arXiv:2305.01046v1 [math.AP] 1 May 2023

关于三维纳维–斯托克斯方程近轴对称解的存在性与结构

刘彦林和徐力

Abstract. 本文研究具有近轴对称初始数据的三维纳维–斯托克斯方程，这意味着将 $\boldsymbol{u}_0 = u_0^r\boldsymbol{e}_r + u_0^\theta\boldsymbol{e}_\theta + u_0^z\boldsymbol{e}_z$ 写成柱坐标形式后， $\partial_\theta u_0^r$、 $\partial_\theta u_0^\theta$ 和 $\partial_\theta u_0^z$ 在某种意义下足够小（回顾一下，轴对称意味着这三个量均为零）。在对 u_0^θ作出额外的小量假设后，我们证明了唯一强解 $\boldsymbol{u}$的整体存在性，且该解始终接近某个轴对称向量场。我们还针对 $\boldsymbol{u}$在 θ 变量上的积分平均，建立了一些更精细的估计。

此外，由于此处的 u_0^r、 u_0^θ 和 u_0^z 依赖于 θ，自然可以将它们按 θ 变量展开为傅里叶级数。我们将考虑 $\boldsymbol{u}_0$的一种特殊形式，并引入一个小参数ε 来衡量其旋流部分和振荡部分。我们研究相应解的渐近展开，以及渐近展开中不同剖面之间的相互影响。特别地，我们给出一些能够始终保持的特殊对称结构。这些现象反映了纳维–斯托克斯方程中非线性项的某些特征。

关键词：纳维–斯托克斯方程，轴对称，渐近展开。

1. Introduction

1.1. 一般 设定。三维不可压缩纳维–斯托克斯方程（N-S）写作 :

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} + \nabla P = \boldsymbol{0}, & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 表示流体的速度场， P 表示标量压力。该方程组描述黏性不可压缩流体的运动。值得一提的是，除初始数据具有某些特殊结构的情形外，对于大初始数据，方程组（1.1）是否存在唯一全局解仍是一个重大未解问题。

现在，将 $\boldsymbol{u}$ 写成柱坐标形式:

$$\boldsymbol{u}(t,x) = u^r(t,r,\theta,z)\boldsymbol{e}_r + u^\theta(t,r,\theta,z)\boldsymbol{e}_\theta + u^z(t,r,\theta,z)\boldsymbol{e}_z, \tag{1.2}$$

其中 (r,θ,z) 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的柱坐标，使得 $x=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$，并且

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta,\sin\theta,0),\ \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta,\cos\theta,0),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

注意，在柱坐标中，有

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta\partial_\theta + \boldsymbol{e}_z\partial_z, \quad \Delta = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \partial_z^2. \tag{1.3}$$

Date: 2023年5月3日。

于是，我们可以将（1.1）改写为柱坐标下的形式：

$$
\begin{cases}
D_t u^r - \big(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{\partial_r}{r} + \dfrac{\partial_\theta^2}{r^2} - \dfrac{1}{r^2}\big)u^r - \dfrac{(u^\theta)^2}{r} + \dfrac{2\partial_\theta u^\theta}{r^2} + \partial_r P = 0,\\
D_t u^\theta - \big(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{\partial_r}{r} + \dfrac{\partial_\theta^2}{r^2} - \dfrac{1}{r^2}\big)u^\theta + \dfrac{u^r u^\theta}{r} - \dfrac{2\partial_\theta u^r}{r^2} + \dfrac{\partial_\theta P}{r} = 0,\\
D_t u^z - \big(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{\partial_r}{r} + \dfrac{\partial_\theta^2}{r^2}\big)u^z + \partial_z P = 0,\\
\partial_r u^r + \dfrac{u^r}{r} + \partial_z u^z + \dfrac{\partial_\theta u^\theta}{r} = 0,\\
(u^r, u^\theta, u^z)|_{t=0} = (u_0^r, u_0^\theta, u_0^z),
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

其中 D_t 定义= $\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla = \partial_t + \big(u^r\partial_r + u^\theta\frac{\partial_\theta}{r} + u^z\partial_z\big)$ 表示物质导数。F

or th$_{\text{e}}$ 规范ial 情形w hen a$^{\text{ll th}}$ e 分量 ts in (1.2) do not depend on θ，之前isely

$$\boldsymbol{u}(t,x) = u^r(t,r,z)\boldsymbol{e}_r + u^\theta(t,r,z)\boldsymbol{e}_\theta + u^z(t,r,z)\boldsymbol{e}_z$$

那么，这将被称为轴对称。一个著名的结果是，对于更特殊的无旋轴对称情形，即 $u^\theta = 0$, Ladyzhenskaya [6] 以及 Ukhovskii 和 Yudovich [11] 分别证明了弱解的存在性，以及此类解的唯一性和正则性。后来，Neˇcas 等人 [8] 给出了一个更为简洁的证明。他们的证明深深依赖于以下事实： ω^θ/r 满足

$$\partial_t\frac{\omega^\theta}{r} + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)\frac{\omega^\theta}{r} - (\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)\frac{\omega^\theta}{r} = 0, \tag{1.5}$$

因此，任意 L^p 范数 ω^θ/r 都是守恒的。

然而，对于旋流部分非平凡的任意轴对称初始数据，我们不再具有类似于 (1.5) 中的结构。据我们所知，目前只有在 u_0^θ 足够小时，才能建立强解的整体存在性；并且，由于该策略是将此情形视为无旋情形的小扰动，这一小性还需要依赖于 $\boldsymbol{u}_0$ 或 $\nabla\boldsymbol{u}_0$的其他分量。关于这一情形已有大量研究，这里仅列举 [1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13] 作为示例。

在这里，我们并不局限于考虑轴对称解，但这种几何对称性仍然发挥着至关重要的作用。我们还引入 $\bar{u}(t,x) = \bar{u}^r(t,r,z)e_r + \bar{u}^\theta(t,r,z)e_\theta + \bar{u}^z(t,r,z)e_z$，其满足以下轴对称纳维–斯托克斯方程：

$$
\begin{cases}
\partial_t\bar{u}^r + (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^r - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2})\bar{u}^r - \dfrac{(\bar{u}^\theta)^2}{r} + \partial_r\bar{P} = 0,\\
\partial_t\bar{u}^\theta + (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^\theta - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2})\bar{u}^\theta + \dfrac{\bar{u}^r\bar{u}^\theta}{r} = 0,\\
\partial_t\bar{u}^z + (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^z - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r)\bar{u}^z + \partial_z\bar{P} = 0,\\
\partial_r\bar{u}^r + \dfrac{1}{r}\bar{u}^r + \partial_z\bar{u}^z = 0,\\
\bar{u}^r|_{t=0} = \bar{u}_0^r = \mathcal{M}(u_0^r),\ \bar{u}^\theta|_{t=0} = \bar{u}_0^\theta = \mathcal{M}(u_0^\theta),\ \bar{u}^z|_{t=0} = \bar{u}_0^z = \mathcal{M}(u_0^z),
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

其中， $\mathcal{M}(f)$ 是 f 关于 θ 变量的积分平均，具体而言

$$\mathcal{M}(f)(r,z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,z)\,d\theta. \tag{1.7}$$

根据定义，对于任意光滑函数 f，都有 $\mathcal{M}(\partial_\theta f) = 0$。于是可得

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{u}}_0 = \partial_r \bar{u}_0^r + \frac{1}{r}\bar{u}_0^r + \partial_z \bar{u}_0^z = \mathcal{M}(\partial_r u_0^r + \frac{u_0^r}{r} + \partial_z u_0^z + \frac{\partial_\theta u_0^\theta}{r}) = \mathcal{M}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_0) = 0.$$

这保证了 (1.6) 中的初始数据确实满足无散条件。

1.2. 主要结果。本文有三个主要结果。第一个结果涉及 (1.4) 的整体适定性，其中初始数据在某种意义下接近某些轴对称向量场。为准确陈述这一结果，我们先引入以下范数：

$$\|f\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \|\widetilde{\nabla} f\|_{L^2}^2 + \|f/r\|_{L^2}^2, \quad \text{and} \quad \|f\|_{H^1_{\mathrm{axi}}}^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2, \tag{1.8}$$

其中 $\widetilde{\nabla} \overset{定义}{=} \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_z\partial_z$ 是 (1.3) 给出的整个梯度的一部分。

定理 1.1. 设 $\boldsymbol{u}_0 \in H^2$ 满足 $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_0 = 0$，且 $\mathfrak{U}_0 \overset{def}{=} (\partial_\theta u_0^r, \partial_\theta u_0^\theta, \partial_\theta u_0^z) \in H^1_{\mathrm{axi}}$。若存在某个小的正常数 ϵ，使得以下两个小性条件成立：

$$\|u_0^\theta\|_{L^2}\|u_0^\theta\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}} \exp\big(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2\big) < \epsilon, \tag{1.9}$$

$$\|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}} \exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big) < \epsilon, \tag{1.10}$$

那么 (1.4) 和 (1.6) 都有唯一整体强解 $\boldsymbol{u}$ 和 $\bar{\boldsymbol{u}}$，属于 $C(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2)$，且对任意 $t > 0$，有

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(L^2)}^2 \lesssim \|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}^2 \exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big) \overset{def}{=} \mathcal{A}, \\ &\|\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(\dot{H}^1)}^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(\dot{H}^1)}^2 \lesssim \|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2 \exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big) \overset{def}{=} \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

此外，对于 $\mathcal{M}\boldsymbol{u} \overset{def}{=} \mathcal{M}(u^r)\boldsymbol{e}_r + \mathcal{M}(u^\theta)\boldsymbol{e}_\theta + \mathcal{M}(u^z)\boldsymbol{e}_z$，有

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{M}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 + \|\nabla\mathcal{M}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(L^2)}^2 \lesssim \epsilon\mathcal{A}, \\ &\|\mathcal{M}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^\infty(\dot{H}^1)}^2 + \|\nabla\mathcal{M}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(\dot{H}^1)}^2 \lesssim \epsilon\mathcal{B}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

注 1.1. (i) 我们提到，当 $\mathfrak{U}_0$ 消失时，$\boldsymbol{u}_0$ 是轴对称的；众所周知，在这种情况下，相应的解 $\boldsymbol{u}$ 会始终保持轴对称性。

鉴于此，小性条件 (1.10) 实际上表明，$\boldsymbol{u}_0$ 接近某个轴对称向量场。这就是我们所说的“近乎轴对称”。此外，可以合理地预期，解 $\boldsymbol{u}$ 会始终接近某个轴对称向量场。

为了定量验证这一特征，我们指出，使纳维–斯托克斯方程的解 $\boldsymbol{u}$ 轴对称化的一种自然方法，是先将初始数据轴对称化，再以此轴对称化后的初始数据求解纳维–斯托克斯方程，从而得到 $\bar{\boldsymbol{u}}$。然后，鉴于小性条件 (1.10)，对 (1.11) 中的两个估计进行插值可得

$$\|\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^2 \lesssim \|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}} \exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big) < \epsilon,$$

这意味着 $\boldsymbol{u}$确实接近轴对称向量场 $\bar{\boldsymbol{u}}$。

（ii）此外，(1.12) 表明，对 θ 取平均值后，$\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}$ 会变得小得多。因此，这一过程中必然存在某种抵消，具体而言，$\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}$ 的正部几乎与其负部相互平衡。这让我们更清楚地了解 $\boldsymbol{u}$ 如何趋近于 $\bar{\boldsymbol{u}}$。

将 $\boldsymbol{u}$ 按 θ 变量展开为傅里叶级数，可以更清楚地看到这一点，见下文注 1.3。

有了定理 1.1，现在我们来研究具有近轴对称初始数据的纳维–斯托克斯方程解的渐近展开式。众所周知，足够光滑的函数可以按 θ 变量展开为傅里叶级数。根据定理 1.1 的假设，这里我们只考虑具有以下特殊形式的初始数据 $\boldsymbol{u}(0,x)$ [1]:

$$\begin{cases} u^r(0,x) = a_0^r(r,z) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^r(r,z)\cos k\theta + b_k^r(r,z)\sin k\theta \Big), \\ u^\theta(0,x) = \varepsilon a_0^\theta(r,z) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^\theta(r,z)\cos k\theta + b_k^\theta(r,z)\sin k\theta \Big), \\ u^z(0,x) = a_0^z(r,z) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k^z(r,z)\cos k\theta + b_k^z(r,z)\sin k\theta \Big), \end{cases} \tag{1.13}$$

其中，$\varepsilon > 0$ 是一个待定的足够小正常数，且各剖面满足

$$\sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{i=0}^{2-j} \big\| r^{-i} \widetilde{\nabla}^j (a_0^r, a_0^\theta) \big\|_{L^2}^2 + \| \widetilde{\nabla}^j a_0^z \|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2-j} k^{2\max\{i,1\}} \big\| r^{-i} \widetilde{\nabla}^j (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k) \big\|_{L^2}^2 \Big) < \infty, \tag{1.14}$$

and

$$\partial_r a_0^r + \frac{a_0^r}{r} + \partial_z a_0^z = 0, \tag{1.15}$$

$$\partial_r a_k^r + \frac{a_k^r}{r} + \partial_z a_k^z + \frac{k b_k^\theta}{r} = 0, \quad \partial_r b_k^r + \frac{b_k^r}{r} + \partial_z b_k^z - \frac{k a_k^\theta}{r} = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

不难验证，约束条件 (1.15)、(1.16) 满足无散条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(0) = 0$。此外，由帕塞瓦尔恒等式可知，(1.14) 保证 $\boldsymbol{u}(0) \in H^2$和 $\mathfrak{U}(0) \in H^1_{\mathrm{axi}}$。具体而言，我们有

$$\|\mathfrak{U}(0)\|_{L^2}^2 \sim \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \big\| (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k) \big\|_{L^2}^2, \quad \|\mathfrak{U}(0)\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2 \sim \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=1} k^2 \big\| r^{-i} \widetilde{\nabla}^j (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k) \big\|_{L^2}^2,$$

其他范数也可类似地推得。特别地，这意味着只要 ε 足够小，就能满足定理 1.1 中的小性条件；而这一小性要求取决于 (1.14) 中各剖面的范数。

于是，定理 1.1 保证了纳维–斯托克斯方程在初始数据 (1.13) 下存在唯一的整体强解。众所周知，纳维–斯托克斯方程的强解在任意正时间都会变为解析解，因此可按变量 θ 展开为以下傅里叶级数:

$$u^\diamondsuit(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u^\diamondsuit_{(j),0}(t,r,z) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^j \Big(u^\diamondsuit_{(j),k}(t,r,z)\cos k\theta + v^\diamondsuit_{(j),k} \sin k\theta \Big). \tag{1.17}$$

其中，$\diamondsuit$ 可以是 r、θ 或 z，且这些剖面不依赖于 ε。

不同于欧几里得坐标，$\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 并非常向量。因此，$\boldsymbol{u}$ 在索博列夫空间中的收敛通常并不等价于 $\boldsymbol{u}$的每个分量的收敛。鉴于此，验证展开式 (1.17)

[1]在本部分中，我们用 $\boldsymbol{a}_0$、$\boldsymbol{a}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_k$ 表示初始数据的剖面，而下标 0 表示第 0 个傅里叶系数，以免混淆。

在 $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2\cap L^\infty)$ 意义下的有效性是最优的。关于渐近展开的第一个结果如下：

定理 1.2. 设 $\boldsymbol{u}(0,x)$ 由 (1.13) 给出，并满足 (1.14)-(1.16)。那么存在某个 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，(1.1) 都有唯一全局解 $\boldsymbol{u}\in C(\mathbb{R}_+;\,H^1)\cap L^2(\mathbb{R}_+;\,\dot H^1\cap\dot H^2)$。此外，该解可以展开为

$$
\begin{cases}
u^r(t,x)=u^r_{(0),0}(t,r,z)+\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(u^r_{(1),k}(t,r,z)\cos k\theta+v^r_{(1),k}(t,r,z)\sin k\theta\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
u^\theta(t,x)=\varepsilon u^\theta_{(1),0}(t,r,z)+\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(u^\theta_{(1),k}(t,r,z)\cos k\theta+v^\theta_{(1),k}(t,r,z)\sin k\theta\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\
u^z(t,x)=u^z_{(0),0}(t,r,z)+\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(u^z_{(1),k}(t,r,z)\cos k\theta+v^z_{(1),k}(t,r,z)\sin k\theta\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{cases}
\tag{1.18}
$$

在 $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2\cap L^\infty)$ 意义下。

注1.2. 可以看出，在 ε 阶之前，这个展开式 (1.18) 与初始状态 (1.13) 具有相同的形式。特别是，系数 $u^r_{(1),\,0}$ 和$u^z_{(1),\,0}$ 始终为零。

下面的结果讨论了这一渐近展开式中的奇偶性。我们指出，这种奇偶性的保持深刻反映了纳维–斯托克斯方程的某些非线性结构。

定理1.3. 在定理 1.2 的假设下，考虑 (1.13) 的特殊情形：$u^r(0,x)$ 和 $u^z(0,x)$ 关于 θ 为偶函数，而 $u^\theta(0,x)$ 关于 θ 为奇函数，具体而言：

$$
\begin{cases}
u^r(0,x)=a^r_0(r,z)+\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a^r_k(r,z)\cos k\theta,\\
u^\theta(0,x)=\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b^\theta_k(r,z)\sin k\theta,\\
u^z(0,x)=a^z_0(r,z)+\varepsilon\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a^z_k(r,z)\cos k\theta.
\end{cases}
\tag{1.19}
$$

那么，这种奇偶性将始终保持。具体来说，以下展开式

$$
\begin{cases}
u^r(t,x)=\Big(u^r_{(0),0}+\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j u^r_{(j),0}\Big)(t,r,z)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^j u^r_{(j),k}(t,r,z)\cos k\theta,\\
u^\theta(t,x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^j v^\theta_{(j),k}(t,r,z)\sin k\theta,\\
u^z(t,x)=\Big(u^z_{(0),0}+\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j u^z_{(j),0}\Big)(t,r,z)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^j u^z_{(j),k}(t,r,z)\cos k\theta
\end{cases}
\tag{1.20}
$$

在 $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2\cap L^\infty)$ 意义下成立。

备注 1.3。 从第 5 节中的证明可以看出，$u^r_{(0),0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(0),0}\boldsymbol{e}_z$ 实际上满足具有初始数据 $a^r_0\boldsymbol{e}_r+a^z_0\boldsymbol{e}_z=\mathcal{M}(\boldsymbol{u}(0,x))$的轴对称纳维–斯托克斯方程。因此 $u^r_{(0),0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(0),0}\boldsymbol{e}_z$

对应于定理 1.1 中的 $\bar{\boldsymbol{u}}$，由表达式 (1.20) 可得

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}=\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\boldsymbol{u}_{(j),0}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^j\Big(\boldsymbol{u}_{(j),k}\cos k\theta+\boldsymbol{v}_{(j),k}\sin k\theta\Big)=\mathcal{O}(\varepsilon),$$

and

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})=\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\boldsymbol{u}_{(j),0}=\mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

这表明，$\mathcal{M}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ 通常比 $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ 小得多，正如我们在注 1.1 末尾所提到的那样。在这里我们可以看到，原因在于振荡项的抵消，而振荡项是 $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ 中的主要项。

粗略地说，在这里我们有 $\mathcal{M}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\sim|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}|^2.$。为更清楚地说明这一点，我们请读者参阅第 5 节，以了解公式 (1.20) 中剖面的推导。

让我们用一些将在本文中通篇使用的记号结束本节。

记号说明。我们用 C 表示一个可能逐行变化的通用常数。记号 $a\lesssim b$ 表示 $a\le Cb$，而 $f\sim g$ 表示 $a\lesssim b$ 和 $b\lesssim a$ 均成立。对于巴拿赫空间 B，我们使用简写 $L^p_T(B)$表示$\big\|\|\cdot\|_B\big\|_{L^p(0,T;dt)}$。我们用 H^s（分别用$\dot{H}^s$）表示基于 L^2 的非齐次（分别为齐次）索博列夫空间。

2. Preliminary

2.1. Poincar´e 型不等式。

引理 2.1. 对任意 $p\in[1,\infty]$ 和 $f\in L^p$，在 (1.7) 中定义的算子 $\mathcal{M}$ 满足

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p},\quad \text{and}\quad \|f-\mathcal{M}(f)\|_{L^p}\le 2\pi\|\partial_\theta f\|_{L^p}. \tag{2.1}$$

证明。我们 首先考虑 $p\in[1,\infty)$ 的情况。应用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}^p&=2\pi\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,z)\,d\theta\Big|^p\,rdrdz\\&\le\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\Big(\int_0^{2\pi}|f(r,\theta,z)|^p\,d\theta\Big)\,rdrdz=\|f\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

为了证明（2.1）中的第二个不等式，我们首先写出

$$\begin{aligned}|f(r,\theta,z)-\mathcal{M}(f)(r,z)|^p&=\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(r,\theta,z)-f(r,\theta',z)\big)\,d\theta'\Big|^p\\&=\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\theta'}^{\theta}(\partial_\theta f)(r,\theta'',z)\,d\theta''\Big)\,d\theta'\Big|^p\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\int_{\theta'}^{\theta}\big|(\partial_\theta f)(r,\theta'',z)\big|^p\,d\theta''\Big||\theta-\theta'|^{p-1}\,d\theta'\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|(\partial_\theta f)(r,\theta'',z)\big|^p\,d\theta''\int_0^{2\pi}|\theta-\theta'|^{p-1}\,d\theta'.\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\|f(r,\theta,z)-\mathcal{M}(f)(r,z)\|_{L^p}^p=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\Big(\int_0^{2\pi}\big|(\partial_\theta f)(r,\theta'',z)\big|^p\,d\theta''\Big)\,rdrdz \\ \times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\theta-\theta'|^{p-1}\,d\theta' d\theta \\ =\frac{2}{p+1}(2\pi)^p\|\partial_\theta f\|_{L^p}^p\le(2\pi)^p\|\partial_\theta f\|_{L^p}^p.$$

显然，这给出了 $p\in[1,\infty$ 的 (2.1) 式中的第二个不等式。

对于 $p=\infty$ 的情况，我们有以下公式：

$$|\mathcal{M}(f)(x)|=\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,z)\,d\theta\Big|\le\|f\|_{L^\infty},$$

and

$$|f(x)-\mathcal{M}(f)(x)|=\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\theta'}^{\theta}(\partial_\theta f)(r,\theta'',z)\,d\theta''\Big)\,d\theta'\Big|\le 2\pi\|\partial_\theta f\|_{L^\infty},$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^3$ 均成立。至此，该引理得证。 □

2.2. 轴对称函数的性质。我们首先回顾广为人知的毕奥-萨伐尔定律，该定律指出，任意无散速度场 $\boldsymbol{u}$ 都可由其涡量旋度 $\boldsymbol{u}$ 唯一确定。此外，对于任意 $s>0$ 和任意 $1<p<\infty$，有如下关系。

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{\dot H^s}\sim\|\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\|_{\dot H^s},\quad \|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^p}\sim\|\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\|_{L^p}. \tag{2.2}$$

对于速度场为无旋轴对称的特殊情况，即

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(x)=\widetilde{u}^r(r,z)\boldsymbol{e}_r+\widetilde{u}^z(r,z)\boldsymbol{e}_z,$$

那么我们可以用 $\widetilde{\omega}^\theta=\partial_z\widetilde{u}^r-\partial_r\widetilde{u}^z$ 表示 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$。此外，有：

引理 2.2. 如果此外有 $\widetilde{\boldsymbol{u}}\in H^2$，那么我们有以下估计：

$$\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\sim\|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}^r\|_{L^2}+\|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}^z\|_{L^2}+\big\|\frac{\widetilde{u}^r}{r}\big\|_{L^2}\sim\|\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}, \tag{2.3}$$

$$\|\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^2\sim\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2+\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^2}^2. \tag{2.4}$$

证明。注意到 $\widetilde{u}^r$、$\widetilde{u}^z$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 与 θ 相互独立，因此我们得到如下逐点估计。

$$\big|r^{-1}\widetilde{u}^r(x)\big|=\big|r^{-1}\partial_\theta\big(\widetilde{u}^r(r,z)\boldsymbol{e}_r+\widetilde{u}^z(r,z)\boldsymbol{e}_z\big)\big|\le|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}(x)|,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^3\,.$$

结合 (2.2)，这便推出了所需的第一个估计 (2.3)。

另一方面，由于 $\operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{u}}=0$、$\partial_\theta\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\partial_\theta\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_r$，因此有

$$-\Delta\widetilde{\boldsymbol{u}}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\widetilde{u}=\operatorname{curl}(\widetilde{\omega}^\theta\boldsymbol{e}_\theta)=-\partial_z\widetilde{\omega}^\theta\boldsymbol{e}_r+(\partial_r\widetilde{\omega}^\theta+\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r})\boldsymbol{e}_z,$$

这意味着

$$\|\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^2\sim\big\|\partial_r\widetilde{\omega}^\theta+\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^2}^2+\|\partial_z\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2 \\ =\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2+\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^2}^2+2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_r\widetilde{\omega}^\theta\cdot\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\,dx. \tag{2.5}$$

虽然条件 $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in H^2$ 蕴含 $\widetilde{\omega}^\theta \in L^2$ 和 $r^{-1}\widetilde{\omega}^\theta \in L^2$，从而 $\lim_{r\to 0}\widetilde{\omega}^\theta = \lim_{r\to\infty}\widetilde{\omega}^\theta = 0$. 因此，有 狗万

$$2\int_{\mathbb{R}^3} \partial_r \widetilde{\omega}^\theta \cdot \frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\, dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \partial_r |\widetilde{\omega}^\theta|^2\, drdz = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\omega}^\theta|^2\big|_{r=0}^{\infty}\, dz = 0,$$

结合 (2.5)，可得所需的第二个估计 (2.4)。至此，引理得证。□

引理 2.3. 设 $\bar{\boldsymbol{u}}(x) = \bar{u}^r(r,z)\boldsymbol{e}_r + \bar{u}^\theta(r,z)\boldsymbol{e}_\theta + \bar{u}^z(r,z)\boldsymbol{e}_z \in H^1$ 为无散的，且对应的涡量为 $\bar{\omega}^\theta = \partial_z \bar{u}^r - \partial_r \bar{u}^z$。则有

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^2 &\sim \|\bar{\omega}^\theta\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 \\ &\sim \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^r\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^z\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^r}{r}\Big\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

P_r证明。注意到 旋度 $\bar{\boldsymbol{u}} = (-\partial_z \bar{u}^\theta)\boldsymbol{e}_r + (\partial_z \bar{u}^r - \partial_r \bar{u}^z)\boldsymbol{e}_\theta + (\partial_r \bar{u}^\theta + \frac{\bar{u}^\theta}{r})\boldsymbol{e}_z$，我们有 e

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^2 \sim \|\operatorname{curl} \bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^2 &= \|\bar{\omega}^\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\partial_r \bar{u}^\theta + \frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 + \|\partial_z \bar{u}^\theta\|_{L^2}^2 \\ &\sim \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^r\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{\nabla}\bar{u}^z\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^r}{r}\Big\|_{L^2}^2 + \Big\|\partial_r \bar{u}^\theta + \frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 + \|\partial_z \bar{u}^\theta\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中最后一步用到了引理 2.2。另一方面，由于 $\bar{\boldsymbol{u}} \in H^1$，我们有$\bar{u}^\theta \in L^2$ 且 $r^{-1}\bar{u}^\theta \in L^2$，因此 $\lim_{r\to 0}\bar{u}^\theta = \lim_{r\to\infty}\bar{u}^\theta = 0$，这意味着

$$2\int_{\mathbb{R}^3} \partial_r \bar{u}^\theta \cdot \frac{\bar{u}^\theta}{r}\, dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \int_0^\infty \partial_r |\bar{u}^\theta|^2\, drdz = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\bar{u}^\theta|^2\big|_{r=0}^{\infty}\, dz = 0.$$

因此，有

$$\Big\|\partial_r \bar{u}^\theta + \frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 = \|\partial_r \bar{u}^\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 + 2\int_{\mathbb{R}^3} \partial_r \bar{u}^\theta \cdot \frac{\bar{u}^\theta}{r}\, dx = \|\partial_r \bar{u}^\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2.$$

Su将其代入 (2.7)，即可得到所需的估计 (2.6)。引理得证 . □

2.3. 纳维–斯托克斯方程的稳定性结果。本小节将给出纳维–斯托克斯方程的一个稳定性结果。关于这个问题已有大量研究，这里仅列举两个经典结果[5, 10]。

命题 2.1. 设 $\boldsymbol{v}$ 是具有初始数据 $\boldsymbol{v}_0 \in H^1$的纳维–斯托克斯方程整体强解，且存在一些正常数 A 和 B，使得

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)} \le A, \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1)} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1)} \le B. \tag{2.8}$$

那么，存在某个充分小的正常数 c_0，使得只要 $\boldsymbol{u}_0 \in H^1$ 满足

$$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|_{L^2} \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|_{\dot{H}^1} \exp\big(CA^2B^2\big) < c_0, \tag{2.9}$$

那么，以 $\boldsymbol{u}_0$ 作为初始数据的纳维–斯托克斯方程也具有整体强解 $\boldsymbol{u}$。此外，该解满足对于 $s = 0, 1$ 即

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot{H}^s)}^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^s)}^2 \le C\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|_{\dot{H}^s}^2 \exp\big(CA^2B^2\big), \tag{2.10}$$

and

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^\infty)} \le \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0\|_{H^2} \exp\big(CA^2B^2 + CB^4\big). \tag{2.11}$$

证明。步骤 1。（2.10）的证明。记 $\boldsymbol{h}\overset{定义}{=}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$，那么我们可以找到

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{h}+\nabla\Pi=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{h}=0,\\ \boldsymbol{h}|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0,\end{cases}\tag{2.12}$$

对于适当选取的 Π。将 (2.12) 与 $\boldsymbol{h}$ 作 L^2 内积，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2&=-\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{h}\,dx\\&\le\|\boldsymbol{h}\|_{L^4}^2\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}\\&\le\frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+C\|\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^4.\end{aligned}$$

从两边减去 $\frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2$ 后，再应用格朗沃尔不等式，得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^2(L^2)}^2&\le\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{L^2}^2\exp\big(C\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L_t^2(L^2)}^2\|\boldsymbol{v}\|_{L_t^\infty(\dot H^1)}^2\big)\\&\le\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{L^2}^2\exp\big(CA^2B^2\big).\end{aligned}\tag{2.13}$$

另一方面，将 (2.12) 与 $-\Delta\boldsymbol{h}$ 作 L^2 内积，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2&=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{h}\,|\,\Delta\boldsymbol{h})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,|\,\Delta\boldsymbol{h})\\&=-\sum_{j=1}^3(\partial_j(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h})\cdot\nabla\boldsymbol{h}\,|\,\partial_j\boldsymbol{h})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,|\,\Delta\boldsymbol{h})\\&\lesssim\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^6}^{\frac{3}{2}}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}\big(\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^4}^2+\|\boldsymbol{h}\|_{L^\infty}\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}\big)\\&\lesssim\|\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

然后对最后一项应用杨氏不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+\frac{3}{2}\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2\le C\|\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2+C\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^4\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^2.\tag{2.14}$$

另一方面，根据局部适定性结果，以下集合非空：$\mathcal{D}\overset{定义}{=}\big\{T\in\mathbb{R}^+\colon$ 满足 $\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_T^\infty(L^2)}^2+\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L_T^2(L^2)}^2\le2\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^2}^2\exp\big(CA^2B^2\big)\big\}$。令 $T^*=\sup\{T\colon T\in\mathcal{D}\}$。若 $T^*<\infty$，则对于任意 $t\le T^*$，我们可以利用估计 (2.13) 和小性条件 (2.9)，取 c_0 充分小，从而推出

$$C\|\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{\frac{1}{2}}\le C\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\exp\big(CA^2B^2\big)\le Cc_0^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{2}.$$

将其代入（2.14），再利用格朗沃尔不等式，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{h}(t)\|_{L^2}^2+\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L_t^2(L^2)}^2&\le\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^2}^2\exp\big(C\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L_t^2(L^2)}^2\big)\\&\le\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^2}^2\exp\big(CA^2B^2\big),\end{aligned}$$

这　　这与 T^* 的定义矛盾。因此必存在 $T^*=\infty$，且有

$$\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)}^2+\|\Delta\boldsymbol{h}\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)}^2\le2\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^2}^2\exp\big(CA^2B^2\big).\tag{2.15}$$

步骤 2。（2.11）的证明。记 $\boldsymbol{\delta}\overset{定义}{=}$ 旋度 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{\omega}\overset{定义}{=}$ 旋度 $\boldsymbol{v}$，则它们满足

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}-\Delta\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{h},\\ \boldsymbol{\delta}|_{t=0}=\operatorname{curl}(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0).\end{cases}\tag{2.16}$$

对（2.16）与 $|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}$取 L^2 内积，得到

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^4}^4+\big\||\boldsymbol{\delta}|\nabla\boldsymbol{\delta}\big\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2\le\Big|\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{\delta}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega})\cdot|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}\,dx\Big|. \tag{2.17}$$

右侧各项可按如下方式处理:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{\delta}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\cdot|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}\,dx\Big|&\le\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^3}\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^6}\|\nabla(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h})\|_{L^2}\\&\le\frac{1}{8}\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2+C\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2\big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^4+\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^4\big),\end{aligned}$$

并利用毕奥-萨伐尔定律得知#+#+#+#+

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{h})\cdot|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}\,dx\Big|&\le\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^6}\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^6}\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^6}\\&\le C\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^3}\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^6}\\&\le\frac{1}{8}\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2+C\big\||\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^4,\end{aligned}$$

并利用分部积分以及无散条件，得出。

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega})\cdot|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}\,dx\Big|&=\Big|\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{h}):\nabla\big(|\boldsymbol{\delta}|^2\boldsymbol{\delta}\big)\,dx\Big|\\&\le C\big(\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}+\big\||\boldsymbol{\delta}|\nabla\boldsymbol{\delta}\big\|_{L^2}\big)\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^{12}}\|\boldsymbol{h}\|_{L^{12}}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^3}\\&\le C\big(\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}+\big\||\boldsymbol{\delta}|\nabla\boldsymbol{\delta}\big\|_{L^2}\big)\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^{\frac12}\|\boldsymbol{h}\|_{L^4}^{\frac12}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^4}^{\frac12}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^{\frac12}\\&\le\frac{1}{8}\big(\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2+\big\||\boldsymbol{\delta}|\nabla\boldsymbol{\delta}\big\|_{L^2}^2\big)+C\big(\|\boldsymbol{h}\|_{L^4}^4+\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^4}^4\big)\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Now 将上述三个估计代入（2.18），并利用关系 t hat

$$\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^4}\lesssim\|\operatorname{curl}\boldsymbol{h}\|_{L^4}=\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^4},$$

我们得到

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^4}^4+\big\||\boldsymbol{\delta}|\nabla\boldsymbol{\delta}\big\|_{L^2}^2+\big\|\nabla|\boldsymbol{\delta}|^2\big\|_{L^2}^2\lesssim\|\boldsymbol{\delta}\|_{L^4}^4\big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1}^2+\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L^2}^4\big)+\|\boldsymbol{h}\|_{L^4}^4\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2.$$

于是，格朗沃尔不等式结合估计 (2.8) 和 (2.10) 得到

(2.18)

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\delta}\|_{L_t^\infty(L^4)}^4\lesssim&\big(\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0)\|_{L^4}^4+\|\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^4)}^4\|\boldsymbol{\omega}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L_t^2(L^2)}^2\big)\\&\times\exp\big(C\|\boldsymbol{\omega}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L_t^2(H^1)}^2+C\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^2(L^2)}^2\big)\\\lesssim&\big(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{\dot H^{\frac74}}^4+B^4\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{\dot H^1}^3\big)\exp\big(CA^2B^2+CB^4+Cc_0^2\big)\\\lesssim&\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{H^2}^4\exp\big(CA^2B^2+CB^4\big).\end{aligned}$$

现在，在 (2.15) 和 (2.18) 之间进行插值可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^\infty)}&\lesssim\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{\frac13}\|\nabla\boldsymbol{h}\|_{L_t^\infty(L^4)}^{\frac23}\\&\lesssim\|\boldsymbol{\delta}\|_{L_t^\infty(L^2)}^{\frac13}\|\boldsymbol{\delta}\|_{L_t^\infty(L^4)}^{\frac23}\lesssim\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_0\|_{H^2}\exp\big(CA^2B^2+CB^4\big),\end{aligned}$$

即 精确 得到所需的估计（2.11）。至此，本命题得证。 □

3. The proof of Theorem 1.1

Th本节旨在通过扰动方法证明定理 1.1 d.

3.1. 方程 (1.6) 的整体可解性。首先引入满足以下无旋轴对称纳维–斯托克斯方程组的速度场 $\widetilde{\boldsymbol{u}}(x) = \widetilde{u}^r(r,z)\boldsymbol{e}_r + \widetilde{u}^z(r,z)\boldsymbol{e}_z$：

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u}^r + (\widetilde{u}^r\partial_r + \widetilde{u}^z\partial_z)\widetilde{u}^r - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2})\widetilde{u}^r + \partial_r \widetilde{P} = 0, \\ \partial_t \widetilde{u}^z + (\widetilde{u}^r\partial_r + \widetilde{u}^z\partial_z)\widetilde{u}^z - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r)\widetilde{u}^z + \partial_z \widetilde{P} = 0, \\ \partial_r \widetilde{u}^r + \frac{1}{r}\widetilde{u}^r + \partial_z \widetilde{u}^z = 0, \\ \widetilde{u}^r|_{t=0} = \widetilde{u}_0^r = \mathcal{M}(u_0^r),\ \widetilde{u}^z|_{t=0} = \widetilde{u}_0^z = \mathcal{M}(u_0^z). \end{cases} \tag{3.1}$$

命题 3.1. 在定理 1.1 的假设下，(3.1) 有唯一全局解$\widetilde{\boldsymbol{u}}$，使得对任意时刻 $t>0$，都有

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L_t^\infty(L^2)} + 2\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L_t^2(L^2)} \le \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2}, \tag{3.2}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L_t^\infty(\dot{H}^1)} + \|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{L_t^2(\dot{H}^1)} \lesssim \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^1} + \|\boldsymbol{u}_0\|^4_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^2}. \tag{3.3}$$

*Pr*证明。第一个估计 (3.2) 无非是能量等式以及这样一个事实： t

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|^2_{L^2} = \|\mathcal{M}(u_0^r)\|^2_{L^2} + \|\mathcal{M}(u_0^z)\|^2_{L^2} \le \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2}.$$

接下来，毕奥-萨伐尔定律告诉我们，可以用 $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \widetilde{\omega}^\theta\boldsymbol{e}_\theta = (\partial_z\widetilde{u}^r - \partial_r\widetilde{u}^z)\boldsymbol{e}_\theta$ 的旋度来表示 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$。因此，我们可以将方程组 (3.1) 重新表述为

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{\omega}^\theta + (\widetilde{u}^r\partial_r + \widetilde{u}^z\partial_z)\widetilde{\omega}^\theta - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2})\widetilde{\omega}^\theta - \dfrac{\widetilde{u}^r\widetilde{\omega}^\theta}{r} = 0, \\ \widetilde{\omega}^\theta|_{t=0} = \widetilde{\omega}_0^\theta = \mathcal{M}(\partial_z u_0^r - \partial_r u_0^z). \end{cases} \tag{3.4}$$

于是，不难验证 $\widetilde{\omega}^\theta/r$ 满足

$$\partial_t\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r} + (\widetilde{u}^r\partial_r + \widetilde{u}^z\partial_z)\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r} - (\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r} = 0. \tag{3.5}$$

对于纳维–斯托克斯方程的强解，无穷远处的衰减性质意味着 $\widetilde{\omega}^\theta|_{r=\infty} = 0$，而光滑性意味着 $\widetilde{\omega}^\theta|_{r=0} = 0$。因此，我们得到

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2}{r}\partial_r\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\cdot\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\,dx = -2\pi\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\partial_r\Big|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\Big|^2\,drdz = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\lim_{r\to0}\Big|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\Big|^2\,dz \ge 0.$$

鉴于此，(3.5) 中 $\widetilde{\omega}^\theta/r$ 的 L^2 能量估计给出

$$\Big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\Big\|_{L_t^\infty(L^2)} + \Big\|\nabla\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\Big\|_{L_t^2(L^2)} \le \Big\|\frac{\widetilde{\omega}_0^\theta}{r}\Big\|_{L^2}. \tag{3.6}$$

利用 (2.2) 和引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned} \|\nabla^2\boldsymbol{u}_0\|_{L^2} \sim \|\nabla\boldsymbol{\omega}_0\|_{L^2} &\ge \Big\|\frac{\partial_\theta}{r}(\boldsymbol{\omega}_0)\cdot\boldsymbol{e}_r\Big\|_{L^2} = \Big\|-\frac{\omega_0^\theta}{r} + \frac{\partial_\theta\omega_0^r}{r}\Big\|_{L^2} \\ &\ge \Big\|\mathcal{M}\big(-\frac{\omega_0^\theta}{r} + \frac{\partial_\theta\omega_0^r}{r}\big)\Big\|_{L^2} = \Big\|\mathcal{M}\big(-\frac{\omega_0^\theta}{r}\big)\Big\|_{L^2} = \Big\|\frac{\widetilde{\omega}_0^\theta}{r}\Big\|_{L^2}, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_0$ 定义为= 旋度 $\boldsymbol{u}_0$。将其代入 (3.6) 得到

$$\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L_t^\infty(L^2)}+\big\|\nabla\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L_t^2(L^2)}\le\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^2}. \tag{3.7}$$

接下来，对 (3.4) 与 $\widetilde{\omega}^\theta$ 取 L^2 内积，我们得到

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2+\|\nabla\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2+\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\|_{L^2}^2\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\widetilde{u}^r}{r}|\widetilde{\omega}^\theta|^2\,dx. \tag{3.8}$$

对于右端项，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\widetilde{u}^r}{r}|\widetilde{\omega}^\theta|^2\,dx\Big|&\le\|\widetilde{u}^r\|_{L^2}\|\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^6}\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^2}^{\frac12}\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^6}^{\frac12}\\&\le\frac12\big(\|\nabla\widetilde{\omega}^\theta\|_{L^2}^2+\big\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big\|_{L^2}^2\big)+C\|\widetilde{u}^r\|_{L^2}^4\|\nabla\big(\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

将其代入 (3.8)，然后对时间积分，可得

$$\|\widetilde{\omega}^\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\|\nabla\widetilde{\omega}^\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\|\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\|_{L_t^2(L^2)}^2\le\|\widetilde{\omega}_0^\theta\|_{L^2}^2+C\|\widetilde{u}^r\|_{L_t^\infty(L^2)}^4\|\nabla\big(\frac{\widetilde{\omega}^\theta}{r}\big)\|_{L_t^2(L^2)}^2. \tag{3.9}$$

感谢估计式 (3.7) 和 (3.2)，我们最终由 (3.9) 推导出娱乐主管

$$\|\widetilde{\omega}^\theta\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\|\nabla\widetilde{\omega}^\theta\|_{L_t^2(L^2)}^2+\|\widetilde{\omega}^\theta/r\|_{L_t^2(L^2)}^2\lesssim\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^1}^2+\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^4\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^2}^2,$$

这与引理 2.2 一起推出了所需的第二个估计 (3.3)。 □

接下来，我们将利用命题 2.1 推导方程 (1.6) 的解的整体存在性。

命题 3.2. 在定理 1.1 的假设下，(1.6) 存在唯一全局解$\bar{\boldsymbol{u}}$，使得对任意时间 $t>0$，均有

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+2\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^2(L^2)}^2\le\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2, \tag{3.10}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(\dot H^1)}^2+\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^2(\dot H^1)}^2\lesssim\|\nabla\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2\exp\big(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^2}^2\big). \tag{3.11}$$

证明。由于利用引理 2.1 以及 $\bar{\boldsymbol{u}}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0=\bar{u}_0^\theta(r,z)\boldsymbol{e}_\theta=\mathcal{M}(u_0^\theta)\boldsymbol{e}_\theta$ 这一事实，我们有 e

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|_{L^2}=\|\mathcal{M}(u_0^\theta)\|_{L^2}\le\|u_0^\theta\|_{L^2},$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla(\bar{\boldsymbol{u}}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0)\|_{L^2}^2&=\big\|\nabla\big(\mathcal{M}(u_0^\theta)\boldsymbol{e}_\theta\big)\big\|_{L^2}^2=\|\widetilde{\nabla}\mathcal{M}(u_0^\theta)\|_{L^2}^2+\big\|\frac{\mathcal{M}(u_0^\theta)}{r}\big\|_{L^2}^2\\&=\|\mathcal{M}(\widetilde{\nabla}u_0^\theta)\|_{L^2}^2+\min\Big\{\big\|\mathcal{M}\big(\frac{u_0^\theta}{r}\big)\big\|_{L^2}^2,\big\|\mathcal{M}\big(\frac{u_0^\theta-\partial_\theta u_0^r}{r}\big)\big\|_{L^2}^2\Big\}\\&\le\|\widetilde{\nabla}u_0^\theta\|_{L^2}^2+\min\Big\{\big\|\frac{u_0^\theta}{r}\big\|_{L^2}^2,\big\|\frac{u_0^\theta-\partial_\theta u_0^r}{r}\big\|_{L^2}^2\Big\}\\&\le\min\big\{\|u_0^\theta\|_{\dot H^1_{\mathrm{axi}}}^2,\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^1}^2\big\}.\end{aligned}$$

结合界（3.2）、（3.3）和小性条件（1.9），我们得到

$$\begin{aligned}&\|\bar{\boldsymbol{u}}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|_{L^2}\|\bar{\boldsymbol{u}}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|_{\dot H^1}\exp\big(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2(\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^1}^2+\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^4\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^2}^2)\big)\\&\quad\le C\|u_0^\theta\|_{L^2}\|u_0^\theta\|_{\dot H^1_{\mathrm{axi}}}\exp\big(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot H^2}^2\big)<c_0,\end{aligned}$$

其中我们用到了这一事实

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^1}^2 \lesssim \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^3\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2} \lesssim 1+\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2.$$

从而满足命题 2.1 中的条件 (2.9)。因此，(1.6) 存在唯一的整体强解 $\bar{\boldsymbol{u}}$，使得

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1)}^2+\|\bar{\boldsymbol{u}}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^2)}^2 \lesssim \min\big\{\|u_0^\theta\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2,\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^1}^2\big\}\exp\big(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2\big),$$

这与 (3.3) 一起导出了所需的估计 (3.11)。

估计 (3.10) 可由纳维–斯托克斯方程的基本能量等式推出。因此，我们完成了该命题的证明。□

3.2. 第 th 部分 定理 1.1 的证明。本小节的目标是证明定理 1.#+#+#+#+ 1.

定理 1.1 的证明。我们将证明分为两步。

步骤 1。(1.4) 的整体可解性。策略仍然是使用命题 2.1。为此，我们需要分析 $\boldsymbol{u}_0$ 与 $\bar{\boldsymbol{u}}_0$之间的差异，如下所示:

$$\boldsymbol{u}_0-\bar{\boldsymbol{u}}_0=\big(u_0^r-\mathcal{M}(u_0^r)\big)e_r+\big(u_0^\theta-\mathcal{M}(u_0^\theta)\big)e_\theta+\big(u_0^z-\mathcal{M}(u_0^z)\big)e_z,$$

$$\widetilde{\nabla}(\boldsymbol{u}_0-\bar{\boldsymbol{u}}_0)=\big(\widetilde{\nabla}u_0^r-\mathcal{M}(\widetilde{\nabla}u_0^r)\big)e_r+\big(\widetilde{\nabla}u_0^\theta-\mathcal{M}(\widetilde{\nabla}u_0^\theta)\big)e_\theta+\big(\widetilde{\nabla}u_0^z-\mathcal{M}(\widetilde{\nabla}u_0^z)\big)e_z,$$

and

$$\frac{\partial_\theta}{r}(\boldsymbol{u}_0-\bar{\boldsymbol{u}}_0)=\Big(\frac{\partial_\theta u_0^r}{r}-\frac{u_0^\theta}{r}+\mathcal{M}\big(\frac{u_0^\theta}{r}\big)\Big)e_r+\Big(\frac{\partial_\theta u_0^\theta}{r}+\frac{u_0^r}{r}-\mathcal{M}\big(\frac{u_0^r}{r}\big)\Big)e_\theta+\big(\frac{\partial_\theta u_0^z}{r}\big)e_z.$$

接着，利用引理 2.1 以及记号 $\mathfrak{U}_0=(\partial_\theta u_0^r,\partial_\theta u_0^\theta,\partial_\theta u_0^z)$，我们可以得到

$$\|\boldsymbol{u}_0-\bar{\boldsymbol{u}}_0\|_{L^2}\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}, \tag{3.12}$$

$$\|\nabla(\boldsymbol{u}_0-\bar{\boldsymbol{u}}_0)\|_{L^2}\lesssim\|\widetilde{\nabla}\mathfrak{U}_0\|_{L^2}+\|r^{-1}\mathfrak{U}_0\|_{L^2}=\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}. \tag{3.13}$$

鉴于估计 (3.10)-(3.13) 和小性条件 (1.10)，命题 2.1 的条件 (2.9) 对 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0=\bar{\boldsymbol{u}}_0$成立。然后再次利用命题 2.1，(1.4) 在 $C(\mathbb{R}^+;H^1)\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1\cap\dot{H}^2)$ 中存在唯一的整体强解 $\boldsymbol{u}$，满足

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\|\nabla(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(L^2)}^2\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}^2\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big),\\&\|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(\dot{H}^1)}^2+\|\nabla(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(\dot{H}^1)}^2\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}^2\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big).\end{aligned} \tag{3.14}$$

特别地，结合上述估计、插值不等式和小性条件 (1.10)，可得

$$\|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L_t^\infty(\dot{H}^{\frac12})}^2+\|\nabla(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\|_{L_t^2(\dot{H}^{\frac12})}^2\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^6\|\boldsymbol{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2)\big)<\epsilon,$$

这意味着 $\boldsymbol{u}$ 确实接近一个轴对称解。

步骤 2. $\mathcal{M}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ 的误差估计

步骤 2.1. $\mathcal{M}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ 的方程。首先，将 $\mathcal{M}$ 应用于 (1.4)，得到

$$
\begin{cases}
\partial_t\mathcal{M}u^r+\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^\theta\dfrac{\partial_\theta}{r}+u^z\partial_z)u^r\Big)\\
\qquad\qquad -\big(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\big)\mathcal{M}u^r-\mathcal{M}\Big(\dfrac{|u^\theta|^2}{r}\Big)+\partial_r\mathcal{M}P=0,\\
\partial_t\mathcal{M}u^\theta+\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^\theta\dfrac{\partial_\theta}{r}+u^z\partial_z)u^\theta\Big)-\big(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\big)\mathcal{M}u^\theta+\mathcal{M}\Big(\dfrac{u^ru^\theta}{r}\Big)=0,\\
\partial_t\mathcal{M}u^z+\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^\theta\dfrac{\partial_\theta}{r}+u^z\partial_z)u^z\Big)-\Delta\mathcal{M}u^z+\partial_z\mathcal{M}P=0,\\
\partial_r\mathcal{M}u^r+\dfrac{\mathcal{M}u^r}{r}+\partial_z\mathcal{M}u^z=0,\\
\mathcal{M}\boldsymbol{u}|_{t=0}=\mathcal{M}\boldsymbol{u}_0,
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

这里我们用到了如下事实：对于任意足够光滑的函数 f，有

$$\int_0^{2\pi}\partial_\theta f(r,\theta,z)\,d\theta=0.$$

令 $\boldsymbol{v}$ 定义为$=\mathcal{M}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$，$Q$ 定义为$=\mathcal{M}P-\bar{P}$，结合 (1.6) 和 (3.15)，我们推得

$$
\begin{cases}
\partial_t\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v}+\nabla Q=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\\
\boldsymbol{v}|_{t=0}=0,
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

其中 $\boldsymbol{F}=F^r\boldsymbol{e}_r+F^\theta\boldsymbol{e}_\theta+F^z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{G}=G^r\boldsymbol{e}_r+G^\theta\boldsymbol{e}_\theta+G^z\boldsymbol{e}_z$ 满足

$$F^r=(\bar{u}^r\partial_r+\bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^r-\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^z\partial_z)u^r\Big),\ G^r=\bar{u}^\theta\big(\frac{\partial_\theta\bar{u}^r}{r}-\frac{\bar{u}^\theta}{r}\big)-\mathcal{M}\Big(u^\theta\big(\frac{\partial_\theta u^r}{r}-\frac{u^\theta}{r}\big)\Big),$$

$$F^\theta=(\bar{u}^r\partial_r+\bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^\theta-\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^z\partial_z)u^\theta\Big),\ G^\theta=\bar{u}^\theta\big(\frac{\partial_\theta\bar{u}^\theta}{r}+\frac{\bar{u}^r}{r}\big)-\mathcal{M}\Big(u^\theta\big(\frac{\partial_\theta u^\theta}{r}+\frac{u^r}{r}\big)\Big),$$

$$F^z=(\bar{u}^r\partial_r+\bar{u}^z\partial_z)\bar{u}^z-\mathcal{M}\Big((u^r\partial_r+u^z\partial_z)u^z\Big),\ G^z=-\mathcal{M}\Big(\frac{u^\theta\partial_\theta u^z}{r}\Big).$$

我们指出，这里 $\partial_\theta\bar{u}^r,\partial_\theta\bar{u}^\theta$ 实际上为零，但为了导出对称形式，我们仍将它们写出。这样，我们便可利用以下关键观察来处理这些项：¯对于任意函数 f,g 以及任意轴对称函数 $f,\bar{g}$，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(fg)-\bar{f}\bar{g}&=\mathcal{M}(fg-\bar{f}\bar{g})\\
&=\mathcal{M}\big((f-\bar{f})(g-\bar{g})+(f-\bar{f})\bar{g}+\bar{f}(g-\bar{g})\big)\\
&=\mathcal{M}\big((f-\bar{f})(g-\bar{g})\big)+\bar{g}\mathcal{M}(f-\bar{f})+\bar{f}\mathcal{M}(g-\bar{g}).
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

¯另一方面，注意到 $f,\bar{g}$ 是轴对称的，我们有

$$\partial_\theta g=\partial_\theta(g-\bar{g}),\quad\text{and}\quad\mathcal{M}\big(\bar{f}\partial_\theta(g-\bar{g})\big)=\bar{f}\mathcal{M}\big(\partial_\theta(g-\bar{g})\big)=0.$$

因此，成立的是

$$\mathcal{M}(f\partial_\theta g)=\mathcal{M}\big(f\partial_\theta(g-\bar{g})\big)=\mathcal{M}\big((f-\bar{f})\partial_\theta(g-\bar{g})\big).\tag{3.18}$$

为简化记号，我们引入 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$。显然有】【。

$$\mathcal{M}\boldsymbol{V}=\mathcal{M}\boldsymbol{u}-\mathcal{M}\bar{\boldsymbol{u}}=\mathcal{M}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}.$$

然后利用（3.17），我们有

$$\mathcal{M}(u^r\partial_ru^r)-\bar{u}^r\partial_r\bar{u}^r=\mathcal{M}(V^r\partial_rV^r)+v^r\partial_r\bar{u}^r+\bar{u}^r\partial_rv^r.$$

F^r、 F^θ、 F^z 中的其他项也有类似公式。因此我们可以写成

$$\begin{aligned} F^r &= -\mathcal{M}\Big((V^r\partial_r + V^z\partial_z)V^r\Big) - (v^r\partial_r + v^z\partial_z)\bar{u}^r - (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)v^r, \\ F^\theta &= -\mathcal{M}\Big((V^r\partial_r + V^z\partial_z)V^\theta\Big) - (v^r\partial_r + v^z\partial_z)\bar{u}^\theta - (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)v^\theta, \\ F^z &= -\mathcal{M}\Big((V^r\partial_r + V^z\partial_z)V^z\Big) - (v^r\partial_r + v^z\partial_z)\bar{u}^z - (\bar{u}^r\partial_r + \bar{u}^z\partial_z)v^z. \end{aligned} \tag{3.19}$$

完全沿着同一思路，利用 (3.17)，可得

$$\begin{aligned} G^r &= -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta V^r}{r} - \frac{V^\theta}{r}\big)\Big) - \bar{u}^\theta\mathcal{M}\Big(\frac{\partial_\theta V^r}{r} - \frac{V^\theta}{r}\Big) - \big(\frac{\partial_\theta \bar{u}^r}{r} - \frac{\bar{u}^\theta}{r}\big)\mathcal{M}(V^\theta) \\ &= -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta V^r}{r} - \frac{V^\theta}{r}\big)\Big) + 2\frac{\bar{u}^\theta}{r}v^\theta, \end{aligned}$$

and

$$G^\theta = -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta V^\theta}{r} + \frac{V^r}{r}\big)\Big) - \frac{\bar{u}^\theta}{r}v^r - \frac{\bar{u}^r}{r}v^\theta.$$

注意到

$$\frac{\partial_\theta \boldsymbol{V}}{r} = \big(\frac{\partial_\theta V^r}{r} - \frac{V^\theta}{r}\big)\boldsymbol{e}_r + \big(\frac{\partial_\theta V^\theta}{r} + \frac{V^r}{r}\big)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial_\theta V^z}{r}\boldsymbol{e}_z,$$

因此可以写成

$$G^r = -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta \boldsymbol{V}}{r}\cdot\boldsymbol{e}_r\big)\Big) + 2\frac{\bar{u}^\theta}{r}v^\theta, \quad \text{and} \quad G^\theta = -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta \boldsymbol{V}}{r}\cdot\boldsymbol{e}_\theta\big)\Big) - \frac{\bar{u}^\theta}{r}v^r - \frac{\bar{u}^r}{r}v^\theta. \tag{3.20}$$

另一方面，利用 (3.18)，可得

$$G^z = -\mathcal{M}\Big(V^\theta\frac{\partial_\theta V^z}{r}\Big) = -\mathcal{M}\Big(V^\theta\big(\frac{\partial_\theta \boldsymbol{V}}{r}\cdot\boldsymbol{e}_z\big)\Big). \tag{3.21}$$

步骤 2.2. L^2关于 $\boldsymbol{v}$ 的估计。对 (3.16) 与 $\boldsymbol{v}$ 取 L^2 内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 = (\boldsymbol{F}\,|\,\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{G}\,|\,\boldsymbol{v}). \tag{3.22}$$

由公式 (3.19) 和引理 2.1，可得

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{F}\,|\,\boldsymbol{v})| &\lesssim \|\boldsymbol{V}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^6} + \|\boldsymbol{v}\|_{L^3}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^6} + \|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^6}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^3} \\ &\lesssim \|\boldsymbol{V}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2} + \|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

结合杨氏不等式，可推出

$$|(\boldsymbol{F}\,|\,\boldsymbol{v})| \le \frac{1}{4}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 + C\|\boldsymbol{V}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}^3 + \|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^4\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2. \tag{3.23}$$

另一方面，由 (3.20)、(3.21)、引理 2.1 和引理 2.3，可得

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{G}\,|\,\boldsymbol{v})| &\lesssim \|V^\theta\|_{L^3}\Big\|\frac{\partial_\theta \boldsymbol{V}}{r}\Big\|_{L^2}\|\boldsymbol{v}\|_{L^6} + \|\boldsymbol{v}\|_{L^3}\Big(\Big\|\frac{\bar{u}^r}{r}\Big\|_{L^2} + \Big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\Big\|_{L^2}\Big)\|\boldsymbol{v}\|_{L^6} \\ &\lesssim \|\boldsymbol{V}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

然后利用杨氏不等式，可推得

$$|(\boldsymbol{G}\,|\,\boldsymbol{v})| \le \frac{1}{4}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 + C\|\boldsymbol{V}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}^3 + C\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^4. \tag{3.24}$$

现在将（3.23）和（3.24）代入（3.22），得到

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2 \le C\|\boldsymbol{V}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}^3 + C\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}^2\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}^4.$$

然后利用格朗沃尔不等式以及 $\boldsymbol{v}|_{t=0}=0$ 这一事实，我们得到。回忆起 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$，利用 (3.10)、(3.11) 和 (3.14)，我们得到

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\lesssim\|\boldsymbol{V}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}\|\nabla\boldsymbol{V}\|^2_{L^2_t(L^2)}\exp\big(C\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2_t(L^2)}\big).$$

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|^3_{L^2}\|\mathfrak{U}_0\|_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|^6_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^2})\big). \tag{3.25}$$

结合小性假设 (1.10)，得到

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\lesssim\epsilon\|\mathfrak{U}_0\|^2_{L^2}\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|^6_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^2})\big),$$

这正是（1.12）的第一个不等式。

步骤 2.3。$\dot{H}^1$关于 $\boldsymbol{v}$的估计。将（3.16）式与 $-\Delta\boldsymbol{v}$ 作 L^2 内积，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}+\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}&=-(\boldsymbol{F}\,|\,\Delta\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{G}\,|\,\Delta\boldsymbol{v})\\&\le\big(\|\boldsymbol{F}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{G}\|_{L^2}\big)\|\Delta\boldsymbol{v}\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

鉴于公式 (3.19)-(3.21)，我们可以利用引理 2.1 和 2.3 得到

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{F}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{G}\|_{L^2}\lesssim&\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty}\big(\|\widetilde{\nabla}\boldsymbol{V}\|_{L^2}+\big\|\frac{\partial_\theta\boldsymbol{V}}{r}\big\|_{L^2}\big)\\&+\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty}\big(\|\widetilde{\nabla}\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}+\big\|\frac{\bar{u}^r}{r}\big\|_{L^2}+\big\|\frac{\bar{u}^\theta}{r}\big\|_{L^2}\big)+\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^\infty}\|\widetilde{\nabla}\boldsymbol{v}\|_{L^2}\\\lesssim&\|\boldsymbol{V}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}+\|\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2}\\\lesssim&\|\nabla\boldsymbol{V}\|^{\frac{3}{2}}_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{V}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{v}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}+\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\Delta\bar{\boldsymbol{u}}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^2},\end{aligned}$$

结合杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}&\big(\|\boldsymbol{F}\|_{L^2}+\|\boldsymbol{G}\|_{L^2}\big)\|\Delta\boldsymbol{v}\|_{L^2}\\&\qquad\le\frac{1}{2}\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}+C\|\nabla\boldsymbol{V}\|^3_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{V}\|_{L^2}+C\big(\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^4_{L^2}+\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\|\Delta\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\big)\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

将其代入 (3.26)，可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}+\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2}\lesssim\|\nabla\boldsymbol{V}\|^3_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{V}\|_{L^2}+\big(\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^4_{L^2}+\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\|\Delta\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2}\big)\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^2},$$

接着应用格朗沃尔不等式，并利用 $\boldsymbol{v}|_{t=0}=0$ 这一事实，可推出

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\le&C\|\nabla\boldsymbol{V}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}\|\nabla\boldsymbol{V}\|_{L^2_t(L^2)}\|\Delta\boldsymbol{V}\|_{L^2_t(L^2)}\\&\times\exp\big(C\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|^2_{L^2_t(L^2)}+C\|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2_t(L^2)}\|\Delta\bar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2_t(L^2)}\big).\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$，于是我们可以利用 (3.10)、(3.11) 和 (3.14) 得到

$$\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\lesssim\|\mathfrak{U}_0\|_{L^2}\|\mathfrak{U}_0\|^3_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|^6_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^2})\big). \tag{3.27}$$

结合小量假设 (1.10)，可得

$$\|\nabla\boldsymbol{v}\|^2_{L^\infty_t(L^2)}+\|\Delta\boldsymbol{v}\|^2_{L^2_t(L^2)}\lesssim\epsilon\|\mathfrak{U}_0\|^2_{\dot{H}^1_{\mathrm{axi}}}\exp\big(\exp(C\|\boldsymbol{u}_0\|^6_{L^2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{\dot{H}^2})\big),$$

这正是 (1.12) 中的第二个不等式。

至此，我们已经完成了定理 1.1 的证明。 □

4. The proof of Theorem 1.2

正如我们在第 1.2 小节中提到的，对于由 (1.13) 给出的任意初始数据，定理 1.1 保证存在某个正常数 ε_0，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$，方程 (1.1) 存在唯一全局解 $\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2)$】【。

根据经典结果，纳维–斯托克斯方程的任意强解在正时间后都会变得解析，因此我们可以将该解按 θ 变量展开为傅里叶级数：

$$
\begin{cases}
u^r(t,x) = \big(u^r_{(0),0} + \varepsilon u^r_{(1),0}\big)(t,r,z) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(u^r_{(0),k} + \varepsilon u^r_{(1),k}\big)(t,r,z)\cos k\theta \\
\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(v^r_{(0),k} + \varepsilon v^r_{(1),k}\big)(t,r,z)\sin k\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
u^\theta(t,x) = \big(u^\theta_{(0),0} + \varepsilon u^\theta_{(1),0}\big)(t,r,z) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(u^\theta_{(0),k} + \varepsilon u^\theta_{(1),k}\big)(t,r,z)\cos k\theta \\
\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(v^\theta_{(0),k} + \varepsilon v^\theta_{(1),k}\big)(t,r,z)\sin k\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
u^z(t,x) = \big(u^z_{(0),0} + \varepsilon u^z_{(1),0}\big)(t,r,z) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(u^z_{(0),k} + \varepsilon u^z_{(1),k}\big)(t,r,z)\cos k\theta \\
\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \big(v^z_{(0),k} + \varepsilon v^z_{(1),k}\big)(t,r,z)\sin k\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{cases} \tag{4.1}
$$

相应地，我们可以将压力 $P = (-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ 展开为：

$$
\begin{aligned}
P(t,x) = &\big(P_{(0),0} + \varepsilon P_{(1),0}\big)(t,r,z) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(P_{(0),k} + \varepsilon P_{(1),k}\big)(t,r,z)\cos k\theta \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \big(Q_{(0),k} + \varepsilon Q_{(1),k}\big)(t,r,z)\sin k\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

下文将给出展开式 (4.1) 中各剖面的显式公式，并验证该展开式在 $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2\cap L^\infty)$ 意义下的有效性。为简化记号，我们用$\boldsymbol{u}_{(i)}$ 表示 $\boldsymbol{u}$展开式中的 ε^i 阶项，即

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{u}_{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \boldsymbol{u}_{(i)} = \boldsymbol{u}_{(i),0} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\boldsymbol{u}_{(i),k}\cos k\theta + \boldsymbol{v}_{(i),k}\sin k\theta\Big), \tag{4.3}
$$

且$\boldsymbol{u}_{(i)}$ 不依赖于 ε。

4.1. ε^0 阶项。我们作如下假设 1：$\boldsymbol{u}_{(0)} = u^r_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_r + u^z_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_z$，其中 $u^r_{(0),\ 0}$ 且 $u^z_{(0),\ 0}$ 满足以下无旋轴对称纳维–斯托克斯方程：

$$
\begin{cases}
\partial_t u^r_{(0),0} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)u^r_{(0),0} - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2})u^r_{(0),0} + \partial_r P_{(0),0} = 0,\\
\partial_t u^z_{(0),0} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)u^z_{(0),0} - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r)u^z_{(0),0} + \partial_z P_{(0),0} = 0,\\
\partial_r u^r_{(0),0} + \dfrac{1}{r}u^r_{(0),0} + \partial_z u^z_{(0),0} = 0,\\
u^r_{(0),0}|_{t=0} = a^r_0, \quad u^z_{(0),0}|_{t=0} = a^z_0.
\end{cases} \tag{4.4}
$$

为了验证这一试探形式，我们首先由命题 3.1 推导出、】【

$$
\|\boldsymbol{u}_{(0)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;H^1)} + \|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;H^1)} \le C_0. \tag{4.5}
$$

这里及下文中，C_0 表示一个仅取决于 $\boldsymbol{u}(0,x)$的剖面范数的正常数，其中这些剖面范数出现在（1.14）中，且该常数在每次出现时可能不同。

另一方面，根据初始数据的表达式 (1.13)，我们有

$$
\boldsymbol{u}|_{t=0} - \boldsymbol{u}_{(0)}|_{t=0} = \varepsilon a^\theta_0(r,z)\boldsymbol{e}_\theta + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\boldsymbol{a}_k(r,z)\cos(k\theta) + \boldsymbol{b}_k(r,z)\sin(k\theta)\Big).
$$

利用帕塞瓦尔恒等式，可得

$$
\big\|\boldsymbol{u}|_{t=0} - \boldsymbol{u}_{(0)}|_{t=0}\big\|_{H^1} \le C_0\varepsilon. \tag{4.6}
$$

然后 for 当 r 足够小时 $\varepsilon > 0$，由 (4.5)、(4.6) 和命题 2.1 可得 n

$$
\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;H^1\cap L^\infty)} + \|\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{(0)})\|_{L^2(\mathbb{R}^+;H^1)} \le C_0\varepsilon. \tag{4.7}
$$

注意，方程组 (4.4) 不依赖于 ε，因此其解 ($u^r_{(0),\ 0}$,$u^z_{(0),\ 0}$) 也不依赖于 ε。这一点与估计 (4.7) 一起保证了我们的假设 1 有效，即 $u^r_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_r + u^z_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_z$ 确实是 $\boldsymbol{u}$ 展开式中的 ε^0 阶项。

特别地，我们已经证明 $u^\theta_{(0),\ 0}$ 消失了，并且对于每个 $k \in \mathbb{N}$，第 k 个傅里叶系数不含 ε^0 阶项，这与初始数据 (1.13) 相同。

4.2. 欧几里得坐标中的 ε^1 阶项的推导。让我们暂时回到欧几里得坐标，并将 $\boldsymbol{u}_{(1)}$ 作为一个整体来考察。

我们作如下假设 2：$\boldsymbol{u}_{(1)}$ 是扰动的纳维–斯托克斯方程组在$\boldsymbol{u}_{(0)}$附近线性化后的一个解，具体而言，

$$
\begin{cases}
\partial_t\boldsymbol{u}_{(1)} + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)} + \boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(0)} - \Delta\boldsymbol{u}_{(1)} = -\nabla P_{(1)},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{(1)} = 0,\\
\boldsymbol{u}_{(1)}|_{t=0} = a^\theta_0\boldsymbol{e}_\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\boldsymbol{a}_k\cos k\theta + \boldsymbol{b}_k\sin k\theta\Big).
\end{cases} \tag{4.8}
$$

为验证这一试探形式，我们首先对 (4.8) 取 L^2 与 $\boldsymbol{u}_{(1)} - \Delta\boldsymbol{u}_{(1)}$的内积，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|^2_{H^1} + \|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|^2_{H^1} &\le \big|\big(\boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)} + \boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\big)\,\big|\,\boldsymbol{u}_{(1)} - \Delta\boldsymbol{u}_{(1)}\big)\big|\\
&\le \|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^6} + \big(\|\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^6}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^3} + \|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}\big)\|\Delta\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}\\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta\boldsymbol{u}_{(1)}\|^2_{L^2} + C\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|^2_{H^1}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^4_{L^2}.
\end{aligned}
$$

两边减去 $\frac{1}{2}\|\Delta \boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^2$，然后应用格朗沃尔不等式，得到 (4.9
)

$$\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^\infty(H^1)}^2+\|\nabla \boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^2(H^1)}^2\le \|\boldsymbol{u}_{(1)}|_{t=0}\|_{H^1}^2\exp\big(C\|\nabla \boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2\|\nabla \boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L_t^2(L^2)}^2\big)\le C_0.$$

沿用与（2.18）类似的推导，我们得出

$$\|\nabla \boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^4)}\lesssim \|\operatorname{curl}\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^4)}\le C_0. \tag{4.10}$$

另一方面，考虑满足下式的 $\boldsymbol{R}_{(1)}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{(0)}-\varepsilon\boldsymbol{u}_{(1)}$。

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{R}_{(1)}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{R}_{(1)}+\boldsymbol{R}_{(1)}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}_{(0)}+\varepsilon\boldsymbol{u}_{(1)})+\varepsilon^2\boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}-\Delta\boldsymbol{R}_{(1)}=-\nabla\Pi_{(1)},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{R}_{(1)}=0,\\ \boldsymbol{R}_{(1)}|_{t=0}=0,\end{cases} \tag{4.11}$$

其中 $\Pi_{(1)}$ 可通过对 (4.11 中的第一个方程取散度算子得到。).

下面，我们将推导 $\boldsymbol{R}_{(1)}$ 的 L^2、 $\dot H^1$ 和 $\dot W^{1,4}$ 估计。注意，如果 (4.11) 中不存在外力项 $\varepsilon^2\boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}$，那么这类方程组已经在命题 2.1 中得到研究。因此，这里我们只关注该外力项的估计。

首先，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^2\big(\boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\big)\boldsymbol{R}_{(1)}\,dx\Big|&\le C\varepsilon^2\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^3}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}\|\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L^6}\\&\le\frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L^2}^2+C\varepsilon^4\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^3\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2},\end{aligned}$$

并且根据界 (4.9)，有不中返

$$\varepsilon^4\int_0^t\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^3\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}\,dt'\le\varepsilon^4\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^2(L^2)}^2\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^2)}\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^2)}\le C_0\varepsilon^4.$$

然后，采用与命题 2.1 的证明类似的步骤可得

$$\|\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^2)}^2+\|\nabla\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^2(L^2)}^2\le C_0\varepsilon^4. \tag{4.12}$$

同样地，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^2\big(\boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\big)\cdot\Delta\boldsymbol{R}_{(1)}\,dx\Big|&\le\varepsilon^2\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^\infty}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}\|\Delta\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L^2}\\&\le\frac{1}{2}\|\Delta\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L^2}^2+\varepsilon^4\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^3\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{\dot H^1},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^2\operatorname{curl}\big(\boldsymbol{u}_{(1)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\big)\cdot|\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}|^2\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}\,dx\Big|\\&\le\varepsilon^2\|\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^6}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^4}\|\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L^{12}}\big(\big\||\nabla|\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}|^2\big\|_{L^2}+\big\||\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}|\cdot\nabla\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}\big\|_{L^2}\big)\\&\le\frac{1}{4}\big(\big\||\nabla|\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}|^2\big\|_{L^2}^2+\big\||\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}|\cdot\nabla\operatorname{curl}\boldsymbol{R}_{(1)}\big\|_{L^2}^2\big)+\varepsilon^8\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^4\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^4}^4.\end{aligned}$$

根据估计（4.9）和（4.10），有以下结论

$$\varepsilon^4\int_0^t\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^3\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{\dot H^1}\,dt'\le C_0\varepsilon^4,\quad\text{and}\quad\varepsilon^8\int_0^t\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^2}^4\|\nabla\boldsymbol{u}_{(1)}\|_{L^4}^4\,dt'\le C_0\varepsilon^8.$$

然后，采用与命题 2.1 的证明类似的过程可得

$$\|\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^\infty(\dot H^1)}^2+\|\nabla\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^2(\dot H^1)}^2\le C_0\varepsilon^4,\quad\text{and}\quad\|\nabla\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^\infty(L^4)}^4\le C_0\varepsilon^8. \tag{4.13}$$

现在，根据估计 (4.12) 和 (4.13)，以及插值不等式$_1$ $_2\|f\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\|\nabla f\|_{L^4}^{\frac{3}{2}}$，我们得到

$$\|\boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^\infty(H^1\cap L^\infty)}^2 + \|\nabla \boldsymbol{R}_{(1)}\|_{L_t^2(H^1)}^2 \leq C_0\varepsilon^4. \tag{4.14}$$

鉴于余项 $\boldsymbol{R}_{(1)}$的估计 (4.14)，以及由 (4.8) 确定的 $\boldsymbol{u}_{(1)}$ 不依赖于 ε 这一事实，我们验证了假设 2。

注 4.1. 完全沿用同样的思路，我们可以通过归纳法证明，对于任意 $n \geq 2$，$\boldsymbol{u}_{(n)}$ 是以下线性化系统的一个解:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u}_{(n)} + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(n)} + \boldsymbol{u}_{(n)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(0)} - \Delta\boldsymbol{u}_{(n)} + \nabla P_{(n)} = -\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{u}_{(i)}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{(n-i)}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}_{(n)} = 0, \\ \boldsymbol{u}_{(n)}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

并且余项 $\boldsymbol{R}_{(n)} \overset{def}{=} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{(0)} - \varepsilon\boldsymbol{u}_{(1)} - \cdots - \varepsilon^n\boldsymbol{u}_{(n)}$ 满足

$$\|\boldsymbol{R}_{(n)}\|_{L_t^\infty(H^1\cap L^\infty)} \leq C_0\varepsilon^{n+1}.$$

4.3. 对 $u_{(1),\ 0}^r = u_{(1),\ 0}^z = 0$ 的验证。注意到 $\boldsymbol{u}_{(0)} = u_{(0),\ 0}^r\boldsymbol{e}_r + u_{(0),\ 0}^z\boldsymbol{e}_z$ 是无旋的轴对称形式，由 (4.8) 不难推出 $\big(u_{(1)、\ 0}^r,\ u_{(1),\ 0}^z\big)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u_{(1),0}^r + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla u_{(1),0}^r + \widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\widetilde{\nabla} u_{(0),0}^r - (\Delta - \frac{1}{r^2})u_{(1),0}^r + \partial_r P_{(1),0} = 0, \\ \partial_t u_{(1),0}^z + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla u_{(1),0}^z + \widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\widetilde{\nabla} u_{(0),0}^z - \Delta u_{(1),0}^z + \partial_z P_{(1),0} = 0, \\ \partial_r u_{(1),0}^r + \dfrac{1}{r}u_{(1),0}^r + \partial_z u_{(1),0}^z = 0, \\ u_{(1),0}^r|_{t=0} = u_{(1),0}^z|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4.15}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),\ 0\ \mathrm{def}}= u_{(1),\ 0}^r\boldsymbol{e}_r + u_{(1),\ 0}^z\boldsymbol{e}_z$，这里的无散条件由下式得到

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{u}_{(1),0} =& \partial_r u_{(1),0}^r + \frac{u_{(1),0}^r}{r} + \partial_z u_{(1),0}^z \\ =& \mathcal{M}\Big(\partial_r u_{(1)}^r + \frac{u_{(1)}^r}{r} + \frac{\partial_\theta u_{(1)}^\theta}{r} + \partial_z u_{(1)}^z\Big) = \mathcal{M}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{(1)}) = 0. \end{aligned}$$

将 (4.15) 与 L^2 作内积，取 $\big(u_{(1),\ 0}^r,\ u_{(1),\ 0}^z\big)$，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2 = -\big(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\widetilde{\nabla}u_{(0),0}^r \,|\, u_{(1),0}^r\big) - \big(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\widetilde{\nabla}u_{(0),0}^z \,|\, u_{(1),0}^z\big), \tag{4.16}$$

其中我们利用了以下事实：$\frac{\partial_\theta}{r}P_{(1),\ 0}(t,r,z) = 0$，以及下面的等式

$$-\big(\widetilde{\nabla}P_{(1),0}\,|\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\big) = -\big(\nabla P_{(1),0}\,|\,\boldsymbol{u}_{(1),0}\big) = \big(P_{(1),0}\,|\,\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{(1),0}\big) = 0.$$

对于（4.16）右端的各项，我们有

$$\begin{aligned} \big|\big(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\nabla u_{(0),0}^r\,|\,u_{(1),0}^r\big)\big| + \big|\big(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\cdot\nabla u_{(0),0}^z\,|\,u_{(1),0}^z\big)\big| &\leq C\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^4}^2 \\ &\leq C\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2 + C\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

因此，我们推得

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2+\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2\le C\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}\|_{L^2}^2\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}^4.$$

然后应用格朗沃尔不等式，并结合初始时 $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}|_{t=0}=0$ 这一事实，我们推得 $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(1),0}$ 实际上始终为零。定理 1.2 的证明至此完成。

5. The proof of Theorem 1.3

由于此处考虑的初始数据 (1.19) 是 (1.13) 的一个特例，定理 1.1 保证对于充分小的 ε，存在唯一全局解 $\boldsymbol{u}\in C(\mathbb{R}_+;H^1)\cap L^2(\mathbb{R}_+;\dot H^1\cap\dot H^2)$。并且该解可展开为 (1.18)。因此，下面的目标是证明对于所有时间，u^r 和 u^z 在 θ中保持偶性，而 u^θ 在 θ 中保持奇性，即

$$\boldsymbol{u}_{(1),0}=0,\quad u^\theta_{(j),0}=0,\quad v^r_{(j),k}=u^\theta_{(j),k}=v^z_{(j),k}=0,\quad\forall\, j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}.$$

5.1. 对 $\boldsymbol{u}_{(1),0}=\boldsymbol{0}$ 的验证。对于由 (1.19) 给出的初始数据 $\boldsymbol{u}(0,x)$，我们有

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{u}|_{t=0})=a^r_0(r,z)\boldsymbol{e}_r+a^z_0(r,z)\boldsymbol{e}_z.$$

因此，由式 (1.6) 定义的量 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 恰好是 $u^r_{(0),\,0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(0),\,0}\boldsymbol{e}_z$，它满足此处情形下的无旋转轴对称纳维–斯托克斯方程（4.4）。

另一方面，注意到 $u^\theta|_{t=0}\sim\varepsilon$ 和

$$\partial_\theta u^r|_{t=0}=-\varepsilon\sum_{k=1}^\infty ka^r_k\sin k\theta,\quad \partial_\theta u^\theta|_{t=0}=\varepsilon\sum_{k=1}^\infty kb^\theta_k\cos k\theta,\quad \partial_\theta u^z|_{t=0}=-\varepsilon\sum_{k=1}^\infty ka^z_k\sin k\theta,$$

通过在定理 1.1 中使用精细估计 (1.12)，我们可以得到

$$\|\mathcal{M}(\boldsymbol{u})-u^r_{(0),0}\boldsymbol{e}_r-u^z_{(0),0}\boldsymbol{e}_z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)}\le C_0\varepsilon^2.$$

这与以下事实一起表明，$\mathcal{M}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}_{(0),0}+\varepsilon\boldsymbol{u}_{(1),0}+\varepsilon^2\boldsymbol{u}_{(2),0}+\cdots$ 意味着 s

$$\boldsymbol{u}_{(0),0}=u^r_{(0),0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(0),0}\boldsymbol{e}_z,\quad\text{and}\quad\boldsymbol{u}_{(1),0}=0. \tag{5.1}$$

5.2. 对 $v^r_{(1),\,k}=u^\theta_{(1),\,k}=v^z_{(1),\,k}=0$ 的验证。根据 (5.1)，我们可以写出

$$\boldsymbol{u}_{(1)}=\sum_{k=1}^\infty\Big(\boldsymbol{u}_{(1),k}\cos k\theta+\boldsymbol{v}_{(1),k}\sin k\theta\Big), \tag{5.2}$$

及相应的压力

$$P_{(1)}=\sum_{k=1}^\infty\Big(P_{(1),k}\cos k\theta+Q_{(1),k}\sin k\theta\Big).$$

并且根据第4.2小节的证明，我们知道 $(\boldsymbol{u}_{(1)},P_{(1)})$ 满足 (4.8)。

接下来，关键是要注意到 $\boldsymbol{u}_{(0)}$ 是无旋轴对称的，这使得 (4.8) 中 $\boldsymbol{u}_{(1)}$ 各分量之间的耦合不那么强。事实上，按照基 $\{\cos\ k\theta、\sin\ k\theta\colon\ k\in\mathbb{N}\}$ 重写 (4.8) 后，不难发现我们可以将 $\boldsymbol{u}_{(1)}$ 和 $P_{(1)}$ 分别分解为两部分：$\boldsymbol{u}'_{(1)}+\boldsymbol{u}''_{(1)}$ 和$P'_{(1)}+P''_{(1)}$，其中

$$\boldsymbol{u}'_{(1)}\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^\infty\Big(u^r_{(1),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_r+v^\theta_{(1),k}\sin k\theta\boldsymbol{e}_\theta+u^z_{(1),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_z\Big),\quad P'_{(1)}\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^\infty P_{(1),k}\cos k\theta,$$

and

$$\boldsymbol{u}''_{(1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\Big(v^r_{(1),k}\sin k\theta \boldsymbol{e}_r + u^\theta_{(1),k}\cos k\theta \boldsymbol{e}_\theta + v^z_{(1),k}\sin k\theta \boldsymbol{e}_z\Big), \quad P''_{(1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{(1),k}\sin k\theta,$$

使得 $\boldsymbol{u}'_{(1)}$ 和 $P'_{(1)}$ 满足以下封闭方程组：

$$\begin{cases} \partial_t u^r_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)u^r_{(1),k} + (u^r_{(1),k}\partial_r + u^z_{(1),k}\partial_z)u^r_{(0),0} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2})u^r_{(1),k} + 2k\frac{v^\theta_{(1),k}}{r^2} + \partial_r P_{(1),k} = 0, \\ \partial_t v^\theta_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)v^\theta_{(1),k} + \dfrac{u^r_{(0),0}v^\theta_{(1),k}}{r} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2})v^\theta_{(1),k} + 2k\frac{u^r_{(1),k}}{r^2} - \frac{k}{r}P_{(1),k} = 0, \\ \partial_t u^z_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)u^z_{(1),k} + (u^r_{(1),k}\partial_r + u^z_{(1),k}\partial_z)u^z_{(0),0} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{k^2}{r^2})u^z_{(1),k} + \partial_z P_{(1),k} = 0, \\ \partial_r u^r_{(1),k} + \dfrac{1}{r}u^r_{(1),k} + \partial_z u^z_{(1),k} + \dfrac{k}{r}v^\theta_{(1),k} = 0, \\ u^r_{(1),k}|_{t=0} = a^r_k, \quad v^\theta_{(1),k}|_{t=0} = b^\theta_k, \quad u^z_{(1),k}|_{t=0} = a^z_k, \end{cases} \tag{5.3}$$

而 $\boldsymbol{u}''_{(1)}$ 和 $P''_{(1)}$ 满足以下封闭方程组：

$$\begin{cases} \partial_t v^r_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)v^r_{(1),k} + (v^r_{(1),k}\partial_r + v^z_{(1),k}\partial_z)u^r_{(0),0} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2})v^r_{(1),k} - 2k\frac{u^\theta_{(1),k}}{r^2} + \partial_r Q_{(1),k} = 0, \\ \partial_t u^\theta_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)u^\theta_{(1),k} + \dfrac{u^r_{(0),0}u^\theta_{(1),k}}{r} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2})u^\theta_{(1),k} - 2k\frac{v^r_{(1),k}}{r^2} + \frac{k}{r}Q_{(1),k} = 0, \\ \partial_t v^z_{(1),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z)v^z_{(1),k} + (v^r_{(1),k}\partial_r + v^z_{(1),k}\partial_z)u^z_{(0),0} \\ \qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{k^2}{r^2})v^z_{(1),k} + \partial_z Q_{(1),k} = 0, \\ \partial_r v^r_{(1),k} + \dfrac{1}{r}v^r_{(1),k} + \partial_z v^z_{(1),k} - \dfrac{k}{r}u^\theta_{(1),k} = 0, \\ v^r_{(1),k}|_{t=0} = 0, \quad u^\theta_{(1),k}|_{t=0} = 0, \quad v^z_{(1),k}|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

然后，对（5.4）与 $(v^r_{(1),\,k},\ u^\theta_{(1),\,k},\ v^z_{(1),\,k})$ 取 L^2 内积，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(v^r_{(1),k}, u^\theta_{(1),k}, v^z_{(1),k})\|^2_{L^2} + \|\nabla(v^r_{(1),k}, u^\theta_{(1),k}, v^z_{(1),k})\|^2_{L^2} + k^2\Big\|\frac{v^z_{(1),k}}{r}\Big\|^2_{L^2} \\ &\quad + (1+k^2)\Big(\Big\|\frac{v^r_{(1),k}}{r}\Big\|^2_{L^2} + \Big\|\frac{u^\theta_{(1),k}}{r}\Big\|^2_{L^2}\Big) = \int_{\mathbb{R}^3}\Big(4k\frac{u^\theta_{(1),k}v^r_{(1),k}}{r^2} - \frac{u^r_{(0),0}|u^\theta_{(1),k}|^2}{r} \\ &\qquad - (v^r_{(1),k}\partial_r + v^z_{(1),k}\partial_z)u^r_{(0),0}\cdot v^r_{(1),k} - (v^r_{(1),k}\partial_r + v^z_{(1),k}\partial_z)u^z_{(0),0}\cdot v^z_{(1),k}\Big)\,dx. \end{aligned} \tag{5.5}$$

值得一提的是，与偏微分方程估计中的大多数情形不同，这个不等式中的常数非常重要。具体而言，我们有

$$4k\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^\theta_{(1),k}v^r_{(1),k}}{r^2}\,dx\Big|\le 4k\big\|\frac{v^r_{(1),k}}{r}\big\|_{L^2}\big\|\frac{u^\theta_{(1),k}}{r}\big\|_{L^2}$$
$$\le 2k\big(\big\|\frac{v^r_{(1),k}}{r}\big\|^2_{L^2}+\big\|\frac{u^\theta_{(1),k}}{r}\big\|^2_{L^2}\big)\le(1+k^2)\big(\big\|\frac{v^r_{(1),k}}{r}\big\|^2_{L^2}+\big\|\frac{u^\theta_{(1),k}}{r}\big\|^2_{L^2}\big).$$

另一方面，利用 Sobolev嵌入定理和杨氏不等式，可得

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\Big((v^r_{(1),k}\partial_r+v^z_{(1),k}\partial_z)u^r_{(0),0}\cdot v^r_{(1),k}+\frac{u^r_{(0),0}|u^\theta_{(1),k}|^2}{r}+(v^r_{(1),k}\partial_r+v^z_{(1),k}\partial_z)u^z_{(0),0}\cdot v^z_{(1),k}\Big)\,dx\Big|$$
$$\le\big(\|v^r_{(1),k}\|^2_{L^4}+\|v^z_{(1),k}\|^2_{L^4}\big)\big(\|\widetilde{\nabla}u^r_{(0),0}\|_{L^2}+\|\widetilde{\nabla}u^z_{(0),0}\|_{L^2}\big)+\|u^\theta_{(1),k}\|^2_{L^4}\big\|\frac{u^r_{(0),0}}{r}\big\|_{L^2}$$
$$\le\frac12\|\nabla(v^r_{(1),k},u^\theta_{(1),k},v^z_{(1),k})\|^2_{L^2}+C\|(v^r_{(1),k},u^\theta_{(1),k},v^z_{(1),k})\|^2_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^4_{L^2},$$

其中，在最后一步中，我们利用了 $\boldsymbol{u}_{(0)}=u^r_{(0),0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(0),0}\boldsymbol{e}_z$ 这一事实，因此

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|_{L^2}\sim\|\widetilde{\nabla}u^r_{(0),0}\|_{L^2}+\|\widetilde{\nabla}u^z_{(0),0}\|_{L^2}+\big\|\frac{u^r_{(0),0}}{r}\big\|_{L^2}.$$

将上述估计代入 (5.5)，可得

$$\frac{d}{dt}\|(v^r_{(1),k},u^\theta_{(1),k},v^z_{(1),k})\|^2_{L^2}+\|\nabla(v^r_{(1),k},u^\theta_{(1),k},v^z_{(1),k})\|^2_{L^2}\le C\|(v^r_{(1),k},u^\theta_{(1),k},v^z_{(1),k})\|^2_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^4_{L^2}.$$

接着，应用格朗沃尔不等式，并利用以下事实

$$\int_0^\infty\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}(t')\|^4_{L^2}\,dt'\le\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)}\|\nabla\boldsymbol{u}_{(0)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2)}<\infty,$$

由 (4.5) 可知，该条件成立；又因为初始时 $v^r_{(1),k}|_{t=0}=u^\theta_{(1),k}|_{t=0}=v^z_{(1),k}|_{t=0}=0$，我们得到

$$v^r_{(1),k}=u^\theta_{(1),k}=v^z_{(1),k}=0,\quad\forall\,t>0.$$

换言之，我们可以进一步将 (5.2) 中 $\boldsymbol{u}_{(1)}$ 的展开式化简为

$$\boldsymbol{u}_{(1)}=\sum_{k=1}^\infty\Big(u^r_{(1),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_r+v^\theta_{(1),k}\sin k\theta\boldsymbol{e}_\theta+u^z_{(1),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_z\Big),\tag{5.6}$$

其中，$u^r_{(1)、k}$、$v^\theta_{(1)、k}$ 和 $u^z_{(1)、k}$ 由 (5.3) 确定。

5.3. 对任意 $j\in\mathbb{N}$、$k\in\mathbb{N}$，验证 $u^\theta_{(j)、0}=v^r_{(j)、k}=u^\theta_{(j)、k}=v^z_{(j)、k}=0$。我们将用归纳法证明这一结果。假设对任意 $n\ge2$ 和任意 $1\le j\le n-1$,

$$u^\theta_{(j),0}=v^r_{(j),k}=u^\theta_{(j),k}=v^z_{(j),k}=0,\quad\forall\,k\in\mathbb{N},$$

也就是说，$\boldsymbol{u}_{(j)}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{u}_{(j)}=u^r_{(j),0}\boldsymbol{e}_r+u^z_{(j),0}\boldsymbol{e}_z+\sum_{k=1}^\infty\Big(u^r_{(j),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_r+v^\theta_{(j),k}\sin k\theta\boldsymbol{e}_\theta+u^z_{(j),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_z\Big),\tag{5.7}$$

那么，我们的目标是证明 $\boldsymbol{u}_{(n)}$ 也可以写成这种形式，即

$$u^\theta_{(n),0}=v^r_{(n),k}=u^\theta_{(n),k}=v^z_{(n),k}=0,\quad\forall\,k\in\mathbb{N},$$

事实上，由注 4.1 可知，在欧几里得坐标中，$\boldsymbol{u}_{(n)}$ 满足

$$
\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{u}_{(n)} + \boldsymbol{u}_{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n)} + \boldsymbol{u}_{(n)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(0)} - \Delta \boldsymbol{u}_{(n)} + \nabla P_{(n)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{(n)} = 0, \\
\boldsymbol{u}_{(n)}|_{t=0} = 0.
\end{cases} \tag{5.8}
$$

该方程组具有零初始数据。然而，由于外力项 $-\sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}$ 的作用，解 $\boldsymbol{u}_{(n)}$ 通常并不为零。

注意到 $\boldsymbol{u}_{(j)}$ 对于 $1 \le j \le n-1$ 具有形式 (5.7)，我们可以得到

(5.9)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)} = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \Big\{ & (u^r_{(j),k_1} \partial_r + u^z_{(j),k_1} \partial_z)\big(u^r_{(n-j),k_2} \boldsymbol{e}_r + u^z_{(n-j),k_2} \boldsymbol{e}_z\big) \cdot \cos k_1\theta \cdot \cos k_2\theta \\
& + (u^r_{(j),k_1} \partial_r + u^z_{(j),k} \partial_z) v^\theta_{(n-j),k_2} \boldsymbol{e}_\theta \cdot \cos k_1\theta \cdot \sin k_2\theta \\
& + \frac{v^\theta_{(j),k_1} u^r_{(n-j),k_2}}{r}\big(-\boldsymbol{e}_r k_2 \sin k_1\theta \cdot \sin k_2\theta + \boldsymbol{e}_\theta \sin k_1\theta \cdot \cos k_2\theta\big) \\
& + \frac{v^\theta_{(j),k_1} v^\theta_{(n-j),k_2}}{r}\big(\boldsymbol{e}_\theta k_2 \sin k_1\theta \cdot \cos k_2\theta - \boldsymbol{e}_r \sin k_1\theta \cdot \sin k_2\theta\big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

特别地，我们可以看到 $(\boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}) \cdot \boldsymbol{e}_r$ 和 $(\boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}) \cdot \boldsymbol{e}_z$ 关于 θ 是偶函数，而 $(\boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}) \cdot \boldsymbol{e}_\theta$ 关于 θ 是奇函数。因此，对于 $k \ge 1$，这个外力 $-\sum_{j=1}^{n-1} \boldsymbol{u}_{(j)} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{(n-j)}$ 不会出现在 $(v^r_{(n),\,k}, u^\theta_{(n),\,k}, v^z_{(n),\,k})$ 的方程中。因此，$(v^r_{(n),\,k}, u^\theta_{(n),\,k}, v^z_{(n),\,k})$ 的方程与 $(v^r_{(1),\,k}, u^\theta_{(1),\,k}, v^z_{(1),\,k})$ 的方程完全相同（见 (5.4)），如下所述：

$$
\begin{cases}
\partial_t v^r_{(n),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z) v^r_{(n),k} + (v^r_{(n),k}\partial_r + v^z_{(n),k}\partial_z) u^r_{(0),0} \\
\qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2}) v^r_{(n),k} - 2k\frac{u^\theta_{(n),k}}{r^2} + \partial_r Q_{(n),k} = 0, \\
\partial_t u^\theta_{(n),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z) u^\theta_{(n),k} + \dfrac{u^r_{(0),0} u^\theta_{(n),k}}{r} \\
\qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1+k^2}{r^2}) u^\theta_{(n),k} - 2k\frac{v^r_{(n),k}}{r^2} + \frac{k}{r} Q_{(n),k} = 0, \\
\partial_t v^z_{(n),k} + (u^r_{(0),0}\partial_r + u^z_{(0),0}\partial_z) v^z_{(n),k} + (v^r_{(n),k}\partial_r + v^z_{(n),k}\partial_z) u^z_{(0),0} \\
\qquad\qquad - (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{k^2}{r^2}) v^z_{(n),k} + \partial_z Q_{(n),k} = 0, \\
\partial_r v^r_{(n),k} + \dfrac{1}{r} v^r_{(n),k} + \partial_z v^z_{(n),k} - \dfrac{k}{r} u^\theta_{(n),k} = 0, \\
v^r_{(n),k}|_{t=0} = 0, \quad u^\theta_{(n),k}|_{t=0} = 0, \quad v^z_{(n),k}|_{t=0} = 0.
\end{cases}
$$

然后，按照我们在第5.2小节末尾所采用的相同步骤，可以证明对于$k \ge 1$，$(v^r_{(n),\,k},\ u^\theta_{(n),\,k},\ v^z_{(n),\,k})$ 确实在所有时刻都恒为零，即

$$
v^r_{(n),k} = u^\theta_{(n),k} = v^z_{(n),k} = 0, \quad \forall\ t > 0.
$$

现在我们转而研究第 0 阶傅里叶系数 $u^r_{(n),0}\boldsymbol{e}_r + u^\theta_{(n),0}\boldsymbol{e}_\theta + u^z_{(n),0}\boldsymbol{e}_z$。根据表达式 (5.9) 以及以下恒等式

$$
\begin{aligned}
2\cos k_1\theta\cdot\cos k_2\theta &= \cos(k_1+k_2)\theta + \cos(k_1-k_2)\theta,\\
2\sin k_1\theta\cdot\sin k_2\theta &= \cos(k_1-k_2)\theta - \cos(k_1+k_2)\theta,\\
2\sin k_1\theta\cdot\cos k_2\theta &= \sin(k_1+k_2)\theta + \sin(k_1-k_2)\theta,
\end{aligned}
$$

并且由于 $\boldsymbol{u}_{(0)} = u^r_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_r + u^z_{(0),\ 0}\boldsymbol{e}_z$ 是无旋轴对称的，我们可以得到

$$
\partial_t u^\theta_{(n),0} + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla u^\theta_{(n),0} + \frac{u^r_{(0),0}u^\theta_{(n),0}}{r} - (\Delta - \frac{1}{r^2})u^\theta_{(n),0} = 0, \quad u^\theta_{(n),0}|_{t=0} = 0, \tag{5.10}
$$

and

$$
\begin{cases}
\partial_t u^r_{(n),0} + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla u^r_{(n),0} + (u^r_{(n),0}\partial_r + u^z_{(n),0}\partial_z)u^r_{(0),0}\\
\qquad\qquad - (\Delta - \frac{1}{r^2})u^r_{(n),0} + \partial_r P_{(n),0} = F^r_{(n),0},\\
\partial_t u^z_{(n),0} + \boldsymbol{u}_{(0)}\cdot\nabla u^z_{(n),0} + (u^r_{(n),0}\partial_r + u^z_{(n),0}\partial_z)u^z_{(0),0} - \Delta u^z_{(n),0} + \partial_z P_{(n),0} = F^z_{(n),0},\\
\partial_r u^r_{(n),0} + \dfrac{1}{r}u^r_{(n),0} + \partial_z u^z_{(n),0} = 0,\\
u^r_{(n),0}|_{t=0} = 0, \quad u^z_{(n),0}|_{t=0} = 0,
\end{cases} \tag{5.11}
$$

其中，$F^r{}_{(n)0}$, $F^z_{(n),\ 0}$ 是由下式给出的外力项

$$
F^r_{(n),0} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\big(u^r_{(j),k}\partial_r + u^z_{(j),k}\partial_z\big)u^r_{(n-j),k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{v^\theta_{(j),k}v^\theta_{(n-j),k}}{r},
$$

$$
F^z_{(n),0} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\big(u^r_{(j),k}\partial_r + u^z_{(j),k}\partial_z\big)u^z_{(n-j),k}.
$$

特别是，这反映了这样一个事实：如果两个剖面具有相同的频率，那么它们的乘积会对 θ 变量中 $\boldsymbol{u}$ 的平均值产生贡献。

将 (5.10) 与 $u^\theta_{(n),\ 0}$ 作 L^2 内积，容易得到

$$
u^\theta_{(n),0} = 0, \quad \forall\ t > 0.
$$

因此，$\boldsymbol{u}_{(n)}$ 也可以写成以下形式：

$$
\boldsymbol{u}_{(n)} = u^r_{(n),0}\boldsymbol{e}_r + u^z_{(n),0}\boldsymbol{e}_z + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(u^r_{(n),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_r + v^\theta_{(n),k}\sin k\theta\boldsymbol{e}_\theta + u^z_{(n),k}\cos k\theta\boldsymbol{e}_z\Big).
$$

至此，通过归纳法完成了定理1.3的证明。

致谢。Y. LIU 获得中国国家自然科学基金项目（批准号：12101053）以及中央高校基本科研业务费项目（批准号：310421118）的资助。L. XU 获得中国国家自然科学基金项目（批准号：11671383 和 12171019）的资助。

References

[1] D. Chae 和 J. Lee，《纳维–斯托克斯方程轴对称解的正则性》，*Math. Z.* **239** (2002)，645–671。[2] C.-C. Chen、R. Strain、H.-T. Yau 和 T.-P. Tsai，《轴对称纳维–斯托克斯方程爆破率的下界》。*Int. Math. Res. Not. IMRN* 2008，第9期，文章编号 rnn016，共31页。[3] C.-C. Chen、R. Strain、T.-P. Tsai 和 H.-T. Yau，《轴对称纳维–斯托克斯方程爆破率的下界 II》。*Comm. Partial Differential Equations* **34** (2009)，第1–3期，203–232。

[4] H. Chen、D. Fang 和 T. Zhang, 《
3 *Discrete* D 轴对称纳维–斯托克斯
Contin. Dyn. Syst. **37** 2017 4, 1923 1939
方程的正则性》。( ), 第 – 期。[5] I. Gallagher、D. Iftimie 和 F. Planchon, 《纳维–斯托克斯方程整体解的渐近行为与稳定性》。
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), 第5期, 1387–1424。[6] O. A. Ladyzhenskaja, 《轴对称条件下三维柯西问题的唯一整体可解性》（俄文）
Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat., ( ), –。[7] Z. Lei 和
Inst. Steklov. (LOMI) **7** 1968 155 177
Q. S. Zhang, 《轴对称纳维–斯托克斯方程的临界性》。
Pacific J. Math. ( ), 第 – 期。[8] S.
289 2017 1, 169 187
Leonardi、J. M ´ $\mathbb{R}^3$ *Z. Anal. Anwen-* alek、
dungen **18** 1999 639 649
J. Neˇcas 和 M. Pokorny, 《空间 , 中的轴对称流》, , ( ), –。[9] Y. Liu 和 P. Zhang, 《小旋流分量下三维轴对称纳维-斯托克斯系统的整体适定性》。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** (2018年), 第1期, 论文编号17, 共31页。[10] G. Ponce、R. Racke、T. C. Sideris、E. S. Titi, 《三维纳维–斯托克斯方程大解的整体稳定性》。 *Comm. Math. Phys.* **159** (1994年), 第2期, 329–341。[11] M. R. Ukhovskii 和 V. I. Yudovich, 《充满整个空间的理想流体和黏性流体的轴对称流》,
J. Appl. Math. Mech. **32** (1968年) 52–61。[12] D. Wei, 《轴对称纳维–斯托克斯方程的正则性判据》。
J. Math. Anal. Appl. ( ), 第 – 期。[13] P.
435 2016 1, 402 413
Zhang 和 T. Zhang, 《三维纳维-斯托克斯系统的整体轴对称解》,
Int., , 第 – 期。
Math. Res. Not. IMRN 2014 3, 610 642

（Y.Liu） School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, MOE Beijing Normal University 100875 Beijing , , , China.
Email address: liuyanlin@bnu.edu.cn

（L. XU） School of Mathematical Sciences, Beihang University, 100191 Beijing, China*Email address*: xuliice@buaa.edu.cn