing solutions for Kirchhoff type problems in bounded domains* **261** 2016 2384 2402 , 《微分方程杂志》（）, -.

[22] P. Winkert, and R. Zacher, *A priori bounds of solutions to elliptic equations with nonstandard growth* **5** 2012 865 878 , 离散与连续动力系统：S辑（）, -.

Nikolaos S. Papageorgiou, Department of Mathematics, National Technical University, Zografou Campus, Athens 15780, GREECE.*Email address*: npapg@math.ntua.gr

Vicenţiu D. Rădulescu (Corresponding author),

Faculty of Applied Mathematics AGH ,,,,„Department of Mathematics, University of Science and Technology al. Mickiewicza 30 30-059 Krakow POLAND & University of Craiova, 200585 Craiova, ROMANIA, &, China-Romania Research Center in Applied Mathematics

Email address: radulescu@inf.ucv.ro

Dušan D. Repovš, Faculty of Education and Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, 1000 Ljubljana, SLOVENIA, &, Institute for Mathematics, Physics andMechanics, 1000 Ljubljana, SLOVENIA

Email address: dusan.repovs@guest.arnes.si